

TESE DE MESTRADO

Propriedades Universais de Transporte em
Pontos Quânticos com Simetria Quiral

AILTON FERNANDES DE MACEDO JUNIOR

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Propriedades Universais de Transporte em Pontos Quânticos com Simetria Quiral

AILTON FERNANDES DE MACEDO JUNIOR

Tese apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para a obtenção do título de **Mestre em Ciências**.

Banca Examinadora:

Prof. Antônio Murilo Santos Macêdo (Presidente e Orientador)

Prof. Caio Henrique Lewenkopf (Membro externo)

Prof. Flávio Menezes de Aguiar (Membro local)

Recife - Pernambuco - Brasil

Agosto de 2002

Agradecimentos

Várias pessoas contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho. Gostaria de agradecer especialmente aos meus pais Ailton e Severina, que sempre me apoiaram. À Daniela, pela compreensão e dedicação por todos esses anos em que estamos juntos. Aos meus “irmãos” Suely e Marcos e aos amigos Joel, Clarissa e Alexandre pela confiança em mim depositada.

Também gostaria de agradecer aos grandes amigos que me acolheram muito bem quando cheguei no DF. Ao Pedro Hugo (com sua enorme paciência e disponibilidade), Wilton (cuja regra era pelo menos o empate), ao Eric (pelo eterno bom humor), Paulo (companheiro desde o tempo da engenharia) e ao grande Laércio (o homem da informática). Também aos que vieram depois como Helinando (uma máquina de trabalhar) e Cássia (sempre disponível para tirar dúvidas computacionais), aos colegas de sala Pedro Ernesto e Caio Veloso, e os do LFTC Alexandre Carvalho, Renê, Mário e Fidelis. Enfim, a todos os colegas com quem convivi ao longo destes anos.

Aos eficientes funcionários do Departamento de Física: Paulo Pinto, Joaquim, Ivo, e Humberto. Às bibliotecárias Ana e Joana e às secretárias Paula, Linet e Ana. Aos professores Jairo Rocha (com quem tive as primeiras aulas na universidade), Marco Gameiro (pela amizade adquirida nos anos da iniciação científica), aos professores Fernando Moraes e Francisco Brady, com os quais fiz várias disciplinas e convivi de perto. Gostaria de agradecer particularmente ao professor Antônio Murilo pela orientação séria e dedicada que me foi dada.

Por fim, quero demonstrar minha gratidão à CAPES pelo apoio financeiro aos meus estudos.

Resumo

Apresentamos um modelo estocástico que descreve propriedades universais de transporte em pontos quânticos com simetria de sub-rede (quiral), acoplados a dois reservatórios de elétrons via contatos pontuais idênticos. Montamos um ensemble de matrizes de espalhamento, S , através do princípio de máxima entropia e calculamos a medida de Haar do grupo de matrizes S . Mostramos que em todos os casos os ensembles obtidos podem ser classificados segundo a teoria de espaços simétricos de Cartan. Deduzimos a distribuição conjunta dos autovalores de transmissão, i.e. autovalores da matriz tt^\dagger , onde t é a matriz de transmissão. No caso de apenas um modo propagante, determinamos a distribuição exata da condutância e da potência do ruído de disparo. Para sistemas sem simetria de reversão temporal, encontramos o ensemble de Legendre da teoria de matrizes aleatórias e obtivemos resultados exatos para a média e variância da condutância. Apresentamos um ensemble de movimento Browniano para calcular a média da condutância para um número N arbitrário de canais propagantes nos guias. No regime semi-clássico, $N \gg 1$, deduzimos uma fórmula para calcular a média e a variância de uma estatística linear arbitrária e observamos que na presença da simetria quirial a variância dos observáveis dobra em relação ao valor nas classes convencionais de Wigner-Dyson.

Abstract

In this work we present a stochastic model to describe universal transport properties of quantum dots with sublattice (chiral) symmetry, coupled to two electron reservoirs via identical point contacts. We construct an ensemble of scattering matrices, S , using the maximum-entropy principle and calculate the Haar measure of the symmetry group of the S -matrix. We show that in all cases the obtained ensembles can be classified in terms of Cartan's symmetric space theory. We deduce the joint distribution of transmission eigenvalues, i.e. eigenvalues of the matrix tt^\dagger , where t is the transmission matrix. In the case of only one propagating mode, we obtain the exact distribution of the conductance and the shot-noise power. For systems without time-reversal symmetry we obtain the Legendre's ensemble of random matrix theory. A Brownian motion ensemble is presented to calculate the transport characteristics for an arbitrary number N of propagating channels. In the semiclassical regime, $N \gg 1$, we derive formulas for calculating the average and variance of an arbitrary linear statistic and observe that in the presence of chiral symmetry the variance of the observables doubles in relation to the Wigner-Dyson case.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Sistemas quânticos fora do equilíbrio	1
1.2	Fenômenos de coerência	4
1.2.1	Localização fraca	5
1.2.2	Flutuações universais da condutância	6
1.3	Física Mesoscópica	7
1.3.1	Regimes de transporte	8
1.3.2	Quantização da condutância	10
1.4	Pontos quânticos	11
1.5	Caos quântico	12
2	Introdução ao Formalismo	14
2.1	Teoria de espalhamento	16
2.1.1	Matriz de espalhamento	18
2.1.2	Densidade de corrente	19
2.2	Simetrias	20
2.2.1	Conservação de corrente	20
2.2.2	Reversão temporal (Partículas sem spin)	20
2.2.3	Reversão temporal (Partículas de spin 1/2)	21
2.3	Problema de dois terminais	23
2.4	Teoria de Landauer -Büttiker	26
2.4.1	Condutância	28
2.4.2	Flutuações da corrente	30
2.5	Teoria de Matrizes Aleatórias	32
2.5.1	Ensemble de Wigner-Dyson	33
2.5.2	Matrizes aleatórias em problemas de espalhamento	37
2.6	Fórmula de Mahaux - Weidenmüller	43
2.7	Ensembles de Movimento Browniano	50

2.7.1	Ensembles de movimento Browniano e polinômios ortogonais	51
3	Sistemas Quirais	54
3.1	Classes de universalidade	54
3.2	Simetria de Sub-rede	55
3.3	Modelo microscópico	59
3.4	Simetria quiral	61
3.4.1	Matriz de espalhamento	62
3.4.2	Matriz de transferência	63
3.5	Princípio de máxima entropia	64
4	Propriedades de Transporte em Pontos Quirais	66
4.1	Sistema com um modo propagante	66
4.2	Número arbitrário de modos propagantes	69
4.2.1	Limite semiclássico ($N \gg 1$)	71
4.2.2	Solução exata usando polinômios ortogonais	72
4.3	Método da equação de Fokker-Planck	75
4.4	Correção de localização fraca	79
4.5	Variância de uma estatística linear	84
4.6	Comparação com o caso Wigner-Dyson	87
5	Conclusões e Perspectivas	90
	Apêndices	92
A	Quatérnions	92
A.1	Definição	92
A.2	Propriedades	93
A.3	Matriz de transferência	96
B	Parametrização da matriz de transferência	97
B.1	Caso ortogonal	97
B.2	Caso unitário	101
B.3	Caso simplético	103
C	Matriz de espalhamento: Medida invariante	106
C.1	Caso ortogonal	107
C.2	Caso unitário	110
C.3	Caso simplético	111

Lista de Figuras

1.1	Método da projeção.	3
1.2	Excesso de resistência $\delta R(B) \equiv R(0) - R(B)$, para um fio quântico em função do campo magnético. A magnetoresistência negativa, $\Delta R(B) = -\delta R(B) < 0$, é característica da localização fraca em sistemas sem interação spin-órbita.	5
1.3	Ilustração da flutuação universal da condutância em função do campo magnético: (a) Dados de um experimento em um anel de ouro [6]; (b) Dados de medidas em MOSFET de <i>Si</i> quase-unidimensional [7]; (c) Simulações numéricas usando o modelo de Anderson [8]. Note que a amplitude das flutuações é da ordem da unidade para todos os sistemas, apesar dos diferentes valores de condutância média.	7
1.4	Escala de comprimentos característicos para transporte coerente em baixas temperaturas.	9
1.5	Quantização da condutância num condutor balístico [12].	10
1.6	Bilhar mesoscópico circular retirado da referência [15]. Os elétrons se movem na região escura.	12
1.7	Trajetórias em um bilhar circular e em um estádio. O movimento no círculo é regular ou ordenado, enquanto que no estádio é irregular ou caótico.	13
2.1	Cavidade 2D com L guias. As setas dentro dos guias representam ondas entrando e saindo da cavidade. No guia l há N_l dessas ondas.	16
2.2	Cavidade 2D com 2 guias semi-infinitos.	23
2.3	Duas amostras mesoscópicas em série, conectados por um guia ideal.	24
2.4	Densidade de autovalores para um Hamiltoniano pertencente ao EGO com $N = 8000$, confirmando a lei do semicírculo de Wigner (curva vermelha).	36

2.5	Distribuição da potência do ruído de disparo para $N = 1$ nos casos $\beta = 1$ (esquerda) e $\beta = 2$ (direita). O gráfico em vermelho é dado pela expressão (2.131), obtida pelo princípio da máxima entropia.	48
2.6	Distribuição da condutância para $N = 1, 2$ e 3 nos casos em que $\beta = 1$ (primeira coluna) e $\beta = 2$ (segunda coluna). Os resultados numéricos estão em boa concordância com os resultados obtidos via máxima entropia (linhas vermelhas). Note que a distribuição tende à gaussiana à medida que N cresce.	49
3.1	Modelo de <i>hopping</i> aleatório	56
3.2	Problema do fluxo aleatório	57
3.3	Modelo de <i>hopping</i> aleatório descrito pela Eq. (3.7), para $N = 3$. A região desordenada tem comprimento $L = 4a$. As diferentes cadeias são acopladas na região desordenada e desacopladas nos guias ideais.	60
4.1	Distribuição da condutância (coluna da esquerda) e da potência do ruído de disparo (coluna da direita) para o caso $N = 1$ e $\beta = 1, 2$ e 4 . Os resultados para pontos quânticos com simetria quiral são mostrados em vermelho e os dos pontos de Wigner-Dyson, em azul.	68

Lista de Tabelas

2.1	Resumo da classificação de Dyson. A matriz hermitiana \mathcal{H} e a matriz dos autovetores U são classificadas pelo índice β dependendo da presença ou ausência de simetria de reversão temporal (SRT) e simetria de rotação de spin (SRS).	34
3.1	Classificação das classes de simetria de acordo com a tabela de Cartan. As classes de simetrias são definidas em termos da presença ou ausência de simetria de reversão temporal (SRT), simetria de rotação de spin (SRS) e outras simetrias fundamentais do sistema.	55
3.2	Classes de universalidade para um ponto quântico com simetria quiral. A tabela lista os espaços simétricos (ES) na notação de Cartan, definidos por G/H , onde G é o grupo de simetria e H é o subgrupo maximal, a rede de raízes \mathcal{R} , as multiplicidades α e β das raízes e indica a presença ou ausência das simetrias de reversão temporal (SRT) e rotação de spin (SRS).	65
4.1	Resumo dos resultados para as médias e variâncias de estatísticas lineares nos casos Quiral e Wigner-Dyson.	89

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo inicial vamos fazer uma revisão sobre os principais conceitos da física mesoscópica, com ênfase no transporte eletrônico através de nanoestruturas. Começamos o capítulo com uma discussão sobre sistemas quânticos fora do equilíbrio e a descrição da evolução macroscópica desses sistemas através de equações de transporte. Na seção 1.2 incluímos na teoria a coerência de fase dos portadores e abordamos efeitos importantes como a flutuação universal da condutância e a localização fraca. Esses efeitos constituem a base da física mesoscópica, abordada na seção 1.3, onde discutimos a relação entre os vários regimes de transporte e as escalas fundamentais de comprimento do sistema. Ainda nessa seção apresentamos um dos experimentos fundamentais da área no qual se verifica a quantização da condutância. Na seção 1.4 apresentamos um tipo particular de dispositivo mesoscópico: o ponto quântico. Finalizando, fazemos uma breve discussão sobre caos quântico na seção 1.5.

1.1 Sistemas quânticos fora do equilíbrio

A maioria dos sistemas da natureza, se isolados (ou seja, se não trocam energia ou matéria com sua vizinhança), tendem a um estado independente do tempo, o equilíbrio termodinâmico, cujas propriedades macroscópicas são descritas por um número finito de variáveis de estado. A mecânica estatística de equilíbrio é baseada no princípio de máxima entropia que, juntamente com vínculos definidos pelo sistema, fornece os ingredientes para o formalismo dos ensembles de Gibbs. Esses argumentos estatísticos são suficientes para problemas em equilíbrio não havendo necessidade de investigar os detalhes dos processos de interação (colisões) que levaram o sistema ao equilíbrio. No entanto, a grande maioria dos sistemas físicos de in-

teresse encontra-se fora do equilíbrio. Se a mecânica estatística de equilíbrio pode ser considerada bem estabelecida, o mesmo não se aplica à mecânica estatística de não-equilíbrio. Esta área tem gerado confrontos entre a dinâmica clássica ou quântica, que ignora a irreversibilidade observada na escala macroscópica, visto que suas equações (Newton ou Schrödinger) admitem soluções invertidas no tempo ($t \rightarrow -t$), e a termodinâmica com o seu segundo princípio associado ao aumento da entropia.

Um sistema quântico é completamente definido pelo operador densidade $\hat{\rho}$, cuja evolução temporal é descrita pela equação de Liouville

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho}(t) = \mathcal{L}\hat{\rho}(t), \quad (1.1)$$

onde o operador de Liouville é definido pelo comutador do operador densidade com o Hamiltoniano do sistema, $\mathcal{L}\hat{\rho} = \frac{1}{\hbar}[H, \hat{\rho}]$. Na situação de equilíbrio temos $\mathcal{L}\hat{\rho} = 0$. No caso geral, a equação (1.1) tem solução formal

$$\rho(t) = e^{-i\mathcal{L}t}\rho(0). \quad (1.2)$$

O operador de Liouville é hermitiano, $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$. Então a solução da equação de Liouville oscila no tempo e não decai para uma solução de equilíbrio. Mais ainda, se revertermos o tempo na equação (1.2), não mudamos a equação de movimento para o operador densidade, pois \mathcal{L} muda de sinal sob reversão temporal. Então a equação (1.1) não admite um decaimento irreversível do sistema para um único estado de equilíbrio e portanto não descreve o processo de relaxação observado na natureza. O mesmo problema é encontrado na versão clássica da equação de Liouville que descreve a evolução da densidade de probabilidade $\rho(p, q, t)$ no espaço de fase.

O problema de obter um decaimento irreversível a partir da equação de Liouville é um dos problemas centrais da mecânica estatística. Como é possível que sistemas regidos por equações simétricas em relação ao tempo decaiam num estado de equilíbrio seguindo um processo irreversível? Esse problema pode ser contornado pelo menos de duas maneiras: (i) A irreversibilidade é atribuída à perda de informação associada à projeção das múltiplas variáveis microscópicas em poucas variáveis observáveis, gerando uma dinâmica estocástica; (ii) Prigogine [1] propôs uma solução radical: abandonar o espaço de Hilbert e formular a mecânica quântica no chamado espaço de Hilbert equipado, contornando assim as dificuldades encontradas na aplicação da equação (1.1).

Quando estudamos sistemas quânticos complicados como um gás, em geral não estamos interessados ou não somos capazes de descrever a evolução temporal de todas as suas propriedades microscópicas. O operador densidade contém muita

informação não relacionada com os observáveis relevantes, que é perdida no processo de promediação espacial e temporal. Esta informação irrelevante complica os cálculos sem contribuir para a dinâmica dos observáveis relevantes. Estes, juntamente com o operador identidade, geram um subespaço do espaço dos observáveis (espaço de Liouville), o chamado nível de descrição. A transição da microdinâmica reversível para o transporte irreversível pode ser estudada de maneira eficiente pelo método da projeção [2]. Como o nome indica, o método é baseado na projeção da evolução do sistema quântico no nível de descrição, ver figura (1.1).

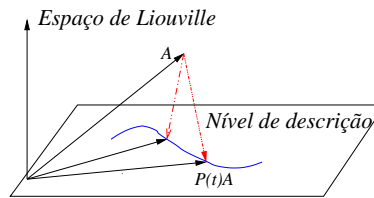


Figura 1.1: Método da projeção.

Esse método fornece uma maneira sistemática de obtenção de equações de transporte quântico a partir de primeiros princípios. Além disso permite a incorporação de efeitos de memória, sendo uma ferramenta útil no estudo de correções não Markovianas. O método da projeção também nos permite explorar a separação entre as escalas de tempo. As equações macroscópicas podem exibir escalas de tempo muito separadas τ_{curto} e τ_{longo} . Neste caso a razão $(\tau_{curto}/\tau_{longo})$ serve como parâmetro de expansão. O termo de ordem zero desta expansão é o limite Markoviano.

Apesar da utilidade, o método da projeção ainda fornece equações complicadas e precisamos de mais simplificações. Para uma classe importante de problemas de não equilíbrio, os chamados próximos do equilíbrio, podemos introduzir a aproximação da resposta linear [3],[4]. Consideremos um sistema sob a ação de uma força generalizada externa $X(t)$, por exemplo um campo elétrico ou magnético, um gradiente de temperatura ou concentração. Se a força for suficientemente pequena, a resposta do sistema, ou seja o desvio do equilíbrio nos observáveis relevantes será proporcional à intensidade da força generalizada:

$$A(t) - A_{eq} \propto X(t), \quad (1.3)$$

onde o subscripto *eq* denota equilíbrio. A resposta do sistema, que pode ser uma polarização elétrica, corrente ou magnetização é proporcional à força generalizada.

Um resultado importante deste método é a fórmula de Kubo para a condutância [3], que é a resposta do sistema a um campo elétrico oscilante.

1.2 Fenômenos de coerência

A teoria de transporte eletrônico em metais normais macroscópicos é tradicionalmente baseada na equação de Boltzmann para o cálculo da função de distribuição dos elétrons na presença de impurezas, espalhamento com fônons, campos elétricos e magnéticos, etc. Uma das hipóteses da teoria de Boltzmann é que as colisões consecutivas são independentes e que os efeitos de interferência devidos aos múltiplos espalhamentos dos elétrons pelas impurezas são irrelevantes. Conseqüentemente, o movimento do elétron é puramente difusivo. Outra característica da teoria é que a geometria da amostra e os aparatos de medição não aparecem explicitamente nas equações, sendo a amostra caracterizada apenas por grandezas intensivas, como a condutividade.

