UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PÓS-GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA

"A influência dos suportes de representação na resolução de problemas com estruturas multiplicativas."

Adriana Maria da Silva Barbosa Batista

Orientadora: Drª Alina Galvão Spinillo

Dissertação de Mestrado
Área de concentração: Psicologia Cognitiva

Recife, Abril de 2002.

Orientadora:
Drª Alina Galvão Spinillo

Banca examinadora:

Drª Alina Galvão Spinillo (Presidente)
Drº Jorge Da Rocha Falcão (Examinador interno)
Drª Verônica Gitirana (Examinador externo – UFPE/CE)

Coordenador da pós-graduação:
Maria da Conceição Lyra

“O que acontece em
Matemática é que em vez
de pensar no porquê de
cada coisa, alguns
preferem decorar
regras, que, se
existem, é porque
'alguém' as percebeu”.
(Freitas, 1997)

Agradecimentos

Foram muitos os apoios recebidos neste curso de mestrado, no processo de construção da dissertação, pois venho neste momento agradecer com muito carinho a todos àqueles que contribuíram com muita ou com nenhuma satisfação a finalização do curso.

Aos que em nada contribuíram por que apenas não quiseram, só tenho a dizer o meu muito obrigado, pois o que aprendi neste momento de dificuldades, ninguém vai negar nem tomar este aprendizado como tomaram as poucas e importantes oportunidades que restavam, para que pudesse ser feito um trabalho com muito mais dedicação e prazer.

Neste ambiente educacional sabemos que o que se aprende não se esquece, e como obtive muito sucesso nas lições de vida que este mestrado me ofereceu, nunca vou esquecer o que aprendi, nem nunca vou ser egoísta a ponto de negar aos outros este conhecimento.

Quando ingressei no mestrado em Psicologia Cognitiva pensei que fosse ter diferentes oportunidades de conhecimentos apenas profissionais, mas, com muito mais sucesso, obtive mais conhecimentos pessoais, pois a todo o momento, viver dia após outro neste curso passou a ser um martírio, um sacrifício de vida que apesar de tudo, trouxe muitas lições de vida, lições essas, que nos permitem ver o homem, ser pensante, como um animal, e animal este que tem exatamente a característica de ser racional, e por ser racional sabe exatamente o que faz, ou faz sabendo o que está fazendo. E por este motivo, de lidar com seres racionais e conscientes, tenho a certeza que vão compreender o meu agradecimento, a todo o momento, ao que me ofereceram neste curso para aprender. Pois agradeço as

Instituições financeiras que me concederam bolsa, devido à solicitação da Coordenação do curso de Pós-graduação em Psicologia Cognitiva. As instituições foram meus pais, meus tios, minha irmã, meu cunhado, meu sobrinho, meu namorado e minha avó, que mesmo, às vezes, sem poder financeiramente, estavam ao meu lado me oferecendo nem que fosse força e coragem para suportar todo este sacrifício.

Àqueles que contribuíram, muito obrigada pela falta de fomento financeiro porque só através desta vivência foi que aprendi a acreditar com muito mais vigor no meu potencial, e que consegui minhas primeiras vivências profissionais. Acima de tudo, toda essa ausência de contribuição me trouxe muito amadurecimento e aprendizado pessoal e profissional, por isso, digo com muito orgulho, a essas pessoas, muito obrigado.

Agradeço também, com satisfação e compreensão àquelas pessoas que me ajudaram com prazer, com amizade e por livre e espontânea vontade, demonstrando humanidade, amor a si e ao próximo (sentimento raro neste mundo), estas pessoas são dignas de um abraço fraterno e sincero.

Um grande abraço aos meus pais, Germana e Argemiro Batista, que mesmo antes de eu nascer fizeram uma programação de vida para que hoje tudo isto pudesse um dia acontecer. Desde bem pequena me colocaram para estudar, e mesmo com toda dificuldade financeira permaneci batalhando para que um dia pudesse concretizar os meus sonhos. Cresci, e hoje continuo a cultivar esperanças e sonhos que com satisfação hei de realizar, porque aprendi junto aos meus pais a ser perseverante. A eles um grande abraço carinhoso e meus sinceros votos de agradecimento por toda a grandiosa educação digna que me concederam.

Um grande abraço a minha Irmã, Ana Maria Batista, que sempre soube ser mais do que irmã, é uma grande amiga, companheira e acima de tudo conselheira. Ana, nas horas que precisei sempre pude contar com você, sempre te tive como minha "Psicóloga" e nunca esquecerei da tua eterna presença. Ao seu lado sempre encontrei o seu marido, Adilson Farias, que é um excelente cunhado e também pôde compreender todas as minhas dificuldades, e juntos me deram todas as forças que eu estava precisando em cada momento desta longa caminhada, além de me darem o meu lindo e maravilhoso sobrinho e afilhado, Felipe José, que com apenas 3 anos sobe compreender a minha ausência em suas brincadeiras, além de saber fazer silêncio nas horas que eu estava estudando, e com sua inocência de criança sempre foi momentos de alegria e descontração.

Agradeço também a todos os meus tios e primos, Marcos, Geruza, Gildenize, Gilvanize, Anchieta, Hildiana, Daniela, Luciana, André, Randy, Renata, Saulo, Selma e todos os outros que acompanharam esta caminhada com dedicação em meus estudos, e com compreensão da minha ausência nas reuniões de família, um abraço em cada um de vocês e meus sinceros agradecimentos por me ajudarem a estar vencendo mais esta etapa de minha vida.

Não podia esquecer da minha avó, Ana Batista, pois é uma ternura de pessoa, e com todo o seu doce derrama o seu mel nos momento de amargura, e com seus 80 anos de vida segura com toda a força e coragem qualquer barreira. Obrigada vó por existir sempre presente ao lado de cada um de nós, em qualquer momento de nossas vidas, e que nossa família continue tendo sua pessoa como exemplo de dedicação, coragem e ternura, de sua neta de hoje e sempre.

Com muito carinho também venho a agradecer a meu namorado Leonard Araújo, que soube compreender toda a minha ausência, e que concedeu todo o seu

tempo para me dar forças e me acompanhar nas horas que mais precisava. Leo, sabemos que é preciso de uma boa base de comunhão e respeito para solidificar qualquer relacionamento, acima de tudo, o de amizade, sei que estamos no processo de construção de nossas bases, e que neste momento de nossa formação profissional aprendemos juntos muitas coisas, e que todas elas sempre serão úteis em qualquer momento de nossas vidas. Assim, venho a te agradecer por me dar a sua mão direita para me erguer nos momentos que me sentia fraca e esmaecida e por aceitar a minha mão direita nas suas horas de indecisão. Um forte abraço carinhoso de agradecimento.

Agradeço a minha orientadora Alina Spinillo, que com toda a sua paciência, soube ser muito mais do que uma simples orientadora superando o seu sentimento profissional e agindo em todos os momentos como uma grande amiga, compreendendo tudo que se passava em cada momento, e ajudando sempre da melhor forma que podia. Alina, de tudo que se passou você foi uma grande razão para que eu não desistisse deste curso, pois com tanta dedicação não podia abandonar todo o seu tempo e amizade dedicada na concretização desse trabalho. E acima de tudo acredito termos conquistado uma amizade que está além de qualquer circunstância. Muito obrigada por ter me dado o prazer de ter sido sua orientanda e por ter tido a sua amizade. Um grande abraço a amiga e orientadora Alina Spinillo.

Agradeço a todos os professores, que com tanta dedicação se dispuseram a compartilhar os seus conhecimentos nas horas de nossa formação profissional. Agradeço também a Ivo por sua paciência e dedicação em sua grande ajuda no tratamento estatístico dos dados, as secretárias do curso, a amiga Polyanne Coimbra por termos compartilhado, suportado e vencido juntas os momentos mais difíceis, apesar dos desentendimentos; agradeço a Andréa Siqueira pelo seu grande apoio amigo, a Síntria Lautert e a Valéria Borba por terem contribuído com seus cuidados profissionais na análise dos dados além de terem dado opiniões pertinentes para este estudo. Agradeço a Érica e Vivyanne por termos compartilhado as pressões psicológicas da construção e defesa da nossa dissertação. Agradeço ao apoio amigo de Ângela, Flávia, Rafaela e de todos os outros que não podem ser todos citados aqui.

Agradeço também a escola que concedeu o seu espaço e os seus alunos para que os dados dessa pesquisa pudessem ser coletados, aos professores que tiveram paciência de serem interrompidos em suas aulas, à coordenação e a todos os funcionários que me receberam com amizade e compreensão.

Enfim, sabemos que este momento não é a finalização da nossa caminhada profissional, mas apenas de um curso, o que abre o caminho para uma longa caminhada, pois a estrada da ciência é eterna e leva a sensibilidade de estarmos sempre em busca de novas descobertas, novos conhecimentos, cada um com seus objetivos em suas determinadas áreas, porque o homem é um poço de curiosidade e de necessidade de novos conhecimentos, por ter sempre a certeza de poder dizer, como Sócrates dizia há séculos, “Só sei que nada sei”, a afirmação de grande poder científico para se continuar pesquisando, descobrindo.

Resumo

Conforme visto na literatura, há pesquisas que examinam as estratégias e representações das crianças ao resolver problemas e operações de adição, subtração ou divisão, com o uso de suportes de representação distintos, sem no entanto analisar a influência que os diferentes suportes de representação podem desempenhar na resolução de problemas com estruturas multiplicativas. Entretanto, merece ser investigado (a) se e como diferentes suportes de representação influenciam na compreensão de crianças e na forma como resolvem diferentes problemas matemáticos inseridos no campo conceitual das estruturas multiplicativas; (b) se um tipo de suporte de representação desempenha papel importante no processo de resolução e como se caracteriza este papel; (c) se o efeito, se encontrado, se expressa apenas em relação ao desempenho (número de respostas corretas) ou também em relação às estratégias de resolução adotadas; (d) se o efeito do suporte de representação depende do tipo de problema e/ou do tipo de operação. Com o objetivo de examinar tais aspectos 60 crianças da 2ª série (8 anos) foram solicitadas a resolver problemas de isomorfismo e de combinatória (ambos de multiplicação e divisão). As crianças foram divididas igualmente em três grupos em função do suporte de representação utilizado: grupo 1: lápis e papel; grupo 2: material concreto neutro (fichas) e; grupo 3: material concreto definido (objetos). As resoluções das crianças foram analisadas em função do desempenho e das estratégias adotadas em relação ao suporte de representação utilizado. Comparações entre os suportes de representação, entre os tipos de problemas e os tipos de operações foram feitas, e os resultados são assim resumidos: (a) *o desempenho:* foram melhores os grupos que tinham como suporte de representação materiais concretos, em especial quando usava objetos, do que quando o suporte era lápis e papel. Em relação ao tipo de problema, o padrão de resultados foi o mesmo nos três grupos de crianças: os problemas de isomorfismo foram mais fáceis do que os problemas de combinatória. Em relação ao tipo de operação empregada, o padrão de resultados foi o mesmo nos três grupos de crianças: o desempenho era o mesmo quer em problemas de divisão quer em problemas de multiplicação. A única diferença entre os grupos foi que as crianças que resolveram os problemas através de fichas tiveram mais acertos nos problemas de isomorfismo que requeriam a multiplicação do que nos problemas que requeriam a divisão; (b) *as estratégias:* as estratégias adotadas nos problemas de isomorfismo não são as mesmas adotadas nos problemas de combinatória. Independente do suporte de representação as estratégias adotadas em cada problema foram do mesmo tipo, variando apenas a freqüência de uso de cada uma delas. As estratégias inadequadas com perda de significado foram mais freqüentes com o suporte lápis e papel, em ambos os tipos de problemas. De modo geral e em cada suporte de representação nos problemas de isomorfismo as estratégias adotadas variam quanto ao tipo de operação. Em ambos os problemas há estratégias que sempre levam ao erro, assim como há estratégias que sempre levam ao acerto. As estratégias que levam ao acerto variam quanto ao suporte de representação adotado nos problemas de isomorfismo. A partir desses resultados, pode-se dizer que os suportes de representação adotados influenciam diferentemente na resolução de problemas com estruturas multiplicativas, tendo o material concreto definido (objetos) levado a um melhor desempenho do que os outros suportes nos problemas de isomorfismo.

Abstract

As it has been seen in the literature, there are researches that examine the strategies and representations of the children when they are solving problems and operations of addition, subtraction or division, using different supports of representation, however without analyze the influence that the different supports of representation can carry out in the resolution of problems with multiplication structures. However it deserves to be investigated (a) If and how different supports of representation may influence the children's understanding and in the way how they solve different mathematical problems inserted in the conceptual field of the multiplications structures. (b) If a type of support of representation plays important role in the resolution process and as this role is characterized; (c) if the effect, if found, it is just expressed in relation to the acting (number of correct answers) or also in relation to the resolution strategies adopted; (d) if the effect of the support of representation depends on the type of problem and/or on the type of operation. With the objective of examining these aspects 60 children of the 2nd grade (8 years old) were requested to solve isomorfics problems and combination (both of multiplication and division). The children were divided equally in three groups according to the support of representation : Group 1 - pencil and paper, Group 2 - neutral concrete material and Group 3 - defined concrete material (objects). The children's resolutions were analyzed in function of the performance and of the strategies adopted in relation to the used support of representation. Comparisons among the supports of representation, among the types of problems and among the types of operations were made, and follow the summarized results: (a) *the performance:* they were better the groups that had as support of representation concrete materials, especially when they used objects, instead of pencil and paper. In relation to the type of the problem, the results were the same in the three groups of children: the isomorfics problems were easier than the combination problems. In relation to the type of operation the results were the same in the three groups of children: the performance was the same either in division problems or in multiplication problems. The unique difference among the groups was that the children that solved the problems through neutral concrete materials had more successes in the isomorfics problems that it requested multiplications than in the problems that requested divisions; (b) *the strategies:* the strategies adopted in the isomorfics problems they are not the same ones adopted in the combination problems. Independent of the support of representation each problem had the same type of adopted strategies, just varying the frequency of use for each strategy. The inadequate strategies with loss of meaning were more frequent with the support pencil and paper, in both problems. In general and in each support of representation the adopted strategies vary according to the type of operation in the isomorfics problems. In both problems there are strategies that always take to mistake, as well as there are strategies that always take to the success. The strategies that take to the success vary according to the adopted support of representation in the isomorfics problems. From these results, it can be said that the adopted support of representation influence differently in the resolution of problems with multiplications structures and the defined concrete material (objects) had better performance than the other materials in the isomorfics problems.

Apresentação

O presente estudo investigou a influência que os suportes de representação podem exercer na resolução de problemas com estruturas multiplicativas. Através de entrevistas individuais com as crianças, três situações diferentes, variando quanto aos suportes de representação utilizados (lápis e papel, material concreto neutro e material concreto definido) foram investigadas. Os problemas matemáticos apresentados variaram quanto ao tipo (isomorfismo e combinatória) e quanto à operação requerida para sua resolução (multiplicação e divisão). 60 crianças da 2ª série (8 anos) foram solicitadas a resolver os problemas matemáticos. As crianças foram divididas igualmente em três grupos em função do suporte de representação utilizado: grupo 1: lápis e papel; grupo 2: material concreto neutro (fichas) e; grupo 3: material concreto definido (objetos).

O Capítulo I apresenta as considerações teóricas acerca dos conceitos matemáticos de maneira geral; acerca do campo conceitual das estruturas multiplicativas; e acerca dos suportes de representação e a resolução de problemas.

O Capítulo II apresenta o estudo realizado, procurando descrever em detalhes seus objetivos, procedimentos e o planejamento experimental adotado.

O Capítulo III apresenta o sistema de análise das estratégias adotadas pelas crianças ao resolverem os problemas. Essas estratégias tomaram por base os resultados de estudos anteriores na área.

No Capítulo IV são apresentados os resultados relativos ao desempenho das crianças quando resolvem os problemas de isomorfismo e de combinatória de modo geral e, em específico, quando resolvem os problemas usando diferentes suportes de representação.

No Capítulo V são apresentados os resultados relativos às estratégias de resolução adotadas em cada tipo de problema e em cada suporte de representação. Ainda neste capítulo, procede-se a um exame das relações entre desempenho e estratégias adotadas.

No Capítulo VI apresenta-se as conclusões derivadas dos resultados encontrados, as implicações deste estudo e as futuras pesquisas que poderão ser desenvolvidas para melhor esclarecer aspectos que não foram contemplados nesta investigação.

Índice

Reprodução de protocolos

Índice de Figuras

Gráficos

Índice de quadros

Índice de tabelas

Capítulo I.

Considerações teóricas

As considerações teóricas que fundamentam o presente estudo serão apresentadas em quatro seções. Na primeira, são tratados os conceitos matemáticos a partir da perspectiva teórica de Vergnaud sobre campos conceituais. Na segunda seção, procura-se caracterizar as estruturas multiplicativas, tecendo-se considerações a respeito dos diferentes tipos de problemas e situações que envolvem, especificamente a divisão e a multiplicação. A terceira seção versa sobre os suportes de representação e seu papel na resolução de problemas. Na quarta e última seção, são apresentados resultados de pesquisas conduzidas com crianças, pesquisas estas envolvendo a resolução de problemas relativos às estruturas multiplicativas.

1.1 Os conceitos matemáticos

1.1.1. A natureza dos conceitos matemáticos

Vergnaud (1997) inicia seu capítulo acerca da natureza dos conceitos matemáticos, afirmando que uma compreensão psicológica de tais conceitos requer entender que os conceitos progressivamente são formados a partir de diferentes tipos de situações e competências e a partir de diferentes tipos de representações (lingüísticas e simbólicas). De maneira semelhante, Lautert & Spinillo (1999) comentam que a compreensão de um conceito matemático envolve diversos aspectos, tais como o uso de estratégias e procedimentos de resolução apropriados e o uso de representações diversas relacionadas ao conhecimento sobre número, quantidades e algoritmos.

Vergnaud (e.g.; 1986; 1988; 1997) em sua teoria de campos conceituais, considera que a construção de um conceito envolve muito mais do que uma definição ou descrição de suas propriedades, pois requer estabelecer inter-relações entre outros conceitos e inter-relações entre três instâncias que o constituem:

- **as situações (S):** que fornecem um sentido funcional a um conceito específico, tornando-o significativo;

- **os invariantes operatórios (I)**: que se referem às propriedades essenciais a um dado conceito as quais são conservadas apesar das transformações ocorridas e das diferentes situações em que o conceito emerge; e

- **as representações (R):** que permitem representar os invariantes, as situações e os procedimentos de resolução adotados em uma dada situação.

Essas instâncias constituem o tripé dos conceitos matemáticos, mostrando que "a operacionalidade de um conceito deve ser provada através de situações variadas" e que "cada conceito comporta várias propriedades, cuja pertinência é variável de acordo com as situações", sendo necessário considerar "um conceito como um conjunto de invariantes utilizáveis na ação" (Vergnaud, 1993, p.8).

Desta forma, é coerente pensar que um conceito não está atrelado a uma única situação e nem pode ser amplamente contemplado em uma única situação; isto é, uma situação pode não envolver todas as propriedades de um conceito. Além disso, em uma mesma situação podem estar envolvidos diversos conceitos. Nesta perspectiva, a relação entre situação e conceito é complexa. Esta idéia forma a base da teoria dos campos conceituais, idéia esta compartilhada por diversos pesquisadores (e.g., Spinillo, 2001; Nunes, 1997; Bryant, 1999).

A partir dessa perspectiva, entende-se que os conceitos só são plenamente compreendidos quando a criança tem a oportunidade de realizar atividades de resolução de problemas diversificadas, que envolvessem as diversas propriedades de um mesmo conceito. Segundo Vergnaud (1991), problema é "qualquer situação em que é necessário descobrir relações, desenvolver atividades de exploração, hipótese e verificação, para produzir uma solução" (p.76).

A situação em que o problema se insere influi na forma como o indivíduo interpreta e representa o problema, e nas estratégias que adota para resolvê-lo (Carraher, Carraher & Schliemann, 1988; Vergnaud, 1990, 1993; Nunes, 1994). Assim, problemas matemáticos, mesmo quando envolvendo um mesmo conceito, assumem características e níveis de dificuldades distintos, dependendo da situação em que são apresentados; dos suportes de representação oferecidos; do tipo de problema; das relações entre as quantidades apresentadas, dentre outros fatores. Essas características, como mencionado, vão determinar as estratégias adotadas.

No que diz respeito às representações, Nunes (1994), por exemplo, afirma que a representação de uma "situação pode determinar o tipo de esquema que desenvolvemos na análise de uma situação-problema" (p.24), ao passo que esses sistemas de representação também estruturam os processos de raciocínio. Segundo Da Rocha Falcão (1996), crianças com um mesmo nível de desenvolvimento cognitivo podem apresentar uma variedade de procedimentos diante de um mesmo problema, em função do contexto em que o problema é apresentado, das representações simbólicas (ou suportes de representação) escolhidas para a apresentação do problema (números, gráficos, desenhos, símbolos etc.), das representações mentais disponíveis pelas crianças (esquemas) e das orientações fornecidas para realizar a tarefa. Nessa perspectiva, o uso de diferentes suportes de representação para resolver um problema, faz parte da situação em que o conceito está envolvido. Esses suportes fazem parte da situação, interferindo na forma como o indivíduo representa e resolve as operações e problemas aritméticos.

Diante disso, as relações entre o conceito e a situação são o que vem definir campo conceitual como sendo "um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão" (Vergnaud, 1986, p.84). Entretanto, antes de abordar os campos conceituais, é importante discutir os conceitos à luz dos teoremas-em-ação, construto teórico importante para uma compreensão dos conceitos em uma perspectiva de desenvolvimento.

1.1. 2. Os teoremas-em-ação

Carraher, Carraher & Schliemann (1988) mostram, em seus estudos, que na vida diária as crianças usam conceitos matemáticos independentemente de terem sido instruídas formalmente, o que as fazem desenvolver técnicas próprias de resolução sem ter consciência de cada apropriação. Este pode ser um exemplo do que Vergnaud denomina teoremas-em-ação.

Teoremas-em-ação vêm a ser as competências que os indivíduos têm ao resolver problemas em algumas situações, competências essas, entretanto, que carecem de uma explicitação e sistematização do conhecimento que é utilizado, por não dispor de proposições conceituais para explicitá-las (Vergnaud, 1988). Os teoremas-em-ação são definidos como relações matemáticas levadas em consideração ao escolher uma operação, ou uma seqüência de operações, para resolver um problema. Não são conhecimentos explícitos, pois eles estão envolvidos no comportamento das crianças e aparecem nas suas ações, além disso, eles são restritos a um conjunto de situações, podendo ser utilizados de modo inadequado em outras situações.

No exemplo a seguir, analisado por Magina, Campos, Nunes & Gitirana (2001, p.15-16), pode-se ver como uma criança desenvolve diferentes estratégias ao resolver um mesmo problema matemático em diferentes situações.

"Como uma criança calcula a quantidade total de bolas de gude dela e de seu irmão?"

De início, ela aceita juntar as duas coleções e contar o total de elementos para saber a quantidade total de objetos. Mas, numa situação cotidiana, a criança não vai permitir que suas bolas de gude sejam agrupadas com as bolas de gude de seu irmão, o que a leva a desenvolver uma outra estratégia: seu irmão conta as suas bolas de gude e ela parte da quantidade finalizada para contar a sua coleção e descobrir a quantidade total. Assim, temos duas estratégias diferentes para realizar a contagem. Mas elas ainda não podem resolver todos os problemas da realidade, porque se for pedido para contar quantas cadeiras há na escola, elas não são suficientemente adequadas, pois, juntar todas as cadeiras num só lugar para contar uma a uma, não será viável, e não é prático que a criança saia contando as cadeiras de sala em sala, partindo da quantidade que termina de cada sala. Ela pode pedir a um colega de cada sala para contar as cadeiras de sua sala e depois recolher as quantidades obtidas para depois realizar uma soma e descobrir o total de cadeiras. Desenvolvendo uma terceira estratégia para resolver o problema.

Como se pode observar, as ações desenvolvidas pela criança para resolver cada um dos problemas são limitadas e intuitivas, sendo preciso estender a situações mais complexas, para que possam ser explicitadas, ao nível de conceito (todos os problemas podiam ser resolvidos por uma adição das quantidades de cada conjunto). Os Teoremas-em-ação não são conceitos, pelo fato de não estarem explícitas as relações matemáticas envolvidas nas situações-problema.

A explicitação dos conceitos é apenas a parte visível da conceitualização porque o conceito comporta várias propriedades. As invariantes dos conceitos podem estar implícitas e/ou explícitas nas ações dos sujeitos. Nos teoremas-em-ação as invariantes dos conceitos encontram-se implícitas. Caso não se considere os teoremas-em-ação (invariantes implícitas) como parte integrante dos conceitos a explicitação das invariantes (as representações) nada seria. É isso que leva a considerar o conceito como um conjunto que envolve a situação, as invariantes operatórias e as representações.

Observar os teoremas-em-ação é interessante para quem quer estudar as estratégias, pois segundo Magina, Campos, Nunes & Gitirana (2001), "a formação do conceito pela criança pode ser observada por meio de suas estratégias de ação ao resolver um problema, isto é, pelos invariantes que a criança reconhece na situação (muitas vezes implícitos, como no caso dos teoremas-em-ação) (p.20)". A expressão dos teoremas-em-ação pode ser dada através da linguagem verbal, do uso de símbolos, materiais concretos, de diagramas, tabelas etc.

1.1. 3. Os campos conceituais

Os conceitos estão inseridos em campos conceituais. Esses campos podem ser definidos como um conjunto de situações que para serem apropriadas, o indivíduo precisa dominar vários conceitos. Estes se desenvolvem gradativamente dentro de um longo período de tempo e por meio da experiência (Vergnaud, 1982; 1986; 1988).

Vergnaud (1991) propõe dois importantes campos conceituais: o das estruturas aditivas e o das estruturas multiplicativas.

O campo conceitual das estruturas aditivas, é constituído de um conjunto de situações que envolvem a adição, a subtração, ou uma combinação destas operações, e do conjunto de conceitos e teoremas que facilitam a análise dessas situações matemáticas. Compõem as estruturas aditivas os conceitos de medida, de cardinal, de transformação por aumento ou diminuição (subtraindo ou adicionando), de relação de comparação, de combinação de medida, e outras. A complexidade de resolução de diferentes problemas compreendendo as estruturas aditivas decorre do envolvimento das diferentes relações envolvidas no conceito, dos números envolvidos nos problemas etc.

O campo conceitual das estruturas multiplicativas é formado por um conjunto de situações que envolvem a divisão, a multiplicação ou a combinação destas operações; é através do conjunto de conceitos que se torna possível analisar essas situações: proporções simples e múltiplas, função linear e n-linear, quociente e produto de dimensões, combinação, fração, número racional, entre outros.

É comum pensar na adição como sendo a base (início) para a compreensão da multiplicação, mas a relação que existe entre a multiplicação e a adição não é conceitual, mas está centrada no processo de cálculo da multiplicação: o cálculo da multiplicação pode ser feito através da adição repetida porque a multiplicação é distributiva em relação à adição.

No entanto, o raciocínio aditivo está sempre baseado na relação parte-todo e se refere a situações nas quais os objetos são reunidos ou separados, e estão ligadas a três esquemas de ação: juntar, separar e colocar em correspondência um-a-um; situações que envolvem o raciocínio multiplicativo são diferentes por não envolverem ações de unir e separar, mas envolvem uma relação constante entre as duas variáveis envolvidas no problema e estão ligadas a três esquemas de ação: A correspondência um-para-muitos – estratégia aplicada na resolução de problemas de multiplicação; o esquema da distribuição eqüitativa – estratégia mais relacionada aos problemas de divisão; e a coordenação entre os esquemas de correspondência e de distribuição eqüitativa – estratégia mais complexa para resolver problemas de divisão e multiplicação onde problemas formulados, por exemplo, como uma situação de multiplicação, e com um dos fatores ausentes, os alunos não percebem a possibilidade de usar a estratégia de distribuição para resolver o problema (Nunes e Bryant, 1997; Nunes, Campos, Magina & Bryant, 2001; Nunes, 1997).

As estruturas multiplicativas serão caracterizadas a seguir, em maiores detalhes, quando serão apresentados os conceitos nelas envolvidos e os diferentes tipos de problemas.

1.2. O Campo Conceitual das estruturas multiplicativas e os problemas típicos deste campo

As estruturas multiplicativas constituem um campo conceitual que envolve a formação de conceitos numa variedade de situações e problemas que requerem o uso da multiplicação ou da divisão ou da combinação de ambas. Neste sentido, o campo conceitual das estruturas multiplicativas não se restringe apenas aos conceitos de multiplicação e divisão, mas envolve outros conceitos como fração, razão, proporção, probabilidade, função, combinatória, volume etc. Esses conceitos se expressam através de diferentes situações-problema que variam quanto ao grau de complexidade que apresentam. Considerando as estruturas multiplicativas como um *set* de problemas, Vergnaud (1983, 1991) identificou três grandes classes de problemas que envolvem relações ternárias e quaternárias: isomorfismo de medidas, produto de medidas e proporções múltiplas. E essas classes se subdividem em outras subclasses de problemas.

1.2.1. Isomorfismo de medidas

Os problemas de isomorfismo de medidas envolvem uma relação quaternária entre quatro quantidades, onde duas quantidades são medidas de um tipo e as outras duas são medidas de outro tipo (a x b = c x d), envolvendo uma proporção direta simples entre esses dois espaços de medidas. Inseridos nesta classe encontram-se quatro subclasses de problemas: multiplicação, divisão partitiva, divisão por quotas e regra de três (Vergnaud, 1983, 1991).

A primeira subclasse de problemas – *a multiplicação*, envolve quatro medidas, das quais as crianças têm que extrair a relação dos três termos presentes para encontrar o quarto termo que falta. No entanto, para resolver um problema de multiplicação, por fazer parte de uma relação quaternária, tem-se que fazer uma relação entre os quatro termos. Esses termos podem ser extraídos por uma lei de composição binária ou por uma operação unária, dependendo do tipo de relação envolvida no problema. Cada um desses métodos implica em diferentes estratégias de resolução do problema.

A lei de composição binária só pode ser efetuada se a combinação dos valores conhecidos for vista como números e não como magnitudes. Porque se vistos como magnitudes e multiplicarmos 4 bombons por 12 centavos, por exemplo, não ficará claro o porquê da resposta ser dada em centavos e não em bombons. O problema e o esquema abaixo ilustram estas relações (vergnaud, 1983):

Maria quer comprar 4 bombons. Cada bombom custa 12 centavos. Quanto Maria vai pagar pelos 4 bombons?

$$\begin{array}{c|c} C & D \\ 1 & a \\ b & x \end{array}$$

Onde, a = 12; b = 4; C = número de bombons; D = Custo

A operação unária acontece, exatamente, quando as crianças ainda não compreendem a lei de composição binária, que pode ser efetuada por um operador escalar ou por um operador função. O operador escalar consiste em encontrar a solução a partir das relações numéricas no interior de uma mesma variável, onde cada variável permanece independente da outra e realizam-se transformações paralelas em cada uma delas e se mantém a relação proporcional (Schliemann & Carraher, 1993),

Maria quer comprar 4 bombons. Cada bombom custa 12 centavos. Quanto Maria vai pagar pelos 4 bombons?

$$\begin{array}{cc|cc} & C & D & \\ & 1 & a & \\ \times b \downarrow & & & \downarrow \times b \\ & b & x & \end{array}$$

Onde, a = 12; b = 4; C = número de bombons; D = Custo; xb = operador escalar.

Resolver um problema através do operador função, consiste em relacionar as duas variáveis e encontrar a razão que liga as duas variáveis e em utilizá-la para resolver o problema (Schliemann & Carraher, 1993),

Maria quer comprar 4 bombons. Cada bombom custa 12 centavos. Quanto Maria vai pagar pelos 4 bombons?

$$\begin{array}{c|c} C & D \\ 1 \xrightarrow{x\,a} & a \\ b \xrightarrow{x\,a} & x \end{array}$$

Onde, a = 12; b = 4; C = número de bombons; D = Custo; xa = operador função.

Assim, as crianças operam sabendo o porquê da resposta ter sido dada em centavos e não em bombons. A operação unária deixa claro para a criança, que ainda não está compreendendo as relações das estruturas multiplicativas, o porque das respostas serem dadas em uma das medidas e não na outra medida envolvida nos problemas de relação quaternária (Vergnaud, 1983).

A segunda subclasse de problemas – *divisão partitiva*, envolve um operador escalar (/b). Mas a inversão do pensamento da criança de xb para /b é de extrema dificuldade, onde a criança prefere encontrar o valor ausente através de xb pelo procedimento de tentativa-e-erro.

João tem 12 carrinhos e quer distribuir seus carros com 4 colegas. Quantos carrinhos ele vai dar a cada colega?

$$\begin{array}{c|c} C & D \\ & \\ & \end{array}$$

$$/b \left\uparrow \begin{array}{c} 1 \\ b \end{array} \right. \qquad\qquad \left. \begin{array}{c} x \\ a \end{array} \right\uparrow /b$$

Onde, a = 12; b = 4; C = número de colegas; D = carrinhos; /b = operador escalar.

Um outro procedimento adotado pelas crianças na divisão das quantidades, é a distribuição unitária dos objetos entre os participantes, ou imaginando estarem em diferentes lugares. Mas este procedimento não tem característica multiplicativa (Vergnaud, 1983).

A terceira subclasse de problemas – *divisão por quotas*, envolve uma inversão direta do operador função, aplicado em *b.*

Carla tem 12 doces e quer colocar 4 doces em cada bandeja. De quantas bandejas Carla vai precisar?

$$\begin{array}{c|c} C & D \\ 1 \xleftarrow{/a} & a \\ x \xleftarrow{/a} & b \end{array}$$

Onde, a = 4; b = 12; C = número de bandejas; D = doces; /a = operador função.

Esse procedimento é muito difícil para a criança, não só porque envolve a inversão do problema, mas também porque envolve a inversão do operador função (Vergnaud, 1983).

As crianças também podem resolver este tipo de problema através do procedimento da adição repetida a + a + a ..... até chegar em *b* , depois contam o número de vezes que somaram o *a* .

A quarta subclasse de problemas – *a regra de três*, é a subclasse em que se concentra as maiores dificuldades das crianças. Apesar de conter apenas duas variáveis (característica dos problemas do tipo isomorfismo), esse tipo de problema não tem um dos seus valores igual a *um*, como nos problemas das subclasses analisadas anteriormente,

Diariamente, cada 4 crianças consomem 12 litros de leite. Se tivermos 6 crianças, quanto elas irão consumir de leite diariamente?

$$\begin{array}{c|c} D & E \\ a & b \\ c & x \end{array}$$

Onde, a = 4; b = 12; c = 6; D = Número de crianças; E = Leite.

O que diferencia a estrutura de isomorfismo de medidas das estruturas de produto de medidas e das proporções múltiplas é que o isomorfismo de medidas envolve apenas duas variáveis e podem ser modeladas por uma função linear, enquanto que os problemas de produto de medidas e de proporções múltiplas envolvem três ou mais variáveis e são modeladas por uma função n-linear ou bilinear. Esses dois últimos tipos de problema envolvem uma relação ternária, enquanto o isomorfismo de medidas, como foi visto, envolve uma relação quaternária.

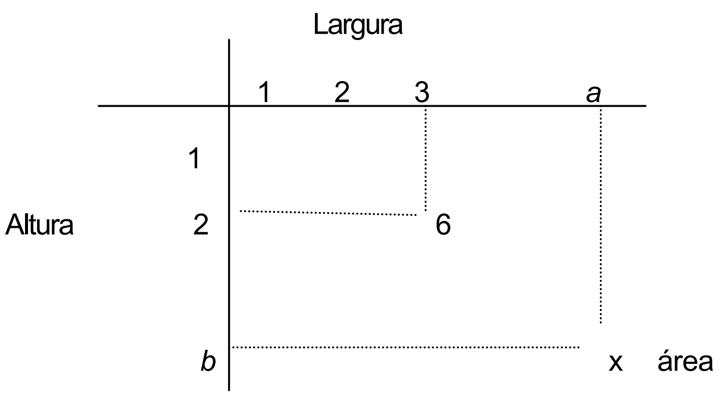
As relações quaternárias envolvem problemas do tipo isomorfismo de medidas que apesar de variarem quanto ao seu grau de dificuldade podem ser representados por esquemas semelhantes: não é outra coisa senão a tabela de correspondência entre os dois tipos de quantidades. Esses problemas podem ser resolvidos por uma multiplicação, por uma divisão ou por uma regra de três.

As relações ternárias envolvem problemas do tipo produto de medidas e proporções múltiplas, e geralmente são representadas pelo quadro cartesiano[1], uma vez que o produto cartesiano de conjuntos explica o produto de medidas.

1.2.2. Produto de Medidas

Diferente dos problemas do tipo isomorfismo de medidas, que envolvem uma relação quaternária (entre quatro variáveis), os problemas de produto de medidas envolvem uma relação ternária (entre três variáveis). A relação ternária consiste numa relação de três quantidades, das quais uma quantidade é o produto das outras duas, tanto no plano numérico quanto no plano dimensional. O produto de medidas é uma estrutura que consiste na composição cartesiana de duas medidas para encontrar a terceira medida, como ocorre em problemas que envolvem volume, área e combinatória.

Este tipo de problema é representado por uma dupla tabela de correspondência, como o cálculo da área de um retângulo, por exemplo.

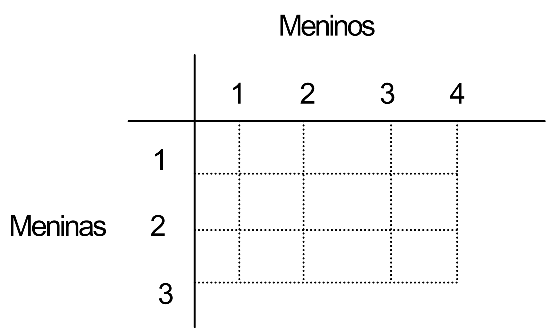


[1]O quadro cartesiano consiste em associar um elemento do primeiro conjunto a um elemento do segundo conjunto, até que todos elementos do primeiro conjunto sejam associados a todos os elementos do segundo conjunto.

No caso do produto de medidas, há uma forma canônica de resolver o problema, onde, neste exemplo acima, 1 unidade da altura X 1 unidade da largura = 1 unidade da área. Esta fórmula mostra que para se chegar ao resultado multiplica-se valores de unidades elementares. Esta estrutura aritmética é muito difícil para as crianças.

Em problemas que envolvem a multiplicação, são dadas as medidas elementares e tem-se que encontrar o produto das medidas.

Numa festa há 4 meninos e 3 meninas. Cada menina quer dançar com cada menino e cada menino quer dançar com cada menina. Quantos pares diferentes de meninas e meninos podem ser formados?



Esta solução a x b = x, não é fácil analisar sob a forma de operador função e operador escalar porque envolve duas medidas ambas no aspecto numérico (operador escalar) e dimensional (operador função), enquanto que no caso do isomorfismo de medidas pode-se analisar ou com o operador escalar ou com o operador função, porque ora tem-se medidas no aspecto numérico, ora no aspecto dimensional. Este aspecto é o que difere estes dois tipos de problema, pois os problemas do tipo produto de medidas envolvem duas medidas diferentes para encontrar a terceira medida diferente das duas primeiras[2].

Nos problemas que envolvem a divisão, é dado o valor do produto das medias e o valor de uma das medidas elementares e tem-se que encontrar o valor da outra medida elementar.

Combinando as blusas e as saias de cores diferentes, Marta pode fazer 12 conjuntos diferentes, ela tem 4 saias. Quantas blusas Marta tem?

		Blusas
		x
Saias		
	4	12 conjuntos

Este tipo de operação envolve uma relação multiplicativa complexa de difícil compreensão por crianças pequenas, diferentemente das estruturas envolvidas nos problemas de isomorfismo de medidas, que se caracterizam como problemas mais fáceis do que os problemas de produto de medidas (Vergnaud 1983).

1.2.3. Proporções Múltiplas

Geralmente os problemas de proporções múltiplas são confundidos com os problemas de produto de medidas, pois ambos envolvem duas medidas e buscam encontrar a terceira medida (envolvem uma relação ternária), só que os problemas de proporções múltiplas envolvem a relação intrínseca dos significados e não podem ser resolvidos apenas com o produto das outras duas medidas, como acorre nos

[2] No caso do exemplo das meninas e dos meninos, temos o conjunto das meninas e o conjunto dos meninos e a combinação destas duas medidas resulta na terceira medida diferente das duas primeiras (pares de meninas e meninos).

problemas do tipo produto de medidas, como pode ser percebido no problema "Uma família com 4 pessoas quer passar 12 dias viajando. O custo dessa viagem por pessoa é de 36 reais por dia. Quanto essa família gastará com essa viagem?" que se caracteriza como sendo de proporções múltiplas. Problemas como esses (assim como os problemas de produto de medidas) envolvem um modelo de função bilinear, ao contrário dos problemas de isomorfismo de medidas que podem envolver um modelo de função linear.

Essas três classes de problemas, consideradas por Vergnaud (1983), se diferenciam na medida que os problemas de isomorfismo podem ser resolvidos ora por um operador escalar ora por um operador função, porque ora tem-se medidas no plano numérico ora no plano dimensional, se tornando mais fácil para a criança compreender que resposta encontrou no problema. Enquanto os problemas do tipo produto de medidas não são fáceis analisar sob a forma de operador escalar ou operador função, porque ambas as medidas (presentes no problema) se encontram no aspecto numérico (operador escalar) e dimensional (operador função), envolvendo duas medidas diferentes e tendo que encontrar uma terceira medida diferente das outras duas. Deste modo, os problemas de produto de medidas são mais complexos do que os problemas de isomorfismo de medidas.

Os problemas de proporções múltiplas além de ter que lidar com as medidas tanto no plano numérico como no plano dimensional, ainda envolvem uma relação intrínseca dos significados, tornando-se mais complexos do que os problemas de produto de medidas. Assim, os problemas de isomorfismo são os que envolvem relações mais fáceis de serem compreendidas, em relação aos problemas do tipo produto de medidas e proporções múltiplas, sendo este último tipo de problema o mais complexo dos três tipos de problemas, e de não compreensão para as crianças de 9-10 anos.

Como mencionado, os problemas inseridos no campo conceitual das estruturas multiplicativas podem ser resolvidos através da multiplicação, da divisão ou de uma combinação de ambas. Entretanto, não é a aplicação de uma ou de outra operação que, necessariamente determina o grau de dificuldade do problema, mas, sobretudo, o tipo de problema caracterizado por sua estrutura. Assim, existem vários tipos de problemas envolvendo a multiplicação e a divisão com diferentes graus de complexidade, como ilustrado no Quadro 1, em que constam problemas do tipo isomorfismo e do tipo produto de medidas, problemas esses, tratados no presente estudo que será descrito nos capítulos que se seguem.

Além do tipo de operação a ser adotada durante a resolução de um problema e da estrutura do problema (subclasse), é preciso, ainda, considerar a situação na qual o problema está inserido. O termo *situação* pode ser entendido de inúmeras formas. No entanto, uma em particular, é de interesse no presente estudo. Situação será aqui tomada como diretamente relacionada aos suportes de representação que são oferecidos à criança no momento de resolução do problema. Os suportes de representação oferecidos podem ser entendidos como ferramentas que não apenas auxiliam a criança a expressar suas formas de raciocinar, mas que também as influenciam. Neste sentido, interessa examinar o papel desempenhado por esses suportes na resolução de problemas típicos das estruturas multiplicativas, problemas esses que podem envolver graus de dificuldades distintos.

Quadro 1: Tipos de problemas[3] e grau de dificuldade.

	Fácil	**Difícil**
Multiplicação	**Isomorfismo** “Tenho 3 pacotes de iogurtes. Existem 4 iogurtes em cada pacote. Quantos iogurtes tenho?”	**Produto de medidas** “3 rapazes e 4 moças querem dançar. Cada rapaz quer dançar com cada moça e cada moça quer dançar com cada rapaz. Quantos pares podem ser formados?”
Divisão	**Isomorfismo partição** “Paguei R$ 12,00 por 3 garrafas de vinho. Quanto custa uma garrafa?”	**Produto de medidas** “Combinando as blusas e as saias, Ana pode fazer 15 combinações diferentes. Ela tem 3 blusas. Quantas saias ela tem?”
		Isomorfismo quotição “Pedro tem R$ 12,00 reais e quer comprar alguns pacotes de caramelos que custam R$ 4,00 cada pacote. Quantos pacotes ele pode comprar?”

1.3. Os suportes de representação e a resolução de problemas

Antes de iniciar uma discussão sobre os suportes de representação, torna-se importante uma reflexão a respeito das relações entre representação e conhecimento. Estas relações são entendidas de maneiras distintas por diferentes estudiosos, como brevemente comentado a seguir, tomando-se para discussão apenas algumas dessas interpretações.

[3] Estes problemas foram retirados da obra de Vergnaud (1991, p. 197-211)

1.3.1. As relações entre representação e conhecimento

Para Piaget (1976; 1978), representar é um processo dinâmico que envolve abstrair e (re)construir mentalmente a imagem fornecida pelo meio físico, assimilando-a e acomodando-a aos esquemas cognitivos internos, ativando a reestruturação de novos esquemas e a construção de novos conhecimentos. As representações seriam o resultado de uma progressão geral mais ampla relacionada às capacidades lógicas típicas de cada estágio do desenvolvimento. Segundo ele, a capacidade de representar tem seus precursores na aquisição do esquema de objeto permanente (período sensório-motor), quando a criança se depararia com a primeira instância de representação: o objeto continua existindo mesmo na sua ausência. De modo geral, na teoria piagetiana, a representação estaria relacionada ao desenvolvimento dos esquemas, e sua relação com o conhecimento seria mais no sentido de ser uma expressão deste do que algo que o constituísse.

Outros estudiosos assumem posições distintas. Meira (1993; 1995), por exemplo, atribui um caráter situado às relações entre representação e conhecimento, considerando a representação elemento constitutivo do raciocínio e não uma expressão deste, como afirmado por Piaget. Tomando para análise as representações matemáticas, Meira afirma que estas são construídas no decorrer da atividade e do processo de resolução de problemas. Neste sentido, não faz distinção entre representação interna e externa, mas privilegia as situações em que os indivíduos estão inseridos como sendo algo essencial na criação de representações diversas.

Há estudiosos, ainda, como comentado por Lautert & Spinillo (1999) cujas posições a respeito das relações entre representação e conhecimento procuram privilegiar tanto as capacidades lógicas do indivíduo como as situações de uso e produção (e.g.; Vergnaud, 1983, 1986, 1997; Da Rocha Falcão, 1996; Nunes, 1997).

Nunes (1997) ressalta como sistemas de signos possibilitam a construção de diferentes formas de representar um determinado conceito, e esses diferentes modos de representar influenciam a atividade matemática e a resolução de problemas. Nesta perspectiva, enfatiza-se a noção de ação mediada para compreender o pensamento matemático, onde as ferramentas físicas e mentais assumem papel essencial na construção do pensamento. Segundo a autora, as representações tanto influenciam a situação como são por ela influenciadas. Como exemplo, Nunes cita o uso de representações compactas (números, por exemplo) e de representações extensas (dedos, por exemplo) durante a resolução de problemas por crianças. A criança que se utiliza dos números (representação compacta) adota uma forma de pensar e de operar sobre a situação-problema mais poderosa e sofisticada do que a criança que se utiliza dos dedos (representação extensa). Neste sentido, as representações utilizadas vão influenciar nas estratégias de resolução implementadas. Entretanto, as representações compactas são mais difíceis de serem interpretadas e produzidas por crianças que estejam em momentos iniciais da compreensão de um conceito, havendo, neste caso, uma preferência pelas representações extensas. Desta forma, as representações também são influenciadas pelo conhecimento da criança naquele momento do desenvolvimento em relação ao conceito envolvido na situação-problema.

A representação, segundo Nunes (1994), possibilita três conseqüências para o raciocínio em resolução de problemas. A primeira conseqüência da representação é o controle sobre o processo de cálculo através da utilização de sistemas para simbolizar os números. Esses símbolos tornam-se objetos de operacionalização e suas características influenciam os processos de cálculo. Assim, “os sistemas simbólicos em matemática tornam-se objetos sobre os quais operamos” (p. 22), e, como suportes de representação, estruturam o processo de raciocínio. A segunda conseqüência para o raciocínio durante a resolução de problemas é a significação desses sistemas em práticas culturais específicas. Quando os símbolos fazem parte de determinadas práticas culturais, os seus significados e as regras dessas práticas estruturam os processos de raciocínio. Por exemplo, indivíduos de culturas em que se adota o sistema numérico decimal (que é infinito) estruturam seus processos de raciocínio matemático de forma bem diferente, por exemplo dos Oksapmim, estudado por Saxe (Hughes, 1986), que adotam um sistema de numeração que tem por base a nomeação de partes do corpo (que é finito). A terceira conseqüência refere às formas pelas quais se representa uma situação. Quando há várias formas de representar uma mesma variável de uma situação-problema os esquemas desenvolvidos para compreender a situação vão ser estruturados pela representação utilizada, ou melhor, pelo tipo de material que está sendo usado.

Ao que parece, portanto, o conhecimento e as situações influenciam a maneira como os indivíduos representam, ao mesmo tempo em que suas representações e os suportes que usam influenciam seu conhecimento. Portanto, o conhecimento matemático depende tanto da lógica do indivíduo como de sua capacidade de utilizar os sistemas de representação. É nesta perspectiva teórica que se discutem os suportes de representação.

1.3.2. Os suportes de representação

Entende-se por suportes de representação todos os signos, ferramentas e materiais que podem ser usados durante a resolução de problemas tais como materiais concretos (objetos diversos, uso dos dedos, fichas, palitos etc.) ou recursos gráficos (desenhos, marcas gráficas icônicas, pictográficas ou simbólicas; diagramas, gráficos, tabelas etc.). Entendido como um significante, os suportes de representação são elementos que, inseridos em uma dada situação, dão sentido funcional ao conceito e que, em conseqüência, influenciam as formas de resolução adotadas pelo indivíduo ao resolver problemas matemáticos. Os suportes de representação influenciam as representações adotadas pelas crianças (Anghileri, 1998).

Interessante notar que na literatura o papel desempenhado pelos suportes de representação é geralmente investigado em pesquisas que envolvem problemas e conceitos inseridos no campo das estruturas aditivas (e.g.; Higino, 1997; Hughes, 1986; Sinclair, Mello & Siegrist, 1989; Zunino, 1995).

Kamii, Lewis & Kirkland (2001), ao descrever a influência dos materiais concretos no desenvolvimento do conhecimento lógico-matemático, verificam que os materiais concretos são úteis na medida em que encorajam as crianças a pensar durante a resolução de problemas, levando-as ao pensamento abstrato. Ainda afirmam que a relação matemática não existe diretamente nos objetos, mas na forma como eles são usados. Assim, Kamii et.al. (2001), afirmam que as crianças devem ter a sua disposição uma variedade de materiais para que possam escolher os materiais que melhor ajudem ao seu pensamento na hora de resolver os problemas matemáticos. Encontrando-se a ação de desenhar em situação privilegiada para representação do problema a resolver, uma vez que permitem as crianças representar o centro de suas idéias no nível de construção abstrata. As fichas não apresentam a mesma característica dos desenhos, pois elas têm propriedades que interferem na representação ou na idéia das crianças: não expressam os referentes das quantidades e acabam por dificultar o ato de juntar. Pois as crianças ao adicionarem 2 e 5 podem representar duas fichas e ao contarem dois continuam adicionando fichas até chegar em cinco fichas e encontram cinco como resposta ao invés da quantidade sete como resposta. Os dedos são símbolos altamente personalizados que as crianças usam juntamente com suas imagens mentais. Eles permitem que as crianças representem suas idéias numéricas mais diretamente do que as fichas, facilitando seu pensamento. Além dos dedos estarem presentes em qualquer situação, ao contrário das fichas.

Com isso ressalta-se que a importância da matemática não está apenas no uso de objetos, pois os objetos por si só não garantem o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático da criança ao resolver problemas matemáticos, mas a sua eficácia depende da forma como são usados, do ensino que é oferecido e do estímulo dado ao pensamento da criança ao usar os materiais.

Vasconcelos (1998) buscou examinar o papel desempenhado por diferentes suportes de representação na resolução de problemas de adição e subtração em um estudo de intervenção com crianças de 8 anos. Após um pré-teste aplicado a todas as crianças da amostra, as mesmas foram divididas em três grupos que diferiam quanto ao programa instrucional oferecido. No grupo 1 as crianças recebiam instruções sobre resolução de problemas, utilizando como suporte de representação diagramas baseados em Vergnaud. No grupo 2 as crianças recebiam instrução e as instruções tinham como suporte de representação representações gráficas parte-todo, baseado em Riley, Greeno e Heller. No grupo 3 o suporte de representação oferecido durante a instrução consistia em material concreto (palitos). Após a intervenção todas as crianças realizaram um pós-teste. Os resultados mostraram que os três grupos tiveram melhoras significativas no pós-teste em relação ao pré-teste. No entanto, os ganhos não foram idênticos para os três grupos de crianças. O grupo 1 (diagramas) obteve um desempenho mais expressivo do que o grupo 2 (modelo parte-todo) e o grupo 3 (material concreto); enquanto o material concreto foi o suporte de representação que menos benefício trouxe para as crianças. O uso de diagramas foi o suporte de representação que mais facilitou a aprendizagem da resolução dos problemas, enquanto as representações parte-todo só favoreceram o desempenho em alguns problemas, mas não em todos, o que ocorria com os diagramas. Quanto às estratégias de resolução dos problemas, o treinamento para as crianças do grupo 1 (diagrama[4]) favoreceu a utilização adequada dos diagramas no processo de resolução de todos os problemas, permitindo às crianças representar adequadamente a situação, relacionar os dados do problema e deduzir qual a operação aritmética necessária. No grupo 2 (modelo parte-todo[5]), a representação só foi adequada aos problemas de combinação das partes e de mudança e foram inadequadas as categorias de igualização e comparação. A inadequação deste modelo de representação se deveu ao fato da dificuldade em identificar o todo e as partes na comparação entre as quantidades envolvidas na situação-problema, mas as crianças não tiveram dificuldades em decidir que tipo de operação aritmética é necessária para a resolução. No grupo 3 (palitos), as crianças resolviam os problemas com base apenas no enunciado, sem representar as quantidades do enunciado de forma concreta. A melhora de pré para o pós-teste se dá pela melhor exploração do enunciado do problema do que pelo uso do material concreto.

[4] Para Vergnaud os problemas de adição e subtração se apresentam em seis diferentes categorias e a diferenciação entre essas categorias torna-se clara pelo uso de símbolos e diagramas.

[5] Para Riley, Greeno e Heller a análise das categorias dos problemas se dá pela estrutura semântica e pela identidade da quantidade desconhecida e assim propõe que as relações entre os dados dos problemas se estabeleçam por um esquema parte-todo – especifica que alguma quantidade pode ser dividida em duas partes (quantidades elementares) sem que a soma dessas partes fique maior nem menor do que o todo (quantidade total).

Com base nesses resultados, evidencia-se que os suportes de representação disponibilizados influenciam não apenas o desempenho (número de acertos) como também os procedimentos de resolução dos problemas, tendo os suportes usados pelos grupos 1 (diagramas) e 2 (modelo parte-todo), maior adequação a resolução dos problemas, enquanto o grupo 3 (palitos), ficou restrito à resolução de problemas que permitissem a representação direta das quantidades envolvidas.

Embora raras, há pesquisas que investigam o papel desempenhado pelos suportes de representação na resolução de problemas típicos das estruturas multiplicativas, como é o caso dos estudos de Selva (1998) e de Lautert & Spinillo (1999) que envolviam problemas e operações de divisão em crianças, respectivamente. Nesses estudos, os problemas de divisão eram do tipo isomorfismo de medidas (partição e quotição) e não se estendiam a problemas outros das estruturas multiplicativas, como por exemplo, problemas do tipo produto de medidas. Embora mais difíceis que os de isomorfismo, seria interessante investigar o papel desempenhado pelos suportes de representação em tais tipos de problemas. Esse aspecto será considerado neste presente estudo.

Além dessa lacuna, a literatura parece carecer de estudos que envolvam o exame de suportes de representação em relação a problemas que requerem para sua solução o uso da multiplicação. De acordo com as leituras feitas até então, os estudos com crianças envolvendo a multiplicação tratam das estratégias de resolução e do desempenho, sem que haja um exame mais detalhado acerca das relações entre desempenho, estratégias e suportes de representação. Esse aspecto também será tratado neste estudo em que se considera, como outros autores (e.g.; Nunes, 1997; Spinillo, 2001; Vergnaud, 1986), que os suportes de representação são ferramentas importantes na compreensão de conceitos matemáticos e no tipo de raciocínio acionado em uma dada circunstância.

1.3.3. Os suportes de representação e os referentes para as quantidades

Spinillo (2001) afirma que, além dos suportes de representação, outro aspecto que precisa ser considerado durante a resolução de problemas é o papel desempenhado pelos referentes. A importância dos referentes na compreensão matemática foi enfatizada por diversos autores que investigam conceitos matemáticos em crianças (e.g.; Hughes, 1986; Spinillo, 1994).

Hughes (1986), em estudos sobre adição e subtração em crianças de 3 a 7 anos, contrastou três situações distintas: concreta, hipotética e escolar. Na situação concreta a criança tinha que descobrir quantos blocos de madeira ficavam em uma caixa após a retirada ou o acréscimo de blocos. Na situação hipotética, sem nenhum material presente, era perguntado à criança: "Se tivesse um bloco na caixa e eu colocasse mais dois, quantos blocos teriam na caixa?" ou "Se existisse uma criança em uma loja e mais duas crianças chegassem quantas crianças haveria na loja?". Na situação escolar, sem nenhum material presente e envolvendo a linguagem matemática formal, era perguntado à criança: "Quanto é um mais dois?" ou "Quanto é dois menos um?". Os resultados mostraram que a situação hipotética foi mais fácil do que a situação escolar. A explicação para este resultado foi que, apesar de ambas as situações não envolverem material concreto, o melhor desempenho na situação hipotética decorreu da presença dos referentes para as quantidades na situação hipotética e a ausência de referentes na situação escolar. Assim, parece que os referentes desempenham papel essencial na resolução de operações aritméticas e que a dificuldade em lidar com a linguagem matemática desaparece quando o referente é fornecido.

Segundo Spinillo (2001), os referentes propiciam a construção de significados, como se nota quando se compara a resolução de problemas aritméticos e de operações aritméticas: enquanto os problemas fornecem referentes para as quantidades, as operações isoladas não o fazem. A história contida nos problemas verbais, mesmo quando em situações sem material concreto, fornece referentes, o que facilita a compreensão.

No entanto, como ressaltado por Schliemann (1998), não apenas crianças, mas também adolescentes e adultos com pouca ou nenhuma escolarização têm dificuldades em compreender expressões do tipo "quanto é 27 mais 19?", embora compreendam e respondam adequadamente perguntas do tipo "se você tivesse 27 reais e alguém lhe desse mais 19 reais, com quantos reais você ficaria?", mesmo na ausência de moedas ou cédulas (p. 19). Ao que parece, o uso de números acompanhados de referentes permite atribuir significados que facilitam a compreensão.

Spinillo (2001) em estudo sobre operações e problemas de divisão (problemas do tipo isomorfismo: partição e quotição) em crianças, discute que os suportes de representação (sejam eles concretos ou não), conferem referentes para as quantidades tanto em problemas como em operações aritméticas; e discute, ainda, que, dependendo do suporte de representação utilizado, os referentes das quantidades podem ter um caráter mais explícito (definido) ou menos explícito (neutro), mesmo em situações em que o suporte de representação oferecido seja material concreto manipulável. A autora comenta que os estudos na área tratam todo e qualquer material concreto como sendo de uma mesma natureza. No entanto, é possível supor que fichas ou palitos são materiais concretos neutros uma vez que não indicam de imediato e de forma clara a que quantidades eles se referem em um dado problema ou operação. Entretanto, carrinhos e caixas, que também são suportes concretos e manipuláveis, indicam de forma clara a que quantidades eles se referem em um dado problema ou operação. Assim, os suportes de representação podem desempenhar papéis distintos durante o processo de resolução, não apenas por serem concretos ou gráficos, mas por explicitarem ou não as relações entre quantidades e seus referentes. Em uma operação de divisão, por exemplo, fichas podem tanto servir de referente para o divisor como para o dividendo. No entanto, carrinhos e caixas possibilitam a definição de que os carrinhos são o dividendo e as caixas o divisor.

A natureza do suporte de representação, principalmente em relação a materiais concretos, precisa ser considerada, refletindo-se a respeito da influência que esses suportes podem ter no raciocínio da criança ao resolver operações e problemas aritméticos. No presente estudo, esse aspecto será considerado em relação a problemas inseridos no campo das estruturas multiplicativas.

1.4. Os suportes de representação e a resolução de problemas inseridos no campo das estruturas multiplicativas: estudos com crianças

Tradicionalmente, os estudos conduzidos sobre a resolução de problemas inseridos no campo das estruturas multiplicativas, em particular problemas de multiplicação e de divisão, examinam as estratégias de resolução adotadas pelas crianças e o grau de dificuldade dos problemas, procurando identificar uma possível seqüência de desenvolvimento na aquisição desses conceitos. Observa-se, entretanto, que há um maior interesse dos pesquisadores em investigar problemas que requerem a divisão para sua resolução do que problemas que requerem a multiplicação.

Estudos sobre a divisão procuram investigar o conhecimento intuitivo que crianças ainda pequenas têm sobre esses conceitos antes mesmo de serem formalmente ensinadas no contexto escolar (como os estudos de Correa discutidos a seguir); outros examinam como crianças definem a divisão por exemplo (Lautert & Spinilllo, prelo); outros, ainda, focalizam o efeito de diferentes suportes de representação sobre o desempenho e as estratégias das crianças (e.g; Selva, 1998; Lautert & Spinillo, 1999).

A partir de uma série de estudos com crianças pequenas sobre a divisão, Correa (1996), Correa, Nunes & Bryant (1998), Correa & Meireles (2000) examinaram que inicialmente a criança entende a divisão como o ato de repartir, de distribuir algo em um certo número de partes iguais; o que indica que a divisão é inicialmente entendida como uma partição[6]. Apesar desta concepção inicial espontânea ser um dado extremamente importante sobre o desenvolvimento do conceito de divisão, a idéia de divisão como distribuição de objetos em partes iguais, sugere uma compreensão limitada deste conceito, visto que, esta idéia expressa uma concepção de natureza aditiva e não multiplicativa. A divisão requer o uso de regras operatórias que implicam na utilização de subtração, multiplicação, divisões sucessivas, busca de um quociente; pode não ter resultado exato ou resultar em fração e não apenas em números inteiros. Além disso, a divisão requer considerar simultaneamente o tamanho do todo, o número de partes, o tamanho das partes que precisa ser o mesmo, a relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes. As relações parte-todo estabelecidas entre as variáveis são, portanto,

[6] Estudo recente, desenvolvido por Lautert & Spinillo (prelo) a respeito das concepções de crianças sobre 'o que é dividir', mostrou que a idéia de partição está fortemente associada ao conceito de divisão, mesmo entre crianças que já haviam sido formalmente ensinadas sobre este conceito no contexto escolar.

diferentes daquelas presentes nas operações de natureza aditiva (Vergnaud, 1991; 1983).

Portanto, a noção de que a divisão é sinônimo de partilha não é suficiente para o entendimento da divisão como uma relação entre o tamanho do divisor e tamanho do quociente, da relação inversa da divisão com a multiplicação, e das partes que envolvem a divisão. O teorema-em-ação relativo a esta idéia é o uso do esquema de correspondência um-a-um: a criança distribui exaustivamente todos os elementos até esgotar o todo (divisão exata) ou até que o restante dos elementos não seja suficiente para uma nova distribuição (divisão com resto). As crianças que possuem esta noção apresentam dificuldades em lidar com o resto[7]; em estabelecer a relação inversa entre número de partes e tamanho das partes e muitas vezes consideram o divisor como sendo o quociente (Correa, 1996; Correa, Nunes & Bryant, 1998; Correa & Meireles, 2000; Bryant, 1999).

Nessa concepção, Correa, Nunes & Bryant (1998) realizaram um estudo, com o objetivo de analisar se crianças de 5 a 7 anos compreendiam a relação entre os três termos da divisão (divisor, dividendo e quociente). As crianças foram submetidas a duas sessões experimentais (numa sessão eram distribuídos doze doces e na outra sessão 24 doces). Em ambas sessões apresentava-se para as crianças dois grupos de coelhos, um grupo de coelhos vermelhos e outro grupo de coelhos azuis. Os grupos de coelhos variavam quanto aos divisores. Os grupos que tinham os mesmos divisores (coelhos) os pares numéricos dos grupos eram 2(2), 3(3), 4(4). Os grupos que tinham divisores diferentes os pares numéricos dos grupos

[7] Estudo em andamento, desenvolvido por Spinillo, a autora identificou diversas formas que as crianças adotam para lidar com o resto em operações e problemas de divisão inexata: Tipo 1: Ao se deparar com o resto após a resolução da operação, a criança o inclui em um dos grupos formados (fichas) ou em um dos objetos (objetos: cestas, bandejas, jarros e caixas). A criança aceita a desigualdade das partes. Tipo 2 Não aceita a presença do resto, formando uma nova parte com o mesmo. A criança cria um outro conjunto (material neutro) ou inclui um novo objeto (material direto: mais uma cesta, mais uma bandeja, mais jarro e mais uma caixa) para colocar o resto. Aceita a desigualdade das partes.Tipo 3: Aceita a presença do resto como sendo algo que sobrou da quantidade dividida e não altera os grupos formados. Reconhece a necessidade de manter a igualdade das partes.

eram 2(3), 2(4), 3(4). Distribuía-se entre os grupos de coelhos os doces colocando-os dentro de uma caixa separada para cada coelho de cada grupo, depois perguntava-se às crianças se os coelhos tinham recebido as mesmas quantidades de doces ou se um deles tinha recebido mais doces, no final as crianças justificavam suas respostas. Os resultados foram analisados quanto às respostas corretas, as respostas erradas e as justificativas dadas pelas crianças.

Quanto às respostas certas, os resultados mostram que foi mais fácil para as crianças responderem corretamente quando os grupos tinham os mesmos divisores ao contrário dos grupos que tinham divisores diferentes. Essa dificuldade de trabalhar com divisores diferentes se deu para as três idades analisadas. Quanto às respostas erradas as situações que tinham diferentes divisores permitiram dois tipos de respostas: erro do tipo 1, os coelhos, em ambos os grupos tinham o mesmo número de doces em suas cestas; erro do tipo 2, que os coelhos do grupo que tinha mais coelhos recebiam mais doces. Esses dois tipos de erros foram freqüentes tanto nas crianças de 5 quanto de 6 anos, portanto as crianças de 7 anos tiveram maior freqüência no erro tipo 2. Quanto às justificativas das crianças foram encontradas seis tipos de justificativas. Duas justificativas não mencionavam nenhum fato matemático relevante para a resolução das questões. Em duas outras justificativas as crianças usavam fatos matemáticos só que encaminhados de forma errada. Nas outras duas justificativas as crianças faziam relações matemáticas relevantes entre o divisor e o quociente no contexto das divisões.

Correa & Meireles (2000), examinaram que compreensão crianças de 5 a 7 anos teriam acerca das relações entre divisor, dividendo e quociente em tarefas de divisão partitiva envolvendo quantidades contínuas, sem que fosse necessário fazer o cálculo aritmético. Foram apresentados às crianças dois grupos de bonecos dispostos em diferentes lados da mesa. A cada grupo de bonecos foi designada a mesma quantidade de chocolates e de sucos. As crianças eram solicitadas a fazer julgamento do tamanho relativo dos quocientes na condição “Mesma” (mesmo quociente nos dois grupos de bonecos) e na condição “diferente” (quocientes diferentes nos grupos de bonecos). Mostrava-se às crianças, desenhado num cartão o tamanho do pedaço de chocolate ou a quantidade de suco que cada boneco ia receber, e solicitava-se à criança para estimar se cada boneco receberia maior, menor ou o mesmo número de pedaços de chocolate (ou copos de suco), ora era pedido para as crianças avaliarem o tamanho do pedaço de chocolate (ou do copo de suco) que cada boneco receberia.

Os resultados mostram que com o avanço da idade as crianças tendem a ter um maior número de acerto. As tarefas da condição “mesma” são mais fáceis do que as de condição ”diferente”. Na condição diferente as crianças tendiam a cometer dois tipos de erro: erro tipo 1, as crianças focalizavam sua atenção somente no tamanho do dividendo; erro tipo 2, as crianças focalizavam sua atenção somente no número de divisores. Quanto às justificativas das respostas apresentadas pelas crianças, encontra-se seis tipos:

Justificativa I: a criança não dá justificativa ou diz não saber o porquê da sua resposta;

Justificativa II: a criança apresenta uma justificativa baseada na experiência social de partilha de quantidades;

Justificativa III: As crianças mencionam a quantidade total a ser dividida (o dividendo);

Justificativa IV: A criança menciona a igualdade dos valores a serem recebidos pelos bonecos em ambos os grupos (somente para a condição "mesma");

Justificativa V: As crianças fazem erroneamente uma relação direta entre o número de divisores e o valor do quociente (somente na condição "diferente");

Justificativa VI: As crianças fazem uma relação inversa entre o número de divisores e o valor do quociente (somente na condição "diferente").

Conforme pode ser observado, apenas nas justificativas IV e VI as crianças refletem apropriadamente as relações estabelecidas entre os termos da divisão nas condições "mesma" e "diferente".

As situações de repartir e de dividir exigem raciocínios diferentes. "As situações de repartir podem ser resolvidas a partir de procedimentos aditivos em que a criança, através do uso da correspondência termo a termo, pode, então, estabelecer a equivalência entre as quotas a serem dadas a cada participante, adicionando ou retirando quantidades. No entanto, a divisão, como uma operação multiplicativa, vai requerer o entendimento por parte das crianças das relações entre dividendo e divisor na determinação do valor do quociente. No caso da divisão partitiva, o tamanho de cada quota dependerá da razão entre o quanto há para ser dividido e o número de quotas a serem dadas" (Correa & Meireles, 2000, p. 29)

Além dos estudos que versam sobre as noções intuitivas que as crianças têm sobre a divisão, outros se voltam para o exame das diferentes formas que as crianças usam para resolver problemas em função de diferentes tipos de suporte de representação, como discutido a seguir.