Numa descrição inteiramente quântica do transporte devemos considerar a fase dos portadores. Para um exemplo de como a interferência entre os diversos caminhos ópticos afeta a difusão clássica, consideremos um elétron se propagando entre os pontos A e B . De acordo com a mecânica quântica há uma amplitude de probabilidade W_i associada a cada caminho que conecta os pontos. A probabilidade total P da partícula atingir o ponto B é portanto

$$P = \left| \sum_i W_i \right|^2 = P_{\text{clássica}} + \sum_{i \neq j} W_i^* W_j, \quad (1.4)$$

onde $P_{\text{clássica}} = \sum_i |W_i|^2$ é a probabilidade clássica (soma de probabilidades) e o segundo termo é a contribuição da interferência quanto-mecânica entre as trajetórias. Para a maioria das trajetórias as amplitudes W_i têm uma fase aleatória e a interferência quântica desaparece quando fazemos a média no ensemble. No entanto, para algumas trajetórias, o efeito da interferência não pode ser desprezado. Para trajetórias que se interceptam ou simplesmente quando $A = B$, a diferença de fase

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\hbar} \int_A^B \vec{p} \cdot d\vec{r} \quad (1.5)$$

não se altera com a substituição $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ e $d\vec{r} \rightarrow -d\vec{r}$, ou seja, existe uma trajetória revertida no tempo com o mesmo comprimento e a mesma fase. Então, a contribuição da interferência entre os pares trajetória normal e revertida não se anula

na promediação. Esse efeito de interferência, chamado retroespalhamento coerente, muda a probabilidade de retorno da partícula e torna a difusão de uma partícula quântica diferente da difusão de uma partícula clássica.

1.2.1 Localização fraca

Para partículas sem spin na ausência de campo magnético, a probabilidade de retorno aumenta devido à interferência construtiva entre trajetórias revertidas no tempo, diminuindo a condutividade. Esse efeito de correção da condutância clássica (dada pela lei de Ohm) devido a efeitos de interferência é conhecido como localização fraca, um precursor do fenômeno de localização de Anderson que ocorre em sistemas suficientemente desordenados. Para sistemas com interação spin-órbita, mas sem campo magnético externo, a interferência entre as trajetórias revertidas no tempo é destrutiva, causando o efeito inverso, ou seja, aumento da condutância. Este efeito é conhecido como anti-localização. Os dois efeitos, localização e anti-localização, são suprimidos pela quebra da simetria de reversão temporal causada pela aplicação de um campo magnético externo. Conseqüentemente, a magnetoresistência, definida como a diferença entre as resistências da amostra com campo e sem campo, é positiva para sistemas com interação spin-órbita e negativa para sistemas sem este tipo de interação. A figura (1.2), retirada da referência [5], mostra a contribuição de localização fraca para a resistência de um fio quântico de dimensões $2\mu\text{m} \times 0.5\mu\text{m}$ definido numa camada de GaAl/AlGaAs.

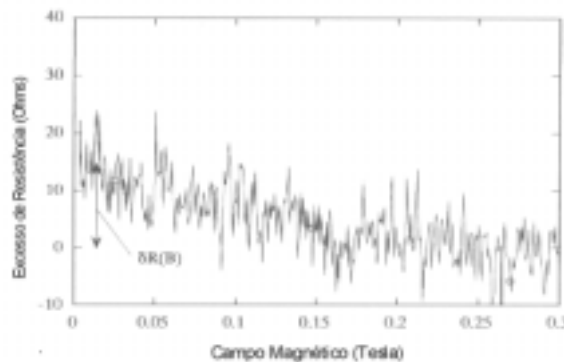


Figura 1.2: Excesso de resistência $\delta R(B) \equiv R(0) - R(B)$, para um fio quântico em função do campo magnético. A magnetoresistência negativa, $\Delta R(B) = -\delta R(B) < 0$, é característica da localização fraca em sistemas sem interação spin-órbita.

Note que há uma resistência adicional a campo magnético nulo devido ao efeito de localização fraca. Esse excesso de resistência diminui à medida que aumentamos o campo magnético, em virtude da supressão da interferência entre trajetórias revertidas no tempo. Uma característica importante da localização fraca é sua universalidade. O efeito é uma manifestação pura da simetria de reversão temporal, não dependendo de detalhes microscópicos, como a distribuição de desordem. Experimentos de localização fraca podem ser usados para a medida do comprimento de coerência de fase, que é a distância na qual as funções de onda mantêm sua coerência.

1.2.2 Flutuações universais da condutância

Outro fenômeno mesoscópico contido na figura (1.2) é a existência de flutuações consideráveis na condutância quando variamos o campo magnético. Também são observadas flutuações quando outros parâmetros do sistema como energia de Fermi, configuração de desordem ou até mesmo a geometria sofrem variações. As flutuações da condutância foram algumas das primeiras manifestações do efeito da coerência de fase observadas em problemas de transporte. As flutuações são padrões estocásticos independentes do tempo que desaparecem lenta e suavemente com o aumento da temperatura. Os padrões dependem da distribuição de impurezas e variam de amostra para amostra, porém, para uma amostra particular numa dada temperatura, são completamente reproduzíveis. Neste contexto, as flutuações são verdadeiras “impressões digitais” da amostra. No entanto, ao aquecer a amostra, mudamos a distribuição das impurezas e após resfriá-la o espectro das flutuações muda. A amplitude das flutuações, quantificada pela variância, é dada por

$$\text{var}(G) \equiv \langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2 \sim \left(\frac{e^2}{h} \right)^2, \quad (1.6)$$

e tem comportamento universal, não dependendo dos detalhes microscópicos da amostra. Este é um resultado fundamental que ficou conhecido na literatura como flutuação universal da condutância. Na figura (1.3) ilustramos esse fenômeno mostrando flutuações da ordem de $(e^2/h)^2$ em três sistemas distintos com condutâncias médias bem diferentes. Teoricamente, a característica universal das flutuações da condutância em sistemas desordenados pode ser analisada através do uso de matrizes aleatórias, como veremos nos capítulos seguintes.

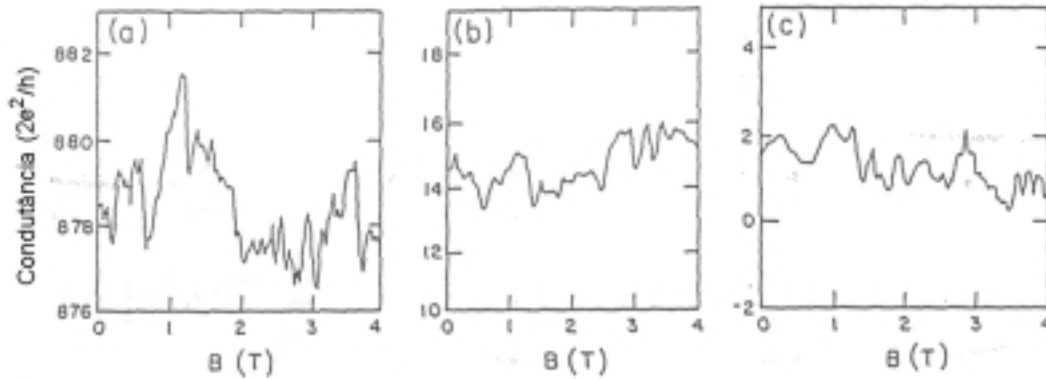


Figura 1.3: Ilustração da flutuação universal da condutância em função do campo magnético: (a) Dados de um experimento em um anel de ouro [6]; (b) Dados de medidas em MOSFET de *Si* quase-unidimensional [7]; (c) Simulações numéricas usando o modelo de Anderson [8]. Note que a amplitude das flutuações é da ordem da unidade para todos os sistemas, apesar dos diferentes valores de condutância média.

1.3 Física Mesoscópica

Vimos na seção anterior que surgem novos efeitos devido à coerência de fase entre os elétrons. Estes efeitos não são observados em medições de coeficientes de transporte em condutores macroscópicos. No entanto, a partir da década de 80, com o desenvolvimento de técnicas sofisticadas de litografia e de crescimento, como epitaxia de feixe molecular, foi possível a construção de estruturas (e dispositivos) com dimensões da ordem de microns e até nanômetros, nos quais os efeitos de interferência quântica não podem ser desprezados. Na literatura, esses dispositivos são chamados de nanoestruturas, nanodispositivos ou dispositivos mesoscópicos. Aqui o prefixo meso indica que as estruturas são usualmente grandes comparadas com a escala microscópica (atômica), mas pequenas em relação à escala macroscópica, na qual a teoria de transporte de Boltzmann pode ser usada.

1.3.1 Regimes de transporte

O estudo de transporte através de condutores mesoscópicos tornou-se tópico freqüente de pesquisa na física teórica e experimental [9],[5], [10] e [11]. O transporte eletrônico em metais a baixas temperaturas apresenta várias características interessantes devido aos efeitos de interferência entre as funções de onda eletrônicas. Estes efeitos dependem de certas escalas fundamentais de tempo e comprimento dos sistemas. São elas

1. Comprimento de onda de Fermi, λ_F . É a menor escala de comprimento. Varia de alguns angstroms em metais a centenas de angstroms em heteroestruturas semicondutoras.
2. Caminho livre médio para espalhamento elástico, l_e . Caracteriza a desordem do sistema e se relaciona com o tempo de espalhamento elástico, τ_e , por $l_e = v_F \tau_e$, onde v_F é a velocidade de Fermi. Em metais desordenados l_e varia de algumas centenas de angstroms, em materiais policristalinos, a alguns angstroms, em ligas amorfas. Por outro lado em heteroestruturas de GaAs – GaAlGa, l_e é da ordem de $10\mu\text{m}$.
3. Comprimento de coerência de fase, L_ϕ . É o comprimento característico para a interferência de funções de onda eletrônicas. L_ϕ aumenta com o decréscimo da temperatura e pode ser muito maior que l_e . É a escala de comprimento relevante em física mesoscópica.
4. Comprimento de localização, ξ . É outra escala de comprimento importante relacionada com a desordem. No regime metálico as funções de ondas correspondentes a auto-energias próximas à energia de Fermi são estendidas sobre a amostra, mas no regime isolante a função de onda torna-se localizada e decai exponencialmente a partir de um ponto r_0 , denominado centro de localização. Dependendo do grau de desordem o sistema pode se comportar como um condutor ou isolante.

Para estudar as propriedades de transporte em um condutor devemos comparar seu comprimento L com os comprimentos característicos citados acima. Por exemplo, no caso em que L é muito maior que os outros comprimentos, o condutor tem comportamento ôhmico, ou seja, sua condutância é dada por

$$G = \sigma \frac{W}{L}, \quad (1.7)$$

onde W é a seção de corte do condutor e σ é a condutividade, considerada uma constante do material. No entanto, quando L_ϕ é a maior escala de comprimento os efeitos de interferência quântica tornam-se importantes. Neste caso, o condutor não pode ser descrito por constantes de material pois ocorrem flutuações intensas em observáveis de transporte, como a condutância. No caso particular $l_e < \xi < L_\phi$ podemos distinguir os regimes balístico, difusivo e localizado. Veja a figura (1.4).

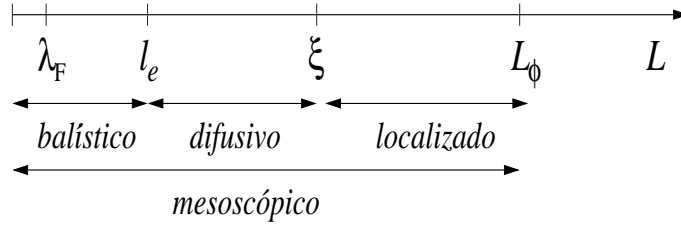


Figura 1.4: Escala de comprimentos característicos para transporte coerente em baixas temperaturas.

No regime balístico o comprimento do sistema é menor que o caminho livre médio e o elétron viaja tipicamente sem sofrer colisões. Sendo τ_ϕ o tempo para o relaxamento da fase, temos $\tau_\phi < \tau_e$ e o comprimento de coerência de fase é dado por $L_\phi = v_F \tau_\phi$. No regime difusivo temos $\tau_e \ll \tau_\phi$, então o movimento do elétron no tempo de relaxamento de fase não é balístico, mas, devido às várias colisões elásticas, torna-se difusivo e o comprimento de relaxamento de fase fica dado por $L_\phi = \sqrt{D\tau_\phi}$, onde D é a constante de difusão. Como já vimos, o fenômeno da localização fraca origina-se do retroespalhamento coerente. Nesse caso temos um sistema metálico, porém com condutividade reduzida quando comparada ao valor clássico. Já na localização forte tem-se um isolante devido à localização de estados eletrônicos.

A coerência de fase não é afetada pelo espalhamento elástico, no entanto processos de espalhamento inelástico destroem a fase. Assim L_ϕ é limitado pelo caminho livre médio inelástico. Essas colisões podem ser do tipo elétron-fônon e, a baixas temperaturas, elétron-elétron. Dessa forma o efeito de localização fraca depende do tempo de relaxação de fase, que, por sua vez, está relacionado a processos em que o movimento da partícula no interior da amostra conecta estados no ambiente (ou reservatórios) que são ortogonais, fazendo desaparecer os padrões de interferência. Na teoria usada para descrever experimentos de magnetoresistência, τ_ϕ aparece como um parâmetro ajustável. Portanto, como já mencionamos, experiências de localização fraca servem para medir a distância na qual a função de

onda mantém sua fase.

1.3.2 Quantização da condutância

Um gás de elétrons bidimensional numa heterojunção de GaAs-AlGaAl tem um comprimento de onda de Fermi centenas de vezes maior que em um metal. Dessa forma, é possível fazer uma constricção com uma abertura comparável a este comprimento de onda e muito menor que o caminho livre médio. Essas constricções são chamadas de contatos pontuais.

Um contato pontual de largura ajustável pode ser criado pela técnica de *split-gate*. Um *gate* é um eletrodo carregado negativamente que repele os elétrons que passam pela constricção. Os primeiros experimentos desse tipo foram publicados em 1988 [12], [13], veja figura (1.5). À medida que a largura W da constricção é reduzida (potencial de gate mais negativo) a condutância vai reduzindo a passos discretos de amplitude $2e^2/h$.

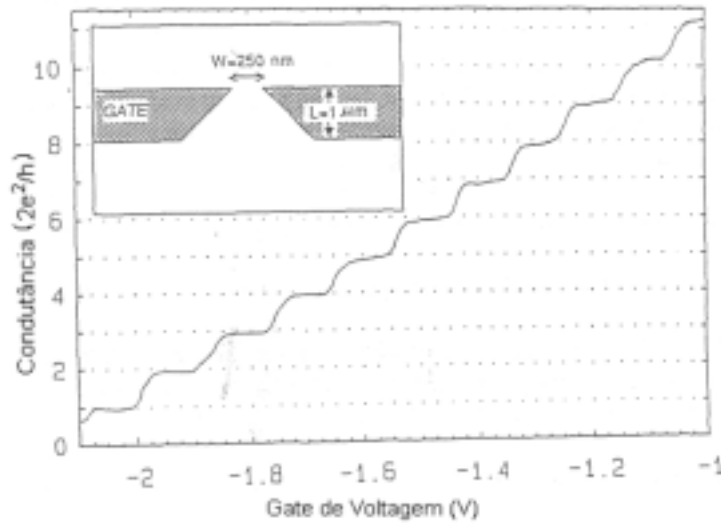


Figura 1.5: Quantização da condutância num condutor balístico [12].

Uma explicação elementar da quantização da condutância pode ser obtida considerando a constricção como um guia de onda eletrônico, no qual um pequeno número inteiro $\text{Int}(2W/\lambda_F)$ de modos transversais se propagam no nível de Fermi. As regiões largas nos lados opostos da constricção são reservatórios de elétrons em equilíbrio local. Uma diferença de tensão V entre os reservatórios induz uma

corrente I através da constrição igualmente distribuída nos N modos. Um gás de elétrons uniforme com n elétrons por unidade de comprimento e com velocidade v tem uma corrente env . No nível de Fermi cada modo tem uma velocidade de grupo diferente v_n , no entanto a densidade de estados unidimensional é $\rho_n = 1/hv_n$. Como resultado, cada modo tem a mesma corrente $I_n = Ve^2\rho_nv_n = Ve^2/h$. Somando a corrente de todos os modos e levando em consideração a degenerescência de spin, obtemos a condutância

$$G = \frac{I}{V} = N \frac{2e^2}{h}. \quad (1.8)$$

O fator $2e^2/h$ é o quantum de condutância.

Vemos que apesar do condutor ser balístico a condutância é finita, ou seja, encontramos uma resistência não nula. Essa resistência surge na interface entre o condutor e os contatos, devido às reflexões que ocorrem quando o pequeno número de modos propagantes no condutor se combina com um número muito maior de modos nos contatos. Esse efeito é conhecido como resistência de contato.

1.4 Pontos quânticos

Pontos quânticos são cavidades condutoras delimitadas por regiões isolantes e com dimensões espaciais que permitem o transporte coerente de elétrons através de sua estrutura. Em termos gerais, esses sistemas têm dimensões típicas de nanômetros a alguns micrômetros. Nessas estruturas temos um confinamento nas três direções espaciais, resultando num espectro discreto de energia tal como num átomo ou molécula. Dessa forma podemos pensar em pontos quânticos (ou caixas quânticas) como átomos artificiais. O número de elétrons em tais sistemas pode variar desde um único elétron até alguns milhares e as técnicas de litografia já permitem a construção de estruturas nas quais, não somente L_ϕ , mas também o livre caminho médio elástico, excedem as dimensões do dispositivo, tendo-se o regime de transporte balístico.

As propriedades de transporte de um ponto quântico podem ser medidas com o acoplamento do sistema a reservatórios de elétrons, trazendo-os para fora do equilíbrio pela aplicação de uma diferença de potencial. No regime balístico a interferência entre as ondas espalhadas pelas fronteiras do sistema gera efeitos no transporte equivalentes aos do regime difusivo (flutuações na condutância e localização fraca)[14]. Na figura (1.6) mostramos um ponto quântico de geometria circular usado em experimentos de magneto-transporte a baixas temperaturas [15].

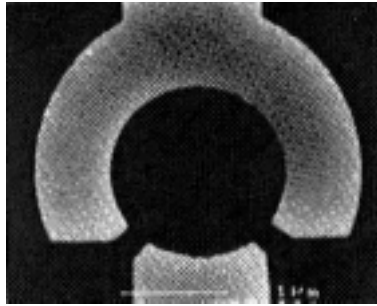


Figura 1.6: Bilhar mesoscópico circular retirado da referência [15]. Os elétrons se movem na região escura.

É possível construir pontos quânticos de várias formas geométricas. Pontos de geometria regular apresentam propriedades específicas e não universais, no entanto pontos assimétricos podem apresentar características universais. Os sistemas passam então a ser distinguidos por classes de simetria universais que dependem da existência de certas simetrias fundamentais, como por exemplo a invariância de reversão temporal. No estudo de pontos quânticos, propriedades universais aparecem em cavidades nas quais a dinâmica clássica correspondente é caótica. Um exemplo desta geometria é o estádio, ver figura (1.7).

1.5 Caos quântico

Caos é essencialmente um fenômeno clássico e é consequência da alta sensibilidade das trajetórias do sistema a pequenas variações nas condições iniciais. Essa sensibilidade, por sua vez, resulta da combinação de efeitos não lineares, como a superposição de ressonâncias. Na mecânica quântica a dinâmica é descrita pela equação de Schrödinger, que, sendo linear, não apresenta de forma óbvia os mecanismos clássicos para surgimento de comportamento caótico. Por exemplo, parâmetros como o expoente de Liapunov, cujo valor positivo caracteriza caos em sistemas clássicos, não tem definição natural em sistemas quânticos. Isso torna a caracterização de caos em sistemas quânticos um problema bastante sutil.