Selva (1998) realizou um estudo com o objetivo de analisar o efeito do uso de materiais na resolução de problemas de divisão (isomorfismo: quotição e partição) sobre as estratégias adotadas por crianças de 6-8 anos. As crianças foram divididas em três grupos, diferindo quanto ao material disponibilizado: o grupo 1 recebeu fichas, o grupo 2 recebeu papel e lápis e o grupo 3 não recebeu nenhum material. A autora caracterizou as estratégias das crianças como sendo apropriadas (que levavam ao acerto) e inapropriadas (levavam ao erro). As estratégias apropriadas foram classificadas em cinco tipos:

(1) Representação direta com distribuição de pequenas quantidades: as crianças faziam correspondência um-a-um, ou em grupos de dois ou de três para resolver o problema;

(2) Representação direta com formação de grupos: as crianças consideravam a quantidade correspondente ao valor do dividendo e formavam grupos com a quantidade que correspondia ao valor do divisor, depois contavam o número de grupos formados;

(3) Ensaio e erro: As crianças faziam tentativas da quantidade de elementos que deveria haver em cada grupo, e depois verificavam se havia atingido a quantidade correspondente ao dividendo;

(4) Adição repetida: as crianças adicionavam uma mesma quantidade quantas vezes especificava o problema;

(5) Uso de fato conhecido: As crianças resolviam os problemas através de multiplicações ou divisões.

As estratégias inapropriadas foram classificadas em três tipos:

(1) Respostas baseadas no tamanho do recipiente: quando as crianças respondiam o problema tomando como base o tamanho do recipiente mencionado no problema;

(2) Outras: escolha errada da operação, respostas baseadas em relações inadequadas do problema, demonstrando dificuldades na compreensão do mesmo;

(3) <u>Estratégias não identificadas:</u> respostas aleatórias e idiossincráticas que não tinham nenhuma relação com a situação.

Dentre os inúmeros dados obtidos, interessa, no contexto do presente estudo, discutir apenas aqueles relativos às relações entre estratégias, desempenho e suportes de representação. Quanto ao uso das estratégias, os resultados mostraram que estas variavam em função do suporte oferecido. As fichas levavam as crianças a representar passo a passo os dados do problema, fazendo uma representação direta do enunciado do problema. O lápis e papel foi o suporte de representação que favoreceu o aparecimento de estratégias mais elaboradas e que permitiu à criança uma maior flexibilidade em operar sobre os dados do problema, levando ao uso de estratégias mais sofisticadas que contemplavam de forma mais efetiva os elementos do problema e suas relações. A autora concluiu que o material concreto inibia o uso de estratégias mais apropriadas que iam além da representação direta do enunciado do problema; enquanto o suporte gráfico possibilitava à criança lidar com os elementos necessários para refletir sobre como proceder durante a resolução.

Quanto ao número de acertos, os dados mostraram que o uso de fichas e de lápis e papel levavam a um desempenho semelhante, porém, superior àquele observado na situação sem material; o que indica que a situação gráfica favoreceu o desempenho da mesma forma que o material concreto. De modo geral, os suportes de representação influenciam tanto o desempenho como as estratégias utilizadas e que a situação de lápis e papel foi àquela que mais favoreceu a resolução dos problemas de divisão.

Lautert & Spinillo (1999) encontraram resultados semelhantes aos de Selva (1998), porém em um estudo sobre operações de divisão que investigava como um mesmo grupo de crianças (5 a 8 anos de idade) com diferentes níveis de instrução sobre a divisão representavam operações de divisão em duas situações: uma gráfica e outra concreta. O suporte de representação oferecido na situação gráfica era lápis e papel; e na situação concreta eram fichas plásticas. Os dados foram analisados em função da natureza dos grafismos adotados (idiossincrático, pictográfico, icônico e simbólico) e do grau de detalhamento dos procedimentos de resolução adotados. Quanto aos grafismos, as crianças em todas as idades preferencialmente usavam grafismos simbólicos (números), ou combinações de grafismos simbólicos e icônicos. Em relação aos procedimentos adotados, as autoras examinaram o grau de explicitação das representações quanto aos procedimentos adotados, e não a adequação (acerto) ou inadequação (erro) das estratégias de resolução, como feito por Selva (1998). Com exceção das crianças do Jardim, as crianças representam os seus procedimentos de resolução, usando as operações que já dominam no contexto escolar: As da Alfabetização usavam a adição e a subtração; enquanto as crianças da 1ª e 2ª séries incluíam também a divisão. As crianças mais novas tendiam a representar apenas o enunciado da operação. Um dos dados mais interessantes neste estudo e que interessa à discussão levantada nesta presente investigação, foi que havia crianças que quando usavam as fichas como suporte faziam representações elementares (imprecisas, atreladas ao enunciado da operação) e que estas mesmas crianças, quando na situação gráfica, produziam representações bem mais elaboradas (detalhavam com precisão os procedimentos utilizados). Estas diferenças entre situações, entretanto, tendiam a diminuir entre as crianças da 2ª série que passavam a produzir representações mais elaboradas em ambas as situações. A principal conclusão deste estudo foi que aquilo que a criança representa não expressa apenas suas habilidades lógico-matemáticas; mas também expressa os limites e as possibilidades representacionais conferidas pela própria situação, ou seja, pelos suportes de representação oferecidos.

Em seus estudos, Mulligan (1992), Mulligan & Mitchelmore (1997) analisaram as estratégias das crianças (7 a 8 anos) ao resolverem problemas de divisão e de multiplicação, antes e depois de serem instruídas na multiplicação e na divisão, num período de dois anos. O estudo compreendia quatro sessões de intervenção. A primeira intervenção aconteceu quando as crianças não tinham recebido instrução sobre os conceitos de multiplicação e de divisão e a última intervenção aconteceu quando todas as crianças tinham recebido instruções básicas da multiplicação mas não tinham recebido instrução da divisão.

Cada criança resolvia cinco tipos de problemas de multiplicação e cinco tipos de problemas de divisão, com o auxílio de fichas.

Apenas as estratégias que levaram ao acerto foram analisadas. Diversas estratégias foram identificadas na resolução dos dez tipos de problemas, com pouca diferença entre as estratégias usadas nos problemas de multiplicação e de divisão, exceto as estratégias de correspondência um-para-um, um-para-muitos, e tentativa e erro que foram próprias dos problemas de divisão.

As estratégias adotadas nos problemas de multiplicação foram do tipo:

(1) <u>Conhecimento de fatos da adição</u>: Faz uso de conhecimentos da adição, sem realizar a contagem (quatro e quatro são oito);

(2) <u>Conhecimento de fatos da multiplicação:</u> Faz uso de conhecimentos da multiplicação, sem realizar a contagem (dois e quatro são oito);

(3) Pulos de contagem: Faz uso de uma seqüência particular de contagem (dois, quatro, seis);

(4) Adição repetida: Quando a criança adiciona um número tantas vezes o problema especifica;

(5) Contando todos: Conta cada unidade representada pelos problemas.

As estratégias adotadas na resolução dos problemas de divisão foram do tipo:

(1) Metade: Quando a criança realiza a divisão da quantidade em dois grupos equivalentes;

(2) Conhecimento de fatos da adição: Faz uso de conhecimentos da adição, sem realizar a contagem (quatro e quatro são oito);

(3) Correspondência um-para-muitos: Faz a correspondência de um grupo com a sua quantidade e relaciona aos outros grupos com suas quantidades;

(4) Pulos de contagem: Faz uso de uma seqüência particular de contagem (dois, quatro, seis);

(5) Conhecimento de fatos da multiplicação: Faz uso de conhecimentos da multiplicação, sem realizar a contagem (dois e quatro são oito);

(6) Contando todos: Conta cada unidade representada pelos problemas.

(7) Contar em dobro: Quando a estratégia verbaliza o termo “dobro” (3 e 3 é 6 e o *dobro* de 6 faz 12).

Todas as estratégias adotadas nos problemas de multiplicação e nos problemas de divisão foram agrupadas em três níveis, e essa classificação foi possível devido à interação das características: nível de abstração e nível de modelagem (uso dos dedos ou das fichas para indicar a relação descrita no problema) adotada nas estratégias.

Os três níveis de classificação das estratégias foram:

(1) Nível 1: estratégias baseadas na modelagem direta com contagem, com o uso de fichas ou dos dedos;

(2) Nível 2: estratégias baseadas na contagem, adicionando ou subtraindo, sem o uso de modelagem direta;

(3) Nível 3: estratégias baseadas em fatos conhecidos ou derivados da adição e da multiplicação.

As estratégias do nível 1 foram aquelas em que as crianças representavam as quantidades dos problemas e então faziam a contagem de todos os objetos, contagem em dobro, usavam os pulos de contagem etc (apareceram nas três primeiras sessões de intervenção); as estratégias do nível 2 eram mais avançadas do que as estratégias do nível 1, pois as crianças verbalizavam os processos de resolução adotados, e podiam descrever o que viam nos problemas (apareceram nos três primeiros estágios de intervenção); as estratégias do nível 3, fatos conhecidos e derivados da adição e da multiplicação, apareceram na quarta sessão de intervenção.

Através da classificação das estratégias nesses três níveis, observa-se que depois da quarta intervenção houve uma mudança das estratégias adotadas pelas crianças, deixando de usar as estratégias menos elaboradas (nível 1 e 2) para usar estratégias mais elaboradas.

A análise dos modelos intuitivos (estratégias de resolução), depois da quarta sessão de intervenção, revelou preferência pelo uso de ”*building-up*” nos problemas de divisão e o modelo de “adição repetida” para os problemas de multiplicação, mostrando ter havido progresso nas estratégias adotadas pelas crianças através das intervenções adotadas.

Mesmo antes de terem sido instruídas formalmente na divisão e na multiplicação, as crianças apresentaram estratégias de resolução adequadas para resolver os problemas apresentados, embora as estratégias mais elaboradas só tenham aparecido depois da quarta sessão de intervenção e quando elas já haviam sido instruídas formalmente nesses conceitos. Observa-se, também, que as estratégias mais elaboradas foram desenvolvidas através do cálculo mental, quando as crianças tinham fichas à sua disposição. As estratégias em que as crianças usaram as fichas para auxiliar na resolução dos problemas foram as menos elaboradas (nível 1). Ainda, os problemas de produto de medidas foram os mais complexos para as crianças desta faixa etária, e acarretou na ausência de análise das estratégias utilizadas para resolver esse tipo de problema. As estratégias de resolução dos problemas de produto de medidas ainda são pouco pesquisadas no campo da educação matemática.

Em estudo mais recente, Mulligan & Wright (2000) procuraram descrever a integração das estratégias adotadas na multiplicação e na divisão em crianças de 5 a 7 anos, ao usarem fichas para resolver os problemas apresentados. Neste estudo foi possível identificar cinco níveis progressivos de conhecimento os quais ilustram o desenvolvimento na aquisição dos conceitos de multiplicação e divisão pela criança. Os níveis foram organizados em ordem crescente de complexidade. Esses níveis são descritos a seguir (Mulligan & Wright, 2000, p. 19):

> *Nível 1:* denominado contagem unitária de agrupamento inicial e perceptual, se caracteriza pela contagem unitária dos itens, onde as crianças estão presas aos objetos perceptíveis.

Nível 2: denominado contagem em múltiplos, se caracteriza pela contagem em pulos, contagem em dobro, contagem repetida dos números das quantidades em cada grupo (5, 10, 15...), quando os itens individuais são visíveis para as crianças.

Nível 3: denominado composição de unidades, se caracteriza pela contagem dos itens sem que eles estejam visíveis, contando o todo através da contagem em pulos, contagem em dobro.

Nível 4: denominado adição e subtração repetidas, se caracteriza pelo uso de adições sucessivas e repetidas (3+3+3...) quando o problema era de multiplicação e o uso de subtrações sucessivas e repetidas quando o problema era de divisão.

Nível 5: denominado multiplicação e divisão como operações, se caracteriza pela aplicação de conhecimentos de fatos da multiplicação e da divisão. Neste nível observa-se, ainda, que as crianças entendem as relações inversas entre a divisão e a multiplicação.

Esses níveis expressam diferentes momentos na aquisição de conceitos multiplicativos, embora não se tenha encontrado diferenças entre a multiplicação e a divisão, não sendo uma mais difícil do que a outra.

O nível 5 se caracteriza como o nível que apresenta o raciocínio mais elaborado, onde as crianças usam a multiplicação e a divisão como relações inversas. Esse nível corresponde à estratégia descrita por Nunes (1997), (coordenação entre os esquemas de correspondência e de distribuição eqüitativa), que afirma que só quando as crianças estabelecem essa correspondência é que elas compreendem os conceitos multiplicativos, e poderão resolver problemas matemáticos, mesmo quando estão elaborados numa estrutura semântica inversa.

Os níveis 1 e 2 descritos como os níveis menos elaborados estavam presos a itens visíveis pelas crianças, enquanto os três últimos níveis (3, 4 e 5), os mais elaborados, para serem desenvolvidos não precisavam de itens visíveis, apenas necessário o cálculo mental. Esta pode ser uma característica do material utilizado pelo estudo (fichas), que favoreceu o uso de cálculos mentais.

Em resumo, Mulligan (1992), Mulligan & Mitchelmore (1997) e Mulligan & Wright (2000) em seus estudos verificaram que as crianças utilizam estratégias mais simples como a representação direta da situação-problema, para resolver os problemas de divisão e multiplicação. Depois, passam a resolver o problema utilizando a contagem sem fazer uso da representação direta. E só mais tarde, é que as crianças passam a compreender o problema e utilizam estratégias mais sofisticadas, como o uso das operações de multiplicação e de divisão. Em nenhum momento Mulligan se posicionou quanto à possibilidade da influência do material utilizado para o desenvolvimento desses 5 níveis de estratégias. Seria preciso pesquisas com outros tipos de materiais para estudar como se caracterizam os níveis de desenvolvimento das estratégias, envolvendo os conceitos multiplicativos em diferentes situações.

Na literatura, os autores tendem, a considerar os materiais concretos como sendo da mesma natureza, independentemente de representarem ou não diretamente os referentes das quantidades dos problemas. No entanto, sendo os materiais concretos de diferentes naturezas é importante examinar se esta diferença pode mudar a forma de representar, compreender e resolver problemas típicos das estruturas multiplicativas.

Diante dessas informações é importante examinar a influência do uso de diferentes suportes de representação, ao resolver problemas de estruturas multiplicativas. Isto pode ser feito através de um estudo que venha examinar o desempenho e os procedimentos de resolução de problemas de divisão e de multiplicação, variando quanto ao seu grau de complexidade, usando como suportes de representação o material concreto neutro (fichas), o material concreto definido (jarros, flores, saias e blusas, carrinhos e caixas) e lápis e papel.

Conforme discutido anteriormente, a representação de um problema e sua resolução são influenciados pelos de suportes de representação, que também determinam os esquemas desenvolvidos para analisar a situação, ao mesmo tempo em que a representação influencia o raciocínio utilizado possibilitando a formação mais elaborada de conceitos matemáticos. Segundo Spinillo (2001, p.2) "o tipo de raciocínio requerido e acionado em uma dada circunstância está em estreita relação com as ferramentas disponibilizadas".

Diante disso, torna-se importante examinar esta influência através de situações diversas em que são mantidos constantes os invariantes dos problemas; sendo este o principal objetivo do presente estudo, que será descrito no capítulo seguinte.

Capítulo II.

Método

2.1. Objetivos e hipóteses

O presente estudo tem por objetivo investigar se e como diferentes suportes de representação influenciam a compreensão de crianças e a forma como resolvem problemas matemáticos inseridos no campo das estruturas multiplicativas. Como mencionado na fundamentação teórica deste estudo, os suportes de representação são parte essencial do processo de resolução de problemas, visto que tais suportes não apenas servem para expressar as formas de raciocinar adotadas pelas crianças ao resolverem problemas, mas, também, viabilizam determinadas formas de operar sobre as relações envolvidas nos problemas.

Em particular, três diferentes tipos de suportes de representação foram tratados neste estudo: suporte gráfico (lápis e papel) e dois tipos de suporte concreto – concreto neutro e concreto definido. A investigação foi realizada antes das crianças haverem sido formalmente instruídas sobre as operações de divisão e de multiplicação no contexto escolar, uma vez que só receberiam essa instrução no segundo semestre do ano letivo, e a coleta de dados foi conduzida no primeiro semestre letivo.

Na literatura, os estudos que investigam as representações adotadas na resolução de problemas são freqüentes, mas, em sua maioria, envolvem o uso de lápis e papel e material concreto, sejam estes fichas, palitos ou objetos. Entretanto, como comentado anteriormente, tais estudos não diferenciam a natureza do material concreto, tratando de maneira geral, todo material concreto como tendo um mesmo papel no processo de resolução. Fichas e objetos, por exemplo, são considerados suportes de representação idênticos, por serem ambos concretos e manipuláveis. A perspectiva adotada neste estudo, entretanto, levanta a questão de que tais materiais, embora concretos e manipuláveis, não são idênticos, sendo relevante diferenciá-los. Uma razão para isso é o fato de que fichas, por exemplo, podem ser consideradas um material concreto neutro, no sentido em que não fornecem indicadores definidos e precisos acerca dos referentes das quantidades envolvidas em um dado problema. Objetos, entretanto, são diretamente relacionados aos referentes das quantidades contidas nos enunciados dos problemas. Partindo desta reflexão, é possível supor que tais suportes de representação sejam distintos e que desempenham papéis diferentes durante o processo de resolução de problemas.

As relações entre os tipos de suportes de representação fornecidos tornam-se, ainda, mais relevantes quando se trata de problemas matemáticos inseridos no campo das estruturas multiplicativas. Material concreto neutro, como fichas plásticas por exemplo, podem tanto representar o divisor como o dividendo em problemas de divisão; e na multiplicação podem tanto representar o multiplicando como o multiplicador. Por sua vez, material concreto definido, como objetos – carros e caixas, por exemplo – possibilitam a definição de que os carros são o dividendo e as caixas o divisor; ou o multiplicando e o multiplicador, respectivamente quando na multiplicação. Assim, a natureza do material concreto merece uma reflexão mais acurada e diferenciada sobre o efeito que tais suportes podem ter no raciocínio da criança ao resolver problemas de multiplicação e de divisão. Interessante, também, é comparar o uso desses suportes de representação com suportes de representação gráficos, através de lápis e papel.

Além disso, é possível pensar que o efeito do suporte de representação sobre a resolução de problemas possa depender, também, do tipo de problema que é apresentado e do tipo de operação que precisa ser aplicada. Assim, o presente estudo considera para análise diferentes tipos de suportes de representação, tipos distintos de problemas e as operações requeridas para sua resolução. Será que um tipo de suporte de representação desempenha papel importante no processo de resolução? Como se caracteriza este papel? O efeito, se encontrado, se expressaria apenas em relação ao desempenho (número de respostas corretas) ou também em relação às estratégias de resolução adotadas? Será que o efeito do suporte de representação depende do tipo de problema? Ou depende do tipo de operação envolvida?

A hipótese levantada nesta presente investigação é que os diferentes tipos de suporte de representação irão influenciar a resolução de problemas inseridos no campo das estruturas multiplicativas, e que este efeito poderá se traduzir tanto no desempenho como nas estratégias utilizadas pelas crianças. Uma possível predição a respeito dos resultados é que o material concreto definido (objetos) poderá ter um efeito facilitador na resolução dos problemas maior do que o material concreto neutro; pois, como mencionado acima, este tipo de suporte de representação permite que a criança estabeleça uma relação definida entre o suporte utilizado, as quantidades e seus referentes, determinando, por exemplo que objeto seria o referente de uma dada quantidade presente no enunciado do problema. É possível, ainda, pensar que o efeito do suporte de representação possa variar em função do tipo de problema apresentado.

2.2 Participantes

Participaram deste estudo 60 crianças, de ambos os sexos, com média de idade de 98 meses (8 anos e 2 meses), alunas da 2ª série do ensino fundamental de uma escola particular de classe média da cidade do Recife. Nenhuma das crianças da amostra era repetente, e nenhuma delas havia sido instruída formalmente sobre a divisão e a multiplicação no contexto escolar, uma vez que esta instrução era dada apenas no segundo semestre do ano letivo, e a coleta de dados ocorreu no primeiro semestre. A participação de crianças da 2ª série nesse estudo se deveu ao fato delas terem alguma noção introdutória sobre a multiplicação e a divisão.

As crianças foram divididas igualmente em três grupos, em função do tipo de suporte de representação fornecido para a resolução dos problemas. As idades das crianças eram as mesmas em cada grupo, bem como as séries que freqüentavam. Elas foram selecionadas de uma mesma escola, onde todas estavam cursando a 2ª série do ensino fundamental. As 60 crianças foram retiradas de 5 turmas da 2ª série, sendo 12 crianças de cada turma, compondo toda a amostra. A seguir foram divididas em três grupos iguais em função do suporte de representação oferecido para a resolução do problema:

Grupo 1 (lápis e papel): 20 crianças com idade média de 8 anos e 2 meses. A este grupo foi disponibilizado lápis e papel para a resolução dos problemas;

Grupo 2 (material concreto neutro): 20 crianças com idade média de 8 anos e 3 meses. A este grupo foi disponibilizado fichas plásticas para a resolução dos problemas; e

Grupo 3 (material concreto definido): 20 crianças com idade média de 8 anos e 2 meses. A este grupo foi disponibilizado objetos que estavam relacionados diretamente aos referentes das quantidades contidas nos enunciados dos problemas (carrinhos, caixas, flores, jarros etc.).

2.3. Procedimento e Planejamento Experimental

Todas as crianças foram individualmente entrevistadas em uma única sessão por um mesmo examinador, sendo solicitadas a resolver quatro problemas (dois de divisão e dois de multiplicação) apresentados um por vez. Cada problema era apresentado por escrito em uma cartela de papelão, sendo lido em voz alta pelo examinador, juntamente com a criança. A cartela ficava disponível sobre a mesa, podendo ser consultada quantas vezes fossem necessárias. O examinador solicitava que a criança resolvesse o problema da maneira como desejasse, fornecendo o material (suporte de representação) correspondente ao grupo de participantes ao qual a criança pertencia: às crianças do Grupo 1 eram fornecidos lápis e papel, às crianças do Grupo 2 eram fornecidas fichas plásticas (material concreto neutro), e as crianças do Grupo 3 recebiam objetos (material concreto definido).

Desta forma, o planejamento experimental envolvia três amostras independentes em que crianças diferentes participavam de cada grupo. Os grupos, por sua vez, estavam associados a situações de resolução distintas que variavam em função do tipo de suporte de representação oferecido para as crianças de cada grupo.

Em cada grupo de crianças, os problemas foram apresentados em quatro ordens distintas, como indicado no Quadro 2.

Quadro 2: Ordem de apresentação dos problemas em cada grupo de participantes

Ordem dos problemas	Número de crianças em cada grupo
P1 – P3 – P2 – P4	5
P3 - P1 – P4 - P2	5
P2 - P4 - P1 - P3	5
P4 - P2 - P3 - P1	5

P1: multiplicação isomorfismo (Par numérico: 3 e 5)
P2: multiplicação produto de medidas (Par numérico: 4 e 3)
P3: divisão isomorfismo (Par numérico: 18 e 6)
P4: divisão produto de medidas (Par numérico: 20 e 5)

Desta forma, em cada grupo, cinco crianças eram submetidas a uma determinada ordem de apresentação. Esta ordem foi decidida atendendo os seguintes critérios: (a) cada problema era apresentado em 1°, 2°, 3° e 4° lugar; (b) nunca dois problemas que envolviam um mesmo tipo de operação (divisão ou multiplicação) eram apresentados de forma consecutiva: e (c) metade das crianças em cada grupo resolvia primeiro os problemas de isomorfismo (P1 e P3) e depois os problemas de produto de medidas (P2 e P4), enquanto que com a outra metade das crianças ocorria o inverso (primeiro os problemas de produto de medidas e depois os problemas de isomorfismo).

Após a resolução de cada problema, o examinador, através de uma entrevista clínica, solicitava que a criança explicitasse suas formas de resolução, fornecesse justificativas e explicações sobre o resultado apresentado e sobre as ações realizadas. As perguntas e intervenções do examinador variavam em função das respostas e ações conduzidas pela criança. Essa metodologia permitiu uma posterior análise das estratégias de resolução adotadas em todos os grupos de participantes.

As entrevistas realizadas com as crianças do Grupo 1 (lápis e papel) foram gravadas em áudio e posteriormente transcritas em protocolos individuais. Durante a entrevista foi registrado todo o comportamento não verbal da criança, feitas anotações diversas que foram posteriormente coordenadas com o material gravado. As entrevistas realizadas com as crianças do Grupo 2 (material concreto neutro) e do Grupo 3 (material concreto definido) foram registradas em vídeo e posteriormente transcritas em protocolos individuais. Optou-se pelo registro em vídeo para um melhor registro das ações feitas pela criança com o material concreto, ações essas que não poderiam ser adequadamente registradas em áudio.

O tempo de resolução dos quatro problemas era livre; tendo, as entrevistas, uma duração média de 30 minutos cada.

2.3.1. Os problemas

Quatro problemas foram apresentados, cuja ordem de aplicação foi descrita no Quadro 2. Os problemas são descritos no Quadro 3, a seguir:

Quadro 3: Os problemas e suas características

Tipo de Problema	**Tipo de Operação**	
	Multiplicação	**Divisão**
Isomorfismo	*Problema 1 (P1)* Maria tem 3 jarros e quer colocar 5 flores em cada jarro. Quantas flores ela precisa comprar?	*Problema 3 (P3)* João ganhou 18 carrinhos e quer guardar os carrinhos em 6 caixas. Quantos carrinhos ele vai colocar em cada caixa?
Produto de medidas	*Problema 2 (P2)* Marta tem 4 blusas e 3 saias de cores diferentes. Ela quer combinar as blusas e as saias para formar conjuntos. Quantos conjuntos ela pode formar?	*Problema 4 (P4)* Mudando as blusas e as saias de cores diferentes, Ana pode fazer 20 conjuntos diferentes. Ela tem 5 saias. Quantas blusas ela tem?

Como ilustrado no quadro acima, dois problemas envolviam a multiplicação para sua resolução (P1 e P2) e dois problemas envolviam a divisão para sua resolução (P3 e P4). Ainda, segundo o planejamento experimental adotado, dois problemas eram do tipo isomorfismo (P1 e P3) e dois problemas eram do tipo produto de medidas (combinatória: P2 e P4).

Importante mencionar que dentre os problemas de multiplicação, o problema P2 (produto de medidas) era mais complexo do que o problema P1 (isomorfismo), embora ambos tivessem pares numéricos semelhantes. Dentre os problemas de divisão, o problema P4 (produto de medidas) era mais complexo do que o problema P3 (isomorfismo), embora ambos tivessem pares numéricos semelhantes. Assim, mesmo sendo requerido uma mesma operação e envolvendo pares numéricos semelhantes, os problemas diferiam quanto ao grau de complexidade que apresentavam, complexidade esta determinada pelo tipo de problema apresentado. A tipologia adotada neste estudo corresponde àquela proposta por Vergnaud (1988, 1991, 1993).

Os números apresentados nos problemas não ultrapassavam o número 20. Em pesquisas anteriores (Lautert & Spinillo, 1999; Selva 1998) verificou-se através de sondagem, que crianças desta faixa etária e inclusive mais novas, não têm dificuldades em fazer a contagem até 20. Os pares numéricos envolvidos nos problemas foram os mesmos adotados por Selva (1998) em estudo sobre problemas de divisão em crianças em idades mais novas do que aquelas das crianças participantes na presente investigação. Naquele estudo, tais pares numéricos não apresentavam problemas para as crianças.

2.3.2. As situações de resolução e os suportes de representação

Tendo em vista o objetivo do presente estudo, foram criadas três diferentes situações de resolução de problemas. Cada uma dessas situações envolvia o uso de suportes de representação distintos: lápis e papel (grupo 1), material concreto neutro

(Grupo 2) e material concreto definido (Grupo 3). Em cada situação as crianças de cada grupo resolviam os mesmos problemas os quais eram aplicados na ordem descrita no Quadro 2. As idades das crianças em cada grupo eram as mesmas bem como as séries que frequentavam. Assim, os grupos eram bastante homogêneos quanto à idade e escolaridade, diferenciando-se quanto às situações apresentadas para a resolução das mesmas operações, situações estas que se diferenciavam pelo suporte de representação disponibilizado.

2.4. Material

O material utilizado na coleta de dados variava em função dos grupos de participantes, isto é, em função dos suportes de representação oferecidos durante o processo de resolução dos problemas:

Grupo 1 (lápis e papel): papel e lápis, gravador e fita cassete.

Grupo 2 (material concreto neutro): 30 fichas plásticas circulares de uma só cor (vermelha) e de um mesmo tamanho (4cm de diâmetro), disponibilizava-se uma quantidade de fichas maior do que o necessário (máximo de 20 fichas), filmadora e fita de vídeo.

Grupo 3 (material concreto definido): 25 carrinhos plásticos, 12 caixas de papelão (11cm x 16cm x 5cm), 25 flores plásticas em tamanho reduzido, 10 jarros plásticos em tamanho reduzido, 25 saias e 25 blusas em tamanho reduzido, em cores e padronagens diversas que não se repetiam. O material fornecido era sempre em maior quantidade do que o necessário para a resolução dos problemas. Filmadora e fita de vídeo.

Capítulo III.

Sistema de análise das estratégias de resolução

Além do desempenho, foram analisadas as estratégias adotadas pelas crianças ao resolverem os quatro problemas apresentados. As estratégias de resolução foram analisadas a partir dos protocolos individuais de cada criança, tomando por base os estudos de Selva (1998) e de Mulligan & Wright (2000), embora algumas adaptações tenham sido feitas com o objetivo de adequar os dados obtidos aos sistemas de análise propostos por aquelas autoras.

As adaptações foram feitas em conseqüência do fato de que os suportes de representação adotados na presente investigação não eram os mesmos usados nos estudos dessas autoras. Selva (1998) examinou a resolução de problemas de divisão, utilizando material concreto neutro (fichas), lápis e papel e situação sem nenhum tipo de material. Mulligan (1992) e Mulligan & Wright (2000), por sua vez, investigaram problemas de multiplicação e de divisão utilizando fichas como suporte de representação. Apesar dessas adaptações, o sistema de análise adotado é fortemente baseado nas estratégias identificadas por essas duas autoras.

Dada a natureza dos tipos de problemas investigados – isomorfismo e combinatória – tornou-se necessário agrupar as estratégias em dois blocos: um relativo às estratégias adotadas na resolução dos problemas de isomorfismo e outro relativo às estratégias adotadas na resolução dos problemas de combinatória, como apresentado no quadro 4.

Quadro 4: Resumo geral das estratégias em cada tipo de problema identificadas no presente estudo.

Isomorfismo	**Combinatória**
Inadequada	Inadequada
Contagem ou distribuição unitária	Combinação por pares fixos
Ensaio e erro por ajustes	Combinação flexível dos pares limitados pelo maior número presente no enunciado
Adição repetida	Combinação flexível dos pares
Contagem em múltiplos	
Mista	
Aplicação da operação	

A classificação das estratégias das crianças foi feita por dois juizes independentes, cujo percentual de concordância entre eles foi de 93,75% . Os casos de discordância foram analisados por um 3° juiz também independente, cuja classificação foi considerada final.

As estratégias são descritas e exemplificadas a seguir[8].

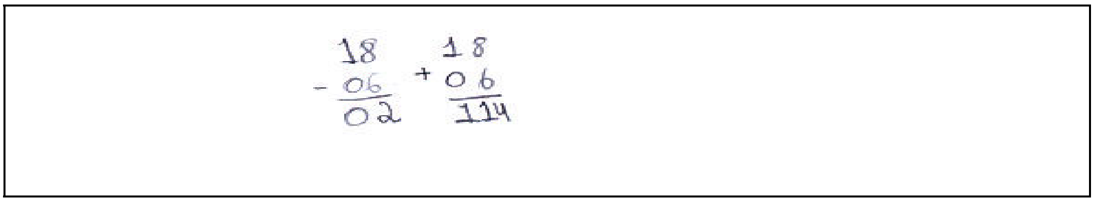
3.1. Estratégias nos problemas de isomorfismo

Estratégia inadequada: Nessa estratégia a criança realiza uma operação inadequada, em geral a adição ou a subtração, aos números contidos no enunciado do problema. Observa-se que a criança elabora sua resposta em relações

[8] Convenções adotadas: C – criança; E – examinador.

proporcionais inadequadas, mostrando dificuldades em seguir as determinações do problema, podendo perder de vista as informações do problema. Esta estratégia foi também identificada por Selva (1998) e por Lautert (2000). Exemplos são apresentados na Figura 1.

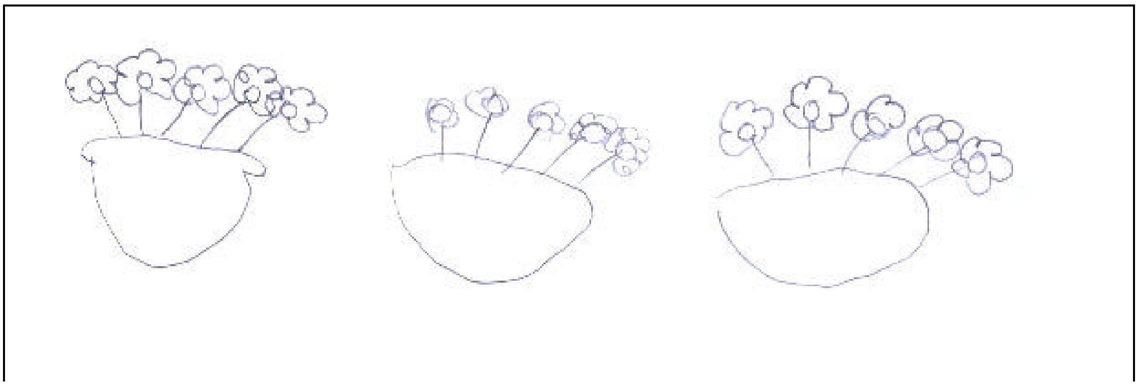
Figura 1: Participante 07 (8,5 anos), Grupo 1: Lápis e papel, problema de isomorfismo P3: João ganhou 18 carrinhos e quer guardar os carrinhos em 6 caixas. Quantos carrinhos ele vai colocar em cada caixa?



C – Então é 18 menos 6?
E – Como você quiser resolver.
C – (resolve, usando subtração) Pronto.
E – Pronto? Então, quantos carrinhos ele vai colocar em cada caixa?
C – Peraí, deixa eu ver de mais quanto é que dá (resolve, conta de adição).104. Não é essa não, deve ser essa aqui de menos. Eu acho que é a de menos.
E – Você acha que é a de menos? Então, quantos carrinhos ele vai colocar em cada caixa?
C – 2.

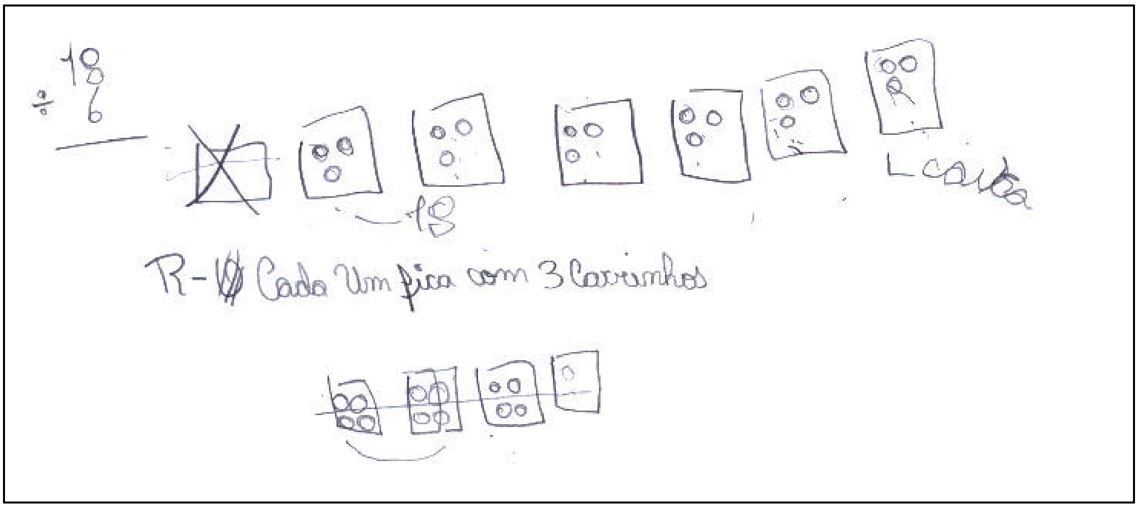
Contagem ou distribuição unitária: Na contagem unitária, as crianças fazem a representação direta do enunciado do problema e contam cada unidade para descobrir o resultado. Esta estratégia é característica dos problemas do tipo isomorfismo que requerem a multiplicação, onde as crianças contam de um em um para descobrir o todo. A distribuição unitária é típica dos problemas de isomorfismo que requerem a divisão, onde a criança realiza a correspondência um-a-um. Esta estratégia foi documentada por Selva (1998), por Mulligan (1992) e por Mulligan & Wright (2000). Exemplo de contagem unitária é apresentado na Figura 2 e de distribuição unitária na Figura 3.

Figura 2: Participante 06 (8,1 anos), Grupo 1: Lápis e papel,
Problema de isomorfismo, P1: Maria tem 3 jarros e quer colocar 5 flores em cada jarro. Quantas flores ela precisa comprar?



C – (resolve). 15.
E – 15? Agora me explica como foi que tu fez.
C – Eu desenhei 3 jarros (aponta para os círculos), coloquei 5 flores em cada jarro (aponta para as flores).
E – E como foi que tu chegou em 15?
C – Assim, eu contei 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 (conta cada rosa)
E – Então ela precisa comprar 15 flores?
C – (afirma)

Figura 3: Participante 14 (8,0 anos), Grupo: Lápis e papel,
Problema de isomorfismo, P3: João ganhou 18 carrinhos e quer guardar os carrinhos em 6 caixas. Quantos carrinhos ele vai colocar em cada caixa?



C – Aí eu tenho 18, então cada uma eu vou colocar 1 bolinha, não vou colocar logo 3 vezes em cada uma, vou fazer 1 bolinha aqui, outra bolinha aqui, outra aqui, outra, outra, outra. E aqui depois eu coloco mais outra, mais outra, e aqui coloco mais 1, mais 1, mais 1, mais 1, mais 1, mais 1. E depois quando tiver, aqui já tá no 12 e aqui eu vou colocar 13, 14, 15, 16, 17, 18. E aqui vai dá o número 18. Então quer dizer que cada caixinha vai ficar com 3 carrinhos.

E – E por que foi que tu colocou de 1 em 1?

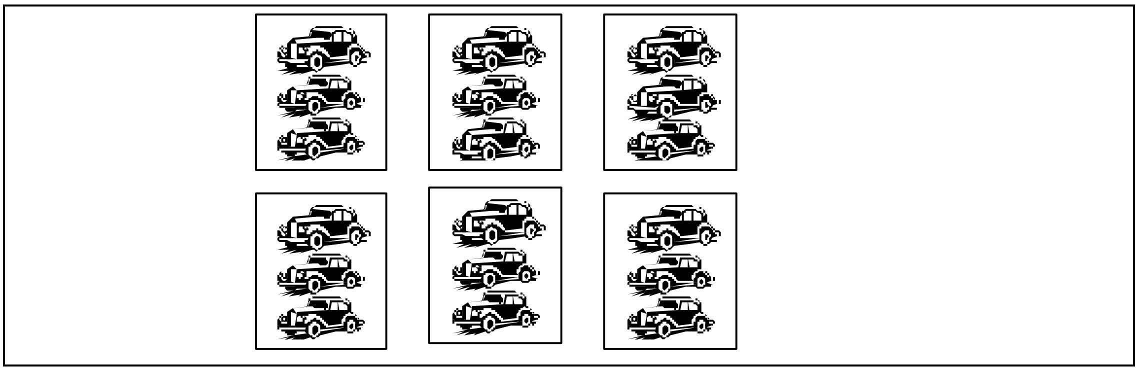
C – Porque é melhor, porque no caso se eu colocar assim, por exemplo, eu tenho 1 caixinha aí vamos supor que eu coloque 4 nessa caixinha e aqui mais 4, mas eu tenho que me lembra que ainda tenho mais 4 caixinhas e como eu posso dividir? Aí eu vou ter que colocar mais 4 aqui não vai dá. Aqui eu já tenho 8, 4 mais 8, aqui já vai ter 12, mais 4 vai ter 18, ainda tenho que colocar mais 4 carrinhos em mais 2 caixinhas, eu não posso, aí ele só vai guardar aqui 18 carrinhos em 8 caixas, em 6.

E – Então quantos carrinhos ele vai colocar em cada caixa?

C – 3.

Ensaio e erro por ajustes: De início a criança fornece um número como resultado, sendo este maior ou menor do que a resposta correta. Depois, faz ajustes e aproximações neste número (aumentando ou diminuindo) até chegar a um número que considera aceitável como resultado, podendo este ser correto ou não. Esta estratégia foi também identificada por outros autores (Selva, 1998; Mulligan, 1992). Exemplo de ensaio e erro por ajustes é apresentado na Figura 4.

Figura 4: Participante 45 (8,5 anos), Grupo 3: Material concreto definido, Problema de isomorfismo, P3: João ganhou 18 carrinhos e quer guardar os carrinhos em 6 caixas. Quantos carrinhos ele vai colocar em cada caixa?

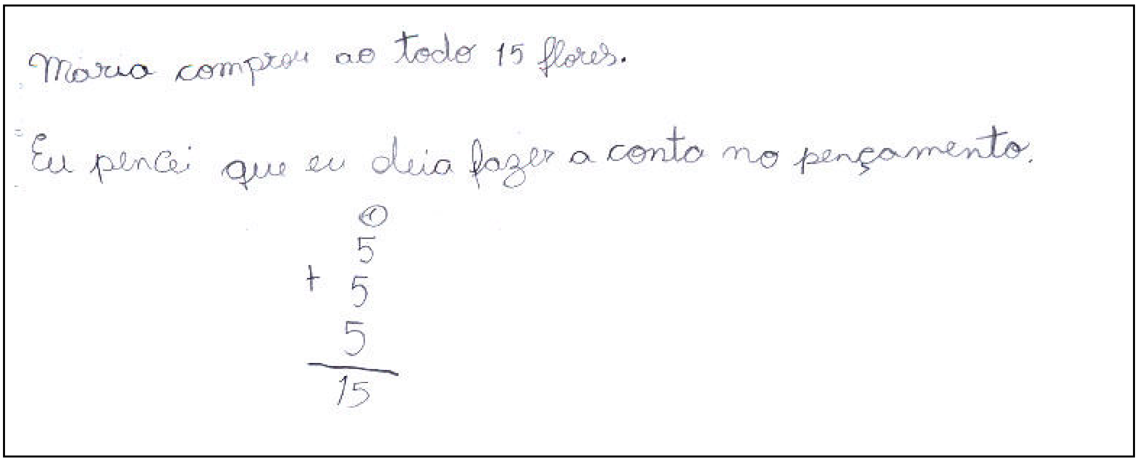


C – (Pega 6 caixas. Coloca 8 carrinhos na sexta caixa. Coloca mais 4 carrinhos na primeira caixa. Retira 2 carrinhos da sexta caixa e coloca-os na primeira caixa, deixando a primeira e a sexta caixa com 6 carrinhos cada uma. Retira 2 carrinhos de cada caixa. Ficando cada uma com 4 carrinhos. Coloca 4 carrinhos na quinta caixa, 4 carrinhos na segunda caixa, 2 carrinhos na terceira caixa. Tira 1 carrinho da segunda caixa e coloca na terceira caixa. Retira 1 carrinho da primeira, da sexta e da quinta caixa, ficando cada uma das cinco caixas com 3 carrinhos e a quarta caixa fica vazia. Conta todos os carros e coloca 3 carros na quarta caixa.) Pronto!

E – Quantos carrinhos ele vai colocar em cada caixa?
C – 3.

Adição repetida: As crianças adicionam sucessivamente uma determinada quantidade tantas vezes fossem estipuladas pelo enunciado do problema (5+5+5...). Esta estratégia é conhecida na literatura, havendo sido também identificada por Selva (1998), por Mulligan (1992) e por Mulligan & Wright (2000).

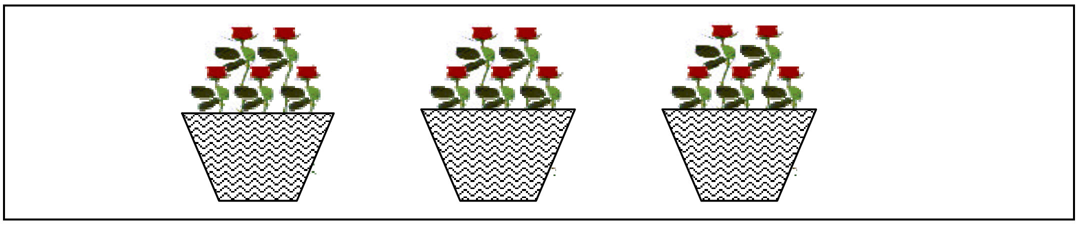
Figura 5: Participante 01 (8,4 anos), Grupo 1: Lápis e papel,
Problema de isomorfismo, P1: Maria tem 3 jarros e quer colocar 5 flores em cada jarro. Quantas flores ela precisa comprar?



C – 15.
E – Como foi que tu pensou? Coloca aqui no papel.
C – Colocando 5 mais 5 mais 5. Maria comprou ao todo 15 flores.
E – Então, esse 5 daqui é o quê? (aponta para o número 5)
C – O cinco de flores.
E – E esse outro 5?
C – Flores.
E – E esse outro 5?
C – Flores.
E – E esse 15?
C – Flores.

Contagem em múltiplos: As crianças realizam a contagem dos grupos formados com quantidades iguais através dos múltiplos, usando ritmos, dobro, contam números de grupos iguais, sem mencionar o sinal da operação que está sendo utilizada, até chegar ao todo (5,10,15...; 3,6,9...). Esta estratégia foi documentada por Mulligan & Wright (2000). Exemplo de contagem em múltiplos é apresentado na Figura 6.

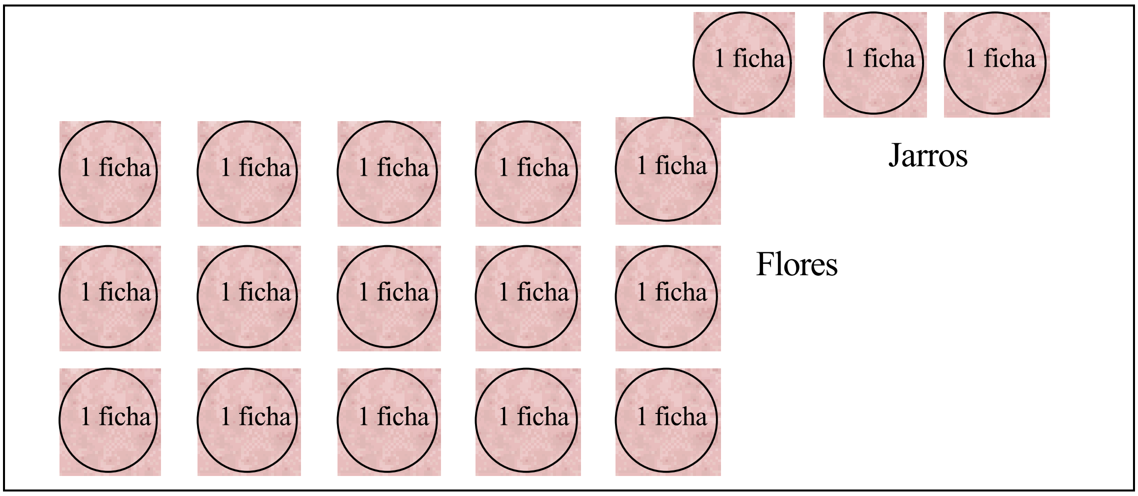
Figura 6: Participante 45 (8,5 anos), Grupo: Material concreto definido, problema de isomorfismo, P1: Maria tem 3 jarros e quer colocar 5 flores em cada jarro. Quantas flores ela precisa comprar?



C – (Coloca 5 flores em cada jarro).
E – Então, quantas flores ela precisa comprar?
C – 5, 10, 15. (apontando cada jarro com 5 flores cada.)

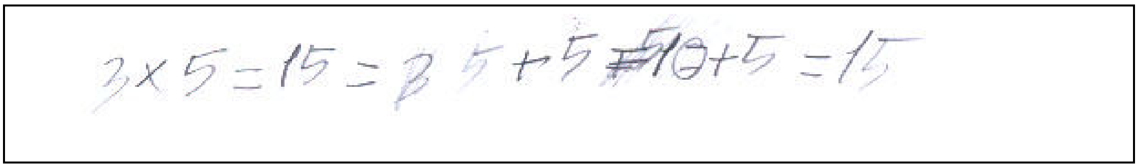
Mista: As crianças fazem uma combinação da adição repetida com várias estratégias: contagem em múltiplos, aplicam a multiplicação ou a divisão aos números presentes no enunciado. Esta combinação de estratégias parece expressar a tentativa da criança em explicar para o examinador o seu processo de resolução. Exemplos são ilustrados na Figura 7, na Figura 8 e na Figura 9.

Figura 7: Participante 24 (8,5 anos), Grupo 2: Material concreto neutro, problema de isomorfismo, P1: Maria tem 3 jarros e quer colocar 5 flores em cada jarro. Quantas flores ela precisa comprar?



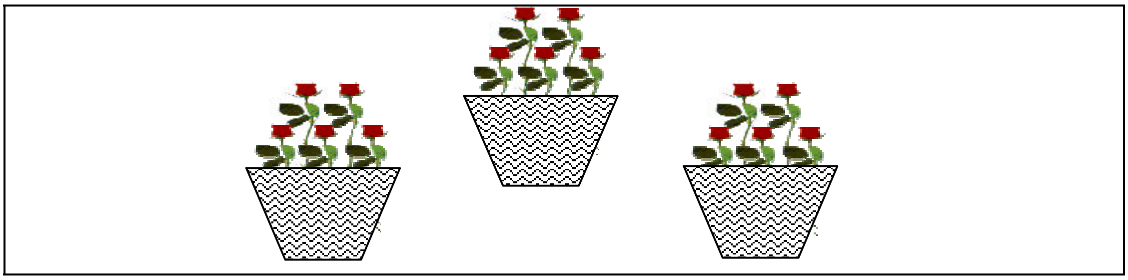
C – (coloca 3 fichas sobre a mesa)
E – O que são isso daqui que você colocou?
C – São os 3 jarros.
E – (relê o problema)
C – 15.
E – 15? Como foi que tu pensou que descobriu que eram 15?
C – 5, 10, 15. (Coloca as fichas sobre a mesa 1 por 1. Primeiro coloca 5 fichas formando uma fila, depois coloca mais 5 fichas formando outra fila (em cima da fila anterior) e depois coloca mais 5 fichas formando uma terceira fila, em baixo da primeira fila, totalizando três filas paralelas.). 5 mais 5 mais 5.
E – Por que foi que tu colocou 5, 5 e 5? (os três grupos com 5 flores cada grupo)
C – Ela não disse ela que tinha que colocar 5 flores? Então eu botei 5 flores!
E – E essas 5 flores vão pra onde?
C – Pra cada um dos jarros.
E – Quantas flores ela precisa comprar?
C – 15.

Figura 8: Participante 02 (8,3 anos), Grupo: Lápis e papel, problema de isomorfismo, P1: Maria tem 3 jarros e quer colocar 5 flores em cada jarro. Quantas flores ela precisa comprar?



C – 15.
E – Como foi que tu pensou pra chegar em 15? Diz pra mim!
C – Aqui. 3 vezes 5 é igual a 15, então, eu pensei assim, no número 3. 3 ... 5 mais 5, mais 5.
E – Então coloca no papel como foi que tu pensou!
C – (resolve)
E – Agora por que tu fez 3 vezes 5 é igual a 15? Por que tu fez essa continha?
C – Porque... é... 5 mais 5 mais 5. 5 mais 5 dá 10. 10 mais 5 que dá 15. Aí, 3 vezes 5, que é 5 mais 5 mais 5, é... o que sobrou do resultado, dessa continha 5 mais 5 mais 5 aí deu 15 é igual a 3 vezes 5.

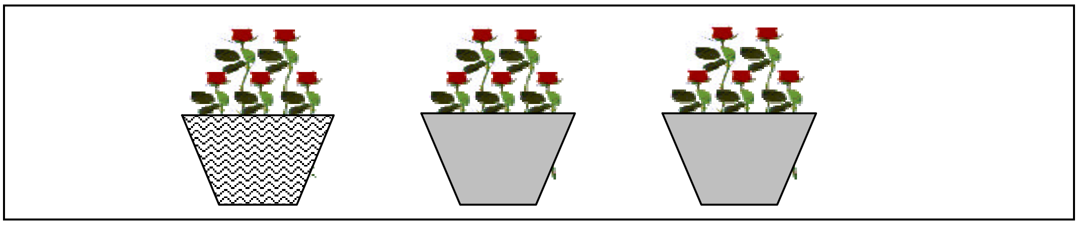
Figura 9: Participante 46 (8,4 anos), Grupo 3: Material concreto definido, problema de isomorfismo, P1: Maria tem 3 jarros e quer colocar 5 flores em cada jarro. Quantas flores ela precisa comprar?



C – (Pega 3 jarros). 15
E – Como foi que pensou que tu descobriu que eram 15?
C – É que 5 mais 5, 10, mais 5 é 15. (Coloca 5 flores no primeiro, 5 flores no segundo e 5 no terceiro jarro).
E – Porque foi que tu colocou 5 nesse jarro, depois 5 nesse e depois 5 nesse?
C – Porque não eram 15, então 15 dividido por 3 aí dá 5.
E – Então quantas flores Maria precisa comprar?
C – 15.

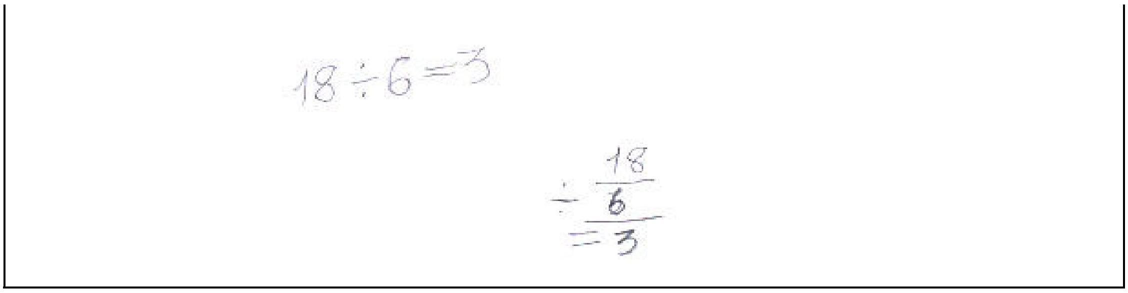
Aplicação das operações: As crianças usam as operações de divisão e de multiplicação. Essa estratégia se assemelha à estratégia "uso de fato conhecido" identificada por Selva (1998), por Mulligan (1992) e por Mulligan & Wright (2000). Exemplos são mostrados na Figura 10 e na Figura 11. Interessante mencionar que um tipo de erro encontrado quando usada esta estratégia foi, na divisão, a inversão do divisor pelo quociente. Neste caso, a criança realiza a divisão, mas considerava o divisor como sendo o quociente. Este tipo de erro foi documentado por Spinillo (2001), e é ilustrado na Figura 12.

Figura 10 Participante 41 (8,0 anos), Grupo 3: Material concreto definido, problema de isomorfismo, P1: Maria tem 3 jarros e quer colocar 5 flores em cada jarro. Quantas flores ela precisa comprar?



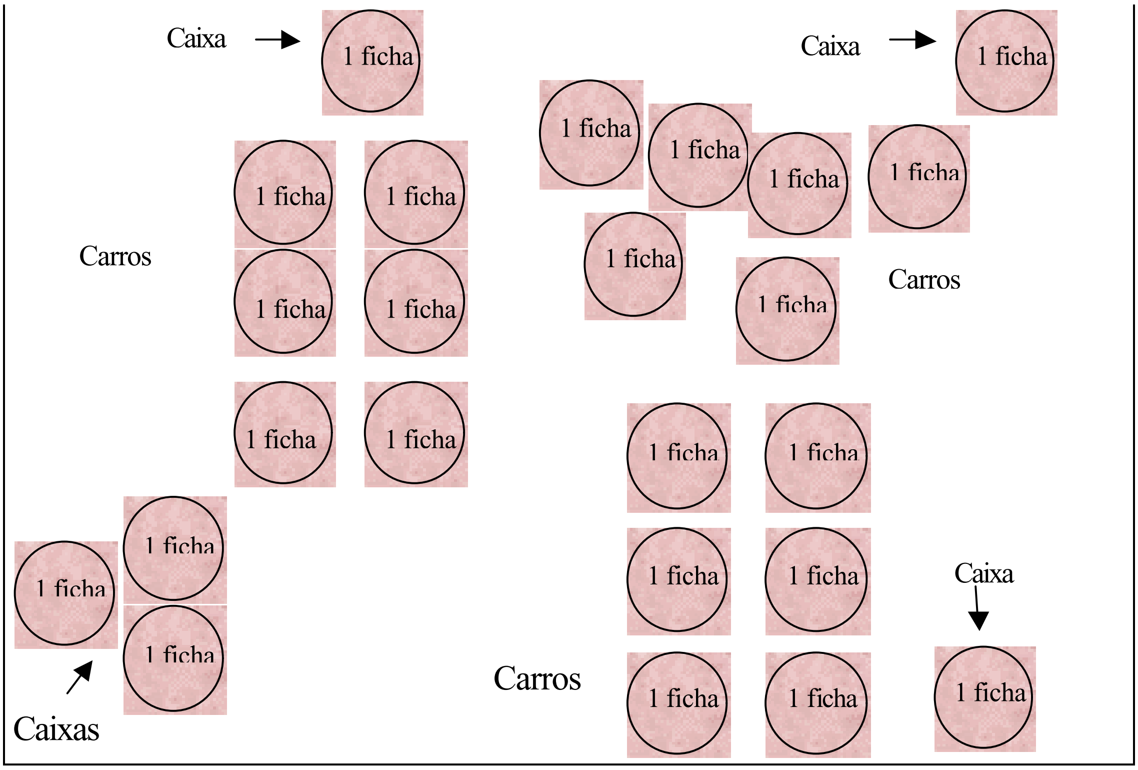
C – 15.
E – Como é que tu sabe que são 15?
C – 3 ligados a cada com 15, 5 que diga (Pega os 3 jarros, coloca no 1.º jarro as 5 flores, no 2.º mais 5 flores e no 3.º as outras 5 flores.)
E – Como foi que tu fez, me explica, como foi que tu pensou ?
C – Porque 5 vezes 3 é 15.

Figura 11: Participante 01 (8,4 anos), Grupo 1: Lápis e papel, problema de isomorfismo, P3: João ganhou 18 carrinhos e quer guardar os carrinhos em 6 caixas. Quantos carrinhos ele vai colocar em cada caixa?



C – 3.
E – Por quê? Me explica! Como foi que tu pensou?
C – 18 dividido por 6 (igual) 3.
E – Esse 18 aqui é o quê?
C – É a quantidade de carros.
E – E esse 6?
C – É a quantidade de caixas.
E – E esse 3?
C – É a quantidade que vai ficar em cada caixa.

Figura 12: Participante 34 (8,1 anos), Grupo 2: Material concreto neutro, problema de isomorfismo, P3: João ganhou 18 carrinhos e quer guardar os carrinhos em 6 caixas. Quantos carrinhos ele vai colocar em cada caixa?

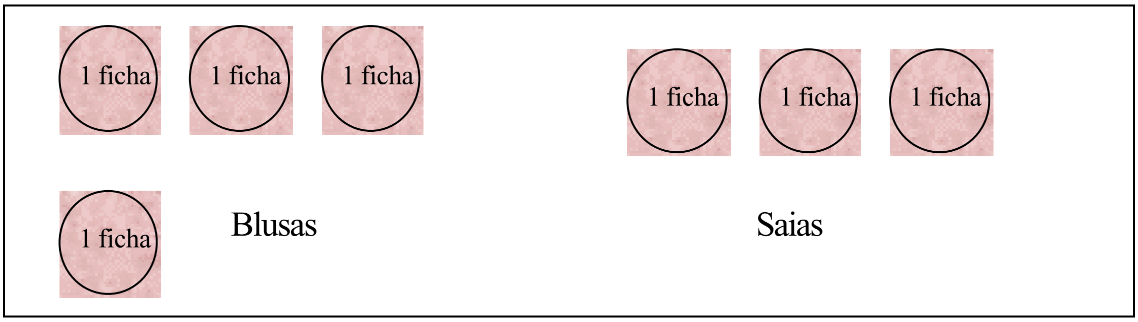


C – (Coloca 18 fichas na mesa. Separa as 18 fichas em 3 fileiras de 6 fichas cada uma.). 6.
E – Como foi que tu pensou?
C – 18 carrinhos dividido por 6? (junta todas as fichas).
E – 6 o quê?
C – 6 caixas. (separa as fichas em grupos de 6 fichas cada um.) Aí já formou uma caixa aqui, seis. Mais seis aqui. E aqui mais 6. (forma 3 grupos com 6 fichas cada.).
E – Quantos carrinhos ele vai colocar em cada caixa?
C – 6.

3.2. Estratégias nos problemas de combinatória

Estratégia inadequada: Nessa estratégia a criança realiza uma operação inadequada, em geral a adição ou a subtração, aos números contidos no enunciado do problema. Observa-se que a criança elabora sua resposta em relações proporcionais inadequadas, mostrando dificuldades em seguir as determinações do problema, podendo perder de vista as informações do problema. Esta estratégia foi também identificada por Selva (1998) e por Lautert (2000). Exemplos são apresentados na Figura 13, na Figura 14 e na Figura 15.

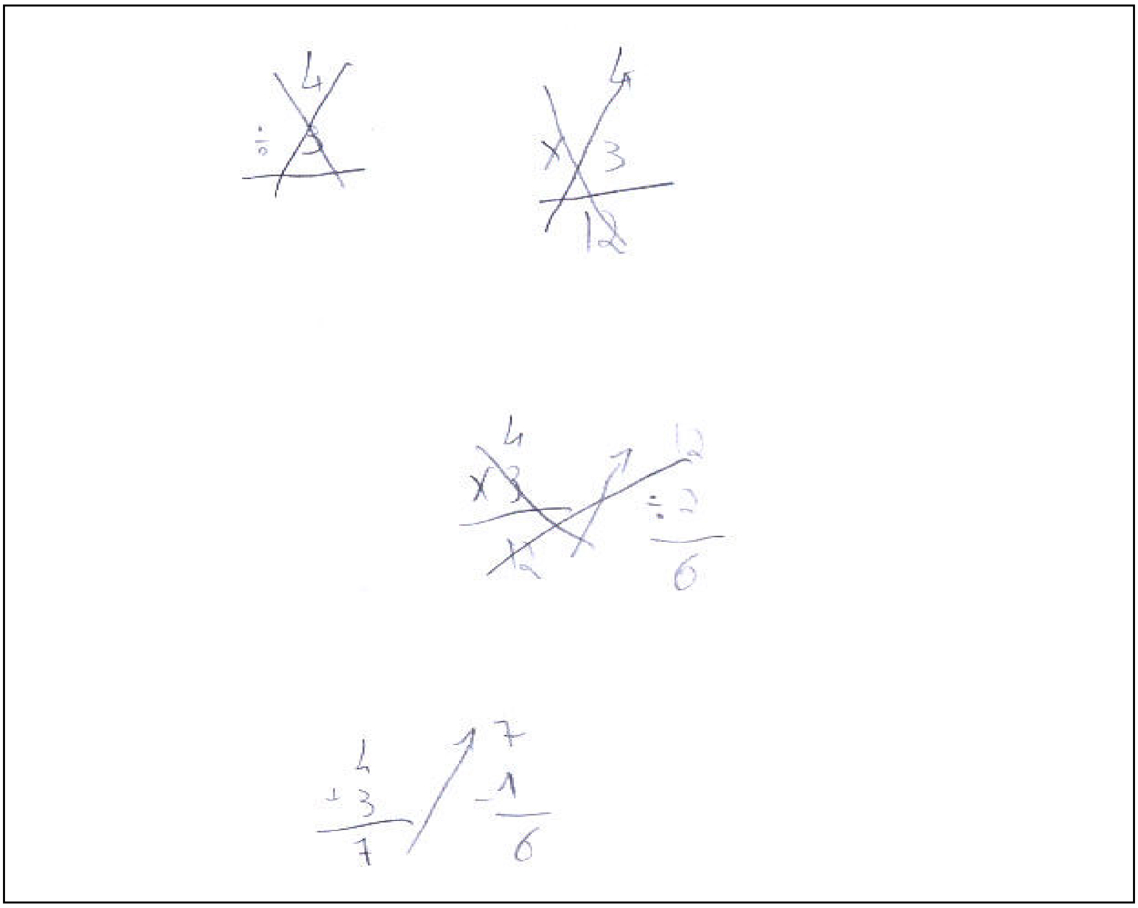
Figura 13: Participante 28 (8,2 anos), Grupo 2: Material concreto neutro, problema de combinatória, P2: Marta tem 4 blusas e 3 saias de cores diferentes. Ela quer combinar as blusas e as saias para formar conjuntos. Quantos conjuntos ela pode formar?



C – Vou fazer 4 blusas (pega 4 fichas) e 3 saias (pega 3 fichas). Vai dar 7.
E – 7 o quê?
C – 7 saias.
E – E quantos conjuntos ela pode formar?
C – 7.

E – Me mostra os conjuntos que ela pode formar. Como é que ela pode formar esses conjuntos?
C – 4 blusas e 3 saias.
E – Como tu pensou para descobrir que era 7?
C – Somando 4 mais 3.
E – Então, quantos conjuntos ela pode formar?
C – 7.

Figura 14: Participante 03 (8,2 anos), Grupo 1: Lápis e papel, problema de combinatória, P2: Marta tem 4 blusas e 3 saias de cores diferentes. Ela quer combinar as blusas e as saias para formar conjuntos. Quantos conjuntos ela pode formar?



C – (resolve no papel). É que eu tô pensando que conta eu tô fazendo. Não é essa conta não (a 1ª conta, tenta a segunda). Eu não sei quanto eu tenho que fazer, mas eu sei o resultado, já!
E – E qual é o resultado?
C – O resultado é 6.
E – Como foi que tu pensou?
C – Foi que eu pensei assim, 4 mais 3, pra dar um número par sabe. Eu pensei 4 mais 3 não pode. Então eu pensei 3 mais 3. Que eu tenho que ver os pares mais próximos. Aí dá 3 e não daria nem pra aumentar nem pra diminuir, porque senão fica muito pouco. Aí eu deixei 3. Aí eu pensei 4, aí eu pensei 5 aí não daria para

aumentar. Então eu pensei em diminuir, ficava 3 mais 3 (igual) 6, um número par. Aí depois eu [inaudível] ... aí deu pra fazer 3 conjuntos.

E – 3 conjuntos? E como foi que tu fez assim?

C – Eu pensei assim 4 dividido por 3, num pode. Pensei 4 mais 3, num pode. Nem 4 menos 3 num pode. Então fiz 4 vezes 3, também num dá.

E – Você quer que dê quanto?

C – É... 6.

E – Então como é que você acha que vai dar esses 6 conjuntos?

C – 12. Peraí (faz no papel) 4 vezes 3 (igual) 12. 12 dividido por 2 (igual) 6. Pronto. 4 vezes 3 (igual) 12, passa o doze pra cá, dividido por 2 deu 6.

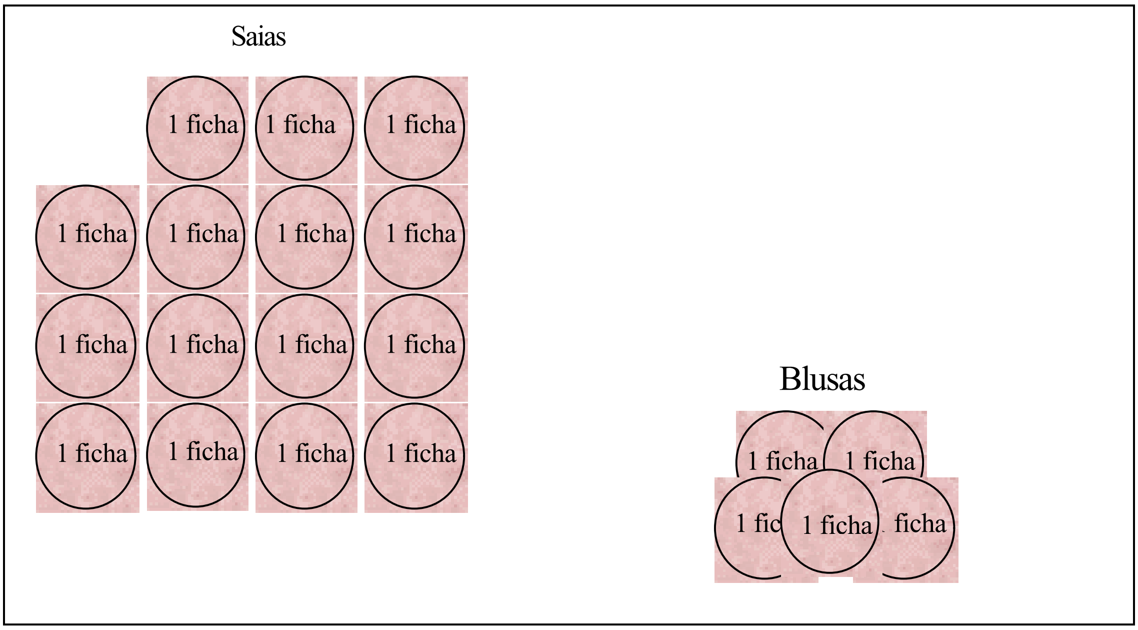
E – Por que foi que tu primeiro fez essa continha e depois tu fez essa continha?