No entanto, o princípio da correspondência da mecânica quântica estabelece que as propriedades clássicas de um sistema devem surgir a partir da sua descrição

quântica no limite em que a constante de Planck tende a zero. Isso tem motivado o estudo de sistemas quânticos que são caóticos no limite clássico. A dinâmica quântica neste regime é denominada caos quântico [16]. Frequentemente os sistemas estudados são bilhares, sistemas balísticos com espalhamento especular nas fronteiras. A figura (1.7) mostra dois exemplos de bilhares. No bilhar circular as trajetórias são regulares e previsíveis mesmo após um tempo longo. A invariância de rotação do bilhar circular é quebrada adicionando-se duas linhas retas paralelas nas extremidades dos semicírculos, gerando um bilhar de forma oval conhecido como estádio. As trajetórias ficam irregulares (caóticas), tornando imprevisível o comportamento em tempos longos.

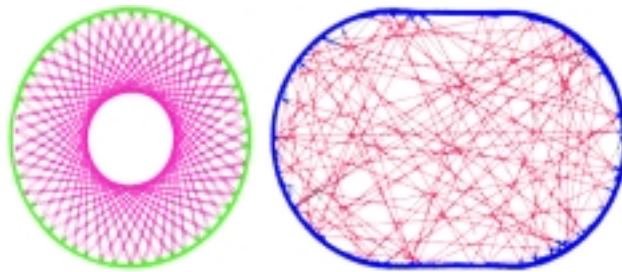


Figura 1.7: Trajetórias em um bilhar circular e em um estádio. O movimento no círculo é regular ou ordenado, enquanto que no estádio é irregular ou caótico.

Quando aspectos quânticos são importantes na descrição de um sistema físico a noção de trajetórias únicas ligando pontos fixos perde o sentido. Neste caso se insistirmos em preservar o conceito de trajetórias, somos forçados a usar a representação de Feynman para os propagadores da dinâmica quântica. Por outro lado, podemos calcular diretamente os autovalores de energia de uma partícula no bilhar, visto como uma caixa de paredes impenetráveis, usando a equação de Schrödinger. Uma alternativa ao cálculo é o método experimental [17]: o fato da equação de Schrödinger independente do tempo e a equação de onda escalar clássica independente do tempo (equação de Helmholtz) serem matematicamente equivalentes permite que um bilhar quântico seja simulado por uma cavidade de microondas. Esta simulação é muito importante pois permite que parâmetros como tamanho e forma da cavidade, intervalo de frequências, entre outros, possam ser alterados, revelando aspectos do caos quântico.

Capítulo 2

Introdução ao Formalismo

O estudo do espalhamento de ondas em sistemas complexos tem interessado físicos de diversas áreas desde ótica, com o espalhamento de luz em meios desordenados, até a física nuclear, com experimentos de espalhamento de nêutrons por núcleos complexos.

É interessante notar que o espalhamento de um núcleon por um núcleo atômico - um complicado problema de muitos corpos - pode ser descrito por duas escalas de tempo distintas:

- Uma resposta imediata associada a processos diretos em que o núcleon incidente sente o campo médio produzido pelos outros núcleons.
- Uma resposta retardada, ou equilibrada, associada à formação e decaimento de um núcleo composto.

Características similares a essas também surgem no problema de espalhamento para sistemas simples de uma partícula. Um exemplo é o espalhamento de uma partícula numa cavidade de dimensões maiores que o comprimento de onda, na qual a dinâmica clássica é caótica. Uma realização experimental desses sistemas são os pontos quânticos, microestruturas em que o comprimento de coerência de fase e o livre caminho médio excedem as dimensões do sistema. O ponto atua como uma cavidade ressonante conectada a guias de onda eletrônicos. Experimentalmente, aplica-se uma corrente elétrica através dos guias que conectam a cavidade e mede-se a diferença de potencial através da cavidade, calculando-se a condutância G .

Landauer [18],[19] foi o primeiro a estabelecer a conexão entre a condutância de um sistema quanto-mecânico e o problema de espalhamento associado: a corrente através do condutor é expressa em termos da probabilidade do elétron ser transmitido através dele. Mais tarde, Büttiker [20] estendeu o resultado para medidas em

dispositivos de muitos terminais na presença de campo magnético. O formalismo de Landauer - Büttiker tem sido extensivamente usado na interpretação dos experimentos em física mesoscópica. Ele fornece uma descrição completa das propriedades de transporte a baixas frequências, temperaturas e voltagens. Condições nas quais a interação elétron-elétron pode ser desprezada.

O objeto fundamental que caracteriza o processo de espalhamento é a matriz de espalhamento, ou matriz S , que relaciona as ondas espalhadas com as incidentes. Devido à natureza caótica da dinâmica, a matriz S comporta-se de forma irregular quando parâmetros das ondas incidentes (energia, por exemplo) ou da região de espalhamento (forma ou intensidade do potencial espalhador, intensidade de um campo magnético aplicado, etc.) variam suavemente. Dessa forma, uma descrição estatística baseada em distribuições e funções de correlação torna-se mais apropriada.

Uma ferramenta teórica bastante útil para o estudo de propriedades estatísticas de sistemas quânticos abertos exibindo espalhamento caótico é a Teoria de Matrizes Aleatórias (TMA). Originalmente desenvolvida por Wigner e Dyson para descrever flutuações no espectro de ressonância em núcleos pesados, tem sido amplamente usada em física mesoscópica, sendo a universalidade dos fenômenos de interferência quântica, observada em tais sistemas, intimamente associada à universalidade das propriedades estatísticas dos autovalores e autovetores de matrizes aleatórias grandes.

Existem dois métodos para se obter a TMA da matriz S de uma cavidade caótica. O primeiro usa a fórmula de Mahaux-Weidenmüller, na qual a matriz S é expressa em termos do Hamiltoniano do sistema fechado, modelado como um membro dos Ensembles Gaussianos da TMA, e de uma matriz fenomenológica que descreve o acoplamento da cavidade com os guias. O segundo método consiste em aplicar a TMA diretamente à matriz de espalhamento através do uso de um princípio de máxima entropia, sem nenhuma referência ao Hamiltoniano. A equivalência entre os dois métodos foi demonstrada nas referências [21] e [22].

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: na seção 2.1 apresentamos as idéias gerais de um problema quanto-mecânico de espalhamento numa cavidade e introduzimos a matriz de espalhamento. Na seção 2.2 estudamos os efeitos das simetrias gerais do problema com conservação de fluxo, reversão temporal e rotação de spin na estrutura da matriz S . Em seguida, nos restringimos ao problema do dispositivo de dois terminais. Na seção 2.3 mostramos como fica a matriz S nesse caso e na seção 2.4 apresentamos o formalismo de Landauer-Büttiker que relaciona as propriedades de transporte com a matriz S . Na seção 2.5 introduzimos os conceitos mais importantes da teoria de matrizes aleatórias e sua aplicação em problemas de

espalhamento. Na sequência, apresentamos uma dedução da fórmula de Mahaux-Weidenmüller na seção 2.6 e o método de Fokker-Planck na seção 2.7.

2.1 Teoria de espalhamento

Estamos interessados em estudar o problema de espalhamento de um elétron com energia de Fermi $\epsilon_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$ numa microestrutura 2D como mostrado na figura 2.1. A microestrutura consiste em uma cavidade conectada a reservatórios de elétrons por L guias. O l -ésimo guia ($l = 1, \dots, L$) tem largura W_l . Nosso ponto de partida é a equação de Schrödinger

$$\frac{1}{2m} \left[-i\hbar \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}) \right]^2 \psi(\vec{r}) + V(\vec{r})\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}), \quad (2.1)$$

dentro da estrutura com condições de contorno ideais de paredes impenetráveis: a função de onda se anula nas paredes. Aqui, $V(\vec{r})$ é o potencial devido às impurezas e $\vec{A}(\vec{r})$ é o potencial vetor de um campo magnético externo. Os guias são considerados ideais, ou seja, $V(\vec{r})$ é nulo dentro deles.

Em cada guia introduzimos o sistema de coordenadas (x_l, y_l) , como indicado na figura 2.1. O eixo x_l é paralelo ao guia e está orientado para fora da cavidade. O eixo y_l aponta na direção transversal e assume os valores 0 e W_l nas paredes do

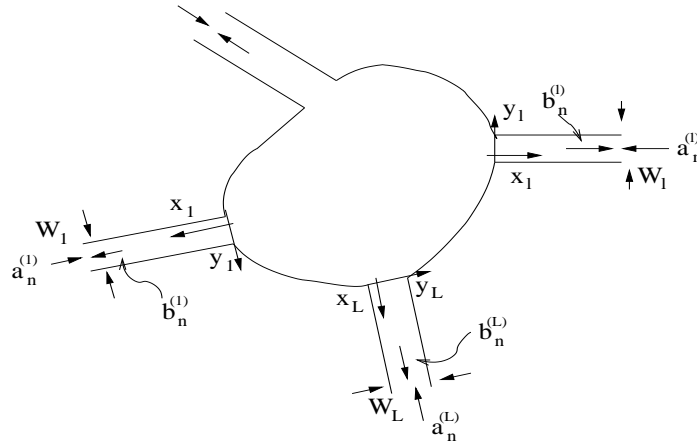


Figura 2.1: Cavidade 2D com L guias. As setas dentro dos guias representam ondas entrando e saindo da cavidade. No guia l há N_l dessas ondas.

guia. Para o guia l e para $x_l > 0$ temos a solução da equação de Schrödinger

$$\psi(\vec{r}) \propto \chi_n(y_l) e^{\pm ik_{l,n} x_l}, \quad (2.2)$$

onde o sinal positivo (negativo) representa ondas planas saindo (entrando) da cavidade. As funções $\chi_n(y_l)$ são soluções da parte transversal do Hamiltoniano na presença do campo magnético. A solução do problema de espalhamento consiste em relacionar as amplitudes das ondas que saem da cavidade com as que entram.

Na ausência do campo magnético, $B = 0$, as funções $\chi_n(y_l)$ ficam

$$\chi_n(y_l) = \sqrt{\frac{2}{W_l}} \sin(K_{l,n} y_l), \quad K_{l,n} = \frac{n\pi}{W_l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

onde $K_{l,n}$ é o número de onda transversal. As funções $\chi_n(y)$ se anulam nas paredes e formam um conjunto completo

$$\int_0^{W_l} \chi_n(y_l) \chi_m(y_l) dy_l = \delta_{n,m}, \quad (2.4a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(y) \chi_n(y') = \delta(y - y'). \quad (2.4b)$$

Em consequência das condições de contorno de “paredes rígidas” temos uma quantização transversal. Para cada inteiro n na Eq. (2.3) temos um modo ou canal. Os números de onda transversal e longitudinal se relacionam por:

$$[k_{l,n}]^2 + [K_{l,n}]^2 = k_F^2 \equiv \frac{2m\epsilon_F}{\hbar} \quad (2.5)$$

Se $K_{l,n} < k_F$, então $[k_{l,n}]^2 > 0$, $k_{l,n}$ é real e as exponenciais $e^{\pm ik_{l,n} x_l}$ na Eq.(2.2) representam ondas propagantes nos guias: são os modos propagantes ou canais abertos. Por outro lado, quando $K_{l,n} > k_F$, então $[k_{l,n}]^2 < 0$ e $k_{l,n}$ é imaginário, dando origem a ondas que decaem exponencialmente nos guias: estes são os modos evanescentes ou canais fechados. Se

$$N_l < k_F W_l / \pi < N_l + 1, \quad (2.6)$$

há N_l canais abertos no guia l . Longe da cavidade, ou seja, para $x_l \rightarrow \infty$, apenas os canais abertos contribuem para a função de onda. A forma assintótica da função de onda no guia l é dada por

$$\sum_{n=1}^{N_l} \left[a_n^{(l)} \frac{e^{-ik_{l,n} x_l}}{(\hbar k_{l,n}/m)^{1/2}} + b_n^{(l)} \frac{e^{ik_{l,n} x_l}}{(\hbar k_{l,n}/m)^{1/2}} \right] \chi_n(y_l). \quad (2.7)$$

A normalização aqui presente atende à prescrição usual de problemas de espalhamento.

2.1.1 Matriz de espalhamento

Podemos definir o vetor das N_l amplitudes das ondas incidentes na cavidade através do guia l

$$\mathbf{a}^{(l)} = (a_1^l, \dots, a_{N_l}^l)^T. \quad (2.8)$$

Agrupando todos os $\mathbf{a}^{(l)}$ ($l = 1, \dots, L$), temos o vetor

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(L)})^T, \quad (2.9)$$

associado às ondas que entram na cavidade a partir de todos os canais abertos em todos os guias. De maneira similar, definimos o vetor \mathbf{b} associado às ondas que saem da cavidade. A matriz de espalhamento, ou matriz S , conecta essas amplitudes

$$\mathbf{b} = S\mathbf{a}. \quad (2.10)$$

Seus elementos de matriz são rotulados por S_{kl}^{ij} e conectam estados do modo l do guia j aos estados do modo k do guia i . A matriz S pode ser representada na forma de blocos

$$S = \begin{bmatrix} r_{11} & t_{12} & \dots & t_{1L} \\ t_{21} & r_{22} & \dots & t_{2L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{L1} & t_{L2} & \dots & r_{LL} \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

onde os blocos r_{ll} são matrizes $N_l \times N_l$ que descrevem a reflexão do l -ésimo guia nele mesmo. Os blocos t_{lm} são matrizes $N_l \times N_m$ que descrevem a transmissão dos N_m canais do guia m para os N_l canais do guia l . Sendo N_T o número total de modos em todos os guias, a matriz S é quadrada e tem ordem

$$N_T = \sum_{l=1}^L N_l. \quad (2.12)$$

Outra maneira de expressar a função de onda no l -ésimo guia é pelo vetor N_l dimensional [23]

$$\Psi_l(\vec{r}) \equiv [\psi_1(x_l, y_l), \dots, \psi_{N_l}(x_l, y_l)]^T, \quad (2.13)$$

cujas entradas são as funções de onda de cada modo propagante.

$$\begin{aligned} \psi_n(x_l, y_l) &= \phi_n(x_l) \chi_n(y_l), \\ \phi_n(x_l) &= a_n^l \frac{e^{-ik_{n,l}x_l}}{(\hbar k_{n,l}/m)^{1/2}} + b_n^l \frac{e^{ik_{n,l}x_l}}{(\hbar k_{n,l}/m)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.1.2 Densidade de corrente

A densidade de corrente [24] no guia l é dada por

$$j_l \equiv \frac{\hbar}{m} \text{Im} \int_0^{W_l} \left[\Psi_l^\dagger(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial x_l} \Psi_l(\vec{r}) \right]_{x_l=0} dy_l. \quad (2.15)$$

Notando que

$$\left[\Psi_l^\dagger(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial x_l} \Psi_l(\vec{r}) \right]_{x_l=0} = \sum_{j=1}^{N_l} \left[\phi_j^*(x_l) \frac{\partial \phi_j(x_l)}{\partial x_l} \right]_{x_l=0} \chi_j^2(y_l)$$

e usando a relação de ortogonalidade (2.4a), temos

$$j_l = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \sum_{j=1}^{N_l} \left[\phi_j^*(x_l) \frac{\partial \phi_j(x_l)}{\partial x_l} \right]_{x_l=0} = \sum_{n=1}^{N_l} (|b_n^l|^2 - |a_n^l|^2). \quad (2.16)$$

A Eq.(2.16) pode ser escrita numa forma matricial. Para isso note que

$$\sum_{n=1}^{N_l} (|b_n^l|^2 - |a_n^l|^2) = (b_1^{l*}, \dots, b_{N_l}^{l*}, a_1^{l*}, \dots, a_{N_l}^{l*}) \begin{pmatrix} b_1^l \\ \vdots \\ b_{N_l}^l \\ -a_1^l \\ \vdots \\ -a_{N_l}^l \end{pmatrix}.$$

Definindo o vetor $2N_l$ -dimensional das amplitudes das ondas de todos os modos do guia l

$$\mathbf{c}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{(l)} \\ \mathbf{a}^{(l)} \end{bmatrix} = [b_1^{(l)}, \dots, b_{N_l}^{(l)}, a_1^{(l)}, \dots, a_{N_l}^{(l)}]^T, \quad (2.17)$$

a densidade de corrente fica

$$j_l = \mathbf{c}_l^\dagger \Sigma_z \mathbf{c}_l, \quad (2.18)$$

onde Σ_z é uma generalização $2N_l$ -dimensional da matriz σ_z de Pauli em termos da matriz identidade $N_l \times N_l$

$$\Sigma_z = \sigma_z \otimes 1_{N_l} = \begin{pmatrix} 1_{N_l} & 0 \\ 0 & -1_{N_l} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

2.2 Simetrias

Nesta seção, vamos estudar os vínculos na matriz S gerados pelas simetrias básicas do problema como conservação de corrente e reversão temporal.

2.2.1 Conservação de corrente

A conservação de corrente implica

$$\sum_{l=1}^L j_l = 0, \quad (2.20)$$

isto é,

$$\sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{N_l} |b_n^l|^2 = \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{N_l} |a_n^l|^2. \quad (2.21)$$

Usando os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} definidos pela Eq. (2.9), a Eq. (2.21) pode ser escrita numa forma matricial

$$\mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}.$$

Da definição de matriz- S , Eq. (2.10), concluímos que

$$S^\dagger S = 1, \quad (2.22)$$

ou seja, a conservação de corrente implica na unitariedade da matriz S . Na ausência de outras simetrias, temos apenas este vínculo.

2.2.2 Reversão temporal (Partículas sem spin)

Se o Hamiltoniano preserva a simetria de reversão temporal (se não há o termo de vetor potencial \vec{A} na Eq. (2.1)), para cada solução $\psi(\vec{r})$, a sua conjugada $\psi^*(\vec{r})$ é solução da equação revertida no tempo ($t \rightarrow -t$). Na base de espalhamento a reversão temporal inverte o sentido de propagação das ondas planas nos guias. No problema revertido no tempo a matriz de espalhamento fica

$$\mathbf{a}^* = S_{rev} \mathbf{b}^*. \quad (2.23)$$

Se o sistema é invariante sob reversão temporal, temos $S_{rev} = S$. Usando mais uma vez a definição da matriz S , concluímos que

$$SS^* = 1. \quad (2.24)$$

Este vínculo combinado com a condição de conservação de fluxo, Eq. (2.22), fornece

$$S^T = S, \quad (2.25)$$

ou seja, a simetria de reversão temporal implica que a matriz S é simétrica.

2.2.3 Reversão temporal (Partículas de spin 1/2)

Este caso é mais complicado e temos que tomar cuidado com a implementação da simetria de reversão temporal. A base dos estados de espalhamento fica $\mathcal{B} = \{|x, \sigma\rangle = |x\rangle \otimes |\sigma\rangle, 0 \leq x < \infty, \sigma = \pm\}$. Um estado do sistema $|\psi\rangle$ tem função de onda

$$\langle x, \sigma | \psi \rangle = \psi_\sigma(x). \quad (2.26)$$

Vemos que a função de onda possui dois componentes, $\sigma = \pm$, que podemos representar por uma matriz 2×1 (spinor de Pauli).

$$[\psi] = \begin{pmatrix} \psi_+(x) \\ \psi_-(x) \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

O operador anti-unitário de reversão temporal [24] é dado por

$$\Theta = i\sigma_y K, \quad (2.28)$$

onde σ_y é a segunda matriz de Pauli e K é o operador de conjugação complexa.

A ação desse operador nos vetores da base \mathcal{B} é dada por

$$\Theta|x, \sigma\rangle = -\sigma|x, -\sigma\rangle. \quad (2.29)$$

Podemos assim, ver como uma componente da função de onda se transforma sob a operação de reversão temporal. Considere o estado revertido no tempo

$$|\tilde{\psi}\rangle = \Theta|\psi\rangle, \quad (2.30)$$

projetando na base \mathcal{B} , obtemos

$$\begin{aligned} \langle x, \sigma | \tilde{\psi} \rangle &= \langle x, \sigma | (\Theta|\psi\rangle) \\ &= [(\langle x, \sigma | \Theta) |\psi\rangle]^* \\ &= -\sigma \langle x, -\sigma | \psi \rangle, \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde usamos o fato de Θ ser anti-unitário [25]. Concluimos que as componentes da função de onda se transformam como

$$\psi_\sigma(x) \rightarrow \tilde{\psi}_\sigma(x) = -\sigma\psi_{-\sigma}^*(x). \quad (2.32)$$

Em termos de matrizes, temos

$$[\tilde{\psi}] = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_+(x) \\ \tilde{\psi}_-(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_-^*(x) \\ \psi_+^*(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+^*(x) \\ \psi_-^*(x) \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

ou seja, o operador de reversão temporal na base \mathcal{B} tem representação dada por

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} C, \quad (2.34)$$

onde C representa a operação de conjugação complexa.

Voltando ao problema da Figura 2.1, generalizando a Eq. (2.13) para incluir o spin, a função de onda no guia l fica

$$\Psi_l(\vec{r}) \equiv [\psi_{1,+}(x_l, y_l), \psi_{1,-}(x_l, y_l) \dots, \psi_{N_l,+}(x_l, y_l), \psi_{N_l,-}(x_l, y_l)]^T, \quad (2.35)$$

onde

$$\begin{aligned} \psi_{n,\sigma}(x_l, y_l) &= \phi_{n,\sigma}(x_l)\chi_n(y_l), \\ \phi_{n,\sigma}(x_l) &= a_{n,\sigma}^l \frac{e^{-ik_{n,l}x_l}}{(\hbar k_{n,l}/m)^{1/2}} + b_{n,\sigma}^l \frac{e^{ik_{n,l}x_l}}{(\hbar k_{n,l}/m)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

O vetor com as amplitudes de todas as ondas que entram na cavidade fica

$$\mathbf{a} = \underbrace{(a_{1,+}^1, a_{1,-}^1, \dots, a_{N_1,+}^1, a_{N_1,-}^1, \dots)}_{\text{guia 1}}, \underbrace{(a_{1,+}^L, a_{1,-}^L, \dots, a_{N_L,+}^L, a_{N_L,-}^L)}_{\text{guia L}})^T. \quad (2.37)$$

O vetor \mathbf{b} é definido de forma análoga.

A função de onda de um modo no sistema revertido no tempo é dada por

$$\tilde{\psi}_{n,\sigma}(x_l) = \left[\tilde{a}_{n,\sigma}^l \frac{e^{ik_{n,l}x_l}}{(\hbar k_{n,l}/m)^{1/2}} + \tilde{b}_{n,\sigma}^l \frac{e^{-ik_{n,l}x_l}}{(\hbar k_{n,l}/m)^{1/2}} \right] \chi_n(y_l), \quad (2.38)$$

onde $\tilde{a}_{n,\sigma}^l = -\sigma a_{n,-\sigma}^{l*}$, o mesmo para $\tilde{b}_{n,\sigma}^l$. Sendo $\tilde{\mathbf{a}}$ a matriz de amplitudes do sistema revertido no tempo, ela se relaciona com \mathbf{a} por

$$\tilde{\mathbf{a}} = K \mathbf{a}^*, \quad (2.39)$$

onde K é a matriz anti-simétrica

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & \\ 1 & 0 & & \phi & & \\ & & \ddots & & & \\ & \phi & & 0 & -1 & \\ & & & 1 & 0 & \end{pmatrix}_{2N_T \times 2N_T} \quad (2.40)$$

A matriz de espalhamento do estado revertido (suposto invariante) no tempo é $\tilde{\mathbf{a}} = S\tilde{\mathbf{b}}$. Usando a relação (2.39) e a definição de matriz S temos

$$SKS^* = 1. \quad (2.41)$$

A equação (2.41) pode ser convenientemente reescrita na linguagem de quatérnions

$$SS^* = 1, \quad (2.42)$$

onde o “*” representa conjugação complexa quaterniônica.

2.3 Problema de dois terminais

Nesta tese estudamos o problema de uma cavidade conectada por dois guias como ilustrado na figura 2.2.

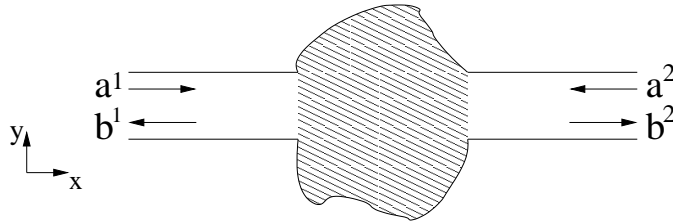


Figura 2.2: Cavidade 2D com 2 guias semi-infinitos.

Neste caso a matriz S fica

$$S = \begin{bmatrix} r_{11} & t_{12} \\ t_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} r & t' \\ t & r' \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Em particular, quando $N_1 = N_2 = N$, isto é, os dois guias têm o mesmo número de canais abertos N , a matriz S é do tipo $2N \times 2N$. A unitariedade de S implica nas relações

$$r^\dagger r + t^\dagger t = 1, \quad (2.44)$$

$$r'^\dagger r' + t'^\dagger t' = 1, \quad (2.45)$$

$$r^\dagger t' + t^\dagger r' = 0, \quad (2.46)$$

$$r'^\dagger t + t'^\dagger r = 0. \quad (2.47)$$

Temos ainda que $t^\dagger t$ e $t'^\dagger t'$ têm os mesmos autovalores $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\}$ onde $N = \min(N_1, N_2)$. Cada um desses “autovalores de transmissão” é um número compreendido entre 0 e 1.

Se estivermos interessados em estudar a matriz de espalhamento de duas amostras mesoscópicas em série, num problema de duas cavidades como mostrado na figura 2.3, assumimos que as duas amostras estão ligadas por um fio ideal de modo que as matrizes de espalhamento S_1 e S_2 sejam bem definidas, e encontramos a matriz de espalhamento do sistema acoplado [9]. As matrizes de reflexão e transmissão do sistema composto ficam

$$\begin{aligned} r &= r_1 + t'_1(1 - r'_1 r_2)^{-1} r_2 t_1, \\ t &= t_2(1 - r'_1 r_2)^{-1} t_1, \\ t' &= t'_1(1 - r_2 r'_1)^{-1} t_2, \\ r' &= r'_2 + t_2(1 - r_2 r'_1)^{-1} r'_1 t'_2. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Vemos que a regra de composição de matrizes de espalhamento é complicada e envolve inversões matriciais. Uma regra de composição mais simples é obtida com o auxílio da matriz de transferência M , que conecta as amplitudes do guia da direita

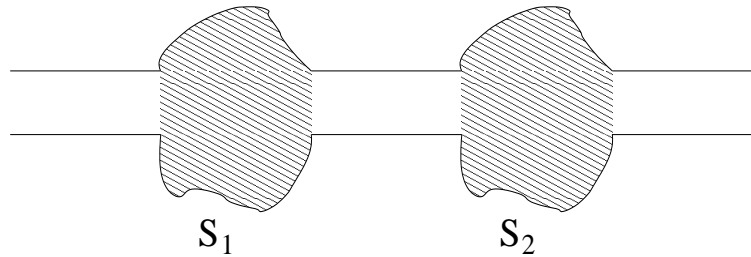


Figura 2.3: Duas amostras mesoscópicas em série, conectados por um guia ideal.

\mathbf{c}_2 com as do guia da esquerda \mathbf{c}_1

$$\mathbf{c}_2 = M\mathbf{c}_1, \quad (2.49)$$

onde c_l ($l = 1, 2$) foi definido na Eq. (2.17). A regra de composição para a matriz de transferência é simplesmente o produto das matrizes de transferência dos componentes. Então, a matriz de transferência do sistema da figura (2.3) é

$$M = M_2 M_1, \quad (2.50)$$

onde M_1 e M_2 são as matrizes das cavidades individuais. A simplicidade da regra de composição torna a matriz de transferência conveniente para o estudo de transporte quântico em fios.

As simetrias que estudamos na seção (2.2) impõem vínculos na matriz de transferência:

1. Conservação de corrente

$$M^\dagger \Sigma_z M = \Sigma_z \quad \text{ou} \quad M \Sigma_z M^\dagger = \Sigma_z \quad (2.51)$$

2. Reversão temporal

$$M^* = \Sigma_x M \Sigma_x \quad (2.52)$$

3. Reversão temporal (spin 1/2)

$$M^* = \Sigma M \Sigma^T, \quad (2.53)$$

onde

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

e K é a matriz definida pela Eq. (2.40). Um estudo detalhado dessas equações é feito na referência [23].

2.4 Teoria de Landauer -Büttiker

Consideremos uma amostra mesoscópica conectada a dois reservatórios de elétrons, caracterizados pelos potenciais químicos μ_1 e μ_2 , através dos quais se aplica uma diferença de potencial V . O sistema está em equilíbrio térmico à temperatura T e as funções de distribuição dos elétrons nos reservatórios são dadas pela função de Fermi

$$f_\alpha(E) = \frac{1}{1 + e^{(E-\mu_\alpha)/k_B T}} \quad , \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.55)$$

Os reservatórios, além de funcionarem como fonte dos portadores, também atuam como sumidouros perfeitos, ou seja, os elétrons passam dos guias para os reservatórios com probabilidade de reflexão nula.

Vamos usar o formalismo de Landauer-Büttiker que consiste em relacionar as propriedades de transporte do sistema com suas propriedades de espalhamento descritas pela matriz S . Na linguagem da segunda quantização introduzimos os operadores $\hat{a}_n^{\dagger l}(E)$ e $\hat{a}_n^l(E)$ que criam e aniquilam elétrons em estados com energia total E entrando na amostra pelo modo transversal n do guia l . Da mesma forma os operadores de criação $\hat{b}_n^{\dagger l}(E)$ e aniquilação $\hat{b}_n^l(E)$ descrevem elétrons saindo da amostra. Esses operadores obedecem às relações de anti-comutação

$$\{\hat{a}_n^l(E), \hat{a}_{n'}^{\dagger l}(E')\} = \delta_{n,n'} \delta(E - E'), \quad (2.56)$$

$$\{\hat{a}_n^l(E), \hat{a}_{n'}^l(E')\} = \{\hat{a}_n^{\dagger l}(E), \hat{a}_{n'}^{\dagger l}(E')\} = 0, \quad (2.57)$$

e o mesmo se aplica ao operador \hat{b} . Os operadores \hat{a} e \hat{b} estão relacionados pela matriz de espalhamento

$$\hat{b}_n^l = \sum_{\alpha k} S_{nk}^{l\alpha} \hat{a}_k^\alpha \quad \text{e} \quad \hat{b}_n^{\dagger l} = \sum_{\alpha k} (S_{nk}^{l\alpha})^* \hat{a}_k^{\dagger \alpha} = \sum_{\alpha k} (S^\dagger)_{kn}^{\alpha l} \hat{a}_k^{\dagger \alpha}. \quad (2.58)$$

A matriz S tem dimensão $(N_1 + N_2) \times (N_1 + N_2)$, onde N_1 e N_2 representam os números de canais abertos nos guias 1 e 2, respectivamente. Além disso, S tem a estrutura de blocos (2.43). O operador corrente no guia l ($l = 1, 2$) (longe da amostra) é dado por

$$\hat{I}_l = \frac{\hbar e}{2im} \int dy_l \left[\hat{\Psi}_l^\dagger(\vec{r}_l, t) \frac{\partial}{\partial x_l} \hat{\Psi}_l(\vec{r}_l, t) - \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \hat{\Psi}_l^\dagger(\vec{r}_l, t) \right) \hat{\Psi}_l(\vec{r}_l, t) \right], \quad (2.59)$$

onde os operadores de campo $\hat{\Psi}_l(\vec{r}_l, t)$ e $\hat{\Psi}_l^\dagger(\vec{r}_l, t)$ são definidos por

$$\hat{\Psi}_l(\vec{r}_l, t) = \sum_n [\psi_{l,n}^+(\vec{r}_l) \hat{a}_n^l(t) + \psi_{l,n}^-(\vec{r}_l) \hat{b}_n^l(t)], \quad (2.60)$$

$$\hat{\Psi}_l^\dagger(\vec{r}_l, t) = \sum_n [\psi_{l,n}^{+*}(\vec{r}_l) \hat{a}_n^{\dagger l}(t) + \psi_{l,n}^{-*}(\vec{r}_l) \hat{b}_n^{\dagger l}(t)], \quad (2.61)$$

e $\psi_{l,n}^\pm(\vec{r}_l)$ são as funções de onda no guia l

$$\psi_{l,n}^\pm(\vec{r}_l) = \frac{e^{\pm i k_{l,n} x_l}}{(\hbar k_{l,n}/m)^{1/2}} \chi_n(y_l). \quad (2.62)$$

Aqui $\chi_n(y_l)$ é a parte transversal da função de onda. Os operadores $\hat{a}_n^l(t)$ e $\hat{a}_n^l(E)$ se relacionam pela transformada de Fourier

$$\hat{a}_n^l(E) = \int dt e^{iEt/\hbar} \hat{a}_n^l(t) \quad ; \quad \hat{a}_n^l(t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dE e^{-iEt/\hbar} \hat{a}_n^l(E). \quad (2.63)$$

Substituindo as equações (2.63) e (2.62) nas expressões dos operadores de campo, ficamos com

$$\hat{\Psi}_l(\vec{r}_l, t) = \int dE e^{-iEt/\hbar} \sum_{n=1}^{N(E)} \frac{\chi_n(y_l)}{\sqrt{2\pi\hbar v_{l,n}(E)}} [\hat{a}_n^l(E) e^{i k_{l,n} x_l} + \hat{b}_n^l(E) e^{-i k_{l,n} x_l}] \quad (2.64)$$

e

$$\hat{\Psi}_l^\dagger(\vec{r}_l, t) = \int dE e^{iEt/\hbar} \sum_{n=1}^{N(E)} \frac{\chi_n^*(y_l)}{\sqrt{2\pi\hbar v_{l,n}(E)}} [\hat{a}_n^{\dagger l}(E) e^{-i k_{l,n} x_l} + \hat{b}_n^{\dagger l}(E) e^{i k_{l,n} x_l}], \quad (2.65)$$

onde introduzimos $v_{ln} = \hbar k_{ln}/m$, a velocidade dos portadores no n -ésimo modo transversal do guia l . Depois de um pouco de álgebra, a expressão para o operador corrente fica

$$\begin{aligned} \hat{I}_l(x, t) &= \frac{e}{4\pi\hbar} \sum_n \int dE \int dE' e^{i(E-E')t/\hbar} \frac{1}{\sqrt{v_{ln}(E)v_{ln}(E')}} \\ &\times \{ [v_{ln}(E) + v_{ln}(E')] \\ &\times [\exp[i(k_{l,n}(E') - k_{l,n}(E))x_l] \hat{a}_n^{\dagger l}(E) \hat{a}_n^l(E') \\ &- \exp[i(k_{l,n}(E) + k_{l,n}(E'))x_l] \hat{b}_n^{\dagger l}(E) \hat{b}_n^l(E')] \\ &\times [v_{ln}(E) - v_{ln}(E')] \\ &\times [\exp[-i(k_{l,n}(E) + k_{l,n}(E'))x_l] \hat{a}_n^{\dagger l}(E) \hat{b}_n^l(E') \\ &- \exp[i(k_{l,n}(E) + k_{l,n}(E'))x_l] \hat{b}_n^{\dagger l}(E) \hat{a}_n^l(E')] \}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Esta expressão é bastante complicada e ainda depende da coordenada x_l , mas pode ser simplificada. Como apenas os elétrons numa janela de energia da ordem de $k_B T$ em torno da energia de Fermi contribuem para a condução, podemos fazer $v_{ln}(E) = v_{ln}(E')$ na Eq. (2.66). Com isso, o operador corrente fica

$$\hat{I}(t) = \frac{e}{h} \sum_n \int dE \int dE' e^{i(E-E')t/\hbar} [\hat{a}_n^{\dagger l}(E) \hat{a}_n^l(E') - \hat{b}_n^{\dagger l}(E) \hat{b}_n^l(E')]. \quad (2.67)$$

Usando a matriz de espalhamento para expressar o operador corrente apenas em termos dos operadores \hat{a} e definindo

$$A_{mk}^{\alpha\beta}(l; E, E') \equiv \delta_{\alpha l} \delta_{\beta l} \delta_{mk} - \sum_n (S^\dagger)_{mn}^{\alpha l}(E) S_{nk}^{l\beta}(E'), \quad (2.68)$$

obtemos

$$\hat{I}_l(t) = \frac{e}{h} \sum_{\alpha\beta} \sum_{mk} \int dE \int dE' e^{i(E-E')t/\hbar} \hat{a}_m^{\alpha\dagger}(E) A_{mk}^{\alpha\beta}(l; E, E') \hat{a}_k^\beta(E'). \quad (2.69)$$

Os índices α e β indicam os reservatórios e podem assumir os valores 1 e 2.