C – Porque de 4 dividido por 3, nem 4 vezes 3, nem 4 mais 3, nem 4 menos 3. não dá. Então pensei em [inaudível] ... 4 vezes 3 (igual) 12. Botei 12 aí dividi por 2. entendeu? Pra formar conjuntos. Porque 12 era o total de roupas. Não. O total era 7. Eu tinha mais 12, 4 vezes 3. Eu pensei em 4 vezes 3, eu não pensei em 4 mais 3. Então não era 7, se fosse 7 era 7 menos 1. 7 menos 1 dava 6, também... Mas eu só botei um jeito como esse 4 vezes 3 (igual) 12, aí eu dividi 2.

E – Então, quantos conjuntos Marta pode formar?

C – 6 conjuntos.

Figura 15: Participante 21 (8,5 anos), Grupo 2: Material concreto neutro, problema de combinatória, P4: Mudando as blusas e as saias de cores diferentes, Ana pode fazer 20 conjuntos diferentes. Ela tem 5 saias. Quantas blusas ela tem?



C – Ela tem 15 blusas.

E – Como foi que tu fez?

C – Eu tenho 20 aí tiro 5 aí fica 15.

E – Então tenta fazer usando essas fichinhas!

C – (separa na mesa 5 fichas) aqui é 5 saias. 15 blusas. (coloca as fichas sobre a mesa separadas das 5 “saias”) 3, 4, 5...9, 6,7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 (começa a contar a partir de 6 já tendo 9 fichas na mesa). Juntando esses 15 com 5 ô, 16, 17, 18, 19 e 20 (junta as 5 "saias" com o grupo da 15 "blusas").

E – Então quantas blusas ela tem?

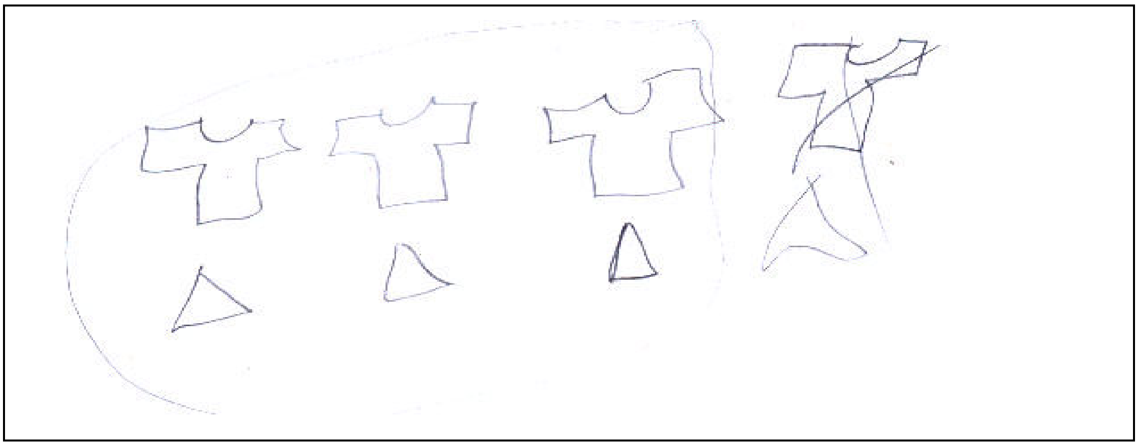
C – Tem 15 blusas.

E – Como foi que tu descobriu que eram 15?

C – Porque eu tenho 20 aí quando eu tiro 5 de 20 aí eu fico com 15.

Combinação por pares fixos: A criança oferece como resposta o menor número presente no enunciado do problema. Isso ocorre porque a criança pensa em termos de pares fixos, não aceitando que uma mesma saia/blusa possa combinar (fazer par) com mais de uma blusa/saia. Uma vez formado os pares, esses não poderão ser desfeitos. Exemplo ilustrado na Figura 16.

Figura 16: Participante 07 (8,5 anos), Grupo 1: Lápis e papel, problema de combinatória, P2: Marta tem 4 blusas e 3 saias de cores diferentes. Ela quer combinar as blusas e as saias para formar conjuntos. Quantos conjuntos ela pode formar?



C – (resolve no papel) 4 blusas e 3 saias, né? Então ela vai poder formar 3 conjuntos e essa blusa não vai poder.

E – Então ela nunca vai poder usar essa blusa?

C – Ela pode usar essa blusa com outra calça, short.

E – Mas com essas saias não? Essa saia ela nunca vai poder vestir com essa blusa daqui?

C – Vai poder. Eu tô falando assim, porque aqui tá falando, Marta tem 4 blusas e 3 saias de cores diferentes ela quer combinar as blusas e saias para formar conjuntos. Quantos conjuntos ela pode formar? Então ela pode formar 3 conjuntos. Porque se fosse... se ela tivesse 4 blusas e 4 saias ela podia usar com essa aqui. Entendeu?

E – Então essa blusa ela não vai poder usar com nenhuma dessas outras saias?

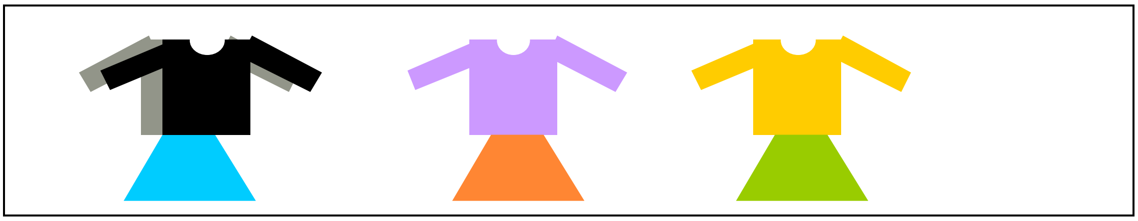
C – Vai poder usar. Mas ele tá perguntando quantos conjuntos vai poder formar!

E – E quando ela puder usar não forma mais um conjunto não?

C – Não.
E – Então ela só pode formar quantos conjuntos?
C – 3.

Combinação flexível dos pares limitados pelo maior número presente no enunciado: A criança oferece como resposta o maior número presente no enunciado do problema. Isso ocorre porque a criança começa a pensar em termos de pares combinados, mas não aceita a idéia de poder formar mais conjuntos do que determina o maior número do enunciado; aceita, entretanto, que a blusa/saia que serve de referente para o menor número do enunciado combine com mais de uma saia/blusa. O número de combinações se limita à quantidade expressa pelo maior número do enunciado do problema. Exemplo é fornecido na Figura 17.

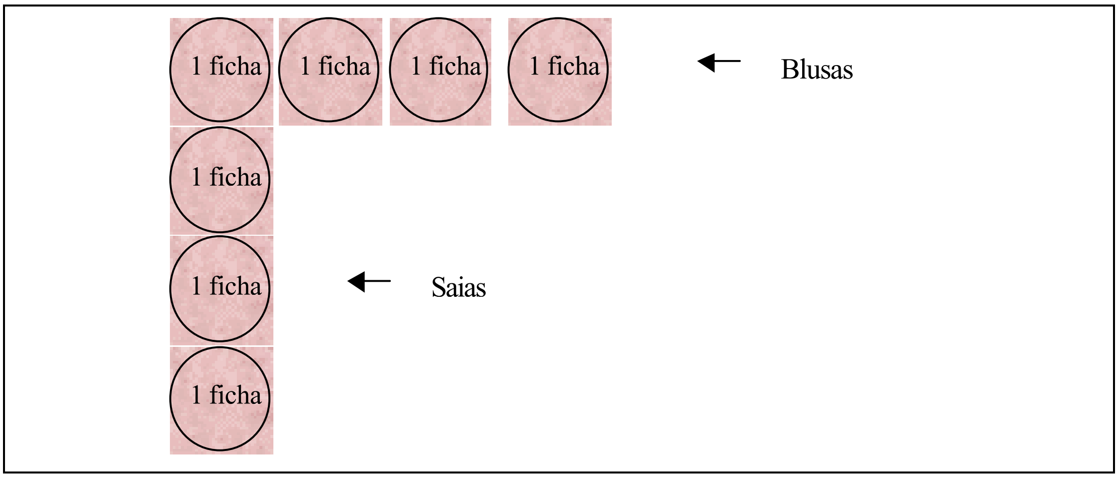
Figura 17: Participante 48 (8,4 anos), Grupo 3: Material concreto definido, problema de combinatória, P2: Marta tem 4 blusas e 3 saias de cores diferentes. Ela quer combinar as blusas e as saias para formar conjuntos. Quantos conjuntos ela pode formar?



C – (Pega 4 blusas e 3 saias; forma conjuntos com as saias e com as blusas e uma saia fica com 2 blusas)
E – Quantos conjuntos ela pode formar?
C – 4.
E – Me mostra!
C – Esse, esse, esse e esse (mostra os conjuntos formados na mesa e diz que a ultima saia pode formar 2 conjuntos).
E – Então quantos conjuntos ela pode formar?
C – 4.
E - E se ela quiser colocar essa saia com essa blusa e essa blusa com essa saia, ela pode? (realiza uma troca de blusa)
C – Pode.
E – Então quantos conjuntos ela pode formar?
C – 4 de novo.

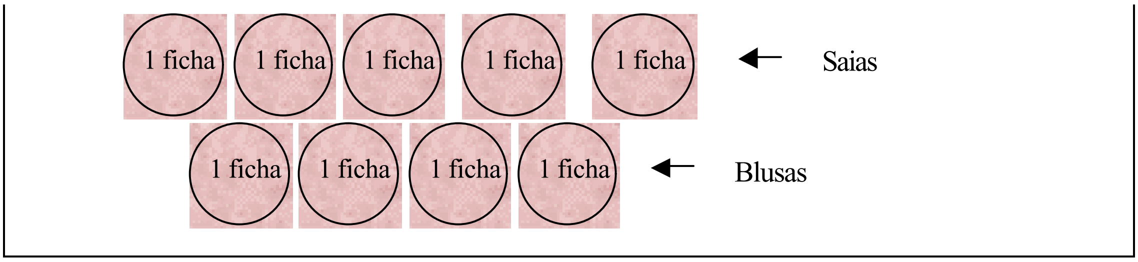
Combinação flexível dos pares: As crianças pensam em termos de pares combinados, e passam a aceitar que uma blusa pode combinar com mais de uma saia, não se limitando, como ocorria com as duas estratégias anteriores, a aceitar apenas o maior ou o menor número do enunciado como sendo o número possível de combinações. A criança parece diferenciar número de combinações do número de objetos a serem combinados, sendo esta uma diferenciação importante na construção do raciocínio combinatório. A Figura 18 e a Figura 19 exemplificam esta estratégia.

Figura 18: Participante 33 (8,4 anos), Grupo 2 Material concreto neutro, problema de combinatória, P2: Marta tem 4 blusas e 3 saias de cores diferentes. Ela quer combinar as blusas e as saias para formar conjuntos. Quantos conjuntos ela pode formar?



C – (Coloca 4 fichas na horizontal e 3 fichas na vertical, formando um quadrado cartesiano. Gesticula com a mão a correspondência um a um de cada ficha da vertical com cada ficha da horizontal e dá o resultado correto.). 12.
E – Como foi que tu descobriu que eram 12? Como foi que tu pensou?
C – Aqui tem 4 blusas (fichas na horizontal) cada saia tem 4 blusas. Uma saia pra essa, uma saia pra essa, uma saia pra essa... (uma saia combina com cada uma das 4 blusas). Aí já dá 4, aí dá 8, aí dá 12. (mostra cada saia com cada blusa).
E – Então quantos conjuntos ela pode formar?
C – 12.

Figura 19: Participante 33 (8,4 anos), Grupo 2: Material concreto neutro, problema de combinatória, P4: Mudando as blusas e as saias de cores diferentes, Ana pode fazer 20 conjuntos diferentes. Ela tem 5 saias. Quantas blusas ela tem?



C – (coloca 5 fichas na horizontal. Pega mais 5 fichas, coloca na horizontal – em baixo da outra fileira - e vai combinando cada ficha de uma fileira com cada uma das fichas de cima dispostas horizontalmente. No final devolve uma ficha da fileira de baixo. Ficando com um grupo de 4 fichas.). 4 camisas.
E – Como foi que tu pensou que tu descobriu que eram 4 camisas?
C – Eu peguei as 5 saias aqui, aí eu botei, 1, 2, 3, 4, 5, outra camisa 1, 2, 3, 4, 5.... aí ficou 10, peguei outra 1, 2, 3, 4, 5... 15, outra 1, 2, 3, 4, 5.... aí ficou 20. (forma um conjunto de cada blusa com cada saia).
E – O que foi que tu formasse quando fizesse 1, 2, 3, 4, 5?
C – Um conjunto em cada.
E – Então, quantas blusas ela tem?
C – 4.

Como pode ser visto, as estratégias adotadas nos problemas de isomorfismo são bem distintas daquelas adotadas nos problemas de combinatória; à exceção da estratégia inadequada com perda de significado que foi a única comum aos dois tipos de problemas. No Capítulo V serão apresentados os resultados relativos às estratégias de resolução adotadas. Antes disso, porém, são apresentados e discutidos, no capítulo IV a seguir, os resultados referentes ao desempenho das crianças nos diferentes problemas.

Capítulo IV.

Resultados relativos ao desempenho

Com base nos objetivos propostos e nas variáveis independentes investigadas (tipo de problema, tipo de operação e tipo de suporte de representação oferecido à criança), os resultados obtidos foram analisados em função de dois aspectos distintos: o desempenho (número de acertos) e as estratégias de resolução adotadas.

O desempenho foi considerado a partir do número de acertos. As estratégias encontradas foram analisadas conforme descrito no capítulo anterior relativo ao sistema de análise. Os dados relativos ao desempenho e às estratégias de resolução são apresentados em tabelas diversas e foram submetidos a testes estatísticos apropriados com vistas a examinar as diferenças existentes em função das variáveis independentes consideradas. Procurou-se, ainda, examinar as relações entre o número de acertos apresentados pelas crianças e as estratégias de resolução adotadas.

4.1. Desempenho geral

Como anteriormente mencionado, o desempenho foi analisado em função do número de acertos de cada participante em cada problema resolvido. A Tabela 1 apresenta uma visão geral do desempenho neste estudo e o teste estatístico referente a esses dados encontra-se no anexo I.

Tabela 1: Número e porcentagem (em parênteses) de acertos por tipo de problema, tipo de operação e em função do suporte de representação (máximo: 20 acertos).

Suporte de representação	Tipo de problema				
	Isomorfismo		Combinatória		Total
	Multiplicação	Divisão	Multiplicação	Divisão	
Grupo 1 Lápis e papel	13 (65)	9 (45)	2 (10)	1 (5)	25
Grupo 2 Concreto neutro (fichas)	16 (80)	12 (60)	1 (5)	2 (10)	31
Grupo 3 Concreto definido (objetos)	20 (100)	17 (85)	1 (5)	1 (5)	39
Total	49	38	4	4	
Total	87		8		95

De modo geral, considerando-se os dados como um todo, observou-se que o desempenho das crianças variava em função dos seguintes aspectos (Anexo I):

(1) do tipo de problema, pois os problemas de isomorfismo (72,5%) eram muito mais fáceis do que os problemas de combinatória (6,7%), como indicado pelo Wilcoxon com diferença significativa ($Z= -6,0032$; $p= ,0000$);

(2) do tipo de operação, pois os problemas de isomorfismo que requeriam a multiplicação para sua resolução (40,8%) eram mais fáceis do que problemas que requeriam a divisão (31,7%), como indicado pelo Wilcoxon com diferença significativa ($Z= -2,4990$; $p= ,0125$), e;

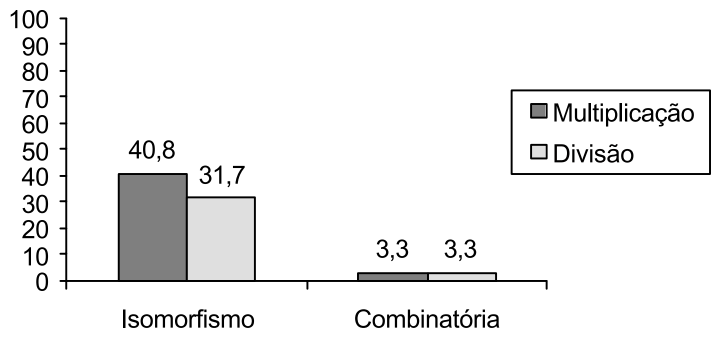
(3) do tipo de suporte de representação disponibilizado nos problemas de isomorfismo, pois os percentuais de acertos eram: 55% no Grupo 1 (lápis e papel), 70% no Grupo 2 e 92,5% no Grupo 3. Esses percentuais indicam que as crianças do Grupo 1 (lápis e papel) tiveram um desempenho inferior ao das crianças dos demais grupos que resolveram

os problemas através de material concreto (Grupo 2: fichas e Grupo 3: objetos). A diferença entre os grupos foi confirmada através do teste estatístico Kruskal-Wallis (p= .0048).

Assim, os dados, de modo geral indicam que as crianças tiveram um melhor desempenho quando usavam material concreto (neutro ou definido) e quando o problema era do tipo isomorfismo de medidas e que requeria a multiplicação para sua resolução.

Outro aspecto examinado foi a relação entre tipo de problema (isomorfismo e combinatória) e tipo de operação (multiplicação e divisão). O gráfico na Figura 20 ilustra esta relação.

Figura 20: Porcentagem de acerto por tipo de problema e tipo de operação



Com a finalidade de examinar se havia diferenças no desempenho entre as duas operações (multiplicação e divisão) em cada tipo de problema, aplicou-se a prova de Wilcoxon separadamente em cada tipo de problema (esses dados se encontram no anexo I). A análise estatística não revelou diferenças significativas entre as operações no problema de combinatória (Z= - .0000, p= 1.0000), visto que o percentual de acertos foi igualmente baixo (3,3%) em ambos os tipos de operação. No que se refere ao problema de isomorfismo, a análise estatística revelou diferenças significativas entre as operações de multiplicação e divisão (Z= -2,4990, p= .0125), pois a porcentagem de acerto na multiplicação (40,8%) foi mais alta do que na divisão (31,7%).

Com a finalidade de examinar se havia diferenças no desempenho entre tipos de problema (isomorfismo e combinatória) em cada tipo de operação, aplicou-se a prova de Wilcoxon separadamente em cada tipo de operação (esses dados se encontram no anexo I). Este teste mostrou que quando a operação era a de multiplicação, o problema de isomorfismo levava a um melhor desempenho do que quando o problema era de combinatória, sendo a diferença estatisticamente significativa (Z= -5,7144, p= .0000). Na operação de divisão essa diferença também foi significativa (Z= -5,0862, p= .0000), mostrando, também, que problemas de isomorfismo eram mais fáceis que problemas de combinatória. Desta forma, quer na multiplicação quer na divisão, problemas de isomorfismo eram significativamente mais fáceis que os de combinatória.

Esses dados revelaram que a multiplicação é mais fácil que a divisão quando o problema é do tipo isomorfismo. Observou-se, ainda, que problemas de isomorfismo são mais fáceis do que de combinatória, tanto na multiplicação como na divisão.

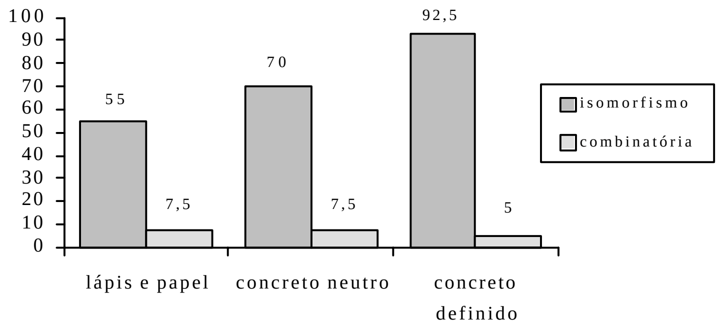
Com o objetivo de examinar em detalhes os dados obtidos nesta investigação, foram feitas análises específicas sobre diversas relações entre os suportes de representação (Grupo 1: Lápis e papel; Grupo 2: fichas; e Grupo 3: objetos) e as demais variáveis independentes (tipo de problema e tipo de operação), como descrito e discutido a seguir.

4.1.1. Suporte de representação x tipo de problema

Qual o efeito do suporte de representação sobre o desempenho das crianças nos dois tipos de problemas investigados (isomorfismo e combinatória)? ou seja, o desempenho num tipo de problema é influenciado pelo suporte de representação?

O gráfico na Figura 21, ilustra o desempenho das crianças em cada grupo em função do tipo de problema apresentado.

Figura 21: porcentagem de acertos por suporte de representação e tipo de problema



Com o objetivo de examinar o desempenho em cada tipo de problema no interior de cada grupo de crianças, foi aplicado a prova de Wilcoxon separadamente em cada grupo de crianças (os dados se encontram no anexo II). A análise estatística revelou que em cada grupo, separadamente, existe uma diferença significativa quanto ao desempenho em cada tipo de problema: Grupo 1 (lápis e papel): $Z= -3,226$, $p= ,001$; Grupo 2 (material concreto neutro): $Z= -3,542$, $p= ,000$; e Grupo 3 (material concreto definido): $Z= -4,119$, $p= ,000$. O padrão de resultados foi o mesmo em cada grupo: o desempenho nos problemas de isomorfismo foi significativamente superior ao desempenho nos problemas de combinatória.

Como pode ser visto na Figura 21, no Grupo 1 (lápis e papel), os problemas do tipo isomorfismo tiveram 55% de acertos, enquanto os problemas de combinatória tiveram 7,5%. No Grupo 2 (concreto neutro - fichas), os problemas do tipo isomorfismo tiveram 70% de acertos, enquanto os problemas de combinatória tiveram 7,5%. No Grupo 3 (concreto definido - objetos) os problemas do tipo isomorfismo tiveram 92,5% de acertos, enquanto os problemas de combinatória tiveram 5%; diferença esta mais acentuada do que nos outros dois grupos.

Assim, em todos os três grupos, independentemente do suporte de representação oferecido, as crianças tinham mais dificuldades com os problemas de combinatória do que com os problemas de isomorfismo.

Com o objetivo de examinar se havia diferenças entre os grupos de crianças em relação a cada tipo de problema separadamente, aplicou-se o Teste de Kruskal-Wallis (anexo III). Em relação aos problemas de isomorfismo, o teste indicou haver diferenças significativas entre os grupos, em função, portanto, do suporte de representação dado a cada grupo (p= .0048). Esta diferença deveu-se ao fato de que as crianças do Grupo 3 (material concreto definido: 92.5%) tiveram um desempenho melhor do que as crianças do Grupo 2 (material concreto neutro: 70%), as quais por sua vez, tiveram um desempenho melhor do que as crianças do Grupo 1 (lápis e papel: 55%). Ao que parece, o material concreto definido (Grupo 3: objetos) facilita o desempenho mais do que quando material concreto neutro (Grupo 2: fichas) é disponibilizado. As crianças que resolveram os problemas de isomorfismo através de lápis e papel (Grupo 1) tiveram um desempenho inferior ao desempenho nos demais grupos que tinham materiais concretos como suporte.

Em relação aos problemas de combinatória, o teste indicou não haver diferenças significativas entre os grupos (p= .8243). Isso ocorreu porque o percentual de acertos nos problemas de combinatória foi igualmente muito baixo nos três grupos (Grupo 1: 7,5%, Grupo 2: 7,5% e Grupo 3: 5%).

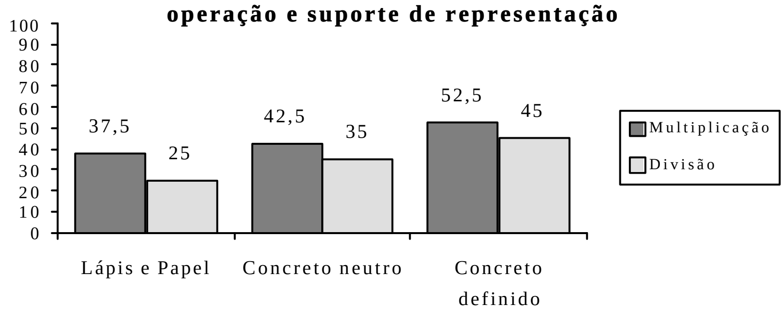
Esses dados mostram que enquanto o desempenho nos problemas de combinatória não varia em função do tipo de suporte de representação; o desempenho nos problemas de isomorfismo varia. Esta variação ocorreu no sentido em que o melhor desempenho nestes problemas era em relação ao Grupo 3, cujo suporte de representação era material concreto definido (objetos). No entanto, o percentual de acertos também era alto quando o suporte de representação era neutro (fichas). Assim, de maneira geral, o desempenho das crianças era melhor quando resolviam problemas de isomorfismo através de suportes de representação concretos, em especial através de material concreto definido (objetos).

4.1.2. Suporte de representação x Tipo de operação

Qual o efeito do suporte de representação sobre o desempenho das crianças nos dois tipos de operações (multiplicação e divisão)?

O gráfico na Figura 22 apresenta o desempenho das crianças em cada grupo em função do tipo de operação requerida para a resolução dos problemas (multiplicação e divisão).

Figura 22: Porcentagem de acertos por tipo de operação e suporte de representação



Aplicou-se a prova de Wilcoxon separadamente em cada grupo de crianças para examinar se havia diferenças no desempenho entre problemas de multiplicação e problemas de divisão no interior de cada grupo de crianças (os dados se encontram no anexo II). A análise estatística não revelou diferenças significativas entre as operações em nenhum dos grupos: Grupo 1 (lápis e papel): Z= -1,667, p= .096, Grupo 2 (material concreto neutro): Z= -1,342, p= .180; e Grupo 3 (material concreto definido): Z= -1,732, p= ,083. Isso significa que independente do suporte de representação oferecido, as crianças apresentavam índices de acertos bastante semelhantes tanto quando o problema envolvia o uso da multiplicação como quando o problema envolvia o uso da divisão.

Com o objetivo de examinar se havia diferenças no desempenho entre os grupos de crianças em cada tipo de operação separadamente, aplicou-se o Teste de Kruskal-Wallis (os dados se encontram no anexo IV). Em relação aos problemas de multiplicação, o teste revelou não haver diferenças significativas entre os grupos, em função, portanto do suporte de representação dado a cada grupo (p= .0894). Em relação aos problemas de divisão, o teste indicou não haver diferenças significativas entre os grupos, em função, portanto do suporte de representação dado a cada grupo (p= .0685).

Considerando esses dados, é possível concluir que as crianças tinham um desempenho semelhante em problemas quer de multiplicação quer de divisão, independentemente do suporte de representação disponibilizado. Ao que parece, o tipo de operação requerida para a resolução do problema não era fator determinante do desempenho, sendo isso observado em cada grupo de crianças separadamente.

4.1.3. Tipos de problema x tipos de operação em cada suporte de representação

Diante dos objetivos deste estudo torna-se importante examinar como foi o desempenho das crianças em cada grupo, isto é, em função do suporte de representação disponibilizado para a resolução dos problemas. O teste estatístico utilizado foi o Wilcoxon e os dados obtidos através dele são apresentados no Anexo II.

4.1.3.1.Grupo 1: lápis e papel como suporte de representação

A Tabela 2 mostra a freqüência e o percentual de acerto nos problemas e nas operações quando o suporte de representação disponibilizado era lápis e papel (Grupo 1).

Tabela 2: Número e porcentagem (em parênteses) de acerto em relação ao tipo de problema e tipo de operação no suporte lápis e papel (máximo: 20 acertos).

	Grupo 1: lápis papel		
	Isomorfismo	**Combinatória**	**Total**
Multiplicação	13 (65)	2 (10)	15
Divisão	9 (45)	1 (5)	10
Total	22	3	25

Como mostra a Tabela 2, e revelado pelo Wilcoxon, usando lápis e papel como suporte de representação, as crianças têm um melhor desempenho nos problemas de isomorfismo do que nos de combinatória ($Z = -3.226$; $p= .001$). Este teste mostrou, ainda, não haver diferença significativa entre as operações de multiplicação e de divisão (Z = -1.667; p= .096), como mencionado anteriormente quando discutidas as relações entre tipo de suporte e tipo de problema (seção 4.1.1) e as relações entre suporte e tipo de operação (seção 4.1.2).

Considerando cada operação separadamente, o Wilcoxon mostrou que na multiplicação o desempenho em problemas de isomorfismo é significativamente superior ao desempenho em problemas de combinatória (Z = -3,051; p = .002), visto que nos problemas de isomorfismo as crianças obtiveram 65% de acerto e no de combinatória este percentual era de apenas 10%.

Na operação de divisão o desempenho nos dois tipos de problemas varia de forma significativa (Z= -2,828; p= .005). Isso ocorreu porque o problema de isomorfismo foi mais fácil que o problema de combinatória, obtendo um maior percentual de acerto (45%) em relação aos problemas de combinatória (5%).

Assim, tanto na operação de divisão como na operação de multiplicação os problemas de isomorfismo são mais fáceis do que os problemas de combinatória.

Considerando cada tipo de problema separadamente, como indicado pelo Wilcoxon, nos problemas de isomorfismo a diferença no desempenho entre as operações de multiplicação e divisão não é significativa (Z= -1.414; p= .157), apesar de na multiplicação o percentual de acerto ser mais alto que na divisão (65% e 45%, respectivamente).

Nos problemas de combinatória o teste estatístico também não revelou diferença significativa no desempenho entre as operações de multiplicação e divisão (Z= -1.000; p= .317). Isso ocorreu porque o percentual de acerto foi semelhante tanto para os problemas de multiplicação (10%) quanto para os problemas de divisão (5%).

O que se pode concluir a partir desses dados é que ao usar lápis e papel, as crianças não apresentam desempenho diferente quando usando a multiplicação ou a divisão, quer seja em problemas de isomorfismo quer seja em problemas de combinatória.

4.1.3.2. Grupo 2: fichas como suporte de representação

A Tabela 3 mostra a freqüência e o percentual de acerto nos problemas e nas operações quando o suporte de representação disponibilizado era fichas (Grupo 2: material concreto neutro).

Tabela 3: Número e porcentagem (em parênteses) de acerto em relação ao tipo de problema e tipo de operação no suporte fichas (máximo: 20 acertos).

Grupo 2: material concreto neutro (fichas)			
	Isomorfismo	**Combinatória**	**Total**
Multiplicação	16 (80)	1 (5)	17
Divisão	12 (60)	2 (10)	14
Total	18	3	

Como ilustrado na Tabela 3, e revelado pelo Wilcoxon, usando fichas como suporte de representação, as crianças têm um melhor desempenho nos problemas de isomorfismo do que nos de combinatória ($Z = -3.542$; $p= .000$). Ainda, através deste teste, observou-se não haver diferença significativa entre as operações de multiplicação e de divisão ($Z = -1,342$; $p= .180$). Esses dados foram anteriormente mencionados quando as relações entre tipo de suporte e tipo de problema (seção 4.1.1) e as relações entre suporte e tipo de operação (seção 4.1.2) foram discutidas.

O Wilcoxon mostrou que, considerando cada operação separadamente, na multiplicação os dois tipos de problema variam quanto ao desempenho de forma significativa (Z = -3,873; p = .000). Isso ocorreu porque o problema de isomorfismo (80% de acertos) foi expressivamente mais fácil que o problema de combinatória (5% de acertos). Na operação de divisão os dois tipos de problema variam quanto ao desempenho de forma significativa (Z= -3,162; p= .002), pois o problema de isomorfismo foi mais fácil que o problema de combinatória (60% e 10% de acerto, respectivamente). Desta forma, o que se verifica é que, tanto quando usando a operação de divisão como quando usando a operação de multiplicação, as crianças têm um melhor desempenho nos problemas de isomorfismo do que nos de combinatória.

Aplicando o Wilcoxon a cada tipo de problema separadamente, verificou-se que nos problemas de isomorfismo a diferença entre as operações de multiplicação e divisão é significativa (Z= -2.0000; p= .046), sendo os problemas que requeriam a multiplicação mais fáceis (80% de acerto) do que os problemas que requeriam a divisão (60% de acerto). Nos problemas de combinatória não detectou-se diferenças significativas entre as operações de multiplicação e divisão (Z= -1.000; p= .317), visto que o percentual de acertos era bastante baixo em ambas as operações (multiplicação: 5%; e divisão: 10%).

O que se pode concluir desses dados é quando usando fichas como suporte de representação, as crianças acertam mais os problemas de isomorfismo do que os de combinatória, e isso ocorre principalmente em relação a problemas que requerem a multiplicação. Os problemas de combinatória são mais difíceis, independente da operação a ser empregada. Os dados mostram que problemas que requerem a multiplicação só são mais fáceis do que aqueles que requerem a divisão quando o tipo de problema é de isomorfismo. A dificuldade no emprego dessas operações é a mesma quando os problemas são de combinatória. Esse é um padrão de resultados que ocorre quando o suporte de representação é material concreto neutro (fichas): padrão de resultados este que difere daquele encontrado em relação ao grupo de crianças que utilizava como suporte de representação lápis e papel (Grupo 1).

4.1.3.3. Grupo 3: objetos como suporte de representação

A Tabela 4 mostra a freqüência e o percentual de acerto nos problemas e nas operações quando resolvidos através de objetos.

Tabela 4: Número e porcentagem (em parênteses) de acerto em relação ao tipo de problema e tipo de operação no suporte objetos (máximo: 20 acertos).

Grupo 3: material concreto definido (objetos)			
	Isomorfismo	**Combinatória**	**Total**
Multiplicação	20 (100)	1 (5)	21
Divisão	17 (85)	1 (5)	18
Total	37	2	39

Como se verifica na Tabela 4, segundo o Wilcoxon, usando objetos como suporte de representação, as crianças têm um melhor desempenho nos problemas de isomorfismo do que nos de combinatória ($Z = -4.119$; $p= .000$). No entanto, não foram encontradas diferenças significativas entre as operações de multiplicação e de divisão ($Z = -1{,}732$; $p= .083$). Esses dados foram anteriormente mencionados quando as relações entre tipo de suporte e tipo de problema (seção 4.1.1) e as relações entre suporte e tipo de operação (seção 4.1.2) foram discutidas.

Aplicando-se o Wilcoxon em relação a cada operação separadamente, verificou-se que na multiplicação os problemas de isomorfismo eram significativamente mais fáceis do que os problemas de combinatória (Z= -4,359; p= .000). Como mostrado na Tabela 4, o percentual de acertos no problema de isomorfismo foi de 100%, enquanto o percentual de acertos no problema de combinatória foi de apenas 5%. Na operação de divisão os dois tipos de problemas variam quanto ao desempenho de forma significativa (Z= -4,000; p= .000); observando-se, mais uma vez, que o problema de isomorfismo foi muito mais fácil que o problema de combinatória (isomorfismo: 85% e combinatória: 5%). Assim, tanto quando usando a divisão como quando usando a multiplicação os problemas de isomorfismo são mais fáceis do que os problemas de combinatória.