2.4.1 Condutância

No cálculo da corrente média assumimos que os elétrons nos guias têm a mesma distribuição dos reservatórios. Para um sistema em equilíbrio térmico a média do produto de um operador de criação e um de aniquilação de elétrons num gás de Fermi é

$$\langle \hat{a}_m^{\alpha\dagger}(E) \hat{a}_k^\beta(E') \rangle = \delta_{\alpha\beta} \delta_{mk} \delta(E - E') f_\alpha(E), \quad (2.70)$$

onde f é a função de Fermi-Dirac. Usando a expressão (2.70), a corrente média fica

$$\langle I_l \rangle = \frac{e}{h} \sum_{\alpha} \sum_m \int dE A_{mm}^{\alpha\alpha}(l, E) f_\alpha(E). \quad (2.71)$$

Escolhendo $l = 1$ e usando a unitariedade da matriz S , a corrente no guia 1 fica

$$\langle I_1 \rangle = \frac{e}{h} \int dE \text{Tr}[t(E) t^\dagger(E)] [f_1(E) - f_2(E)]. \quad (2.72)$$

onde

$$f_1(E) = f(E - E_F - eV), \quad (2.73)$$

$$f_2(E) = f(E - E_F), \quad (2.74)$$

$$f(x) = [1 + e^{(x/k_B T)}]^{-1}. \quad (2.75)$$

No regime de resposta linear

$$\begin{aligned} f_1(E) - f_2(E) &= f(E - E_F - eV) - f(E - E_F) \\ &= \int_{E_F}^{E_F + eV} dE' \frac{\partial}{\partial E'} f(E - E') \\ &\approx eV \left(-\frac{\partial}{\partial E} f(E - E_F) \right) \end{aligned} \quad (2.76)$$

A condutância, definida por $G = \lim_{V \rightarrow 0} \langle I \rangle / V$, fica

$$G = \frac{e}{h} \int dE \left(-\frac{\partial}{\partial E} f(E - E_F) \right) \text{Tr}[t^\dagger(E)t(E)]. \quad (2.77)$$

Em $T = 0$ a função de Fermi fica uma função degrau, $f(E - E_F) = 1 - \theta(E - E_F)$. Neste caso, $\partial f(E - E_F) / \partial E = -\delta(E - E_F)$, e a condutância fica

$$G = \frac{e^2}{h} \text{Tr}[t(E_F)t^\dagger(E_F)]. \quad (2.78)$$

A Eq. (2.78) relaciona a matriz de espalhamento calculada na energia de Fermi com a condutância do sistema. A matriz $t^\dagger t$ pode ser diagonalizada e a condutância pode ser expressa em termos dos autovalores de transmissão

$$G = G_0 \sum_n \tau_n, \quad G_0 = \frac{e^2}{h}. \quad (2.79)$$

Se considerarmos o spin teremos um fator $G_0 = 2e^2/h$. Também podemos definir a condutância adimensional

$$g \equiv G/G_0 = \text{Tr} t t^\dagger = \sum_n \tau_n. \quad (2.80)$$

2.4.2 Flutuações da corrente

A teoria de espalhamento também pode ser usada para outras propriedades de transporte como flutuações temporais da corrente, $\Delta\hat{I}_l$, que fornecem informação adicional sobre o processo de transporte. À temperatura zero, a discreteza da carga é a única fonte das flutuações temporais da corrente. Essas flutuações são chamadas de “ruído de disparo” para diferenciá-las das flutuações térmicas que ocorrem para temperaturas não nulas. Outra diferença entre os dois é que o ruído de disparo é proporcional à voltagem, enquanto o ruído térmico ocorre a $V = 0$. O ruído de disparo é então um fenômeno intrinsecamente de não-equilíbrio e fornece informações sobre a correlação entre as cargas devido ao princípio de Pauli. Para estudar as flutuações na corrente, vamos introduzir o operador

$$\Delta\hat{I}_l = \hat{I}_l - \langle I_l \rangle \quad (2.81)$$

O ruído é caracterizado pela densidade espectral ou potência do espectro $P(\omega)$, que é a transformada de Fourier de frequência ω da função de correlação corrente-corrente

$$P(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle \Delta\hat{I}_l(t+t_0) \Delta\hat{I}_l(t_0) \rangle. \quad (2.82)$$

A função de correlação pode ser escrita como

$$\langle \Delta\hat{I}_l(t+t_0) \Delta\hat{I}_l(t_0) \rangle = \langle \hat{I}_l(t+t_0) \hat{I}_l(t_0) \rangle - \langle \hat{I}_l(t+t_0) \rangle \langle \hat{I}_l(t_0) \rangle. \quad (2.83)$$

Para achar a potência do ruído precisamos extrair a média do produto de quatro operadores \hat{a} . Para um gás de férmions em equilíbrio essa média é obtida pelo teorema de Wick

$$\begin{aligned} & \langle \hat{a}_m^{\dagger\alpha}(E_1) \hat{a}_k^{\beta}(E_2) \hat{a}_r^{\dagger\gamma}(E_3) \hat{a}_s^{\dagger\delta}(E_4) \rangle - \langle \hat{a}_m^{\dagger\alpha}(E_1) \hat{a}_k^{\beta}(E_2) \rangle \langle \hat{a}_r^{\dagger\gamma}(E_3) \hat{a}_s^{\dagger\delta}(E_4) \rangle \\ & = \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \delta_{ms} \delta_{rk} \delta(E_1 - E_4) \delta(E_2 - E_3) f_{\alpha}(E_1) [1 - f_{\beta}(E_2)]. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Usando a definição do operador corrente (2.69), o teorema de Wick e a relação $\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\hbar\omega + E_1 - E_2)t/\hbar} = 2\pi\hbar \delta(\hbar\omega + E_1 - E_2)$, a densidade espectral fica [26]

$$P(\omega) = \frac{2e^2}{h} \sum_{\alpha\beta} \sum_{mk} \int dE A_{mk}^{\alpha\beta}(E, E + \hbar\omega) A_{km}^{\beta\alpha}(E + \hbar\omega, E) f_{\alpha}(E) [1 - f_{\beta}(E + \hbar\omega)]. \quad (2.85)$$

Para frequências arbitrárias esta expressão não é consistente com a conservação de corrente e a invariância de gauge, e considerações adicionais são necessárias para a obtenção de um resultado fisicamente aceitável. No entanto, a componente de frequência nula do ruído

$$P \equiv P(0) = \frac{2e^2}{h} \sum_{\alpha\beta} \sum_{mk} \int dE A_{mk}^{\alpha\beta}(E, E) A_{km}^{\beta\alpha}(E, E) f_{\alpha}(E) [1 - f_{\beta}(E)], \quad (2.86)$$

não apresenta esses problemas e é nela que estamos interessandos. Usando a definição (2.68) e a condição de unitariedade da matriz S pode-se mostrar que

$$P = 2 \frac{e^2}{h} \int dE \{ [f_1(1 - f_2) + f_2(1 - f_1)] \text{Tr}(tt^{\dagger}rr^{\dagger}) + [f_1(1 - f_1) + f_2(1 - f_2)] \text{Tr}(tt^{\dagger}tt^{\dagger}) \}. \quad (2.87)$$

Vamos usar a expressão (2.87) para o cálculo do ruído nos dois casos já discutidos.

Ruído térmico

Se o sistema está em equilíbrio térmico à temperatura T , as funções de distribuição nos reservatórios coincidem. Usando a relação $f(1 - f) = -k_B T \partial f / \partial E$ em (2.87), obtemos

$$P = 4k_B T \frac{e^2}{h} \int dE \left(-\frac{\partial}{\partial E} f(E - E_F) \right) \text{Tr}(tt^{\dagger}). \quad (2.88)$$

Este é o ruído de equilíbrio ou de Nyquist-Johnson. Ele é consequência das flutuações térmicas do número de ocupação nos reservatórios. Comparando as equações (2.88) e (2.77), temos

$$P = 4k_B T G. \quad (2.89)$$

Este é o resultado do teorema da flutuação-dissipação [27], que relaciona a condutância com flutuações da corrente de equilíbrio.

Ruído de disparo

Em $T = 0$ a função de distribuição de Fermi é uma função degrau, $f_{\alpha} = \theta(\mu_{\alpha} - E)$. No regime de resposta linear a Eq. (2.87) fornece a relação

$$P = \frac{2e^3 |V|}{h} \text{Tr}(tt^{\dagger}rr^{\dagger}), \quad (2.90)$$

onde as matrizes t e r são calculadas na energia de Fermi. Definindo $P_0 = 2e^3|V|/h$, temos a potência do ruído de disparo adimensional

$$p = \frac{P}{P_0} = \text{Tr}(tt^\dagger rr^\dagger) = \sum_n \tau_n(1 - \tau_n), \quad (2.91)$$

onde usamos os autovalores de transmissão.

Vemos que o ruído de não-equilíbrio (de disparo) não é simplesmente determinado pela condutância. Em vez disso, ele é determinado pela soma dos produtos das probabilidades de transmissão e reflexão dos autocanais. Apenas no limite de baixa transparência $\tau_n \ll 1$ em todos os autocanais, o ruído de disparo é dado por

$$P \simeq \frac{2e^3|V|}{h} \sum_n \tau_n = 2e\langle I \rangle, \quad (2.92)$$

que é o ruído de um processo Poisson onde os elétrons são estatisticamente independentes.

2.5 Teoria de Matrizes Aleatórias

A teoria das matrizes aleatórias (TMA) foi introduzida na física por Wigner e Dyson na década de 50 com o objetivo de estudar propriedades estatísticas do espalhamento de nêutrons lentos por núcleos pesados. Essa teoria é bastante útil para descrever sistemas onde a informação microscópica é pouco conhecida ou até mesmo inacessível. Todo sistema quântico é descrito por um operador Hamiltoniano que pode ser representado por uma matriz. Para sistemas quânticos complexos, como um núcleo pesado, esta matriz é muito complicada e não conhecemos todos os seus detalhes. A idéia básica da teoria é substituir a matriz Hamiltoniana por um membro de um ensemble de matrizes aleatórias consistentes com as simetrias do problema (reversão temporal e rotação de spin), a partir das quais determinamos as funções de correlação dos autovalores e autovetores. Pelas funções de correlação calculamos propriedades físicas do sistema como a densidade espectral.

Desde a proposta original de Wigner, a TMA tem sido usada em diversas áreas como: físicas nuclear, atômica e molecular, sistemas mesoscópicos desordenados, caos quântico, gravitação quântica bidimensional, teoria de campo conforme e QCD. Uma revisão detalhada da teoria e suas aplicações pode ser encontrada na referência [28]. Em física mesoscópica a teoria de Wigner-Dyson é apropriada para uma descrição estatística de pontos quânticos caóticos. Nesta seção vamos rever alguns conceitos da TMA de Wigner-Dyson com ênfase nas aplicações para pontos quânticos.

2.5.1 Ensemble de Wigner-Dyson

Um ponto quântico fechado é caracterizado pelos seus níveis de energia e funções de onda. Essas propriedades são bastante sensíveis à distribuição de impurezas ou aos contornos da amostra. Então, podemos considerar um ensemble de pontos quânticos com configurações de impurezas ou formas diferentes e calcular as propriedades estatísticas dos níveis de energia e funções de onda. Verifica-se que essas propriedades são universais, ou seja, independem da forma do ponto ou da distribuição de impurezas, dependendo apenas das simetrias básicas do problema, tais como as simetrias de reversão temporal e rotação de spin.

Wigner e Dyson estudaram um ensemble de matrizes Hermitianas \mathcal{H} , $N \times N$, com distribuição de probabilidade

$$P(\mathcal{H}) = c \exp[-\beta \text{Tr}V(\mathcal{H})], \quad (2.93)$$

onde β é um índice de simetria e c uma constante de normalização. Se o potencial $V(\mathcal{H}) \propto \mathcal{H}^\dagger \mathcal{H}$, o ensemble é dito gaussiano. A praticidade dos ensembles gaussianos resulta do fato de que os elementos independentes do Hamiltoniano são variáveis aleatórias independentes, pois

$$\text{Tr}V(\mathcal{H}) = \text{Tr}\mathcal{H}^2 = \sum_{i,j} |\mathcal{H}_{ij}|^2, \quad (2.94)$$

e a distribuição fatora, simplificando os cálculos. No limite $N \rightarrow \infty$ as correlações espectrais tornam-se independentes de V . Isso é conhecido como *universalidade* das correlações espectrais.

O índice de simetria β corresponde ao número de graus de liberdade dos elementos de matriz. Eles podem ser reais, complexos ou quatérnions reais, correspondendo a $\beta = 1, 2$ e 4 , respectivamente. Como a transformação

$$\mathcal{H} \rightarrow U\mathcal{H}U^{-1}, \quad (2.95)$$

com U sendo uma matriz ortogonal ($\beta = 1$), unitária ($\beta = 2$), ou simplética ($\beta = 4$) deixa $P(\mathcal{H})$ invariante, o ensemble é chamado ortogonal, unitário ou simplético. Fisicamente, $\beta = 2$ se aplica ao caso de simetria de reversão temporal quebrada por um campo magnético ou por impurezas magnéticas. Na presença de simetria de reversão temporal, temos $\beta = 1$ se o spin do elétron é conservado e $\beta = 4$ se a simetria de rotação de spin é quebrada devido a uma forte interação spin-órbita, por exemplo. Tal classificação, atribuída à Dyson, é resumida na Tabela abaixo.

Os três ensembles gaussianos foram derivados por Balian [29] a partir de um princípio de máxima entropia, postulando a existência de um segundo momento para o Hamiltoniano.

β	SRT	SRS	\mathcal{H}_{nm}	U
1	sim	sim	real	ortogonal
2	não	irrelevante	complexo	unitária
4	sim	não	quatérnion real	simplética

Tabela 2.1: Resumo da classificação de Dyson. A matriz hermitiana \mathcal{H} e a matriz dos autovetores U são classificadas pelo índice β dependendo da presença ou ausência de simetria de reversão temporal (*SRT*) e simetria de rotação de spin (*SRS*).

Vamos determinar a distribuição dos autovalores e autovetores de \mathcal{H} . Seja $\{E_n\}$ o conjunto dos autovalores de \mathcal{H} e U a matriz dos autovetores, então

$$\mathcal{H} = U \text{diag}(E_1, E_2, \dots, E_N) U^\dagger. \quad (2.96)$$

Como $\text{Tr}V(\mathcal{H}) = \sum_n V(E_n)$ depende apenas dos autovalores, a distribuição da Eq. (2.93) é independente dos autovetores. Isso significa que U é uniformemente distribuído no grupo unitário (para $\beta = 2$) e no ortogonal e simplético (para $\beta = 1$ e 4).

Para achar a distribuição $P(\{E_n\})$ dos autovalores devemos multiplicar $P(\mathcal{H})$ pelo Jacobiano J que relaciona o volume infinitesimal $d\mu(\mathcal{H})$ no espaço das matrizes hermitianas com os elementos de volume $d\mu(U)$, $\prod_n dE_n$, dos autovetores e autovalores, ou seja,

$$d\mu(\mathcal{H}) = J d\mu(U) \prod_n dE_n. \quad (2.97)$$

O Jacobiano depende apenas dos autovalores

$$J(\{E_n\}) = \prod_{i < j} |E_i - E_j|^\beta. \quad (2.98)$$

A distribuição de autovalores resultante é dada por

$$P(\{E_n\}) = C_\beta \prod_{i < j} |E_i - E_j|^\beta \prod_k e^{-\beta V(E_k)} \quad (2.99)$$

$$= C_\beta \exp \left[-\beta \left(\sum_{i < j} u(E_i, E_j) + \sum_k V(E_k) \right) \right]. \quad (2.100)$$

A equação (2.100) tem a forma de uma distribuição de Gibbs da mecânica estatística clássica, onde o índice de simetria desempenha o papel de inverso da

temperatura e $u(E, E') = \ln |E - E'|$ representa o potencial repulsivo de um par de cargas em um problema eletrostático bidimensional [30]. Neste problema, temos N cargas nas posições E_1, E_2, \dots, E_N mantidas por um “potencial de confinamento” V que, para Ensembles Gaussianos é o do oscilador harmônico. Esse sistema de cargas pontuais em equilíbrio térmico é chamado “gás de Coulomb”. A partir da equação (2.100), vários resultados podem ser extraídos. Abaixo, citamos alguns resultados usados na tese.

1. *Densidade de autovalores* (função de um ponto)

$$\rho = \langle \hat{\rho}(E) \rangle, \quad (2.101)$$

onde $\hat{\rho}(E)$ é a densidade microscópica dada por

$$\hat{\rho}(E) = \sum_{i=1}^N \delta(E - E_i). \quad (2.102)$$

A densidade de autovalores é determinada pelo potencial $V(E)$. No limite de N grande podemos usar a equação de “campo médio”

$$V(E) = \int \rho(E') \ln |E - E'| dE' + C. \quad (2.103)$$

Para o ensemble Gaussiano com $V(\mathcal{H}) = N\mathcal{H}^2/4\lambda^2$ encontramos para todas as classes de simetria $\beta = 1, 2, \text{ e } 4$ a seguinte expressão

$$\rho(E) = \frac{N}{2\pi\lambda^2} \sqrt{4\lambda^2 - E^2}. \quad (2.104)$$

O parâmetro λ controla o espaçamento médio $\Delta = \pi\lambda/N$ na origem $E = 0$. A densidade de estados para o ensemble Gaussiano é conhecida como lei do semicírculo de Wigner. Esta é uma propriedade dos ensembles gaussianos e não tem nenhuma relevância física já que densidades de estado diferentes são obtidas para outros potenciais. Podemos obter a densidade de autovalores (2.104) numericamente. Partindo de um Hamiltoniano real e simétrico, caso $\beta = 1$, cujos elementos são números aleatórios com distribuição gaussiana de média nula e variância

$$\sigma_{kk} = \langle H_{kk}^2 \rangle - \langle H_{kk} \rangle^2 = \frac{2\lambda^2}{N}; \quad \sigma_{kl} = \langle H_{kl}^2 \rangle - \langle H_{kl} \rangle^2 = \frac{\lambda^2}{N}, \quad (2.105)$$

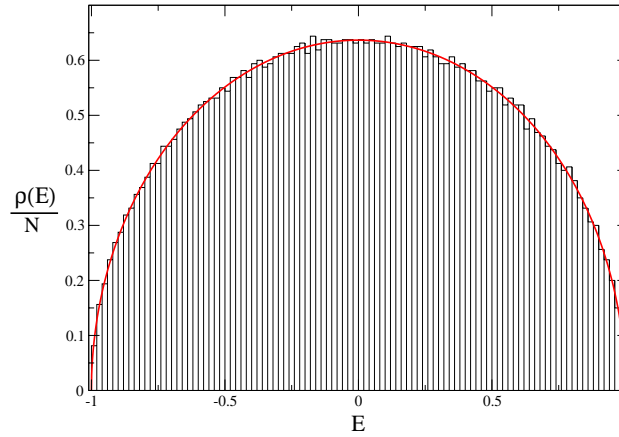


Figura 2.4: Densidade de autovalores para um Hamiltoniano pertencente ao EGO com $N = 8000$, confirmando a lei do semicírculo de Wigner (curva vermelha).

geramos a matriz aleatória, calculamos seus autovalores e fazemos um histograma. Escolhendo $\lambda = 1/2$, os autovalores ficam distribuídos no intervalo $(-1, 1)$ e o limite $N \rightarrow \infty$ é atingido elevando-se a dimensão da matriz. A figura (2.4) mostra a densidade de autovalores para uma matriz 8000×8000 .

2. *Função de dois pontos.* Definimos em termos da densidade microscópica (2.102) a função de dois pontos

$$\rho_2(E, E') = \langle \hat{\rho}(E)\hat{\rho}(E') \rangle - \langle \hat{\rho}(E) \rangle \langle \hat{\rho}(E') \rangle. \quad (2.106)$$

Enquanto a densidade de estados média é determinada pelo potencial V , as flutuações em torno da média são determinadas pela interação dos níveis originada pelo jacobiano $J(\{E\})$, que depende apenas do índice de simetria β . Portanto, desde que as energias sejam medidas na escala do espaçamento médio dos níveis Δ , as flutuações espectrais são universais, independentemente dos detalhes do ensemble de matrizes aleatórias em questão. Por exemplo, a função de cluster de dois níveis [31],

$$T_2(E, E') = \rho_2(E, E') - \langle \hat{\rho}(E) \rangle \delta(E - E'), \quad (2.107)$$

no limite $N \rightarrow \infty$ e para $\beta = 2$ torna-se

$$T_2(E, E') = -\frac{\sin^2[\pi(E - E')/\Delta]}{\pi^2(E - E')^2/\Delta^2}, \quad (2.108)$$

independente do potencial V . A Eq. (2.108) vale para o ensemble unitário. Expressões para o caso ortogonal e simplético também são universais, porém mais complicadas [31].