Analisando-se cada tipo de problema separadamente, o Wilcoxon mostrou que nos problemas de isomorfismo o desempenho não é significativamente diferente entre as operações de multiplicação e divisão (Z= -1.732; p= .083), pois as crianças tiveram alto percentual de acertos em ambos os problemas: 100% nos problemas de multiplicação e 85% nos de divisão. Em relação aos problemas de combinatória o teste estatístico não revelou diferença entre as operações de multiplicação e divisão (Z= .000; p= 1.000), uma vez que as crianças tiveram um desempenho muito baixo em ambas operações (5%).

Esses dados mostram que os problemas do tipo isomorfismo são mais fáceis do que os de combinatória, independentemente da operação requerida para a solução seja a multiplicação ou a divisão. Quando o problema é de isomorfismo as crianças mostram um bom desempenho tanto quando a operação é de divisão como quando a operação é de multiplicação. No entanto, quando o problema é de combinatória, as crianças mostram um número de acertos igualmente baixo em ambas as operações.

4.1.4. Resumo dos resultados relativos ao desempenho: comparando o desempenho entre os grupos

O Quadro 4 permite uma visualização geral dos resultados obtidos neste estudo em relação ao desempenho, facilitando a comparação dos grupos de crianças, em função do suporte de representação disponibilizado.

Quadro 4: Resumo dos dados gerais obtidos em cada grupo de crianças.

	% de acertos	**Tipo de Problema**	**Tipo de Operação**
Grupo 1 Lápis e papel	31,3%	Isomorfismo > Combinatória	Multiplicação = Divisão
Grupo 2 Material concreto neutro (fichas)	38,8%	Isomorfismo > Combinatória	Multiplicação = Divisão
Grupo 3 Material concreto definido (objetos)	48,8%	Isomorfismo > Combinatória	Multiplicação = Divisão

Nota: > significa estatisticamente mais fácil que; = significa estatisticamente igual a.

Este resumo dos dados mostra que o desempenho, de maneira geral, foi melhor nos grupos que tinham como suporte de representação materiais concretos do que quando o suporte era lápis e papel, em especial quando a criança usava objetos. Isso significa que há diferenças quanto ao tipo de material concreto que é disponibilizado, sendo mais favorável para uma resolução adequada o uso de material concreto que especifica os referentes para as quantidades mencionadas no enunciado do problema, como é o caso do uso de objetos que permitem a criança identificar o divisor e o dividendo, no caso da divisão; e o multiplicando e o multiplicador no caso da multiplicação.

O padrão de resultados em relação ao tipo de problema foi o mesmo nos três grupos de crianças: os problemas de isomorfismo foram sistematicamente mais fáceis do que os problemas de combinatória. Independentemente do suporte de representação oferecido, as crianças têm grande dificuldade em resolver com sucesso problemas de combinatória.

Observa-se, ainda, que o padrão de resultados também foi o mesmo no três grupos em relação ao tipo de operação empregada: o desempenho era o mesmo quer em problemas de divisão quer em problemas de multiplicação.

O Quadro 5 a seguir mostra dados mais específicos sobre os grupos.

Quadro 5: Resumo dos dados específicos obtidos em cada grupo de crianças.

	Tipo de Problema		**Tipo de Operação**	
	Isomorfismo	**Combinatória**	**Multiplicação**	**Divisão**
Grupo 1 Lápis e papel	Mult (65%) = Divisão (45%)	Mult (10%) = Divisão (5%)	Iso (65%) > Comb (10%)	Iso (45%) > Comb (5%)
Grupo 2 Material concreto neutro (fichas)	Mult (80%) > Divisão (60%)	Mult (5%)= Divisão (10%)	Iso (80%)> Comb (5%)	Iso (60%)> Comb (10%)
Grupo 3 Material concreto definido (objetos)	Mult (100%)= Divisão (85%)	Mult (5%) = Divisão (5%)	Iso (100%) > Comb (5%)	Iso (85%)> Comb (5%)

Nota: > significa estatisticamente mais fácil que; = significa estatisticamente igual a.

Com pode ser observado, o padrão de resultados é bastante semelhante nos três grupos, o que significa que o suporte de representação não teve um efeito diferenciador quanto ao desempenho nos problemas. A única diferença encontrada entre os grupos foi em relação ao fato de que as crianças que resolviam os problemas através de fichas (Grupo 2: material concreto neutro) tinham mais acertos em problemas cuja resolução requeria o emprego da multiplicação, ao invés do emprego da divisão; isso ocorria apenas quando os problemas eram de isomorfismo. Esta diferença foi no limite da significância (p= ,046). Para as crianças dos outros grupos o tipo de operação empregada não era fator que diferenciasse o desempenho quer em problemas de isomorfismo quer em problemas de combinatória.

O que se pode concluir desses dados é que o tipo de suporte fornecido não foi fator que determinasse diferenças no padrão de desempenho das crianças. A principal diferença observada foi em relação ao percentual geral de acertos obtido em cada grupo, visto que as crianças que resolviam os problemas através de lápis e papel tinham um desempenho inferior àquelas que usavam materiais concretos. O melhor desempenho foi observado quando o suporte concreto oferecido era objetos que permitiam identificar de imediato os referentes para as quantidades envolvidas nos problemas.

Resta saber se o tipo de suporte oferecido influenciaria as estratégias de resolução adotadas pelas crianças. Os resultados relativos às estratégias são apresentados e discutidos no capítulo que se segue.

Capítulo V.

Resultados relativos às estratégias de resolução

5.1. As estratégias e os tipos de problema

Como anteriormente mencionado, as estratégias usadas pelas crianças ao resolverem problemas de isomorfismo eram bem distintas daquelas adotadas quando na resolução de problemas de combinatória, como ilustrado na Tabela 5.

Tabela 5: Número e porcentagem (em parênteses) dos tipos de estratégias em cada tipo de problema (n=120).

Tipo de problema	
Isomorfismo	**Combinatória**
Inadequada 24 (20%)	Inadequada 56 (46,7%)
Contagem ou distribuição unitária 25 (20,8%)	Combinação por pares fixos 41 (34,2%)
Ensaio e erro por ajustes 15 (12,5%)	Combinação flexível dos pares limitados pelo maior número presente no enunciado 7 (5,8%)
Adição repetida 26 (21,7%) Contagem em múltiplos 3 (2,5%)	Combinação flexível dos pares 16 (13,3%)
Mista 8 (6,7%) Aplicação das operações 19 (15,8%)	

Os problemas de isomorfismo apresentaram uma maior variedade de estratégias (sete tipos) que os de combinatória (quatro tipos). A única estratégia comum aos dois tipos de problema foi aquela em que a criança perdia de vista, ao longo do processo de resolução, as informações contidas no problema (o que desejava encontrar e o significado dos números contidos no enunciado). Esta estratégia foi mais freqüente nos problemas de combinatória (46,7%) do que nos problemas de isomorfismo (20%), indicando que os problemas de combinatória eram mais difíceis de serem compreendidos pelas crianças do que os de isomorfismo. Importante mencionar que esta estratégia era sempre acompanhada de resposta incorreta.

Pelo apresentado na Tabela 5, as estratégias que mais caracterizaram a resolução dos problemas de isomorfismo foram a adição repetida (21,7%), a contagem ou distribuição unitária (20,8%) e as estratégias inadequadas (20%). Os problemas de combinatória, por sua vez, se caracterizaram por estratégias inadequadas (46,7%), seguida da estratégia combinação por pares fixos (34,2%).

Dada a grande diferença entre os tipos de problemas no que concerne às estratégias, os resultados obtidos neste estudo serão apresentados em dois grupos: as estratégias adotadas em problemas de isomorfismo e as estratégias adotadas em problemas de combinatória. No interior de cada um desses grupos examinou-se se haveria variações na freqüência das estratégias em função da operação requerida para a solução do problema (multiplicação e divisão) e em função do suporte de representação oferecido (Grupo 1: lápis e papel; Grupo 2: fichas e Grupo 3: objetos).

5.2. As estratégias adotadas nos problemas de isomorfismo

5.2.1. Estratégias x tipo de operação

A Tabela 6 apresenta a distribuição das estratégias adotadas nos problemas de isomorfismo em função do tipo de operação requerida.

Tabela 6: Número e porcentagem (em parênteses) das estratégias nos problemas de isomorfismo em função do tipo de operação.

Estratégias nos problemas de Isomorfismo	Multiplicação	Divisão	Total
Inadequada	11 (45,8)	13 (54,2)	24
Contagem ou distribuição unitária	6 (24)	19 (76)	25
Ensaio e erro por ajustes	0	15 (100)	15
Adição repetida	26 (100)	0	26
Contagem em múltiplos	3 (100)	0	3
Mista	8 (100)	0	8
Aplicação das operações	6 (31,6)	13 (68,4)	19

Observa-se maior freqüência de algumas estratégias em função da operação utilizada nos problemas de isomorfismo: a distribuição unitária era mais freqüente em problemas que requeriam o uso da divisão do que em problemas que requeriam o uso da multiplicação; e a estratégia de ensaio e erro só foi utilizada nos problemas de divisão. Por outro lado, a adição repetida e a estratégia mista eram adotadas apenas em problemas que requeriam a multiplicação. As demais estratégias não se diferenciavam em função do tipo de operação requerida para a resolução dos problemas de isomorfismo.

Os dados mostram, portanto, que as estratégias adotadas nos problemas de isomorfismo variam em função da operação requerida para sua solução.

5.2.2. Estratégias x tipo de suporte de representação

A Tabela 7 apresenta a distribuição das estratégias adotadas nos problemas de isomorfismo em função do suporte de representação.

Tabela 7: Número e porcentagem (em parênteses) das estratégias nos problemas de isomorfismo em função do suporte de representação.

Estratégias nos problemas de isomorfismo	Grupo 1 Lápis e papel	Grupo 2 Concreto Neutro	Grupo 3 Concreto Definido	Total
Inadequada	15 (62,5)	7 (29,2)	2 (8,3)	24
Contagem ou distribuição unitária	5 (20)	12 (48)	8 (32)	25
Ensaio e erro por ajustes	1 (6,7)	6 (40)	8 (53,3)	15
Adição repetida	9 (34,6)	4 (15,4)	13 (50)	26
Contagem em múltiplos	0	1 (33,3)	2 (66,7)	3
Mista	2 (25)	3 (37,5)	3 (37,5)	8
Aplicação das operações	8 (42,1)	7 (36,8)	4 (21,1)	19

De modo geral, observa-se que algumas estratégias variam em função do suporte de representação disponibilizado. A estratégia inadequada e a aplicação das operações (da multiplicação e da divisão), estão mais presentes no lápis e papel. A estratégia contagem ou distribuição unitária se concentra no material concreto neutro, e a estratégia ensaio e erro, adição repetida e contagem em múltiplos se apresentam com mais freqüência no material concreto definido.

A seguir são apresentados e discutidos os resultados relativos ao uso de cada tipo de estratégia, separadamente, em função do suporte de representação fornecido.

- **Estratégia inadequada**

Como pode ser visto na Tabela 7, nos problemas de isomorfismo observa-se que as estratégias inadequadas estão presentes em 62,5% no Grupo 1 (lápis e papel), em 29,2% no Grupo 2 (material concreto neutro) e em 8,3% no Grupo 3 (material concreto definido). Esta estratégia era bem mais freqüente quando as crianças usavam lápis e papel (Grupo 1: 62,5%) do que quando usavam objetos (Grupo 3: 8,3%).

Os dados mostram que o uso desta estratégia não variava em função do material concreto disponibilizado (fichas e objetos), mas que era amplamente adotada quando lápis e papel eram disponibilizados e raramente utilizada quando os objetos estavam presentes. Isso sugere que quando usando objetos, as crianças raramente usam estratégias inadequadas durante sua resolução; mas que isso ocorre quando usam lápis e papel.

- **Contagem ou distribuição unitária**

Esta estratégia, como mostrado na tabela 7, é mais adotada no material concreto neutro (G2: 48%), depois no material concreto definido (G3: 32%), e por último no lápis e papel (G1: 20%). Apesar das diferentes porcentagens, essas não são tão diferentes, concluindo-se que o uso dessa estratégia não varia em função do tipo de suporte de representação fornecido.

- **Ensaio e erro por ajustes**

Como pode ser visto na tabela 7, esta estratégia é mais freqüente no material concreto definido (G3: 53,3%), depois no material concreto neutro (G2: 40%), e por último no lápis e papel (G1: 6,7%). A partir desses dados conclui-se que a estratégia de ensaio e erro é raramente adotada quando o suporte de representação é gráfico (lápis e papel: 6,7%) e amplamente adotada quando o suporte de representação envolve objetos (53,3%).

Ao que parece, quando a criança tem à sua disposição objetos que claramente representam as quantidades contidas no enunciado dos problemas é mais fácil ajustar, distribuir e redistribuir os objetos até encontrar uma quantidade que considere apropriada como resposta ao problema. Quando lápis e papel são fornecidos, esta estratégia perde sua importância, sendo raramente adotada, visto que, graficamente, é difícil realizar distribuições e redistribuições. Essa estratégia só apareceu nos problemas que requeriam a divisão.

- **Adição repetida**

Na Tabela 7, observa-se que esta estratégia é adotada mais freqüentemente no material concreto definido (G3: 50%), do que no lápis e papel (G1: 34,6%) e do que no material concreto neutro (G2: 15,4%). Nas três situações, essa estratégia apareceu apenas na operação de multiplicação, como poderá ser visto adiante. As crianças adotavam mais a adição repetida quando resolvendo os problemas de multiplicação com objetos (G3: 50%) do que quando resolvendo através de fichas (G2: 15,4%).

Ao que parece, as crianças preferem a adição repetida quando objetos estão presentes durante o processo de resolução, o que permite claramente identificar o multiplicando (objetos) do multiplicador (quantas vezes). Quando o suporte disponibilizado é lápis e papel, isso parece também ser possível; mas quando fichas são disponibilizadas parece que a criança não consegue fazer esta diferenciação.

- **Contagem em múltiplos**

Como mostrado na Tabela 7, esta estratégia, de modo geral, foi raramente utilizada, independentemente do suporte de representação adotado; estando ausente quando era disponibilizado lápis e papel. Esta estratégia foi característica dos problemas que requeriam a multiplicação para sua resolução.

➤ **Mista**

De maneira geral, como indicado na Tabela 7, esta estratégia foi pouco freqüente, sendo mais adotada quando o material concreto era neutro (37,5%) e definido (37,5%) do que quando o suporte de representação era lápis e papel (25%). Esses resultados mostram que a estratégia mista era igualmente adotada nos três grupos, não variando em função do suporte de representação disponibilizado.

➤ **Aplicação das operações**

A estratégia caracterizada pelo uso das operações de multiplicação e de divisão foi mais utilizada quando o suporte de representação era lápis e papel (42,1%) e quando era material concreto neutro (36,8%), sendo menos adotada quando era material concreto definido (21,1%). Ao que parece, o uso das operações (de multiplicação e de divisão) não varia em função do tipo de suporte disponibilizado.

Para resumir os resultados até então apresentados sobre os problemas de isomorfismo relativos a cada estratégia em função dos diferentes tipos de suporte de representação, é possível notar que:

(a) A estratégia inadequada variava entre os grupos em função do suporte de representação, pois essa estratégia era mais freqüente quando usado lápis e papel (G1) do que quando usados objetos (G3). Este resultado sugere que os objetos permitiam a criança ter em mente durante o processo de resolução o significado do problema, o que era requerido e os referentes para as quantidades. Entretanto, ao usarem lápis e papel, essas estratégias eram mais freqüentes, sugerindo que esta situação dificultava a criança manter o significado do problema.

(b) Em relação à estratégia de ensaio e erro, ocorria o oposto do acima descrito. As crianças adotavam mais esta estratégia quando os objetos estavam presentes (G3) do que quando resolviam problemas através de lápis e papel (G1). É possível que a manipulação de objetos que tinham uma relação direta com os referentes das quantidades envolvidas nos problemas tenha propiciado o uso de estratégias de ensaio e erro que se caracterizam por ajuste e aproximações contínuas até que se obtenha uma quantidade que a criança considera aceitável como resposta. O lápis e papel por sua vez, não propiciam o aparecimento desta estratégia, pois estes ajustes por aproximações parecem ser difíceis de serem realizados através de grafismos.

(c) A adição repetida, própria de problemas envolvendo a operação de multiplicação, também variava em função do suporte de representação oferecido: as crianças usavam mais esta estratégia quando objetos estavam presentes (G2 material concreto definido) do que quando fichas eram disponibilizadas (G2: material concreto neutro). Parece que os objetos permitiam à criança distinguir entre o multiplicando (quantos elementos em um grupo) e o multiplicador (quantas vezes esta quantidade de elementos deveria ser repetida). As fichas (material concreto neutro), apesar de serem um material concreto, parecem não permitir esta diferenciação que é importante durante o processo de resolução.

As demais estratégias identificadas nos protocolos das crianças (aplicação das operações, mista, contagem em múltiplos, contagem ou distribuição unitária) não variavam em função do suporte de representação disponibilizado.

Além das relações entre estratégia adotada e suporte de representação adotado, parece interessante examinar as relações entre as estratégias e as operações requeridas para a resolução dos problemas de isomorfismo. Este aspecto é apresentado a seguir, tratando-se separadamente cada grupo.

5.2.3. Problemas de isomorfismo resolvidos através de lápis e papel (G1): Estratégias X Operação

A Tabela 8 mostra a distribuição das estratégias usadas nos problemas de isomorfismo quando se usa o lápis e papel para resolver os problemas que envolviam as operações de multiplicação e de divisão.

Tabela 8: Número e porcentagem (em parênteses) das estratégias em relação aos problemas de isomorfismo multiplicação e divisão usando o lápis e o papel.

Estratégias	Tipo de operação		Total	Z	P
	Multiplicação	Divisão			
Inadequada	7 (46,7)	8 (53,3)	15	-,2962	.7671
Contagem ou distribuição unitária	1 (20)	4 (80)	5	-1,6036	.1088
Ensaio e erro por ajustes	0	1 (100)	1	-1,0000	.3173
Adição repetida	9 (100)	0	9	-2,6656	.0077
Contagem em múltiplos	0	0	0	,0000	1.0000
Mista	2 (100)	0	0	-1,3416	.1797
Aplicação das operações	1 (12,5)	7 (87,5)	8	-2,2014	.0277

Com o objetivo de examinar se haveria diferenças quanto ao uso dessas estratégias em função da operação requerida pelo problema, aplicou-se o teste de Wilcoxon (dados da estatística no anexo V) a cada estratégia separadamente. Os níveis de significância obtidos nessas análises são apresentados na Tabela 8 acima.

Com pode ser visto, as únicas diferenças significativas encontradas em relação ao uso das estratégias em função da operação foram: (a) quanto ao uso da estratégia de adição repetida, que estava presente apenas em problemas envolvendo a operação de multiplicação; e (b) quanto à aplicação das operações que era mais freqüente nos problemas que requeriam a divisão do que em problemas que requeriam a multiplicação.

Como mostra a Tabela 8, os problemas que requeriam a multiplicação eram em geral, resolvidos através de adições repetidas, evitando assim, a aplicação da operação de multiplicação. Já em relação aos problemas que requeriam a divisão, as crianças tendiam a usar a operação de divisão ou a usar estratégias inadequadas. Parece que a adição repetida é uma estratégia que é usada em lugar da aplicação da operação da multiplicação; enquanto que na divisão, quem não sabe usar a operação usa estratégias inadequadas. É como se a adição repetida substituísse o uso da operação da multiplicação. Em relação à divisão as crianças não parecem dispor de uma estratégia que possa substituir o uso da operação da divisão: ou usam estratégias inadequadas ou aplicam a operação que já dominam.

5.2.4. Problemas de isomorfismo resolvidos através de material concreto neutro (G2 - Fichas): Estratégias X Operação

A Tabela 9 mostra a distribuição das estratégias usadas nos problemas de isomorfismo quando se usa fichas (material concreto neutro) para resolver os problemas que envolviam as operações de multiplicação e de divisão.

Com o objetivo de examinar se haveria diferenças quanto ao uso dessas estratégias em função da operação requerida pelo problema, aplicou-se o teste de Wilcoxon (dados estatísticos no anexo V) a cada estratégia separadamente. Os níveis de significância obtidos nessas análises são apresentados na Tabela 9.

Tabela 9: Número e porcentagem (em parênteses) das estratégias em relação aos problemas de isomorfismo multiplicação e divisão usando o material concreto neutro.

Estratégias	Freqüência		Total	Z	P
	Multiplicação	Divisão			
Inadequada	4 (57,1)	3 (42,9)	7	-1,0000	.3173
Contagem ou distribuição unitária	5 (41,7)	7 (58,3)	12	-,5606	.5751
Ensaio e erro por ajustes	0	6 (100)	6	-2,2014	.0277
Adição repetida	4 (100)	0	4	-1,8257	.0679
Contagem em múltiplos	1 (100)	0	1	-1,0000	.3173
Mista	3 (100)	0	3	-1,6036	.1088
Aplicação das operações	3 (42,9)	4 (57,1)	7	-,3381	.7353

O Wilcoxon mostrou haver diferenças significativas apenas em relação ao uso da estratégia ensaio e erro por ajustes. Esta diferença foi porque esta estratégia era adotada apenas nos problemas em que a operação de divisão era requerida. De modo geral, quando fichas são utilizadas para a resolução dos problemas de isomorfismo, há pouca variação quanto ao uso de estratégias em função do tipo de operação requerida pelo problema.

5.2.5. Problemas de isomorfismo resolvidos através do material concreto definido (G3 - Objetos): Estratégias X Operação

A Tabela 10 mostra a distribuição das estratégias usadas nos problemas de isomorfismo quando se usa objetos (material concreto definido) para resolver os problemas que envolviam as operações de multiplicação e de divisão.

Tabela 10: Número e porcentagem (em parênteses) das estratégias em relação aos problemas de isomorfismo multiplicação e divisão usando o material concreto definido.

Estratégias	Freqüência		Total	Z	P
	Multiplicação	Divisão			
Inadequada	0	2 (100)	2	-1,3416	.1797
Contagem ou distribuição unitária	0	8 (100)	8	-2,5205	.0117
Ensaio e erro por ajustes	0	8 (100)	8	-2,5205	.0117
Adição repetida	13 (100)	0	13	-3,1798	.0015
Contagem em múltiplos	2 (100)	0	2	-1,3416	.1797
Mista	3 (100)	0	3	-1,6036	.1088
Aplicação das operações	2 (50)	2 (50)	4	,0000	1.0000

Com o objetivo de examinar se haveria diferenças quanto ao uso dessas estratégias em função da operação requerida pelo problema, aplicou-se o teste de Wilcoxon (dados estatísticos no anexo V) a cada estratégia separadamente. Os níveis de significância obtidos nessas análises são apresentados na Tabela 10.

O teste detectou diferenças significativas entre operações quanto ao uso da contagem e distribuição unitária, quanto ao uso do ensaio e erro e quanto ao uso da adição repetida. A contagem e distribuição unitária e a estratégia de ensaio e erro foram utilizadas apenas nos problemas de divisão; enquanto a adição repetida aparecia apenas nos problemas de multiplicação.

Os dados mostram, portanto, que algumas estratégias adotadas nos problemas de isomorfismo variam em função da operação requerida para sua solução, quando se usa o material concreto definido como suporte de representação. Há estratégias unicamente adotadas na divisão, e há estratégias adotadas unicamente na multiplicação.

Comparando-se, de modo geral, os resultados relativos às comparações entre operações quanto ao uso das diferentes estratégias em cada um dos grupos, observa-se que há mais variações entre as operações quando objetos são disponibilizados (três variações) do que quando lápis e papel são fornecidos (duas variações) e do que quando fichas (uma variação) são oferecidas. Ao que parece, a presença de objetos permite que as crianças sejam mais sensíveis às operações do que quando fichas são oferecidas. Parece que as fichas levam as crianças a adotarem estratégias de resolução que são igualmente aplicadas a problemas que envolvem os dois tipos de operações, como por exemplo estratégias inadequadas, contagem ou distribuição unitária e a aplicação das operações.

A seguir são analisados resultados relativos aos problemas de combinatória.

5.3. As estratégias adotadas nos problemas de combinatória

5.3.1. Estratégias x tipo de operação

A Tabela 11 mostra a porcentagem das estratégias adotadas nos problemas de combinatória em função do tipo de operação requerida.

Tabela 11: Número e porcentagem (em parênteses) das estratégias nos problemas de combinatória em função do tipo de operação.

Estratégias nos problemas de	Multiplicação	Divisão	Total

Combinatória			
Inadequada	12 (21,4)	44 (78,6)	56
Combinação por pares fixos	35 (85,4)	6 (14,6)	41
Combinação flexível dos pares limitados pelo maior número presente no enunciado	6 (85,7)	1 (14,3)	7
Combinação flexível dos pares	7 (43,75)	9 (56,25)	16

Observa-se maior freqüência de algumas estratégias em função da operação utilizada nos problemas de combinatória: as diferenças foram em relação ao uso da estratégia inadequada que era mais freqüentemente utilizada nos problemas que requeriam a divisão do que em problemas que requeriam a multiplicação. O uso mais freqüente desta estratégia na divisão talvez se explique porque o uso da operação de divisão em problemas de combinatória tenha sido a situação mais difícil para as crianças.

A outra diferença encontrada foi em relação ao uso da estratégia de combinação por pares fixos. Esta era mais freqüentemente adotada nos problemas que requeriam a multiplicação do que nos problemas que requeriam a divisão. Parece que em problemas que requerem a multiplicação é mais fácil tentar formar pares do que nos que requerem a divisão.

5.3.2. Estratégias x tipo de suporte de representação

Tabela 12: Número e porcentagem (em parênteses) das estratégias nos problemas de combinatória em função do suporte de representação.

Estratégias nos problemas de combinatória	Lápis e papel	Concreto Neutro	Concreto Definido	Total
Inadequada	26 (46,4)	19 (34)	11 (19,6)	56
Combinação por pares fixos	9 (22)	14 (34,1)	18 (43,9)	41

Combinação flexível dos pares limitados pelo maior número presente no enunciado	1 (14,3)	1 (14,3)	5 (71,4)	7
Combinação flexível dos pares	4 (25)	6 (37,5)	6 (37,5)	16

De modo geral, observa-se que algumas estratégias variam em função do suporte de representação disponibilizado. A estratégia inadequada com perda do significado foi menos freqüente no concreto definido do que nos demais grupos. Já a combinação flexível dos pares limitados pelo maior número do enunciado foi mais freqüente quando objetos eram disponibilizados do que quando os demais suportes eram apresentados.

A seguir são apresentados e discutidos os resultados relativos ao uso de cada tipo de estratégia adotada nos problemas de combinatória, separadamente, em função do suporte de representação fornecido.

- **Inadequada**

Como mostrado na Tabela 12, esta estratégia era menos freqüente quando objetos estavam presentes (G3: 19,6%) do que em relação aos demais suportes de representação (G1 – lápis e papel: 46,4%, G2 - fichas: 34%). Esses resultados decorreram do fato de que as estratégias inadequadas eram pouco freqüentes quando objetos eram fornecidos para as crianças. Isso significa que os objetos permitiam as crianças não perderem de vista as relações envolvidas no problema.

- **Combinação por pares fixos**

Como mostrado na Tabela 12, esta estratégia era menos freqüente quando se tinham lápis e papel (G1: 22%) do que em relação aos materiais concretos (G2 – fichas: 34,1%, G3 - objetos: 43,9%).

É importante salientar que existe uma grande diferença entre o lápis e papel (G1) e o concreto definido (G3). De fato, como mostrado na Tabela 12, a estratégia de combinação por pares é mais freqüente quando objetos são disponibilizados do que quando lápis e papel são fornecidos. É possível que por não compreender a necessidade de formar pares que variam entre si, a criança perceba apenas a necessidade de formar pares fixos, acreditando que com objetos, no caso as blusas e as saias, este material torna-se mais adequado para auxiliar na resolução.

➤ **Combinação flexível dos pares limitados pelo maior número presente no enunciado**

Analisando a Tabela 12, essa estratégia é mais freqüente quando objetos (71,4%) são disponibilizados do que quando fichas (14,3%) ou lápis e papel (14,3%) são oferecidos. Nota-se que os objetos de certa forma favorecem o uso desta estratégia. Parece que os objetos (saias e blusas) permitem que a criança compreenda, pelo menos de forma ainda elementar, que os pares não são fixos, havendo flexibilidade na combinação entre os objetos. Esta questão, entretanto, merece ser investigada em maiores detalhes, como sugerido nas conclusões finais deste estudo.

➤ **Combinação flexível dos pares**

Esta foi a estratégia que mais se aproximou do que é requerido em problemas de combinatória: combinação flexível dos elementos para a formação de pares que não são fixos, distinguindo-se número de elementos de número de combinações possíveis entre eles. Como mostrado na Tabela 12, os percentuais de freqüência desta estratégia em cada grupo são semelhantes. Estes dados indicam que esta estratégia não varia em função do suporte de representação fornecido.

Resumindo os dados até então analisados em relação às relações entre estratégias e suportes de representação em problemas de combinatória, observa-se que:

(a) A estratégia inadequada varia em função do suporte de representação disponibilizado. Esta estratégia era menos freqüente quando objetos eram oferecidos do que quando fichas e lápis e papel estavam presentes. Parece que neste tipo de problema os objetos favorecem não perder o significado do problema;

(b) A estratégia de combinação por pares fixos também varia em função do suporte de representação. Esta estratégia é mais utilizada quando os materiais concretos definidos (objetos) estão presentes durante a resolução do problema. É possível que isso ocorra porque os objetos (saias e blusas) permitem que a criança diretamente forme os pares de blusas e saias a serem combinados. Entretanto a criança forma os pares de maneira fixa.

As demais estratégias (combinação flexível dos pares, e combinação flexível dos pares limitados pelo maior número presente no enunciado do problema) não variavam em função do suporte de representação disponibilizado.

Além das relações entre estratégia adotada e suporte de representação adotado, examinou-se, ainda, a relação entre as estratégias e as operações requeridas para a resolução dos problemas de combinatória. Este aspecto é apresentado a seguir, considerando cada grupo separadamente.

5.3.3. Problemas de combinatória resolvidos através de lápis e papel (G1): Estratégias X Operação

A Tabela 13 mostra a porcentagem das estratégias adotadas em cada operação quando se tem o lápis e papel como suporte de representação, constando o nível de significância obtido através do Wilcoxon (Anexo V).

Tabela 13: Número e porcentagem (em parênteses) das estratégias em relação aos problemas de combinatória multiplicação e divisão usando o lápis e papel.

Estratégias	Freqüência		Total	Z	P
	Multiplicação	**Divisão**			
Inadequada	9 (34,6)	17 (65,4)	26	-2,5205	.0117
Combinação por pares fixos	8 (88,9)	1 (11,1)	9	-2,3664	.0180
Combinação flexível dos pares limitados pelo maior número presente no enunciado	0	1 (100)	1	-1,0000	.3173
Combinação flexível dos pares	3 (75)	1 (25)	4	-1,3416	.1797

Diferenças significativas foram encontradas em relação à estratégia inadequada que era mais freqüente nos problemas que requeriam a divisão do que entre os que requeriam a multiplicação; e em relação à estratégia de combinação por pares fixos que era mais freqüente na multiplicação do que na divisão.

Mais uma vez, nota-se a dificuldade da criança em resolver problemas de combinatória envolvendo a divisão. Devido a esta dificuldade as crianças usam estratégias que levam a uma perda das relações envolvidas no problema. Já nos problemas que requerem a multiplicação as crianças parecem compreender a necessidade de formar pares, embora o faça de forma fixa.

Os dados mostram, portanto, que ao usar lápis e papel como suporte de representação, algumas estratégias adotadas nos problemas de combinatória variam em função da operação requerida para sua solução.

5.3.4. Problemas de combinatória resolvidos através de material concreto neutro (G2 - Fichas): Estratégias X Operação

As porcentagens das estratégias quando fichas são disponibilizadas na resolução de problemas de combinatória são apresentadas na Tabela 14, constando o nível de significância obtido através do Wilcoxon (Anexo V).

Tabela 14: Número e porcentagem (em parênteses) das estratégias em relação aos problemas de combinatória multiplicação e divisão usando o material concreto neutro.

Estratégias	Freqüência		Total	Z	P
	Multiplicação	**Divisão**			
Inadequada	3 (15,8)	16 (84,2)	19	-3,1798	.0015
Combinação por pares fixos	14 (100)	0	14	-3,2958	.0010
Combinação flexível dos pares limitados pelo maior número presente no enunciado	1 (100)	0	1	-1,0000	.3173
Combinação flexível dos pares	2 (33,3)	4 (66,7)	6	-1,3416	.1797

Semelhante ao que foi observado com o Grupo 1 (lápis e papel), diferenças significativas foram encontradas em relação à estratégia inadequada e em relação à estratégia de combinação por pares fixos, como indicado pelo Wilcoxon. A estratégia inadequada era mais freqüente nos problemas que requeriam a divisão do que entre os que requeriam a multiplicação; e em relação à estratégia de combinação por pares fixos esta estratégia era adotada apenas na multiplicação.

Portanto, que as estratégias adotadas nos problemas de combinatória variam em função da operação requerida para sua solução, quando se usa o material concreto neutro como suporte de representação. Há estratégias características da divisão, assim como há estratégias características da multiplicação.

5.3.5. Problemas de combinatória resolvidos através de material concreto definido (G3 - Objetos): Estratégias X Operação

A Tabela 15 ilustra os resultados obtidos nestes grupos em relação às estratégias adotadas e as operações requeridas para a resolução dos problemas de combinatória, constando ainda, o nível de significância obtido através do Wilcoxon (Anexo V).

Observa-se que quando a criança se utiliza de objetos para resolver problemas surgem grandes variações entre as operações quanto ao uso das estratégias.

Tabela 15: Número e porcentagem (em parênteses) das estratégias em relação aos problemas de combinatória multiplicação e divisão usando o material concreto definido.

Estratégias	Freqüência		Total	Z	P
	Multiplicação	Divisão			
Inadequada	0	11 (100)	11	-2,9341	.0033

Combinação por pares fixos	13 (72,2)	5 (27,8)	18	-2,2424	.0249
Combinação flexível dos pares limitados pelo maior número presente no enunciado	5 (100)	0	5	-2,0226	.0431
Combinação flexível dos pares	2 (33,3)	4 (66,7)	6	-1,3416	.1797

Estratégias inadequadas são observadas apenas em problemas de combinatória que requerem a divisão. Por outro lado, a combinação por pares fixos são mais freqüentes em problemas que requerem a multiplicação do que nos que requerem a divisão. A estratégia de combinação flexível dos pares limitados pelo maior número do enunciado do problema aparece apenas em problemas de multiplicação.

Mais uma vez nota-se a dificuldade da criança em manter as relações envolvidas no problema quando resolvendo problemas de combinatória que requerem a divisão (uso de estratégias inadequadas). Isso ocorreu em todos os grupos independentemente do tipo de suporte disponibilizado.

De modo geral, nos problemas de combinatória, em todos os grupos de crianças, observa-se que a estratégia inadequada foi característica da operação de divisão e a estratégia combinação por pares fixos foi mais freqüente na operação de multiplicação. A estratégia que usa o raciocínio apropriado para a resolução dos problemas de combinatória (combinação flexível dos pares) não foi característica nem da operação de multiplicação nem da divisão, que foi rara em ambas as operações.