3. *Estatística linear.* Consideremos a função dos autovalores

$$F = \sum_i f(E_i). \quad (2.109)$$

O termo “linear” indica que F não contém produtos de autovalores diferentes, embora a função $f(E)$ possa depender não linearmente de E . Usando a densidade microscópica, temos

$$F = \int f(E)\hat{\rho}(E)dE. \quad (2.110)$$

A média no ensemble de F e sua variância podem ser expressas em termos da densidade média $\rho(E)$ e da função de correlação $\rho_2(E, E')$ como

$$\langle F \rangle = \int f(E)\rho(E)dE, \quad (2.111)$$

e

$$\text{var}(F) = \int \int f(E)f(E')\rho_2(E, E')dEdE'. \quad (2.112)$$

Na aproximação de “campo médio”, Eq. (2.103), Beenakker [32] mostrou que a variância de uma estatística linear, Eq. (2.112), é independente de V e tem dependência universal proporcional a $1/\beta$.

2.5.2 Matrizes aleatórias em problemas de espalhamento

Enquanto um sistema fechado é caracterizado pelos níveis de energia e funções de onda, um sistema aberto conectado a guias é descrito pela matriz de espalhamento S . A distribuição das matrizes de espalhamento para um ponto quântico aberto

depende do tamanho e da transparência dos contatos. Excluindo essa “não universalidade” trivial, a estatística de um ponto quântico caótico é universal no sentido de que não depende da forma ou tamanho do ponto quântico e da concentração de impurezas. A única condição para a universalidade é que as partículas explorem ergodicamente o espaço de fase antes de saírem da cavidade. Tal condição é satisfeita para um ponto quântico caótico com contatos pontuais. Outra diferença entre a TMA das matrizes de espalhamento e a dos níveis de energia é que, ao contrário do Hamiltoniano, a matriz S é finita. Por exemplo, para uma cavidade conectada a dois guias que suportam 1 modo propagante cada, a matriz S é 2×2 .

Existem dois formalismos para descrever a TMA do transporte em cavidade caótica: o do Hamiltoniano e o da matriz de espalhamento. No primeiro, modelamos o Hamiltoniano, H , da cavidade por uma matriz aleatória $N_c \times N_c$ pertencente a um dos ensembles gaussianos. O acoplamento da cavidade aos guias é descrito pela matriz não aleatória W . A matriz de espalhamento $S(E)$ é obtida de H através da fórmula de Mahaux-Weidenmüller

$$S(E) = 1 - 2\pi i W^\dagger \frac{1}{E - H + i\pi W W^\dagger} W. \quad (2.113)$$

O limite $N_c \rightarrow \infty$ é tomado no fim dos cálculos de modo que a estatística da matriz S não dependa da matriz aleatória H , sendo desta forma universal. Na seção (2.6) derivaremos a fórmula de Mahaux-Weidenmüller para o caso geral de uma cavidade conectada a vários guias.

O segundo método consiste em uma teoria de matrizes aleatórias aplicada diretamente à matriz de espalhamento, sem nenhuma referência ao Hamiltoniano. No caso de dois terminais com $N_1 = N_2 = N$ a matriz S pode ser escrita na representação polar [33]

$$S = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-\tau} & \sqrt{\tau} \\ \sqrt{\tau} & \sqrt{1-\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_3 & 0 \\ 0 & v_4 \end{pmatrix}, \quad (2.114)$$

onde τ representa uma matriz diagonal N -dimensional com os autovalores de transmissão τ_a ($a = 1, \dots, N$). Os v_i ($i = 1, \dots, 4$) são matrizes unitárias $N \times N$ arbitrárias para o caso $\beta = 2$. No caso ortogonal, $\beta = 1$, temos as restrições $v_3 = v_1^T$ e $v_4 = v_2^T$. No caso simplético, $\beta = 4$, os autovalores de transmissão são duplamente degenerados, $\tau = \text{diad}(\tau_1 1, \tau_2 1, \dots, \tau_N 1)$, e as matrizes v_i são quatérnions auto-duais $N \times N$ com as restrições $v_3 = \bar{v}_1$ e $v_4 = \bar{v}_2$. A representação polar é natural para o estudo da condutância já que separa os autovalores de transmissão de fatores irrelevantes de fase (as matrizes v_i).

Estamos interessados nas propriedades de um ensemble de sistemas representados por um ensemble de matrizes S . Para cálculos neste ensemble precisamos

definir a medida invariante $d\mu(S)$ do espaço das matrizes S . Por definição a medida permanece invariante sob um automorfismo de uma dada classe de simetria nela mesma, isto é,

$$d\mu^\beta(S) = d\mu^\beta(S'), \quad (2.115)$$

para $\beta = 2$ temos $S' = U_0 S V_0$, onde U_0 e V_0 são matrizes unitárias fixas. Esta relação define um automorfismo sobre o conjunto das matrizes unitárias. Para $\beta = 1$ temos $V_0 = U_0^T$ e para $\beta = 4$, $V_0 = \bar{U}_0$. O cálculo da medida invariante, embora longo, segue o algoritmo:

1. Definimos o elemento diferencial de arco $ds^2 = \text{Tr}[dS^\dagger dS]$.
2. Identificamos o tensor métrico do espaço através da relação $ds^2 = \sum g_{\mu\nu}(x) \delta x_\mu \delta x_\nu$.
3. Obtemos o elemento de volume a partir da relação $dV = |\det g(x)|^{1/2} \prod x_\mu$.

A forma da medida invariante depende da parametrização escolhida para a matriz S [33] [34] [35]. No trabalho original de Dyson, a matriz S foi escrita na decomposição autovalor-autovetor

$$S = \Omega \text{diag}(e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}, \dots, e^{i\phi_{2N}}) \Omega^\dagger, \quad (2.116)$$

onde os números reais ϕ_j estão relacionados aos deslocamentos de fase de espalhamento. A matriz unitária $2N \times 2N$, Ω , tem elementos reais para $\beta = 1$, complexos para $\beta = 2$ e quatérnions reais para $\beta = 4$. Estes são os ensembles circulares de Dyson, cujas medidas estão contidas na expressão

$$d\mu(S) \propto \prod_{a < b} |e^{i\phi_a} - e^{i\phi_b}|^\beta \prod_c d\theta_c d\mu(\Omega). \quad (2.117)$$

As derivadas dessas fases em relação à energia, $\partial\theta_j/\partial E$, estão relacionadas com o tempo gasto pela partícula quântica no domínio de interação, que é o tempo de atraso de Wigner-Smith [36].

Para o estudo de propriedades de transporte em pontos quânticos, a representação polar (2.114) é mais adequada. Neste caso, a medida fica [33]

$$d\mu(S) \propto \prod_{a < b} |\tau_a - \tau_b|^\beta \prod_c \tau_c^{-1+\beta/2} \prod_c d\tau_c \prod_i d\mu(v^{(i)}). \quad (2.118)$$

Seja $\mathcal{P}(S)$ a densidade de probabilidade de encontrarmos a matriz S no volume $d\mu(S)$, então

$$\int \mathcal{P}(S) d\mu(S) = 1. \quad (2.119)$$

A entropia de informação contida na densidade de probabilidade $\mathcal{P}(S)$ é definida por:

$$\mathcal{S} = - \int d\mu(S) \mathcal{P}(S) \ln \mathcal{P}(S). \quad (2.120)$$

Note que \mathcal{S} aumenta quando as flutuações estatísticas, ou seja, o grau de aleatoriedade de $\mathcal{P}(S)$ aumenta. Descrevemos o ensemble de matrizes S sem nenhuma referência às informações microscópicas contidas no Hamiltoniano através do *princípio de máxima entropia*. Como na mecânica estatística, devemos maximizar a entropia (2.120) submetida ao vínculo (2.119). Note que toda a informação de simetria já está contida na parametrização da matriz S . Encontramos

$$\mathcal{P}(S) = \text{constante}, \quad (2.121)$$

ou seja, devido às flutuações, a matriz S cobre a variedade com distribuição uniforme. Este conceito é semelhante ao usado no ensemble microcanônico, onde o princípio de igual probabilidade *a priori* é associado à invariância da medida num automorfismo sobre uma dada classe de simetria. O princípio de máxima entropia nos permite escolher uma distribuição tão aleatória quanto os vínculos permitam.

Integrando sobre a “parte angular”, obtemos a densidade conjunta de autovalores de transmissão

$$P(\{\tau\}) = C_\beta \prod_{a < b} |\tau_a - \tau_b|^\beta \prod_c \tau_c^{-1+\beta/2} \quad (2.122)$$

$$= \exp \left(\beta \sum_{a < b} \ln |\tau_a - \tau_b| - \beta \sum_c V(\tau_c) \right), \quad (2.123)$$

onde o potencial $V(\tau)$ é dado por

$$V(\tau) = \begin{cases} \frac{2-\beta}{2\beta} \ln \tau & \text{se } 0 \leq \tau \leq 1, \\ \infty & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.124)$$

A equivalência formal entre a distribuição (2.123) dos autovalores de transmissão e de um ponto quântico caótico e a distribuição dos autovalores E_j (2.100) de

uma matriz aleatória hermitiana nos permite usar todos os recursos desenvolvidos no estudo de níveis de energia em problemas de autovalores de transmissão.

Uma propriedade de transporte A geralmente assume a forma de uma estatística linear $A = \sum_n f(\tau_n)$ dos autovalores de transmissão. Para a condutância temos $f(\tau) = \tau$ enquanto para a potência do ruído de disparo, $f(\tau) = \tau(1 - \tau)$. As médias da condutância e da potência de ruído de disparo são dadas por

$$\langle g \rangle = \int g(\{\tau\})P(\{\tau\}) \prod_a d\tau_a \quad , \quad \langle p \rangle = \int p(\{\tau\})P(\{\tau\}) \prod_a d\tau_a. \quad (2.125)$$

Podemos obter a distribuição da condutância e da potência do ruído através das equações

$$W(g) = \int \delta(g - \sum_n \tau_n) P(\{\tau\}) \prod_i d\tau_i, \quad (2.126)$$

$$W(p) = \int \delta(p - \sum_n \tau_n(1 - \tau_n)) P(\{\tau\}) \prod_i d\tau_i. \quad (2.127)$$

A seguir vamos resumir alguns resultados relevantes para o ponto quântico de Wigner-Dyson. Podemos obter as médias e distribuições por integração direta apenas para os casos de N pequeno. Abaixo, mostramos os resultados para $N = 1$ e $N = 2$.

Caso $N = 1$

Para guias com um modo temos apenas um autovalor de transmissão e a densidade de probabilidade (2.122) fica

$$P(\tau) = \frac{\beta}{2} \tau^{-1+\beta/2}. \quad (2.128)$$

As médias são dadas por

$$\langle g \rangle = \frac{\beta}{\beta + 2} \quad , \quad \langle p \rangle = \frac{2\beta}{(\beta + 2)(\beta + 4)}, \quad (2.129)$$

e as distribuições

$$W(g) = \frac{\beta}{2} g^{-1+\beta/2} \quad (2.130)$$

$$W(p) = \frac{\beta}{2\sqrt{(1-4p)}} \sum_{\sigma=\pm} \left(\frac{1 + \sigma\sqrt{1-4p}}{2} \right)^{-1+\beta/2} \quad (2.131)$$

são muito diferentes da distribuição gaussiana.

Caso $N = 2$

Neste caso a densidade conjunta dos autovalores de transmissão, τ_1 e τ_2 , é mais complicada. Temos

$$P_{\beta=1}(\tau_1, \tau_2) = \frac{3}{4} \frac{|\tau_1 - \tau_2|}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}, \quad (2.132)$$

$$P_{\beta=2}(\tau_1, \tau_2) = 6(\tau_1 - \tau_2)^2. \quad (2.133)$$

e as distribuições

$$W_{\beta=1}(g) = \begin{cases} \frac{3}{2}g & , 0 \leq g \leq 1 \\ \frac{3}{2}(g - 2\sqrt{g-1}) & , 1 \leq g \leq 2 \end{cases} \quad (2.134)$$

$$W_{\beta=2}(g) = 2(1 - |1 - g|)^3 \quad , 0 \leq g \leq 2. \quad (2.135)$$

Os gráficos destas distribuições estão mostrados nas figuras (2.5) e (2.6). À medida que aumentamos o número de canais, a distribuição da condutância vai se tornando gaussiana, o que é consistente com o regime semiclássico, $N \rightarrow \infty$. Neste limite, os cumulantes de ordem maior que dois da distribuição de qualquer estatística linear tendem a zero, ou seja, a distribuição $W(A)$ tende a uma gaussiana com média e variância determinadas pelos similares das equações (2.111) e (2.112), que, como mostraremos no capítulo 4, podem ser escritas como

$$\langle A \rangle = N f_0 + \gamma \sum_{n=0}^{\infty} f_{4n-2} + \mathcal{O}(N^{-1}), \quad (2.136)$$

$$\text{var}(A) = \frac{1}{4\beta} \sum_{n=1}^{\infty} n f_n^2 + \mathcal{O}(N^{-1}). \quad (2.137)$$

Para a condutância, temos

$$\langle g \rangle = \frac{N}{2} + \frac{\beta - 2}{4\beta} + \mathcal{O}(N^{-1}), \quad (2.138)$$

$$\text{var}(g) = \frac{1}{8\beta}. \quad (2.139)$$

O termo de ordem $\mathcal{O}(N)$ é a condutância de contato, a qual, no regime semiclássico, é consequência de apenas metade dos elétrons que entram na cavidade caótica serem

transmitidos, resultando numa transmissão média de $1/2$ por modo. O termo de ordem $\mathcal{O}(N^0)$ é resultado da interferência quântica e, como vimos no capítulo 1, é conhecido como correção de localização fraca ($\beta = 1$) e anti-localização ($\beta = 4$). Para a variância temos o fator $1/(8\beta)$, independente da distribuição de impurezas ou da forma da cavidade. Este resultado revela a flutuação universal da condutância discutida no capítulo 1.

Para a potência do ruído de disparo temos

$$\langle p \rangle = \frac{N}{8} + \mathcal{O}(N^{-1}), \quad (2.140)$$

$$\text{var}(p) = \frac{1}{64\beta}. \quad (2.141)$$

Note que a média da potência do ruído é quatro vezes menor que a potência do ruído de Poisson, associado à corrente onde os elétrons são descorrelacionados. Este comportamento sub-Poissônico indica a presença de correlação entre os elétrons devido ao princípio da exclusão de Pauli. Uma medida deste ruído sub-Poissônico é o fator F de Fano, que é a razão entre a potência do ruído em questão e o ruído Poissônico. Para um ponto quântico usual temos $F = 1/4$ e para um condutor difusivo $F = 1/3$. A Eq. (2.140) mostra que não temos correção de localização fraca, em contraste com o resultado para um condutor difusivo onde o efeito está presente. Esta supressão da localização fraca não ocorre no caso geral $N_1 \neq N_2$.

2.6 Fórmula de Mahaux - Weidenmüller

Nesta seção vamos aplicar o formalismo de Heidelberg para descrever uma cavidade caótica balística de geometria arbitrária acoplada a L guias. Na seqüência, vamos nos limitar ao caso particular $L = 2$. Consideremos o sistema dividido em duas partes. A primeira consiste nos L guias ideais nos quais o elétron se move como uma partícula livre. A segunda parte consiste na cavidade, dentro da qual o movimento do elétron adquire características aleatórias devido aos múltiplos espalhamentos na fronteira da amostra ou com impurezas.

Seja $H_0 = H_L \oplus H_c$ o Hamiltoniano do sistema desacoplado guias-cavidade, onde

$$H_L = \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{N_l} \oplus \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_{l,n}^2} + \epsilon_{l,n} \right) \quad (2.142)$$

é o Hamiltoniano dos L guias; $\epsilon_{l,n}$ é o limiar de energia do n -ésimo modo do l -ésimo guia; $x_{l,n} > 0$ é a coordenada longitudinal do guia e H_c é a matriz Hamiltoniana $N_c \times N_c$ que descreve a dinâmica da cavidade fechada. No regime universal, H_c pode ser substituído por uma matriz pertencente a um dos Ensembles Gaussianos.

O operador H_0 atua no espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(R^+, C^{N_T})$, onde $N_T = \sum_{l=1}^L N_l$ é o número total de canais abertos. Um vetor geral de \mathcal{H} tem a forma

$$\Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \Psi \end{pmatrix}, \quad (2.143)$$

onde

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{N_c})^T$$

representa as funções de onda na cavidade e

$$\Psi = (\Psi_{1,1}, \dots, \Psi_{1,N_1}, \dots, \Psi_{L,1}, \dots, \Psi_{L,N_L})^T$$

representa as funções de onda nos guias.

Sejam Φ_1 e Φ_2 dois vetores arbitrários de \mathcal{H} . Então o produto escalar é definido por

$$(\Phi_1, \Phi_2) \equiv \mathbf{u}_1^\dagger \cdot \mathbf{u}_2 + \int_0^\infty dx \Psi_1^\dagger(x) \cdot \Psi_2(x). \quad (2.144)$$

O acoplamento da cavidade com os guias se dá por um termo de interação local V , tal que o Hamiltoniano fica $H = H_0 + V$. A ação de H num vetor arbitrário Φ é definida como

$$H \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_c \mathbf{u} + V \Psi \\ H_L \Psi \end{pmatrix}, \quad (2.145)$$

onde $V \Psi = \tilde{W} \Psi(x=0)$, e \tilde{W} é uma matriz de acoplamento local $N_c \times N_T$, satisfazendo a condição de contorno

$$\tilde{W}^\dagger = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d}{dx} \Psi(x) \right) \Big|_{x=0}, \quad (2.146)$$

para que H seja hermitiano: $(H \Phi_1, \Phi_2) = (\Phi_1, H \Phi_2)$. Uma prova desta condição pode ser encontrada na referência [37].

Seja Φ_E um estado de espalhamento do sistema acoplado com energia $E = \hbar^2 k^2 / 2m$, então da Eq. (2.145), temos

$$H \Phi_E = \begin{pmatrix} H_c \mathbf{u} + \tilde{W} \Psi(0) \\ H_L \Psi \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \Psi \end{pmatrix}. \quad (2.147)$$

Usando a Eq. (2.147), encontramos

$$\mathbf{u} = (E - H_c)^{-1} \tilde{W} \Psi_E(0), \quad (2.148)$$

e

$$\Psi_E(x) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2 K} \right)^{1/2} (e^{-iKx} \mathbf{A} + e^{iKx} \mathbf{B}), \quad (2.149)$$

onde

$$K = \text{diag}(k_{1,1}, \dots, k_{1,N_1}, \dots, k_{L,1}, \dots, k_{L,N_L}).$$

Os vetores de onda $k_{l,n}$ são tais que $\hbar^2 k_{l,n}^2 / (2m) + \epsilon_{l,n} = \hbar^2 k^2 / (2m)$, enquanto

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (a_{1,1}, \dots, a_{1,N_1}, \dots, a_{L,1}, \dots, a_{L,N_L})^T, \\ \mathbf{B} &= (b_{1,1}, \dots, b_{1,N_1}, \dots, b_{L,1}, \dots, b_{L,N_L})^T, \end{aligned}$$

são vetores de amplitudes das ondas que entram e saem da cavidade, respectivamente.