Comparando-se, no geral, os resultados relativos às comparações entre operações quanto ao uso das diferentes estratégias em cada um dos grupos, observa-se que há mais variações entre as operações quando objetos são disponibilizados (três variações) do que quando lápis e papel são fornecidos (duas variações) e do que quando fichas (duas variações) são oferecidas. Semelhante ao que foi observado em relação aos problemas de isomorfismo em todos os grupos, a presença de objetos permite que as crianças sejam mais sensíveis às operações do que quando fichas são oferecidas.

Importante mencionar que nos problemas de combinatória nenhuma das crianças em toda a amostra, mesmo quando lápis e papel eram disponibilizados, adotou a aplicação da operação da divisão ou da multiplicação para tentar resolver os problemas. Isso ocorria com os problemas de isomorfismo, mas não com os de combinatória. Uma possível explicação para isso, é que nos problemas de combinatória as crianças não os reconhecem como sendo problemas que requerem tais operações. Essa é uma questão interessante de ser investigada, como será tratado nas conclusões deste estudo.

A seguir são tratadas as relações entre as estratégias utilizadas e o desempenho das crianças na resolução dos problemas apresentados, procurando-se juntar os dados relativos às estratégias com os dados relativos ao desempenho.

5.4. Estratégias e Desempenho

O objetivo das discussões a seguir é o de procurar compreender as relações entre desempenho e estratégia adotada. Haveria alguma estratégia que levaria mais ao acerto do que outras? Será que uma mesma estratégia variaria seu nível de eficácia em função do suporte de representação adotado? Devido às diferenças entre as estratégias adotadas nos problemas de isomorfismo e as estratégias adotadas nos problemas de combinatória, analisou-se essas questões em cada tipo de problema separadamente.

- **Problemas de isomorfismo**

Na Tabela 16, observa-se que de modo geral as estratégias levam a um alto percentual de acertos nos problemas de isomorfismo, com exceção da estratégia inadequada que leva sistematicamente ao erro.

Tabela 16: Número e porcentagem (em parênteses) de acerto em cada estratégia em relação aos problemas de isomorfismo.

Estratégias dos problemas de isomorfismo	Acertos	Total
Inadequada	0	24
Contagem ou distribuição unitária	24 (96)	25
Ensaio e erro por ajustes	12 (80)	15
Adição repetida	26 (100)	26
Contagem em múltiplos	3 (100)	3
Mista	8 (100)	8
Aplicação das operações	14 (73,7)	19

Isso é observado principalmente em relação à adição repetida, à contagem em múltiplos e a mista (acerto sistemático). Interessante observar que nem sempre o uso da operação leva ao acerto. Isso talvez ocorra porque a criança conhece a operação da divisão e da multiplicação porém apresenta erros de cálculo ou inversão dos termos (como ocorreu com a divisão em que a criança confundia o divisor com o quociente)

➤ **Problemas de combinatória**

Em relação aos problemas de combinatória, como mostra Tabela 17, a única estratégia que parece levar a algum acerto é a combinação flexível dos pares.

Tabela 17: Número e porcentagem (em parênteses) de acerto em cada estratégia em relação aos problemas de combinatória.

Estratégias dos problemas de combinatória	Acertos	Total
Inadequada	0	56
Combinação por pares fixos	0	41
Combinação flexível dos pares limitados pelo maior número presente no enunciado	0	7
Combinação flexível dos pares	8 (50)	16

Esta estratégia garante pelo menos 50% de respostas corretas nos problemas de combinatória. Esta estratégia indica ser a mais eficiente na resolução desses problemas, porém não leva ao acerto sistemático como se poderia inicialmente pensar. O que ocorre é que as crianças embora aceitem a idéia de pares flexíveis elas não combinam exaustivamente os pares e se perdem na contagem das combinações feitas. Isso leva ao erro. No entanto, esta estratégia, indica que a criança não mais confunde número de elementos com número de combinações, como ocorria, por exemplo com a estratégia de combinação por pares fixos limitados pelo maior número presente no enunciado do problema. A criança, ao usar esta estratégia parece compreender que o que deve ter em mente para achar o resultado correto é a contagem do número de combinações que podem ser feitas. É possível supor que os erros derivados desta estratégia tenham decorrido dos valores usados nos problemas e que problemas com números menores poderiam ter sido adequadamente resolvidos. Esta é uma possibilidade, e como comentado nas conclusões poderá ser investigada em estudos futuros.

Interessa, ainda, examinar se a relação entre desempenho e estratégias é influenciada pelo suporte de representação, como discutido a seguir.

5.4.1. As relações entre desempenho e estratégias em cada suporte de representação

Em função das diferentes estratégias adotadas em cada tipo de problema, os dados a seguir são apresentados em relação a cada tipo de problema separadamente.

- **Problemas de isomorfismo**

As relações entre desempenho e estratégias nos problemas de isomorfismo em função do suporte de representação oferecido são ilustradas na Tabela 18.

Como se pode observar nesta tabela, as estratégias inadequadas levam sempre ao erro, independentemente do tipo de suporte de representação adotado durante a resolução dos problemas de isomorfismo.

O acerto, quando o suporte de representação é lápis e papel parece se caracterizar pelo uso da adição repetida (próprio de problemas que requerem a multiplicação para sua resolução) e pela aplicação da operação da divisão ou da multiplicação.

Tabela 18: Número e porcentagem (em parênteses) de acertos em cada estratégia em relação ao suporte de representação nos problemas de isomorfismo.

	Condições			
Estratégias nos problemas de isomorfismo	**Lápis e papel**	**Concreto neutro**	**Concreto definido**	**Total**

		(fichas)	(objetos)	
Inadequada	0	0	0	0
Contagem ou distribuição unitária	5 (20,8)	12 (50)	7 (29,2)	24
Ensaio e erro por ajustes	0	4 (33,3)	8 (66,7)	12
Adição repetida	9 (34,6)	4 (15,4)	13 (50)	26
Contagem em múltiplos	0	1 (33,3)	2 (66,7)	3
Mista	2 (25)	3 (37,5)	3 (37,5)	8
Aplicação das operações	6 (42,8)	4 (28,6)	4 (28,6)	14

Quando o suporte de representação oferecido é material concreto neutro (fichas) que não possui um referente direto para as quantidades envolvidas no problema, as estratégias mais eficientes, isto é, que levam ao acerto, são a contagem unitária (para a multiplicação) ou distribuição unitária (para a divisão) e a estratégia mista que envolve a adição repetida combinada com outras estratégias como a contagem em múltiplos e a aplicação das operações.

Quando objetos são disponibilizados (material concreto definido), parece que mais estratégias surgem como eficientes: o ensaio e erro por ajustes, a contagem em múltiplos e a adição repetida. Importante notar que essas últimas são próprias de problemas que requerem a multiplicação para sua resolução. A estratégia mista também é responsável por um percentual relativo de acertos (37.5%).

Comparando-se, de modo geral, os três grupos, nota-se que nos problemas de isomorfismo as crianças utilizam-se de estratégias mais variadas que levam ao acerto quando objetos são disponibilizados.

Considerando-se cada estratégia separadamente, observa-se que a eficiência da estratégia ensaio e erro por ajustes, a adição repetida e a contagem em múltiplos é mais acentuada quando objetos estão presentes durante a resolução de problemas de isomorfismo do que em relação aos demais suportes de representação. A contagem e a distribuição unitária por sua vez, é mais eficiente quando fichas (material concreto neutro) são oferecidas. A aplicação das operações é mais eficiente quando lápis e papel estão disponíveis. Isso era de se esperar, evidentemente. A estratégia mista parece ser eficiente em todos os três tipos de suportes de representação.

- **Problemas de combinatória**

A Tabela 19 apresenta as relações entre desempenho e estratégias em cada suporte de representação na resolução dos problemas de combinatória. Como pode ser visto, a única estratégia que levou ao acerto foi a combinação flexível dos pares. Isso foi observado nos três tipos de suportes oferecidos às crianças.

Tabela 19: Número e porcentagem (em parênteses) de acerto das estratégias em relação ao suporte de representação nos problemas de combinatória.

Estratégias	**Condições**			**Total**
	Lápis e papel	**Concreto neutro (fichas)**	**Concreto definido (objetos)**	
Inadequada	0	0	0	0
Combinação por pares fixos	0	0	0	0
Combinação flexível dos pares limitados pelo maior número presente no enunciado	0	0	0	0
Combinação flexível dos pares	3 (37,5)	3 (37,5)	2 (25)	8

Como já mencionado, dado os problemas de combinatória merecem uma investigação à parte, incluindo, não apenas um maior número de crianças mas também crianças mais velhas para se examinar como seria o uso das estratégias mais elaboradas em função do suporte de representação.

Considerando a grande quantidade de dados analisados, faz-se necessário, uma visão geral dos dados obtidos em relação às estratégias neste estudo. Para tal, é apresentado um resumo dos resultados relativos às estratégias em cada suporte de representação.

5.5. Resumo dos resultados relativos às estratégias em cada suporte de representação

Os quadros apresentados a seguir resumem os principais resultados obtidos neste estudo em relação às estratégias de resolução adotadas pelas crianças neste estudo.

O Quadro 6 permite uma visualização geral das estratégias mais adotadas em cada tipo de problema em função dos suportes de representação disponibilizados.

Quadro 6: Resumo geral das estratégias mais adotadas em cada tipo de problema e em função dos suportes de representação.

	Isomorfismo	**Combinatória**
Grupo 1 **Lápis e papel**	• Inadequada (62,5%) • Adição repetida (34,6%) • Aplicação das operações (42,1%)	• Inadequada (46,4%)

Grupo 2 Material concreto neutro (fichas)	• Contagem ou distribuição unitária (48%) • Ensaio e erro por ajustes (40%) • Mista (37,5%) • Aplicação das operações (36,8%)	• Inadequada (33,9%) • Combinação por pares fixos (34,1%) • Combinação flexível dos pares (37,5%)
Grupo 3 Material concreto definido (objetos)	• Ensaio e erro por ajustes (53,3%) • Adição repetida (50%) • Contagem em múltiplos (66,7%)	• Combinação por pares fixos; (43,9%) • Combinação flexível dos pares limitados pelo maior número presente no enunciado (71,4%)

Os quadros a seguir mostram as estratégias adotadas em cada grupo em função do tipo de problema e do tipo de operação.

Quadro 7: Resumo geral das estratégias adotadas em cada tipo de problema e em cada operação no Grupo 1 (lápis e papel)

	Isomorfismo		**Combinatória**	
	Multiplicação	**Divisão**	**Multiplicação**	**Divisão**
Grupo 1 Lápis e papel	• Inadequada (46,7%) • Contagem ou distribuição unitária (20%) • Adição repetida (100%) • Mista (100%)	• Inadequada (53,3%) • Contagem ou distribuição unitária (80%) • Ensaio e erro por ajuste (100%)	• Inadequada (34,6%) • Combinação por pares fixos (88,9%)	• Inadequada (65,4) • Combinação por pares fixos (11,1%) • Combinação flexível dos pares limitados pelo maior número presente no enunciado (100%)

• Aplicação das operações (12,5%).	• Aplicação das operações (87,5%)	• Combinação flexível dos pares (75%)	(100%) • Combinação flexível dos pares (25%)

Quadro 8: Resumo geral das estratégias adotadas em cada tipo de problema e em cada operação no Grupo 2 (fichas)

	Isomorfismo		Combinatória	
	Multiplicação	**Divisão**	**Multiplicação**	**Divisão**
Grupo 2 Material concreto neutro (fichas)	• Inadequada (57,1%) • Contagem ou distribuição unitária (41,7%) • Adição repetida (100%) • Contagem em múltiplos (100%) • Mista (100%) • Aplicação das operações (42,9%)	• Inadequada (42,9%) • Contagem ou distribuição unitária (58,3%) • Ensaio e erro por ajustes (100%) • Aplicação das operações (57,1%).	• Inadequada (15,8%) • Combinação por pares fixos (100%) • Combinação flexível dos pares limitados pelo maior número presente no enunciado (100%) • Combinação flexível dos pares (33,3%)	• Inadequada (84,2%) • Combinação flexível dos pares (66,7%)

Quadro 9: Resumo geral das estratégias adotadas em cada tipo de problema e em cada operação no Grupo 3 (objetos)

	Isomorfismo		Combinatória	
	Multiplicação	**Divisão**	**Multiplicação**	**Divisão**
Grupo 3 Material concreto definido (objetos)	• Adição repetida (100%) • Contagem em múltiplos (100%) • Mista (100%) • Aplicação das operações (50%)	• Inadequada (100%) • Contagem ou distribuição unitária (100%) • Ensaio e erro por ajustes (100%) • Aplicação das operações (50%)	• Combinação por pares fixos (72,2%) • Combinação flexível dos pares limitados pelo maior número presente no enunciado (100%) • Combinação flexível dos pares (33,3%)	• Inadequada (100%) • Combinação por pares fixos (27,8%) • Combinação flexível dos pares (66,7%)

O Quadro 10 ilustra os principais resultados relativos às relações entre o desempenho e as estratégias adotadas em cada tipo de problema em cada grupo.

Quadro 10: As relações entre desempenho e estratégias quanto ao tipo de problema em cada grupo.

	Isomorfismo		**Combinatória**	
	Acerto	**Erro**	**Acerto**	**Erro**
Grupo 1 Lápis e papel	• Adição repetida • Aplicação das operações	• Inadequada	• Combinação flexível dos pares	• Inadequada • Combinação por pares fixos; • Combinação flexível dos pares limitados pelo maior número presente no enunciado
Grupo 2 Material concreto neutro (fichas)	• Contagem ou distribuição unitária • Mista	• Inadequada	• Combinação flexível dos pares	• Inadequada • Combinação por pares fixos • Combinação flexível dos pares limitados pelo maior número presente no enunciado
Grupo 3 Material concreto definido (objetos)	• Contagem em múltiplos • Ensaio e erro por ajustes • Adição repetida	• Inadequada	• Combinação flexível dos pares	• Inadequada • Combinação por pares fixos • Combinação flexível dos pares limitados pelo maior número presente no enunciado

Capítulo VI.

Conclusões e Discussão Final

Segundo a literatura, os estudos conduzidos sobre a resolução de problemas inseridos no campo das estruturas multiplicativas, em particular problemas de multiplicação e de divisão, examinam as estratégias de resolução adotadas pelas crianças e o grau de dificuldade dos problemas, procurando identificar uma possível seqüência de desenvolvimento na aquisição desses conceitos. Observa-se, entretanto, que há um maior interesse dos pesquisadores em investigar problemas que requerem a divisão para sua resolução do que problemas que requerem a multiplicação.

Estudos voltados para a divisão investigam as noções inicias de crianças pequenas (e.g., Correa, 1996; Correa, Nunes & Bryant, 1998); outros analisam as estratégias de resolução de problemas matemáticos em crianças pequenas antes e depois de serem instruídas formalmente, tendo como suporte lápis e papel e materiais concretos, sejam estes fichas ou objetos (Selva, 1998); e estudos que analisam as representações das crianças ao resolverem problemas e operações de divisão (Lautert & Spinillo, prelo; 1999; Spinillo, 2001).

O interesse em relação à multiplicação parece ser menor entre os pesquisadores, caracterizando-se as pesquisas, basicamente, por examinar as estratégias que as crianças adotam, de maneira geral, sem uma preocupação especifica sobre o papel desempenhado pelos suportes de representação (Mulligan,1992; Mulligan & Mitchelmore, 1997; Mulligan & Wright, 2000).

Entretanto, os suportes de representação são apontados na literatura como fator relevante na resolução de problemas, além da idade e do tipo de problema a ser resolvido (Lautert, 2000; Lautert & Spinillo, 1999; Selva, 1998; Vasconcelos, 1998; Fayol, 1996; Zunino, 1995).

A relevância de tais suportes é também reconhecida entre educadores, em especial quanto à importância conferida ao uso de material concreto para o ensino de matemática nas séries iniciais do ensino fundamental, como sugerido por Spinillo & Magina (em preparação) e por Taxa & Fini (2001). Alguns autores, entretanto, questionam o papel facilitador do material concreto, afirmando que eles podem inibir a presença de estratégias de resolução mais flexíveis e apropriadas (Vasconcelos, 1998; Selva, 1998; Lautert, 2000); enquanto outros autores afirmam que a presença de referentes para as quantidades dos problemas é fator de maior relevância que a presença do material concreto (Hughes, 1986; Spinillo & Magina, em preparação). Os referentes parecem conferir um significado à situação, facilitando uma maior compreensão do problema. Estas pesquisas têm explorado problemas de adição, subtração e divisão, não examinando problemas de multiplicação; sendo importante investigar esses tipos de problemas.

Os suportes de representação, em geral, são classificados como suportes concretos (material concreto) e suportes gráficos (lápis e papel). Em relação aos primeiros, é possível supor que os materiais concretos possam ser de natureza distinta, dependendo de sua relação (mais direta ou indireta) com os referentes dos problemas. Os estudos na área tratam todo material concreto como sendo da mesma natureza. No entanto, os materiais concretos definidos (como carrinhos e caixas) indicam de forma clara a que quantidade eles se referem em um dado problema (divisor ou dividendo, no caso da divisão e multiplicador ou multiplicando, no caso da multiplicação). Fichas ou palitos, por sua vez, mesmo sendo materiais concretos, são considerados neutros, pois não indicam de imediato e de forma clara a que quantidades eles se referem em um dado problema. Esta diferenciação permite compreender melhor as relações entre material concreto e referentes, sendo isso considerado nesta pesquisa.

Segundo Vergnaud (1986; 1997) os conceitos matemáticos envolvem a relação entre três aspectos: a situação, que é o contexto em que o problema é apresentado; os invariantes, que são as propriedades dos conceitos; e as representações simbólicas, que são as várias formas em que o problema pode ser apresentado (diagramas, números, gráficos). Esses aspectos influenciam na forma como o indivíduo representa e resolve os problemas aritméticos. O material disponibilizado para a resolução de problemas matemáticos é parte integrante da situação em que o conceito está inserido, sendo entendido como um suporte de representação das relações envolvidas nos problemas matemáticos e como uma ferramenta da compreensão (Nunes, 1994; 1997). Entendido como um significante, os suportes de representação são elementos que, inseridos em uma dada situação, conferem um sentido funcional ao conceito e que, em conseqüência, influenciam as formas de resolução adotadas pelo indivíduo ao resolver problemas matemáticos.

Em vista dessas considerações, de modo geral, o presente estudo teve por objetivo examinar o papel desempenhado por diferentes tipos de suportes de representação na resolução de problemas inseridos no campo das estruturas multiplicativas, cuja resolução envolve o uso da divisão e da multiplicação.

Três aspectos (variáveis) foram considerados no planejamento experimental adotado, e na análise e discussão dos dados obtidos nesta pesquisa: tipos de suportes de representação (material concreto neutro, material concreto definido e lápis e papel), tipos distintos de problemas (isomorfismo e combinatória) e as operações requeridas para sua resolução (divisão e multiplicação). O efeito desses fatores foi analisado tanto em relação ao desempenho (número de respostas corretas) quanto em relação às estratégias que as crianças adotavam para resolver os problemas.

Este capítulo final discute os principais dados obtidos neste estudo, considerando o desempenho e os suportes de representação, as estratégias e os suportes de representação e as relações entre desempenho e estratégias em cada suporte examinado. São apresentadas, ainda, as contribuições deste estudo e suas implicações, bem como se sugere algumas pesquisas que futuramente poderão ser desenvolvidas para contribuir para este campo de investigação.

6.1. Os principais resultados do estudo e suas conclusões

6.1.1. Desempenho e suportes de representação

Os dados obtidos em relação ao desempenho das crianças em cada suporte de representação mostram que as crianças que resolviam os problemas de isomorfismo usando material concreto (objetos e fichas) tiveram um desempenho melhor do que aquelas que resolviam os problemas através de lápis e papel. No entanto, o melhor desempenho observado foi em relação às crianças que tinham objetos à sua disposição. Esse dado indica que a natureza do material concreto é fator importante no desempenho. Este melhor desempenho entre as crianças que dispunham de objetos mostra que nem todo material concreto tem um mesmo efeito sobre a resolução de problemas de isomorfismo. Uma explicação para isso é que os objetos apresentam uma relação direta com as quantidades envolvidas nos problemas. Como discutido na fundamentação teórica, os objetos servem de referentes para essas quantidades, facilitando a resolução (ver Hughes, 1986 e Spinillo, 1994 que fazem comentários a respeito da importância dos referentes na resolução de problemas aritméticos). A presença de objetos permitia que a criança mais facilmente compreendesse as relações entre os referentes e suas quantidades correspondentes, e ainda, mantivesse um controle acerca do significado do problema e do seu processo de resolução. Os objetos permitiam, por exemplo, que a criança facilmente identificasse o divisor e o dividendo, o multiplicando e o multiplicador. As fichas, por outro lado, não favoreciam uma discriminação tão precisa, embora fossem mais facilitadoras do desempenho do que a situação com lápis e papel.

Quando se analisa o desempenho em relação ao tipo de problema, observa-se que em todas as situações os problemas de isomorfismo foram mais fáceis que os problemas de combinatória. O suporte de representação disponibilizado, portanto, não teve um efeito nesta direção. Na realidade, independentemente do suporte disponibilizado, os problemas de combinatória, como era de se esperar, foram bem mais difíceis que os de isomorfismo. Isso é explicado em função da estrutura do problema, como afirmado por Vergnaud (1991): os problemas de combinatória são mais complexos do que os problemas de isomorfismo e sua compreensão se desenvolve tardiamente nas crianças. Os problemas de combinatória requerem o estabelecimento de relações que as crianças ainda não dominam, pelo menos na faixa etária investigada nesta pesquisa.

Quando se analisa o desempenho entre as três situações apenas nos problemas de isomorfismo, verifica-se que há uma diferença significativa entre eles: as crianças que têm à sua disposição materiais concretos como suporte de representação apresentam melhores resultados do que àquelas que resolviam os problemas através de lápis e papel. O efeito do suporte, portanto, só foi observado em relação aos problemas de isomorfismo, sendo o material concreto um suporte mais facilitador do que lápis e papel, principalmente quando objetos e não fichas eram apresentadas.

Quando se analisa o desempenho em função do tipo de operação requerida para a resolução dos problemas, observa-se que em todos os grupos o índice de acerto foi semelhante tanto para os problemas que requeriam a operação de multiplicação quanto para os problemas que requeriam a divisão. Ao que parece, o suporte de representação não influencia o desempenho quer da multiplicação quer da divisão, enquanto operações a serem aplicadas.

No entanto, nos problemas de isomorfismo, quando as crianças dispõem de material concreto neutro (fichas) para resolver os problemas, observa-se um melhor desempenho em problemas que requerem a multiplicação do que quando os problemas requerem a divisão. Este efeito foi observado apenas em relação ao material concreto neutro, o mesmo não acontecendo quando lápis e papel e os objetos eram fornecidos. De alguma forma, parece que os suportes concretos são mais necessários, aos olhos das crianças, ao emprego da multiplicação do que da divisão.

Os materiais concretos facilitam a resolução dos problemas de isomorfismo talvez por permitirem manipular cada unidade especificada no problema, como se pode observar nas estratégias adotadas, e no caso específico dos objetos por ter também, sempre presente os referentes das quantidades envolvidas nos problemas.

De modo geral, os dados mostram que o desempenho é especialmente influenciado pelo tipo de problema e pelo suporte de representação disponibilizado, parecendo haver uma interação entre esses fatores, de modo que a situação mais proveitosa (em termos de desempenho) é aquela em que objetos são disponibilizados para a resolução de problemas de isomorfismo. Em relação aos problemas de combinatória, dada a grande dificuldade das crianças com este tipo de problema, o suporte de representação em nada influencia a resolução.

6.1.2. Estratégias e suportes de representação

A estrutura do problema é de tal forma importante no processo de resolução, como indicado no Capitulo 3, que as estratégias adotadas pelas crianças nos problemas de isomorfismo foram bastante distintas daquelas utilizadas nos problemas de combinatória, com exceção da estratégia inadequada que foi adotada em ambos os problemas. Em vista disso, o efeito dos suportes de representação sobre as estratégias foi analisado separadamente em relação a cada tipo de problema.

De modo geral, as estratégias adotadas nos problemas de isomorfismo foram mais variadas do que as estratégias nos problemas de combinatória. Importante mencionar, também, que as estratégias nos problemas de combinatória foram mais facilmente hierarquizadas do que em relação aos problemas de isomorfismo. Isso talvez tenha ocorrido porque nos problemas de isomorfismo as crianças, por compreenderem o que lhes era requerido nesses problemas, se utilizavam de heurísticas variadas; o que não ocorria com os problemas de combinatória que por serem extremamente complexos, limitavam o uso de tais heurísticas.

De qualquer forma, foi possível hierarquizar as estratégias adotadas nos problemas de isomorfismo. Esta hierarquia pode ser assim caracterizada:

(1) Estratégia inadequada: a criança elabora sua resposta em relações proporcionais inadequadas, mostrando dificuldades em seguir as determinações do problema, podendo perder de vista as informações do mesmo;

(2) Contagem ou distribuição unitária, e ensaio e erro por ajustes: a criança lida com unidades isoladas ou agrupa as quantidades formando grupos maiores ou menores que o resultado do problema, depois vai ajustando os grupos.

(3) Adição repetida e contagem em múltiplos: este parece ser um procedimento mais sofisticado que o anterior, visto que a criança lida com agrupamentos e não mais com unidades isoladas; e, ainda, parece ter uma idéia mais clara das ações a realizar.

(4) Estratégia mista e a aplicação das operações de divisão ou de multiplicação: a criança combina estratégias de agrupamentos e, quando sabem, usam o algoritmo correspondente (quando lápis e papel) ou realizam a operação mentalmente e representam posteriormente o que fez mentalmente.

Os dados mostraram haver um efeito do suporte de representação sobre o uso dessas estratégias nos problemas de isomorfismo.

Quando o suporte era lápis e papel, as estratégias mais freqüentes eram as inadequadas e a aplicação das operações, em particular a primeira. Isso sugere que as crianças adotavam estratégias hierarquicamente opostas: ou a mais elementar ou a mais sofisticada. Uma possível explicação para isso é que as crianças que compreendiam o problema tenham associado o uso de lápis e papel a aplicação da operação, como ocorre no contexto escolar (Taxa & Fini, 2001).

Quando o suporte de representação era as fichas (material concreto neutro), a contagem ou distribuição unitária foi a estratégia mais adotada. Isso talvez tenha ocorrido porque as fichas eram entendidas como elementos isolados que seriam manipuladas uma a uma. As fichas eram entendidas com sendo a quantidade a ser dividida nos problemas que requeriam a divisão para sua resolução ou eram entendidas como sendo o todo a ser encontrado nos problemas de multiplicação. Embora isso também fosse possível com o material concreto definido, as crianças ao lidarem com os objetos tendiam a formar grupos com eles, como pode ser visto a seguir.

Quando o suporte de representação era os objetos (material concreto definido), as crianças adotavam a contagem em múltiplos, o ensaio e erro por ajustes e a adição repetida. Note-se que com este tipo de suporte, diferentemente do que ocorreu com o material concreto neutro (fichas), as crianças usavam estratégias que indicavam que elas estavam lidando com os elementos de forma agrupada (contagem em múltiplos e adição repetida). É possível que com objetos seja mais fácil fazer agrupamentos do que com fichas, pois os objetos tinham uma relação clara e direta com os referentes das quantidades contidas no enunciado dos problemas, enquanto as fichas não tinham.

Um limite do uso dos materiais concretos é a impossibilidade das crianças usarem os algoritmos requeridos para resolver os problemas, embora esses tipos de materiais favoreçam um melhor desempenho. Observou-se que havia crianças que realizavam as operações de multiplicação e de divisão a nível de cálculo mental, isso ocorria em maior freqüência com os objetos e com as fichas. As crianças que procediam dessa forma de imediato verbalizavam o resultado e utilizavam o material concreto para mostrar como haviam feito a operação mentalmente.

Importante comentar que neste estudo, os dados vão de encontro aos comentários de Spinillo & Magina (em preparação) de que o material concreto pode não facilitar o uso de operações mentais, visto que muitas vezes as crianças utilizam estes suportes apenas para fazer uma representação do enunciado do problema sem resolvê-lo.

Nos problemas de combinatória as estratégias quanto ao nível de sofisticação podem ser assim classificadas:

(1) Inadequada: como especificado acima;

(2) Combinação por pares fixos: A criança oferece como resposta o menor número presente no enunciado do problema;

(3) Combinação flexível dos pares limitados pelo maior número presente no enunciado: A criança oferece como resposta o maior número presente no enunciado do problema, por não aceitar a idéia de poder formar mais conjuntos do que determina o maior número do enunciado;

(4) Combinação flexível dos pares: A criança pensa em termos de pares combinados, e aceita a idéia de que uma blusa pode combinar com mais de uma saia. Esta estratégia embora seja a mais sofisticada, não garante o acerto pois as crianças não conseguem fazer todas as combinações possíveis.

Um aspecto importante que merece ser comentado em relação aos problemas de combinatória é o fato de que mesmo as poucas crianças que chegaram a fornecer uma resposta correta a esses problemas não aplicavam a multiplicação ou a divisão para resolvê-los. Parece que elas não percebem que esses problemas podem ser resolvidos através dessas operações.

Observa-se que o suporte oferecido parece ter um efeito sobre o uso das estratégias.

Quando o suporte era lápis e papel, a estratégia mais freqüente era a inadequada. Essa estratégia levava sempre ao erro. As crianças perdiam de vista as relações envolvidas no problema e se confundiam durante o processo de resolução.

Quando o suporte de representação era as fichas (material concreto neutro), as estratégias eram mais diversificadas, pois a criança usava estratégias inadequadas, como ocorria com lápis e papel, mas também se utilizava da estratégia de combinação por pares fixos e da estratégia de combinação flexível dos pares. Este tipo de suporte parece ter levado a criança, diferentemente do que ocorreu com o lápis e papel, a atentar para a necessidade de empregar certa flexibilidade na formação dos pares de blusas e saias.

Quando o suporte de representação era os objetos (material concreto definido), as crianças tendiam a usar, na grande maioria das vezes, a estratégia de combinação flexível dos pares limitados pelo maior número presente no enunciado do problema. A estratégia inadequada foi raramente usada. Esses dados sugerem que nos problemas de combinatória, a presença de objetos que diretamente representam as quantidades do enunciado do problema é fator importante que auxilia a criança a não perder de vista o significado do problema e do seu processo de resolução. Importante notar, ainda, que o uso da combinação flexível dos pares é estratégia mais elaborada do que àquelas que consideram a formação dos pares como sendo de natureza fixa (uma blusa para uma saia). Assim, os objetos foram facilitadores desta compreensão que é fundamental para o conceito de combinatória.

A estratégia combinação flexível dos pares esteve presente com maior freqüência em ambos os materiais concretos do que quando lápis e papel eram fornecidos. O oposto ocorreu em relação às estratégias inadequadas.

Entretanto, como foi grande a dificuldade encontrada com este problema entre as crianças investigadas, mais estudos precisam ser conduzidos que investiguem especificamente como as crianças resolvem problemas de cominatória.

A maior dificuldade das crianças que conseguiam compreender a formação flexível dos pares era o fato de que não conseguiam esgotar todas as combinações possíveis. Ao contarem as combinações feitas, as crianças se perdiam quanto aos conjuntos que já tinham sido formados e os que ainda faltavam formar. É possível supor que faltou a essas crianças algum recurso auxiliar para manter sob controle a contagem que estava sendo realizada (contar nos dedos as contagens feitas, registrar no papel etc.). Como já mencionado, outro aspecto interessante foi o fato dessas crianças não reconhecerem os problemas de combinatória como sendo problemas que poderiam ser resolvidos através da aplicação da divisão ou da multiplicação.

Em resumo, algumas estratégias são características do uso do lápis e papel, outras são características do material concreto neutro e outras do material concreto definido. Os suportes fisicamente manipuláveis oferecem um recurso importante para o processo de resolução, em especial quando objetos estão presentes, os quais garantem as relações entre as quantidades e seus referentes.

Merece comentário, ainda, o fato de que as estratégias também estavam relacionadas ao tipo de operação que era requerida para a resolução do problema. Nos problemas de isomorfismo as estratégias contagem em múltiplos, adição repetida e mista são características das operações de multiplicação. Por outro lado, as estratégias ensaio e erro, inadequadas, aplicação da operação e contagem ou distribuição unitária são características das operações de divisão.

Nos problemas de combinatória as estratégias combinação por pares fixos e combinação flexível dos pares limitados pelo maior número presente no enunciado aparecem com mais freqüência nas operações de multiplicação, enquanto a estratégia inadequada aparece com maior freqüência na operação de divisão.

6.1.3. Relações entre desempenho e estratégias nos diferentes suportes de representação

Além de apresentar as conclusões relativas ao desempenho e às estratégias separadamente, é relevante discutir as relações entre esses dois aspectos, com o objetivo de examinar se determinadas estratégias seriam mais eficientes que outras quanto ao fato de levarem a uma resolução correta dos problemas.

Os dados mostram que nem todas as estratégias levam ao acerto. Por exemplo, o uso da estratégia inadequada, tanto nos problemas de isomorfismo quanto nos problemas de combinatória, levam sempre ao erro. Isso ocorria porque esta estratégia expressava uma perda do significado do problema e de seu processo de resolução por parte da criança.

Nos <u>problemas de isomorfismo,</u> as estratégias adição repetida, contagem em múltiplos e a mista levavam sempre ao acerto. Isso indica que tais estratégias expressavam uma compreensão por parte da criança quanto ao que era solicitado delas para a resolução dos problemas, mesmo utilizando estratégias que não representavam a aplicação da operação de divisão e de multiplicação. As demais estratégias adotadas nos problemas de isomorfismo levavam quase sempre ao acerto, embora isso não ocorresse de forma sistemática.

Nos <u>problemas de combinatória</u> as estratégias combinação por pares fixos e combinação flexível dos pares limitados pelo maior número presente no enunciado, sempre levam ao erro. A primeira levava a erro pois a criança não compreendia que era necessário combinar as peças de roupas de forma flexível; e a segunda, embora mais elaborada que a primeira, também não permitia que a criança formasse todos os pares possíveis. Importante mencionar que mesmo a estratégia mais elaborada, combinação flexível dos pares, não garantia o acerto aos problemas pois as crianças não conseguiam exaustivamente combinar todas as peças de roupas para formar o número total possível de conjuntos.

De modo geral, as relações entre desempenho e estratégias indicam que determinadas estratégias são, de fato, mais elaboradas que outras; tendendo, as mais elaboradas, a levar ao acerto, sendo portanto, mais eficientes.

De modo geral, as estratégias mais elaboradas foram pouco adotadas tanto nos problemas de isomorfismo quanto nos problemas de combinatória, pois segundo Mulligan (1992) e Mulligan & Mitchelmore (1997) as crianças têm dificuldades em usar estratégias mais elaboradas ao resolverem problemas de multiplicação e de divisão mesmo quando são instruídas formalmente sobre essas operações.