A matriz de espalhamento do sistema é definida pela relação

$$\mathbf{B} = S\mathbf{A}. \quad (2.150)$$

Das Eqs. (2.149) e (2.150), temos

$$\Psi_E(0) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2 K} \right)^{1/2} (1 + S)\mathbf{A} \quad (2.151)$$

e

$$\Psi'_E(0) = -i \left(\frac{mK}{2\pi\hbar^2} \right)^{1/2} (1 - S)\mathbf{A}. \quad (2.152)$$

Usando as Eqs. (2.146) e (2.148), obtemos

$$\Psi'_E(0) = \frac{2m}{\hbar^2} \tilde{W}^\dagger (E - H_c)^{-1} \tilde{W} \Psi_E(0). \quad (2.153)$$

Inserindo (2.151) e (2.152) em (2.153), temos

$$(1 - S)(1 + S)^{-1} = i\pi W^\dagger (E - H_c)^{-1} W, \quad (2.154)$$

onde

$$W \equiv \tilde{W} \left(\frac{2m}{\pi\hbar^2 K} \right)^{1/2}. \quad (2.155)$$

Resolvendo a Eq. (2.154) para S , temos

$$S = \frac{1 - i\pi W^\dagger G_0 W}{1 + i\pi W^\dagger G_0 W}, \quad (2.156)$$

onde $G_0 = (E - H_c)^{-1}$ é a função de Green da cavidade fechada. Esta equação também pode ser escrita na forma

$$S = 1 - 2\pi i W^\dagger G^R W, \quad (2.157)$$

onde G^R é a função de Green retardada definida por

$$G^R = (E - H_c - \Sigma^R)^{-1}, \quad (2.158)$$

na qual

$$\Sigma^R = -i\pi W W^\dagger \quad (2.159)$$

é o termo de auto-energia associado a processos de entrada de partículas na cavidade pelos guias e emissão de partículas da cavidade através dos guias. O acoplamento entre a cavidade e os guias é descrito pela matriz não aleatória $N_c \times N_T$ com a seguinte estrutura

$$W_{\mu,n} = \begin{cases} (W_1)_{\mu,n} & ; \quad n = 1, \dots, N_1 \\ (W_2)_{\mu,n-N_1} & ; \quad n = N_1 + 1, \dots, N_1 + N_2 \\ \vdots & ; \quad \vdots \\ (W_L)_{\mu,n-N_T+N_L} & ; \quad n = N_T - N_L + 1, \dots, N_T \end{cases},$$

onde os elementos das matrizes W_l que não aparecem na decomposição acima são todos nulos. Isto implica que a auto-energia pode ser decomposta na forma

$$\Sigma^R = \sum_{l=1}^L \Sigma_l^R,$$

onde $\Sigma_l^R = -i\pi W_l W_l^\dagger$.

Como temos interesse no problema de dois terminais, vamos mostrar como fica a matriz de espalhamento para o caso $L = 2$. Neste caso, a matriz W tem dimensão $N_c \times (N_1 + N_2)$ e é dada por $W = \tilde{W}_1 + \tilde{W}_2$, onde as matrizes de acoplamento com os guias são definidas por

$$(\tilde{W}_1)_{\mu n} = \begin{cases} (W_1)_{\mu n} & n = 1, 2, \dots, N_1 \\ 0 & n = N_1 + 1, \dots, N_1 + N_2 \end{cases} \quad (2.160)$$

e

$$(\tilde{W}_2)_{\mu n} = \begin{cases} 0 & n = 1, 2, \dots, N_1 \\ (W_2)_{\mu, n-N_1} & n = N_1 + 1, \dots, N_1 + N_2. \end{cases} \quad (2.161)$$

Desenvolvendo a matriz S em termos das matrizes \tilde{W}_1 e \tilde{W}_2 , temos

$$S = 1 - 2i\pi\tilde{W}_1^\dagger D^{-1}\tilde{W}_1 - 2i\pi\tilde{W}_1^\dagger D^{-1}\tilde{W}_2 - 2i\pi\tilde{W}_2^\dagger D^{-1}\tilde{W}_1 - 2i\pi\tilde{W}_2^\dagger D^{-1}\tilde{W}_2, \quad (2.162)$$

onde

$$D = E - H + i\pi(W_1W_1^\dagger + W_2W_2^\dagger). \quad (2.163)$$

Devido à estrutura das matrizes de acoplamento \tilde{W}_1 e \tilde{W}_2 , pode-se concluir que

$$S = \begin{pmatrix} 1 - 2i\pi W_1^\dagger D^{-1}W_1 & -2i\pi W_1^\dagger D^{-1}W_2 \\ -2i\pi W_2^\dagger D^{-1}W_1 & 1 - 2i\pi W_2^\dagger D^{-1}W_2 \end{pmatrix}. \quad (2.164)$$

A equação (2.164) tem a forma de bloco semelhante à equação (2.43). Então podemos identificar

$$r = 1 - 2i\pi W_1^\dagger D^{-1}W_1, \quad (2.165)$$

$$r' = 1 - 2i\pi W_2^\dagger D^{-1}W_2, \quad (2.166)$$

$$t = -2i\pi W_2^\dagger D^{-1}W_1, \quad (2.167)$$

$$t' = -2i\pi W_1^\dagger D^{-1}W_2. \quad (2.168)$$

Uma questão natural é saber em que condições o ensemble da matriz S (2.157) é equivalente ao ensemble circular. Foi mostrado na referência [21] que estes ensembles são equivalentes se o elemento de matriz médio for nulo, i.e. $\langle S_{nm}^{pq} \rangle = 0$, que está relacionado à ausência de processos diretos. A média da matriz S é obtida nas referências [38] e [11] via teoria de campos supersimétrica e é dada por

$$\langle S \rangle = \frac{1 - \pi\lambda^{-1}W^\dagger W}{1 + \pi\lambda^{-1}W^\dagger W}, \quad (2.169)$$

onde λ é um fator relacionado ao espaçamento médio, ver Eq. (2.104). Note que a matriz S terá média nula se exigirmos que as matrizes W_1 e W_2 satisfaçam a condição de ortogonalidade

$$W_p^\dagger W_q = \frac{\lambda}{\pi} \delta_{p,q}. \quad (2.170)$$

Podemos usar a fórmula de Mahaux-Weidenmüller para obter numericamente a matriz de espalhamento e as propriedades de transporte. Usando a relação

$$\frac{2}{N+1} \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{n\pi j}{N+1}\right) \sin\left(\frac{n\pi j'}{N+1}\right) = \delta_{jj'}, \quad (2.171)$$

podemos escolher as matrizes de acoplamento como

$$(W_\alpha)_{j,n} = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi(N_c+1)}} \sin\left(\frac{n\pi j}{N_c+1}\right), \quad (2.172)$$

$j = 1, 2, \dots, N_c$ e $n = 1, 2, \dots, N_\alpha$. Satisfaz-se assim, à condição de ortogonalidade (2.170).

O procedimento numérico consiste em gerar uma matriz aleatória gaussiana $N_c \times N_c$ e, a partir dela e das matrizes de acoplamento, montar a matriz de transmissão (2.167). Uma vez obtida a matriz t , usamos as fórmulas (2.80) e (2.91) para calcular os observáveis. Como exemplo, consideramos Hamiltonianos 100×100 para os casos $\beta = 1$ e $\beta = 2$. Para fazer uma análise estatística, geramos um conjunto de 500 valores para a condutância e a potência do ruído de disparo. As distribuições estão mostrados nas figuras (2.6) e (2.5).

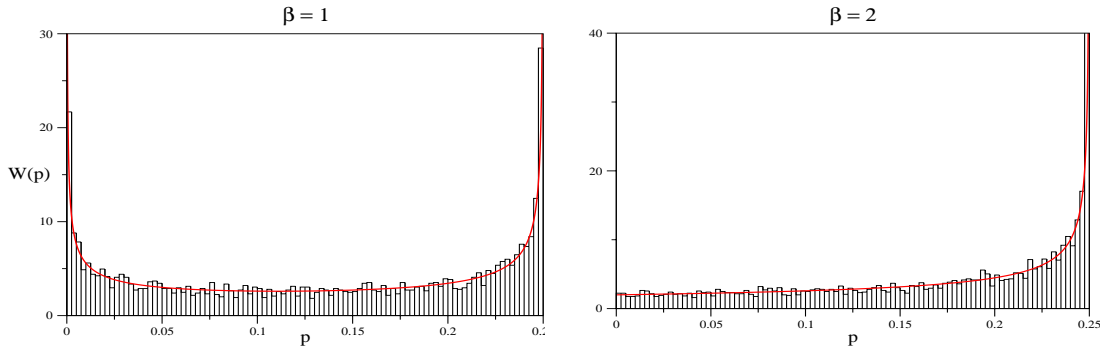


Figura 2.5: Distribuição da potência do ruído de disparo para $N = 1$ nos casos $\beta = 1$ (esquerda) e $\beta = 2$ (direita). O gráfico em vermelho é dado pela expressão (2.131), obtida pelo princípio da máxima entropia.

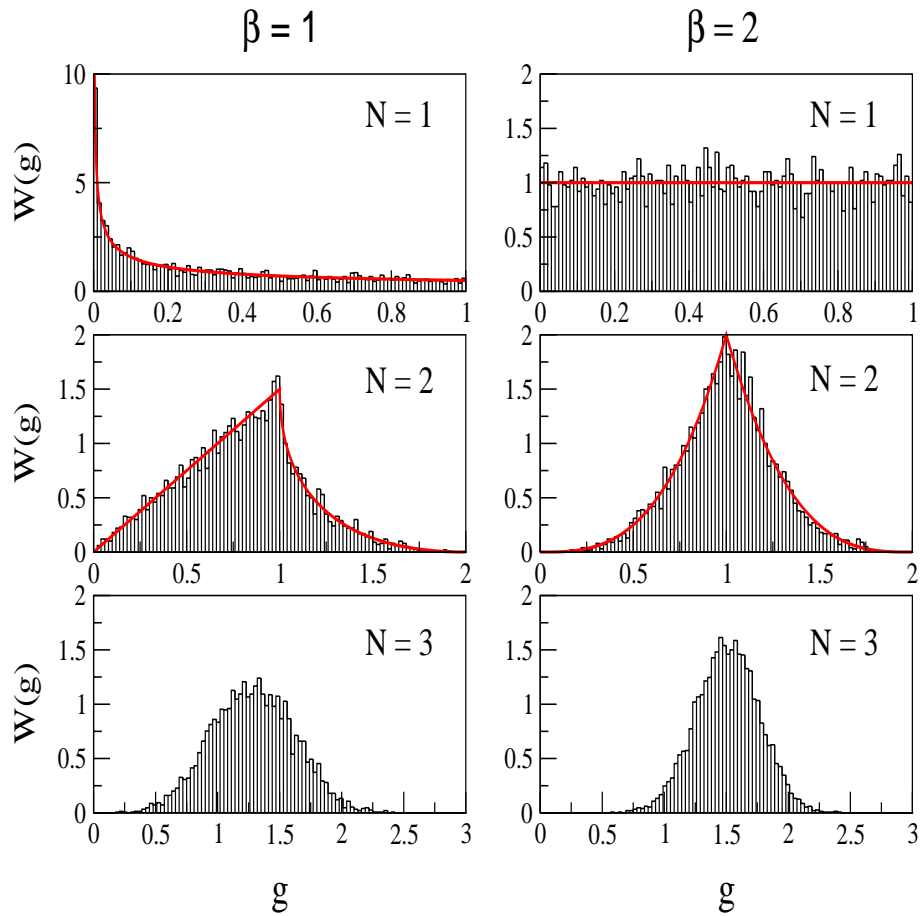


Figura 2.6: Distribuição da condutância para $N = 1, 2$ e 3 nos casos em que $\beta = 1$ (primeira coluna) e $\beta = 2$ (segunda coluna). Os resultados numéricos estão em boa concordância com os resultados obtidos via máxima entropia (linhas vermelhas). Note que a distribuição tende à gaussiana à medida que N cresce.

As distribuições para $N = 1$ e $N = 2$ são muito diferentes, mas, à medida que aumentamos o número de canais, a distribuição tende a uma gaussiana. Nas figuras também mostramos os gráficos das expressões (2.130) - (2.135), obtidas na seção anterior. A concordância destes resultados é uma prova numérica da equivalência entre o formalismo de Mahaux-Weidenmüller e o método da máxima entropia.

2.7 Ensembles de Movimento Browniano

Introduzimos nas seções anteriores os ensembles de Wigner-Dyson da teoria de matrizes aleatórias para o Hamiltoniano \mathcal{H} e a matriz de espalhamento S . Esses ensembles são estacionários no sentido de que suas propriedades de simetria não se alteram. No entanto, muitos sistemas físicos têm suas simetrias quebradas parcialmente ou até totalmente com a aplicação de uma perturbação externa. Por exemplo, um campo magnético fraco não quebra a simetria de reversão temporal completamente. Há uma transição contínua do ensemble ortogonal ou simplético para o ensemble unitário.

Podemos considerar um Hamiltoniano que depende de um parâmetro externo t . Desta forma, em vez de termos um ensemble de matrizes definido por uma densidade de probabilidade, temos uma família contínua de ensembles cujas densidades de probabilidades dependem de t . Um tratamento destes ensembles “fora do equilíbrio” foi feito por Dyson [39]. Ele propôs um movimento Browniano para os autovalores de uma matriz aleatória, mostrando que estes autovalores podem ser vistos como posições das partículas de um gás de Coulomb que realizam um movimento Browniano. A evolução temporal dos autovalores é governada por uma equação de Fokker-Planck. O tempo nesta dinâmica não corresponde ao tempo físico das observações do sistema, porém é fictício e está associado às propriedades do modelo. Como exemplo concreto, citamos o problema de quebra gradual de simetria de reversão temporal em sistemas caóticos fechados que pode ser estudado usando ensembles de movimento Browniano. Neste caso o tempo se relaciona com o incremento de fluxo magnético $\Delta\Phi$ por $t \simeq (e\Delta\Phi/h)^2 E_c / (N\delta)$, onde E_c é a energia de Thouless, δ é o espaçamento médio e N é a dimensão da matriz.

No caso do ponto quântico, vimos que, devido às flutuações, S cobre ergodicamente a sua variedade. Podemos considerar um movimento Browniano no tempo fictício t que descreve a difusão neste espaço. No limite $t \rightarrow \infty$ a distribuição de probabilidade difunde para a solução estacionária que corresponde ao ensemble circular, resultando na distribuição dos autovalores de transmissão (2.123). Este ensemble de movimento Browniano da matriz de espalhamento foi estudado nas referências [40] e [41]. Apesar de ter tido pouco sucesso na descrição de problemas de *crossover* (quebra gradual de simetria) nestes ensembles, o formalismo de movimento Browniano fornece poderosos métodos analíticos para o estudo da solução estacionária. Nesta tese usaremos este formalismo especificamente com este propósito.

2.7.1 Ensembles de movimento Browniano e polinômios ortogonais

Os ensembles gaussianos são intimamente ligados aos polinômios de Hermite [31]. Podemos incluir outros polinômios ortogonais, $p_n(x)$, definindo um ensemble de matrizes cuja distribuição dos autovalores é dada por

$$P(\{x\}) = \prod_{i<j} |x_i - x_j|^\beta \prod_{i=1} \omega(x_i), \quad (2.173)$$

onde $\omega(x)$ é definida como a função peso destes polinômios. No caso dos polinômios de Hermite, temos $\omega(x) = e^{-x^2/2}$, o que caracteriza o ensemble gaussiano.

Os polinômios $p_n(x)$ formam um conjunto completo e ortogonal no intervalo $[a, b]$ com respeito à função peso $\omega(x)$

$$\int_a^b dx \omega(x) p_n(x) p_m(x) = \delta_{n,m}, \quad (2.174)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) p_n(x') = \frac{\delta(x - x')}{\omega(x)}, \quad (2.175)$$

e satisfazem à equação diferencial [42]

$$\frac{1}{\omega(x)} \frac{d}{dx} \left[s(x) \omega(x) \frac{d}{dx} \right] p_n(x) = -\lambda_n p_n(x), \quad (2.176)$$

onde

$$\lambda_n = -n \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{\omega(x)} \frac{d}{dx} [\omega(x) s(x)] \right\}, \quad (2.177)$$

$$p_n(x) = \frac{1}{K_n \omega(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\omega(x) s^n(x)]. \quad (2.178)$$

A função $s(x)$ deve ser um polinômio de grau menor ou igual a dois, com raízes reais, e, juntamente com a função peso, deve satisfazer à condição de contorno

$$s(a)\omega(a) = s(b)\omega(b) = 0.$$

Na referência [43] é apresentado um método de solução da equação de Fokker-Planck para ensembles de polinômios ortogonais. O método consiste em mapear a equação de Fokker-Planck na equação de Schrödinger, passando de um movimento

Browniano para um problema quântico de muitos corpos. Sendo $P = P(x_1, \dots, x_N, t)$ a densidade conjunta de probabilidade num tempo t , a equação de Fokker-Planck que descreve sua evolução temporal pode ser escrita como

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(J_\beta \omega_N s(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} (J_\beta \omega_N)^{-1} \right) P, \quad (2.179)$$

onde

$$J_\beta = \prod_{i<j} |x_i - x_j|^\beta \quad \text{e} \quad \omega_N = \prod_i \omega(x_i). \quad (2.180)$$

No caso do ponto quântico, vimos que a distribuição de equilíbrio dos autovalores de transmissão é dada por

$$P_{eq}(\{\tau\}) = \prod_{i<j} |\tau_i - \tau_j|^\beta \prod_i \omega(\tau_i), \quad (2.181)$$

com $\omega(\tau) = \tau^{-1+\beta/2}$. A difusão é então governada pela equação de Fokker-Planck,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \mathcal{L}_{FP} P, \quad (2.182)$$

onde o operador de Fokker-Planck é dado por

$$\mathcal{L}_{FP} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \tau_i} \left(J_\beta \omega_N s(\tau_i) \frac{\partial}{\partial \tau_i} (J_\beta \omega_N)^{-1} \right), \quad (2.183)$$

onde

$$J_\beta = \prod_{i<j} |\tau_i - \tau_j|^\beta, \quad \omega_N = \prod_{i=1}^N \omega(\tau_i) \quad \text{e} \quad s(\tau) = \tau(1 - \tau). \quad (2.184)$$

Seja $F = F(\{\tau\})$ um observável arbitrário. Sua evolução temporal é dada por

$$\langle F \rangle_t = \int d^N \tau F(\{\tau\}) P(\{\tau\}, t). \quad (2.185)$$

Tomando a derivada de $\langle F \rangle_t$ em relação ao tempo, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\{\tau\}, t) = \int d^N \tau P(\{\tau\}, t) \mathcal{L}_{FP}^\dagger F(\{\tau\}), \quad (2.186)$$

onde o operador adjunto formal \mathcal{L}_{FP}^\dagger é definido através da relação

$$\int d^N \tau P_1(\{\tau\}, t) \mathcal{L}_{FP} P_2(\{\tau\}, t) = \int d^N \tau P_2(\{\tau\}, t) \mathcal{L}_{FP}^\dagger P_1(\{\tau\}, t). \quad (2.187)$$

A média do observável $\langle F \rangle$ é definida no ensemble de equilíbrio por

$$\langle F \rangle_{eq} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \langle F \rangle_t. \quad (2.188)$$

O método da equação de Fokker-Planck é de grande utilidade no cálculo de valores médios de observáveis para um número N qualquer de canais abertos e também no regime semi-clássico, onde $N \gg 1$.