A relação entre estratégias e desempenho não permanece a mesma quando examinada em cada suporte de representação. Nos problemas de isomorfismo esta relação variou conforme o suporte de representação disponibilizado, havendo estratégias que eram mais eficientes quando se usava um determinado tipo de suporte do que outros. Quando o suporte de representação era lápis e papel a estratégia mais eficiente (que leva ao acerto) foi a que as crianças aplicavam as operações. No material concreto neutro as estratégias mais eficientes foram contagem ou distribuição unitária e mista. No material concreto definido as estratégias mais eficientes foram ensaio e erro por ajuste, adição repetida, contagem em múltiplos e mista. Ao que parece, a eficiência de uma estratégia depende do suporte de representação disponibilizado. O material concreto definido (objetos) permite que um número maior de estratégias seja considerado eficiente. Como afirmado por Spinillo & Magina (em preparação) “não é apenas a presença de objetos que facilita a compreensão“ dos problemas, “mas a presença de referentes que auxiliam a criança a extrair significado da linguagem matemática formal” (p. 3). Assim, o material concreto, principalmente a presença de objetos, contribui para uma melhor representação do problema, permitindo que mesmo estratégias menos elaboradas sejam eficientes para resolvê-lo. Isso pelo menos ocorreu em relação aos problemas de isomorfismo que eram mais fáceis de serem resolvidos do que em relação aos problemas de combinatória que foram de grande dificuldade para as crianças na faixa etária investigada.

Nos problemas de combinatória as relações entre o desempenho e as estratégias não variavam em função do tipo de suporte de representação oferecido. Independentemente do suporte oferecido, as crianças erravam menos quando adotavam a estratégia de combinação flexível dos pares, embora esses acertos não fossem sempre garantidos com o uso dessa estratégia. Os estudos de Mulligan (1992) e de Mulligan & Mitchelmore (1997) mostraram resultados semelhantes a esses, pois segundo os autores, não foi possível analisar as estratégias corretas adotadas pelas crianças quando tinham fichas como suporte de representação porque o índice de acerto foi muito baixo. No presente estudo esta dificuldade foi observada em todos os três tipos de suporte de representação.

Em resumo, nos problemas de isomorfismo observa-se que a relação entre desempenho e uso de estratégias varia em função do suporte de representação oferecido, porém isso não ocorre em relação aos problemas de combinatória.

6.2. Contribuições do estudo, suas limitações e pesquisas futuras

O presente estudo traz algumas contribuições para esta área de conhecimento, apontando o papel importante desempenhado pelos suportes de representação na resolução de problemas de estrutura multiplicativa. Os suportes de representação influenciam não apenas o desempenho como também as estratégias utilizadas pelas crianças. Outra contribuição refere-se ao fato de chamar a atenção sobre a importância dos referentes na compreensão matemática. Embora os materiais concretos sejam facilitadores do desempenho, há diferenças quando esses materiais são neutros (fichas) ou definidos (objetos). Isso sugere que a natureza do material concreto disponibilizado seja considerada tanto por pesquisadores como por educadores. Como comentado anteriormente, na literatura os materiais concretos tendem a ser interpretados como sendo de uma mesma natureza, porém, como indicado neste estudo, é preciso atentar para as diferenças entre eles, pois os objetos parecem favorecer que a criança mantenha sempre em mente o significado do problema e de seu processo de resolução.

Entretanto, como não foram investigadas crianças em diferentes faixas etárias, não foi possível verificar, por exemplo, se a natureza do material concreto (neutro e definido) seria algo importante na resolução de problemas como estes em crianças mais velhas que já apresentassem um maior domínio dos conceitos matemáticos investigados.

Outra contribuição importante, porém exploratória, foram os dados relativos às estratégias das crianças nos problemas de combinatória. Sendo uma área pouco explorada em crianças desta idade, foi importante saber as diferentes formas que as crianças adotam para resolver tais problemas. Entretanto, estudos precisam ser conduzidos para examinar especificamente este conceito. Como esperado, este tipo de problema é bastante complexo para crianças desta faixa etária e o número reduzido de acertos não permitiu explorar em maiores detalhes as estratégias das crianças. Seria importante examinar crianças mais velhas que pudessem ter um desempenho mais elaborado nesses problemas e, então, explorar o efeito dos suportes de representação.

Um outro aspecto que merece ser comentado é que este estudo investigou o efeito de cada suporte de representação separadamente. Talvez fosse interessante examinar a combinação entre tipos de suportes de representação variados, por exemplo fichas e lápis e papel, objetos e lápis e papel. Combinações como estas poderiam fornecer às crianças suportes materiais e gráficos simultaneamente, que poderiam se complementar e levar a criança a um melhor desempenho e uso de estratégias mais apropriadas. Este é tema importante para desenvolver atividades em sala de aula que permitam à criança adotar e combinar diferentes tipos de representações ao resolver problemas matemáticos.

Considerando a importância desta área de investigação e as limitações deste estudo, pesquisas futuras poderão ser desenvolvidas para, ainda, aprofundar determinadas questões levantadas neste estudo:

(1) Nos problemas de combinatória as crianças não os reconhecem como sendo problemas que requerem as operações de multiplicação ou de divisão, pois elas nunca usam essas operações para resolver esse tipo de problema. Essa é uma questão interessante de ser investigada, para entender qual a hipótese da criança sobre os problemas de combinatória. Poderia desenvolver um estudo que fossem dados problemas de combinatória para as crianças e sem que elas precisassem resolvê-los respondessem ao experimentador que conta deveria aplicar para resolver os problemas: multiplicação ou divisão? E depois justificassem suas respostas.

(2) A estratégia mais elaborada adotada pelas crianças ao resolver os problemas de combinatória foi a estratégia de combinação flexível dos pares, portanto essa não garantiu totalmente o acerto (50%). O que ocorre é que as crianças embora aceitem a idéia de pares flexíveis, elas não combinam exaustivamente os pares e se perdem na contagem das combinações feitas, levando ao erro. Esta estratégia indica certo progresso, pois indica que as crianças não mais confundem número de elementos com número de combinações, como ocorria, por exemplo, com a estratégia combinação por pares fixos limitados pelo maior número presente no enunciado do problema. A criança, ao usar a estratégia mais elaborada, parece compreender que o que deve ter em mente para achar o resultado correto é a contagem do número de combinações que podem ser feitas. É possível supor que os erros derivados desta estratégia tenham decorrido dos valores usados nos problemas e que problemas com números menores poderiam ter sido resolvidos adequadamente. Esta é uma possibilidade que merece ser investigada em pesquisa futura em que estes mesmos problemas possam ser resolvidos com números menores, para analisar se os pares numéricos interferirão no desempenho das crianças.

(3) Seria interessante incluir na amostra do presente estudo crianças mais velhas para entender melhor o desenvolvimento na compreensão de problemas de combinatória.

(4) Em termos educacionais poderia ser desenvolvido um estudo de intervenção sobre problemas de combinatória em que combinasse diferentes suportes de representação, por exemplo objetos e lápis e papel, a fim de estudar um meio de desenvolver uma proposta didática para o ensino de problemas de combinatória.

(5) Poderia desenvolver um estudo com os problemas de isomorfismo onde os referentes dos problemas envolvessem dinheiro, e fossem combinados os mesmos suportes de representação para verificar se as crianças teriam a mesma compreensão e desempenho obtidos nessa pesquisa.

(6) Outra pesquisa que vem a complementar seria acrescentar um outro grupo etário mais velho com a mesma coleta, para ver se haveria diferenças entre as idades e como se caracterizaria esta diferença e, uma perspectiva de desenvolvimento. Além de ver se o efeito do suporte poderia diminuir com o desenvolvimento das crianças, e talvez fosse possível verificar um bom desempenho em todas as situações, independente do suporte fornecido. Poderia-se investigar, ainda, se outras estratégias mais elaboradas surgiriam.

Referências Bibliográficas

Anghileri, J. (1998). Uses of couting in multiplication and division. Em I. Thompson (Eds.); *Language in Mathematical Education* (pp. 95-104). Buckingham: Open University Press.

Bryant, P. (1999, abril). *O ensino de matemática e o desenvolvimento da inteligência.* Palestra apresentada no III Seminário Internacional de Educação do Recife (pp. 3-14). Recife, Brasil.

Carraher,T. N., Carraher, D. W. e Schliemann, A. D. (1988). *Na vida dez, na escola zero.* São Paulo: Editora Cortez.

Correa, J. (1996). A compreensão inicial do conceito de divisão partitiva em tarefas não-computacionais. Em: M. H. Novaes & M. R. F. Brito (Orgs.); *Psicologia na Educação: Articulação entre Pesquisa, formação e prática pedagógica.* Coletâneas da AMPEPP, 1 (5), 151-165. Rio de Janeiro: Editora Xenon.

Correa, J., M., E. S., & Meireles, E., S. (2000). A compreensão intuitiva da criança acerca da divisão partitiva de quantidades contínuas. *Estudos em Psicologia:* Natal, 5 (1), 11-31 jan/jun.

Correa, J., M., E., S., Nunes, T., & Bryant, P., (1998). Young children's understanding of division: the relationship between division terms in a no-computational task. *Journal of Education Psychology*, 90 (2), 321-329.

Da Rocha Falcão, J. T. (1996). Elementos para uma abordagem psicológica do desenvolvimento de conceitos científicos. Em M. G. Dias & A. G. Spinillo (Orgs.); *Tópicos em Psicologia Cognitiva*. Recife: Editora Universitária da UFPE.

Fayol, M. (1996). *A criança e o número. Da contagem à resolução de problemas*. Porto Alegre: Editora Artes Médicas.

Higino, Z. (1997). *Desenvolvimento da compreensão da notação escrita do sistema de numeração.* Trabalho apresentado na II Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática (pp. 46-53). Recife, Brasil.

Hughes, M. (1986). *Children and number. Difficulties in learnig mathematics.* Oxford: Brasil Blackwel.

Kamii, C., Lewis, B. & Kirkland, L. (2001). Manipulatives. When are they useful? *Journal of Mathematical Behavior*. 20, 21-31.

Lautert, S. (2000). *A representação de operações e problemas de divisão em crianças: da linguagem oral para outras formas de representação*. Dissertação de mestrado, Pós-graduação em Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco.

Lautert, S. & Spinillo, A. (1999). Como crianças representam a operação de divisão: da linguagem oral para outras formas de representação. *Temas em Psicologia,* 7 (1), 23-36.

Lautert, S. & Spinillo, A. (prelo). *As relações entre o desempenho em problemas de divisão e as concepções de crianças sobre a divisão*. *Psicologia: Teoria e pesquisa.*

Magina, S., Campos, T. M. M., Nunes, T., & Gitirana, V. (2001). *Repensando adição e subtração. contribuição da teoria dos campos conceituais.* São Paulo: Editora PROEM.

Meira, L. (1993). A aprendizagem e ensino de funções. Em A. L. D. Schliemann, D. Carraher, A. G. Spinillo, L. Meira & J. T. Falcão (Orgs.); *Estudos em Psicologia da Educação Matemática* (pp. 62-84). Recife: Editora Universitária da UFPE.

Meira, L. (1995). The microevolutionof mathematical representations in children's activity. *Cognition and Instruction*, 13 (2), 269-313.

Mulligan, J. (1992). Children's solutions to multiplication and division word problems: a longitudinal study. Em W. Geeslin & K. Graham (Eds.); *Procedings of the Sixteenth International Conference of Psichology of Mathematics Education,* 4 (1), 24-41. Australasia.

Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (1997). Young Children's Intuitive Models of Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education*. 28 (3), 309-329. Washington.

Mulligan, J. & Wright, R. (2000). Interview-based assessment of early multiplication and division. *Proceeding of the 24 th of the International Group for the Psycology of Mathematics Education* (PME). 4, 17-24. Hiroshima, Japão.

Nunes, T. (1994). O papel da representação na resolução de problemas. *Dynamis*, Blumenal. 1 (7), 19-27.

Nunes, T. (1997). Systems of signs and mathematical reasoning. Em T. Nunes & P. Bryant (Eds.); *Learning and teaching mathematics* (p. 29-44). Hove: Psychology Press.

Nunes, T. & Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática.* Porto Alegre: Editora Artes médicas.

Piaget, J. (1976). *A equilibração das estruturas cognitivas. Problema central do desenvolvimento.* Rio de Janeiro: Editora Zahar.

Piaget, J. (1978). *A formação do símbolo na criança: imitação, jogo e sonho, imagem e representação.* Rio de janeiro: Editora Zahar.

Selva, A. C. V. (1998). Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas de divisão. Em A. Schielmann & D. Carraher (Orgs.); *A compreensão de conceitos aritméticos. Ensino e pesquisa*. Campinas: Editora Papirus.

Schliemann, A. L. (1998). Da matemática da vida diária à matemática da escola. Em A. Schielmann & D. Carraher (Orgs.) *A compreensão de conceitos aritméticos. Ensino e pesquisa*. Campinas: Editora Papirus.

Schliemann & Carraher (1993). Razões e proporções na vida diária e na escola. Em A. L. D. Schliemann, D. Carraher, A. G. Spinillo, L. Meira & J. T. Falcão (Orgs.). *Estudos em Psicologia da Educação Matemática*. Recife: Editora Universitária da UFPE.

Sinclair, A., Mello, D. & Siegrist, F. (1989). A notação numérica na criança. Em A. Sinclair (Org.); *A produção de notações na criança* São Paulo: Editora Cortez.

Spinillo, A. G., (1994). O conhecimento matemático de crianças antes do ensino da matemática na escola. *A Educação Matemática em Revista (SBEM)*, 2 (3), 41-50.

Spinillo, A. G., (2001). *Papel dos referentes e dos mediadores na compreensão dos conceitos de divisão*. Relatório de pesquisa não publicado (PIBIC/CNPq/UFPE).

Spinillo, A. G. & Magina, S. (em preparação). *Alguns 'mitos' sobre a educação matemática e suas conseqüências para o ensino fundamental*.

Taxa, F. O. S., & Fini, L. D. T. (2001). Estudo sobre a solução de problemas aritméticos de multiplicação do tipo isomorfismo de medidas. Em M. R. F. Brito (Org.); *Psicologia da Educação Matemática. Teoria e pesquisa*. Florianópolis: Editora Insular.

Vasconcelos, L. (1998). Problemas de adição e de Subtração: modelos teóricos e práticas de ensino. Em A. Schielmann & D. Carraher (Orgs.); *A compreensão de conceitos aritméticos. Ensino e pesquisa*. Campinas: Editora Papirus.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. Em T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds.); *Addition and Subtraction. A cognitive perspective*. New Jersey: Lawrence Earlbaum.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structtures. Em R. Lesh & M. Landau (Eds.); *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.127-174). London: Academic Press.

Vergnaud, G. (1986). Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, 1, 75-90.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. Em M. Hiebert & J. Behr (Eds.); *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. National Council for Teachers of Mathematics (pp. 141-161).

Vergnaud, G. (1990). La Théorie des Champs Comceptuels. *Recherches in Didactique des Mathématiques.* 10 (23), 133-170.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.

Vergnaud, G. (1993). A teoria dos Campos Conceituais. *Anais do 1° Sem inário Internacional de Educação Matemática*. Rio de Janeiro. (pp.1-26).

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. Em T. Nunes & P. Bryant (Eds.); *Learning and teaching mathematics. An international perspective* (pp. 5-28). Sussex: Psychology Press.

Zunino, D. L. (1995). *A matemática na escola: Aqui e agora*. Porto Alegre: Editora Artes Médicas.

ANEXOS

Anexo I

```
- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test

     DIVISÃO
with MULTIPLICAÇÃO

     Mean Rank    Cases

          9,00      3   - Ranks (MUL LT DIV)
```

```
         9,00     14  + Ranks (MUL GT DIV)
                  43    Ties  (MUL EQ DIV)
                  --
                  60    Total

        Z =   -2,3432           2-Tailed P =  ,0191
```

- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test

COMBINATÓRIA
with ISOMORFISMO

```
     Mean Rank    Cases

         9,00      1  - Ranks (ISO LT COMB)
        25,33     48  + Ranks (ISO GT COMB)
                  11    Ties  (ISO EQ COMB)
                  --
                  60    Total

        Z =   -6,0032           2-Tailed P =  ,0000
```

- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test

COMBINATÓRIA DIVISÃO
with COMBINATÓRIA MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

         1,50      1  - Ranks (COMB_MUL LT COMB_DIV)
         1,50      1  + Ranks (COMB_MUL GT COMB_DIV)
                  58    Ties  (COMB_MUL EQ COMB_DIV)
                  --
                  60    Total

        Z =     ,0000           2-Tailed P = 1,0000
```

- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test

ISOMORFISMO DIVISÃO
with ISOMORFISMO MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

         8,00      2  - Ranks (ISO_MUL LT ISO_DIV)
         8,00     13  + Ranks (ISO_MUL GT ISO_DIV)
                  45    Ties  (ISO_MUL EQ ISO_DIV)
```

```
                --
                60    Total

        Z =   -2,4990           2-Tailed P =  ,0125


- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test
```

COMBINATÓRIA MULTIPLICAÇÃO
with ISOMORFISMO MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

        24,00      1  - Ranks (ISO_MUL LT COMB_MUL)
        24,00     46  + Ranks (ISO_MUL GT COMB_MUL)
                  13    Ties  (ISO_MUL EQ COMB_MUL)
                  --
                  60    Total

        Z =   -5,7144           2-Tailed P =  ,0000


- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test
```

COMBINATÓRIA DIVISÃO
with ISOMORFISMO DIVISÃO

```
     Mean Rank    Cases

          ,00      0  - Ranks (ISO_DIV LT COMB_DIV)
        17,50     34  + Ranks (ISO_DIV GT COMB_DIV)
                  26    Ties  (ISO_DIV EQ COMB_DIV)
                  --
                  60    Total

        Z =   -5,0862           2-Tailed P =  ,0000
```

Anexo II

NPar Tests
Wilcoxon Signed Ranks Test **LÁPIS PAPEL**

Test Statistics[b]

	COMB_MUL - ISO_MUL	COMB_DIV - ISO_DIV	COMB - ISO	DIV - MUL	COMB_DIV - COMB_MUL	ISO_DIV - ISO_MUL
Z	-3,051[a]	-2,828[a]	-3,226[a]	-1,667[a]	-1,000[a]	-1,414[a]
Asymp. Sig. (2-tailed)	,002	,005	,001	,096	,317	,157

a. Based on positive ranks.

b. Wilcoxon Signed Ranks Test

NPar Tests

Wilcoxon Signed Ranks Test **FICHAS**

Test Statistics[c]

	COMB_MUL - ISO_MUL	COMB_DIV - ISO_DIV	COMB - ISO	DIV - MUL	COMB_DIV - COMB_MUL	ISO_DIV - ISO_MUL
Z	-3,873[a]	-3,162[a]	-3,542[a]	-1,342[a]	-1,000[b]	-2,000[a]
Asymp. Sig. (2-tailed)	,000	,002	,000	,180	,317	,046

a. Based on positive ranks.

b. Based on negative ranks.

c. Wilcoxon Signed Ranks Test

NPar Tests

Wilcoxon Signed Ranks Test **OBJETOS**

Test Statistics[c]

	COMB_MUL - ISO_MUL	COMB_DIV - ISO_DIV	COMB - ISO	DIV - MUL	COMB_DIV - COMB_MUL	ISO_DIV - ISO_MUL
Z	-4,359[a]	-4,000[a]	-4,119[a]	-1,732[a]	,000[b]	-1,732[a]
Asymp. Sig. (2-tailed)	,000	,000	,000	,083	1,000	,083

a. Based on positive ranks.

b. The sum of negative ranks equals the sum of positive ranks.

c. Wilcoxon Signed Ranks Test

Anexo III

ISOMORFISMO

- - - - - Kruskal-Wallis 1-Way Anova

ISOMORFISMO
by MATERIAIS

Mean Rank	Cases		
22,92	20	MATER = 1	lápis e papel
29,90	20	MATER = 2	concreto neutro
38,67	20	MATER = 3	concreto definido
	--		
	60	Total	

			Corrected for ties		
Chi-Square	D.F.	Significance	Chi-Square	D.F.	Significance
8,1686	2	,0168	10,6750	2	,0048

COMBINATÓRIA

- - - - - Kruskal-Wallis 1-Way Anova

COMBINATÓRIA
by MATERIAIS

Mean Rank	Cases		
30,98	20	MATER = 1	lápis e papel
30,98	20	MATER = 2	concreto neutro
29,55	20	MATER = 3	concreto definido
	--		
	60	Total	

			Corrected for ties		
Chi-Square	D.F.	Significance	Chi-Square	D.F.	significance
,0888	2	,9566	,3866	2	,8243

Anexo IV

- - - - - Kruskal-Wallis 1-Way Anova

DIVISÃO
by MATERIAIS

Mean Rank	Cases		
25,05	20	MATER = 1	lápis e papel
30,20	20	MATER = 2	concreto neutro
36,25	20	MATER = 3	concreto definido
	--		
	60	Total	

			Corrected for ties		
Chi-Square	D.F.	Significance	Chi-Square	D.F.	Significance
4,1216	2	,1273	5,3621	2	,0685

- - - - - Kruskal-Wallis 1-Way Anova

MULTIPLICAÇÃO
by MATERIAIS

Mean Rank	Cases		
26,70	20	MATER = 1	lápis e papel
29,55	20	MATER = 2	concreto neutro
35,25	20	MATER = 3	concreto definido
	--		
	60	Total	

			Corrected for ties Chi-		
Square	D.F.	Significance	Chi-Square	D.F.	Significance
2,4856	2	,2886	4,8289	2	,0894

Anexo V

Isomorfismo

- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test **lápis e papel**

```
     ADIÇÃO REPETIDA – DIVISÃO
with ADIÇÃO REPETIDA – MULTIPLICAÇÃO

     Mean Rank    Cases

           ,00      0  - Ranks (ADIC_M LT ADIC_D)
          5,00      9  + Ranks (ADIC_M GT ADIC_D)
                   11    Ties  (ADIC_M EQ ADIC_D)
                   --
                   20    Total

        Z =   -2,6656           2-Tailed P =  ,0077


- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test

     ENSAIO E ERRO – DIVISÃO
with ENSAIO E ERRO – MULTIPLICAÇÃO

     Mean Rank    Cases

          1,00      1  - Ranks (ENSA_M LT ENSA_D)
           ,00      0  + Ranks (ENSA_M GT ENSA_D)
                   19    Ties  (ENSA_M EQ ENSA_D)
                   --
                   20    Total

        Z =   -1,0000           2-Tailed P =  ,3173


- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test

     INADEQUADA – DIVISÃO
with INADEQUADA – MULTIPLICAÇÃO

     Mean Rank    Cases

          5,00      5  - Ranks (INAD_M LT INAD_D)
          5,00      4  + Ranks (INAD_M GT INAD_D)
                   11    Ties  (INAD_M EQ INAD_D)
                   --
                   20    Total

        Z =    -,2962           2-Tailed P =  ,7671


- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test

     APLICAÇÃO DAS OPERAÇÕES - DIVISÃO
with APLICAÇÃO DAS OPERAÇÕES - MULTIPLICAÇÃO

     Mean Rank    Cases

          3,50      6  - Ranks (MUDI_M LT MUDI_D)
           ,00      0  + Ranks (MUDI_M GT MUDI_D)
```

```
                 14    Ties   (MUDI_M EQ MUDI_D)
                 --
                 20    Total

        Z =   -2,2014           2-Tailed P =  ,0277


- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test

     MÚLTIPLOS - DIVISÃO
with MÚLTIPLOS - MULTIPLICAÇÃO

     Mean Rank    Cases

           ,00       0  - Ranks (MULT_M LT MULT_D)
           ,00       0  + Ranks (MULT_M GT MULT_D)
                    20    Ties   (MULT_M EQ MULT_D)
                    --
                    20    Total

        Z =     ,0000           2-Tailed P = 1,0000


- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test

     MISTA - DIVISÃO
with MISTA - MULTIPLICAÇÃO

     Mean Rank    Cases

           ,00       0  - Ranks (REMU_M LT REMU_D)
          1,50       2  + Ranks (REMU_M GT REMU_D)
                    18    Ties   (REMU_M EQ REMU_D)
                    --
                    20    Total

        Z =   -1,3416           2-Tailed P =  ,1797

- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test

     CONTAGEM UNITÁRIA - DIVISÃO
with CONTAGEM UNITÁRIA - MULTIPLICAÇÃO

     Mean Rank    Cases

          2,00       3  - Ranks (UNIT_M LT UNIT_D)
           ,00       0  + Ranks (UNIT_M GT UNIT_D)
                    17    Ties   (UNIT_M EQ UNIT_D)
                    --
                    20    Total

        Z =   -1,6036           2-Tailed P =  ,1088
- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test   Fichas

     ADIÇÃO REPETIDA - DIVISÃO
with ADIÇÃO REPETIDA - MULTIPLICAÇÃO

     Mean Rank    Cases

           ,00       0  - Ranks (ADIC_M LT ADIC_D)
          2,50       4  + Ranks (ADIC_M GT ADIC_D)
```

```
                 16    Ties  (ADIC_M EQ ADIC_D)
                 --
                 20    Total

        Z =   -1,8257           2-Tailed P =  ,0679
```

- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test

ENSAIO E ERRO - DIVISÃO
with ENSAIO E ERRO - MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

          3,50      6  - Ranks (ENSA_M LT ENSA_D)
           ,00      0  + Ranks (ENSA_M GT ENSA_D)
                   14    Ties  (ENSA_M EQ ENSA_D)
                   --
                   20    Total

        Z =   -2,2014           2-Tailed P =  ,0277
```

- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test

INADEQUADA - DIVISÃO
with INADEQUADA - MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

           ,00      0  - Ranks (INAD_M LT INAD_D)
          1,00      1  + Ranks (INAD_M GT INAD_D)
                   19    Ties  (INAD_M EQ INAD_D)
                   --
                   20    Total

        Z =   -1,0000           2-Tailed P =  ,3173
```

- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test

APLICAÇÃO DAS OPERAÇÕES - DIVISÃO
with APLICAÇÃO DAS OPERAÇÕES - MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

          4,00      4  - Ranks (MUDI_M LT MUDI_D)
          4,00      3  + Ranks (MUDI_M GT MUDI_D)
                   13    Ties  (MUDI_M EQ MUDI_D)
                   --
                   20    Total

        Z =    -,3381           2-Tailed P =  ,7353
```

- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test

MÚLTIPLOS - DIVISÃO
with MÚLTIPLOS - MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

           ,00      0  - Ranks (MULT_M LT MULT_D)
          1,00      1  + Ranks (MULT_M GT MULT_D)
```

```
                 19    Ties   (MULT_M EQ MULT_D)
                 --
                 20    Total

        Z =   -1,0000           2-Tailed P =  ,3173

- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test
```

MISTA - DIVISÃO
with MISTA - MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

          ,00       0  - Ranks (REMU_M LT REMU_D)
         2,00       3  + Ranks (REMU_M GT REMU_D)
                   17    Ties  (REMU_M EQ REMU_D)
                   --
                   20    Total

        Z =   -1,6036           2-Tailed P =  ,1088


- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test
```

CONTAGEM UNITÁRIA - DIVISÃO
with CONTAGEM UNITÁRIA - MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

         5,50       6  - Ranks (UNIT_M LT UNIT_D)
         5,50       4  + Ranks (UNIT_M GT UNIT_D)
                   10    Ties  (UNIT_M EQ UNIT_D)
                   --
                   20    Total

        Z =    -,5606           2-Tailed P =  ,5751


- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test
```
Objetos

ADIÇÃO REPETIDA - DIVISÃO
with ADIÇÃO REPETIDA - MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

          ,00       0  - Ranks (ADIC_M LT ADIC_D)
         7,00      13  + Ranks (ADIC_M GT ADIC_D)
                    7    Ties  (ADIC_M EQ ADIC_D)
                   --
                   20    Total

        Z =   -3,1798           2-Tailed P =  ,0015
- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test
```

ENSAIO E ERRO - DIVISÃO
with ENSAIO E ERRO - MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

         4,50       8  - Ranks (ENSA_M LT ENSA_D)
          ,00       0  + Ranks (ENSA_M GT ENSA_D)
```

```
                12    Ties  (ENSA_M EQ ENSA_D)
                --
                20    Total

       Z =   -2,5205           2-Tailed P =  ,0117


- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test
```

INADEQUADA - DIVISÃO
with INADEQUADA - MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

          1,50      2  - Ranks (INAD_M LT INAD_D)
           ,00      0  + Ranks (INAD_M GT INAD_D)
                   18    Ties  (INAD_M EQ INAD_D)
                   --
                   20    Total

       Z =   -1,3416           2-Tailed P =  ,1797

- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test
```

APLICAÇÃO DAS OPERAÇÕES - DIVISÃO
with APLICAÇÃO DAS OPERAÇÕES - MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

          2,50      2  - Ranks (MUDI_M LT MUDI_D)
          2,50      2  + Ranks (MUDI_M GT MUDI_D)
                   16    Ties  (MUDI_M EQ MUDI_D)
                   --
                   20    Total

       Z =     ,0000           2-Tailed P = 1,0000


- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test
```

MÚLTIPLOS - DIVISÃO
with MÚLTIPLOS - MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

           ,00      0  - Ranks (MULT_M LT MULT_D)
          1,50      2  + Ranks (MULT_M GT MULT_D)
                   18    Ties  (MULT_M EQ MULT_D)
                   --
                   20    Total

       Z =   -1,3416           2-Tailed P =  ,1797
- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test
```

MISTA - DIVISÃO
with MISTA - MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

           ,00      0  - Ranks (REMU_M LT REMU_D)
          2,00      3  + Ranks (REMU_M GT REMU_D)
```

```
                    17    Ties   (REMU_M EQ REMU_D)
                    --
                    20    Total

          Z =   -1,6036            2-Tailed P =  ,1088
```

```
- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test
```

CONTAGEM UNITÁRIA - DIVISÃO
with CONTAGEM UNITÁRIA - MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

          4,50       8  - Ranks (UNIT_M LT UNIT_D)
           ,00       0  + Ranks (UNIT_M GT UNIT_D)
                    12    Ties  (UNIT_M EQ UNIT_D)
                    --
                    20    Total

          Z =   -2,5205            2-Tailed P =  ,0117
```

Combinatória

```
- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test
```

Lápis e papel

INADEQUADA - DIVISÃO
with INADEQUADA - MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

          4,50       8  - Ranks (INAD_M LT INAD_D)
           ,00       0  + Ranks (INAD_M GT INAD_D)
                    12    Ties  (INAD_M EQ INAD_D)
                    --
                    20    Total


          Z =   -2,5205            2-Tailed P =  ,0117
```

```
- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test
```

COMBINAÇÃO PELO MAIOR NÚMERO – DIVISÃO
with COMBINAÇÃO PELO MAIOR NÚMERO – MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

          1,00       1  - Ranks (MAIOR_M LT MAIOR_D)
           ,00       0  + Ranks (MAIOR_M GT MAIOR_D)
```

```
                19    Ties   (MAIOR_M EQ MAIOR_D)
                --
                20    Total

         Z =   -1,0000            2-Tailed P =  ,3173
```

- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test

COMBINAÇÃO FLEXÍVEL DOS PARES - DIVISÃO
with COMBINAÇÃO FLEXÍVEL DOS PARES - MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

          ,00      0  - Ranks (COMBI_M LT COMBI_D)
         1,50      2  + Ranks (COMBI_M GT COMBI_D)
                  18    Ties  (COMBI_M EQ COMBI_D)
                  --
                  20    Total

         Z =   -1,3416            2-Tailed P =  ,1797
```

- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test

PARES FIXOS - DIVISÃO
with PARES FIXOS - MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

          ,00      0  - Ranks (FIXOS_M LT FIXOS_D)
         4,00      7  + Ranks (FIXOS_M GT FIXOS_D)
                  13    Ties  (FIXOS_M EQ FIXOS_D)
                  --
                  20    Total

         Z =   -2,3664            2-Tailed P =  ,0180
```

- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test   **Fichas**

INADEQUADA - DIVISÃO
with INADEQUADA - MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

         7,00     13  - Ranks (INAD_M LT INAD_D)
          ,00      0  + Ranks (INAD_M GT INAD_D)
                   7    Ties  (INAD_M EQ INAD_D)
                  --
                  20    Total

         Z =   -3,1798            2-Tailed P =  ,0015
```

- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test

COMBINAÇÃO PELO MAIOR NÚMERO - DIVISÃO
with COMBINAÇÃO PELO MAIOR NÚMERO - MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

          ,00      0  - Ranks (MAIOR_M LT MAIOR_D)
         1,00      1  + Ranks (MAIOR_M GT MAIOR_D)
```

```
                 19    Ties   (MAIOR_M EQ MAIOR_D)
                 --
                 20    Total

        Z =   -1,0000           2-Tailed P =  ,3173


- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test
```

COMBINAÇÃO FLEXÍVEL DOS PARES - DIVISÃO
with COMBINAÇÃO FLEXÍVEL DOS PARES - MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

          1,50      2   - Ranks (COMBI_M LT COMBI_D)
           ,00      0   + Ranks (COMBI_M GT COMBI_D)
                   18     Ties  (COMBI_M EQ COMBI_D)
                   --
                   20     Total

        Z =   -1,3416           2-Tailed P =  ,1797

- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test
```

PARES FIXOS - DIVISÃO
with PARES FIXOS - MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

           ,00      0   - Ranks (FIXOS_M LT FIXOS_D)
          7,50     14   + Ranks (FIXOS_M GT FIXOS_D)
                    6     Ties  (FIXOS_M EQ FIXOS_D)
                   --
                   20     Total

        Z =   -3,2958           2-Tailed P =  ,0010


- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test
```
Objetos

INADEQUADA - DIVISÃO
with INADEQUADA - MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

          6,00     11   - Ranks (INAD_M LT INAD_D)
           ,00      0   + Ranks (INAD_M GT INAD_D)
                    9     Ties  (INAD_M EQ INAD_D)
                   --
                   20     Total

        Z =   -2,9341           2-Tailed P =  ,0033
- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test
```

COMBINAÇÃO PELO MAIOR NÚMERO - DIVISÃO
with COMBINAÇÃO PELO MAIOR NÚMERO - MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

           ,00      0   - Ranks (MAIOR_M LT MAIOR_D)
          3,00      5   + Ranks (MAIOR_M GT MAIOR_D)
```

```
               15    Ties  (MAIOR_M EQ MAIOR_D)
               --
               20    Total

     Z =   -2,0226           2-Tailed P =  ,0431


- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test
```

COMBINAÇÃO FLEXÍVEL DOS PARES - DIVISÃO
with COMBINAÇÃO FLEXÍVEL DOS PARES - MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

          1,50      2  - Ranks (COMBI_M LT COMBI_D)
           ,00      0  + Ranks (COMBI_M GT COMBI_D)
                   18    Ties  (COMBI_M EQ COMBI_D)
                   --
                   20    Total

     Z =   -1,3416           2-Tailed P =  ,1797


- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test
```

PARES FIXOS - DIVISÃO
with PARES FIXOS - MULTIPLICAÇÃO

```
     Mean Rank    Cases

          5,50      1  - Ranks (FIXOS_M LT FIXOS_D)
          5,50      9  + Ranks (FIXOS_M GT FIXOS_D)
                   10    Ties  (FIXOS_M EQ FIXOS_D)
                   --
                   20    Total

     Z =   -2,2424           2-Tailed P =  ,0249
```