Capítulo 3

Sistemas Quirais

3.1 Classes de universalidade

Nos trabalhos pioneiros de Wigner e Dyson, sistemas complexos de muitos corpos como núcleos atômicos foram classificados em termos de suas simetrias fundamentais. Foram estabelecidas três classes de simetria, que se distinguem de acordo com o comportamento do sistema sob reversão temporal e rotação de spin. Vimos no capítulo 2 que as propriedades estatísticas destas classes podem ser descritas por três modelos de matrizes aleatórias: os ensembles gaussianos ortogonal, unitário e simplético. As classes de Wigner-Dyson se aplicam, também, a condutores desordenados convencionais descritos pelo modelo de Anderson. No entanto, existem outros sistemas desordenados nos quais a estatística de níveis não é descrita pelas classes de Wigner-Dyson. Nestes casos, simetrias adicionais tornam-se relevantes e surgem novas classes de universalidade e novos ensembles de matrizes aleatórias.

Zirnbauer [44] e Caselle [45] mostraram que podemos conectar os ensembles da TMA com a teoria dos espaços simétricos de Cartan. Os ensembles são classificados em termos dos mesmos diagramas de Dynkin e redes de raízes usados na classificação das álgebras de Lie destes espaços [46]. Esta relação é útil para a classificação de sistemas físicos complexos em termos dos espaços simétricos de Cartan. A classificação de Cartan é exaustiva, permitindo concluir que existem apenas dez classes de universalidade, divididas em três categorias: (i) Wigner-Dyson (3 classes), apropriada para condutores desordenados usuais, (ii) Bogoliubov-de Gennes (4 classes), que aparecem na descrição de quase partículas em supercondutores desordenados e vários tipos de efeitos de proximidade, e (iii) Quiral (3 classes). Estas

são relevantes em problemas de transporte nos quais a desordem é não diagonal. A subdivisão em cada categoria depende da presença ou ausência de simetria de reversão temporal e rotação de spin. Os espaços simétricos da matriz de transferência \mathcal{M} e do hamiltoniano \mathcal{H} são diferentes, como mostra a tabela (3.1). A tabela também contém a multiplicidade das raízes ordinárias m_o e longas m_l . Note que m_o é equivalente ao parâmetro de simetria de Dyson, β .

Classe	SRT	SRS	\mathcal{M}	\mathcal{H}	m_o	m_l
Wigner-Dyson	sim	sim	CI	AI	1	1
	não	irrelevante	AIII	A	2	1
	sim	não	DIII	AII	4	1
Quiral	sim	sim	AI	BDI	1	0
	não	irrelevante	A	AIII	2	0
	sim	não	AII	CII	4	0
Bogoliubov - de Gennes	sim	sim	C	CI	2	2
	não	sim	CII	C	4	3
	sim	não	D	DIII	2	0
	não	não	BDI	D	1	0

Tabela 3.1: Classificação das classes de simetria de acordo com a tabela de Cartan. As classes de simetrias são definidas em termos da presença ou ausência de simetria de reversão temporal (*SRT*), simetria de rotação de spin (*SRS*) e outras simetrias fundamentais do sistema.

3.2 Simetria de Sub-rede

Desde a introdução da teoria de escala para o problema de localização de Anderson [47], sabe-se que as propriedades de transporte em metais desordenados são universais, desde que a desordem seja suficientemente fraca, as temperaturas baixas e a coerência quântica seja mantida por distâncias grandes. O modelo de Anderson consiste em uma rede com potencial aleatório nos sítios (desordem diagonal) e amplitudes de *hopping* não aleatórias. É neste contexto que surgem as classes de Wigner-Dyson. O problema da localização eletrônica pode ser generalizado para redes com amplitudes de *hopping* aleatórias (desordem não diagonal) [48]. O problema de localização com desordem não diagonal não recebeu muita atenção, embora se soubesse desde o trabalho de Dyson [49] que sistemas com apenas desor-

dem não diagonal têm comportamento dramaticamente diferente de sistemas com desordem puramente diagonal. O interesse em problemas com desordem não diagonal ressurgiu na década de 90 com a descoberta de novas classes de universalidade (classes quirais) e aplicações em uma série de problemas como semicondutores de *gap* pequeno, hamiltonianos da cromodinâmica quântica, cadeias de spin *XY* aleatórias, mecânica quântica supersimétrica, mecânica quântica não hermitiana e teorias de calibre em supercondutores de altas temperaturas críticas.

Como exemplo de sistema com desordem não diagonal, considere um modelo *tight-binding* unidimensional com *hopping* aleatório entre primeiros vizinhos, descrito pelo hamiltoniano

$$\mathcal{H} = - \sum_n (t_n c_n^\dagger c_{n+1} + t_n^* c_{n+1}^\dagger c_n), \quad (3.1)$$

onde c_n^\dagger e c_n são operadores de criação e aniquilação de elétrons no sítio n e o parâmetro de *hopping* $t_n = t + \delta t_n$ consiste de uma parte não aleatória t e uma aleatória δt_n . O centro da banda, $\varepsilon = 0$, é um ponto especial onde a densidade de estados diverge logaritmicamente [49]. A condutância em $\varepsilon = 0$ exibe grandes flutuações em torno do valor médio e decai algebricamente. Em contraste, para energias não nulas, o sistema descrito pela Eq. (3.1) possui o comportamento de localização usual: uma amostra típica possui condutância caracterizada por $\langle \log g \rangle$, que é proporcional ao comprimento L da amostra.

As discussões acima se restringem a sistemas estritamente unidimensionais. Podemos considerar um problema de *hopping* de uma partícula quântica na rede bidimensional de comprimento L e largura L_t , mostrada na figura (3.1). O hamiltoniano para este problema é

$$\mathcal{H} = - \sum_{i,j} t_{ij} c_i^\dagger c_j, \quad (3.2)$$

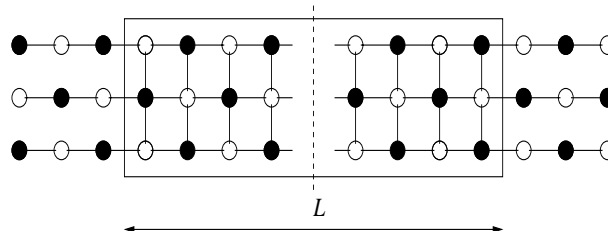


Figura 3.1: Modelo de *hopping* aleatório

onde i e j representam os sítios da rede e os elementos de matriz de *hopping* t_{ij} são não nulos apenas para primeiros vizinhos. A equação (3.2) com t_{ij} aleatório é conhecida na literatura com *modelo de hopping aleatório*. O caso especial onde apenas a fase da amplitude de *hopping* $t_{ij} = e^{i\phi_{ij}}$ é aleatória, é conhecido como *problema do fluxo aleatório*, e se aplica a uma rede submetida a um campo magnético aleatório perpendicular, figura (3.2). Num salto de um sítio para outro o elétron adquire uma fase dependente do campo que se torna completamente aleatória para campos intensos.

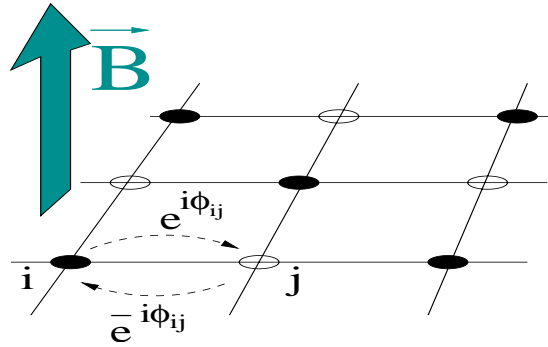


Figura 3.2: Problema do fluxo aleatório

Estes problemas possuem uma simetria discreta que influencia drasticamente as propriedades físicas do modelo. A natureza da simetria pode ser entendida observando-se a figura (3.1). O ponto essencial é que o *hopping* é entre primeiros vizinhos, então podemos dividir a rede em duas sub-redes A e B tais que a matriz de *hopping* t_{ij} conecte sítios das duas sub-redes mas não da mesma sub-rede. Na figura (3.1) as sub-redes A e B correspondem a sítios pretos e brancos, respectivamente. Após um ordenamento conveniente dos vetores da base, o hamiltoniano tem representação matricial puramente não diagonal

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & t_{AB} \\ t_{AB}^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

A existência de blocos apenas fora da diagonal no hamiltoniano pode ser indicada pela condição

$$\Sigma_z \mathcal{H} \Sigma_z = -\mathcal{H}, \quad (3.4)$$

onde $\Sigma_z = \begin{pmatrix} 1_{N_B} & 0 \\ 0 & 1_{N_A} \end{pmatrix}$ é uma generalização da matriz σ_z de Pauli. Seguindo a nomenclatura adotada em *QCD*, simetrias de sub-rede da forma (3.4) são chamadas de simetrias quirais.

O problema de autovalor $\mathcal{H}|\psi\rangle = \varepsilon|\psi\rangle$ pode ser escrito nesta base como

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t_{AB} \\ t_{AB}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

onde ψ_A e ψ_B denotam as funções de onda nos sítios das sub-redes A e B , respectivamente. Sendo N_A e N_B o número de sítios nas sub-redes A e B , e supondo, sem perda de generalidade, que $N_A > N_B$, vale o seguinte teorema para as funções de onda de energia zero [50]

Teorema 3.1 *Em qualquer rede bipartida com desordem apenas não diagonal, há $N_A - N_B$ autofunções linearmente independentes com autovalor $\varepsilon = 0$. Além disso, todas as amplitudes ψ_j da função de onda são nulas nos sítios da sub-rede B .*

O teorema implica termos $|N_A - N_B|$ modos zero (autovalores de energia nula) com suporte na sub-rede A . Os autovalores não nulos da matriz (3.3) ocorrem em pares simétricos $\pm\varepsilon$. As propriedades físicas de sistemas com simetria quiral são não triviais quando a energia está no centro da banda ($\varepsilon = 0$). Mas, à medida que nos afastamos da origem, o efeito da simetria de sub-rede no espectro e nas funções de onda diminui e ocorre um *crossover* para o comportamento usual. Isso se deve ao fato de que, embora o hamiltoniano (3.3) seja sempre quiral para qualquer energia, as propriedades termodinâmicas e de transporte dos sistemas dependem da função de Green $G^\pm(\varepsilon) = (\varepsilon \pm i\eta - \mathcal{H})^{-1}$, $\eta \rightarrow 0^+$ e não do hamiltoniano propriamente dito. Usando (3.4) e $\Sigma_z^2 = 1$, temos

$$G^\pm(\varepsilon) = -\Sigma_z G^\mp(-\varepsilon) \Sigma_z, \quad (3.6)$$

o que explica a perda da simetria para $\varepsilon \neq 0$. A simetria quiral é quebrada pela presença de desordem no sítio, *hopping* entre vizinhos distantes ou (em alguns casos) condições de contorno periódicas [51].

Sistemas desordenados unidimensionais com simetria quiral foram estudados por vários métodos e em diferentes contextos, e suas propriedades de localização são bem entendidas. No caso bidimensional a situação é diferente, os tratamentos analítico e numérico são bastante complicados e os resultados não estão bem estabelecidos. Tendo em vista este problema, é natural estudar o caso intermediário entre uma e duas dimensões, os fios quânticos “quase unidimensionais”, onde $L \gg L_t$.

Tais sistemas apresentam regimes localizado e difusivo do transporte quântico com um tratamento analítico controlável. O trabalho analítico tem seguido duas linhas: modelo σ não linear supersimétrico e a teoria de matrizes aleatórias. Os resultados mais interessantes obtidos nestes trabalhos são a dependência do comprimento de localização com a paridade do número de canais abertos [52] e o comportamento anômalo da densidade de estados no centro da banda [53]. Podemos resumir estes resultados da seguinte maneira

1. Para N par a condutância decai exponencialmente na escala do comprimento de localização ξ , a densidade de estados diverge com $\rho(\varepsilon) \propto |\ln(\varepsilon)|$ na presença de simetria de reversão temporal ($\beta = 1$) e quando esta simetria é quebrada ($\beta = 2$), $\rho(\varepsilon) \propto |\varepsilon \ln(\varepsilon)|$.
2. Para N ímpar, o fio em $\varepsilon = 0$ é metálico, a condutância decai algebricamente com o comprimento e a densidade de estados diverge de acordo com $\rho(\varepsilon) \propto 1/|\varepsilon \ln^3(\varepsilon)|$.

Um efeito similar, mas relacionado ao número total de sítios, influencia as propriedades espectrais e de transporte de um ponto quântico quiral, isto é, o limite zero dimensional de um fio quântico com simetria de sub-rede [54]. Outro efeito interessante é que a condutância depende de como é feito o acoplamento com os guias, ou seja, o número e o tipo dos sítios envolvidos no acoplamento [55]. Se o acoplamento da direita é feito apenas com sítios da sub-rede A e o da esquerda com sítios da sub-rede B , a corrente é nula. A condição para a existência de corrente é que o acoplamento seja compartilhado por sítios de sub-redes diferentes.

3.3 Modelo microscópico

Nesta seção, apresentamos um modelo microscópico simples que descreve o *hopping* aleatório de uma partícula entre as sub-redes de uma rede bipartida. O modelo consiste de uma rede formada por N cadeias acopladas na região desordenada e desacopladas nos guias ideais, ver figura (3.3). O hamiltoniano que descreve o salto de um elétron de uma sub-rede para outra é dado por

$$\mathcal{H} = \sum_n \sum_{i,j} (t_{n,ji} c_{n,j}^\dagger c_{n+1,i} + t_{n,ji}^* c_{n+1,i}^\dagger c_{n,j}), \quad (3.7)$$

onde i, j são índices para as N cadeias e n rotula os sítios da sub-rede A , se n é par, e sub-rede B , se n é ímpar. A equação (3.7) está na linguagem da segunda

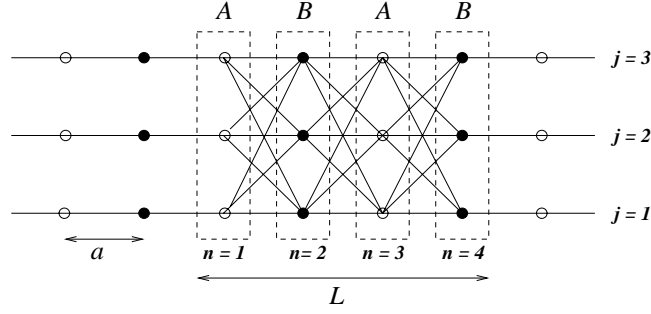


Figura 3.3: Modelo de *hopping* aleatório descrito pela Eq. (3.7), para $N = 3$. A região desordenada tem comprimento $L = 4a$. As diferentes cadeias são acopladas na região desordenada e desacopladas nos guias ideais.

quantização, em termos dos operadores fermiônicos de criação c_{ij}^\dagger e aniquilação c_{ij} . Estes operadores satisfazem a relação de anti-comutação

$$\{c_{ij}, c_{lk}^\dagger\} = \delta_{il}\delta_{jk}, \quad \{c_{ij}^\dagger, c_{lk}^\dagger\} = 0 = \{c_{ij}, c_{lk}\}. \quad (3.8)$$

Vamos obter uma equação para a função de onda nos sítios a partir da Eq.(3.7). Inicialmente escrevemos a equação de Schrödinger

$$\mathcal{H}|\psi\rangle = \varepsilon|\psi\rangle. \quad (3.9)$$

Os auto-estados podem ser expandidos como

$$|\psi\rangle = \sum_{rs} \psi_{rs} c_{rs}^\dagger |0\rangle, \quad (3.10)$$

onde ψ_{rs} é a função de onda no sítio (r, s) e $|0\rangle$ é o estado de vácuo. Substituindo (3.7) e (3.10) em (3.9), e usando

$$c_{ik} |0\rangle = 0, \quad (3.11)$$

$$c_{ik} c_{lm}^\dagger = \delta_{il}\delta_{km} - c_{lm}^\dagger c_{ik}, \quad (3.12)$$

temos

$$-\varepsilon\psi_{n,j} = \sum_{i=1}^N (t_{n,ji}\psi_{n+1,i} + t_{n-1,ij}^*\psi_{n-1,i}) ; \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.13)$$

Estas equações podem ser escritas numa forma matricial

$$-\varepsilon\Psi_n = T_n\Psi_{n+1} + T_{n-1}^\dagger\Psi_{n-1}, \quad (3.14)$$

onde Ψ_n é um vetor coluna contendo as funções de onda da sub-rede indexada por n e T_n é uma matriz de *hopping* $N \times N$. Para partículas de spin-1/2, Ψ_n é composta de N spinores e a matriz de *hopping* $N \times N$ consiste de quatérnions. Note que o *hopping* de primeiros vizinhos é um caso particular da Eq. (3.7). Nos guias, as cadeias são independentes $t_{n,ij} = t\delta_{i,j}$, a matriz de *hopping* fica $T_n = t1_n$ e as equações (3.13) ficam desacopladas, restando uma equação do tipo

$$-\varepsilon\psi_n = t(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}), \quad (3.15)$$

para cada cadeia. Esta equação tem solução tipo onda plana $\psi \propto e^{inka}$ e relação de dispersão

$$\varepsilon_k = -2t \cos(ka). \quad (3.16)$$

3.4 Simetria quiral

A equação de Schrödinger (3.14) possui uma simetria adicional: a energia muda de sinal $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$ numa transformação em que a função de onda muda de sinal apenas numa sub-rede $\Psi_n \rightarrow (-1)^n\Psi_n$. Conseqüentemente, para qualquer realização da desordem, o espectro de autovalores de energia é simétrico em relação ao centro da banda $\varepsilon = 0$. Esta é a simetria quiral, que se origina devido ao fato da desordem preservar a estrutura bipartida da rede.

Nos guias da direita e esquerda, a equação de Schrödinger (3.14) na energia ε é resolvida pela superposição de ondas planas entrando e saindo da região desordenada

$$\Psi_n^1(\varepsilon) = \mathbf{a}_\varepsilon^1 e^{-ikna} + \mathbf{b}_\varepsilon^1 e^{ikna}, \quad (3.17)$$

$$\Psi_n^2(\varepsilon) = \mathbf{a}_\varepsilon^2 e^{-ikna} + \mathbf{b}_\varepsilon^2 e^{ikna}. \quad (3.18)$$

Aqui $0 \leq k \leq \pi/a$, $\varepsilon = -2t \cos(ka)$ e \mathbf{a}^i e \mathbf{b}^i ($i = 1, 2$) são vetores coluna contendo as amplitudes das ondas que entram e saem da região de espalhamento. Por definição, estas amplitudes se relacionam através da matriz de espalhamento

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_\varepsilon^1 \\ \mathbf{b}_\varepsilon^2 \end{pmatrix} = S(\varepsilon) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_\varepsilon^1 \\ \mathbf{a}_\varepsilon^2 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

3.4.1 Matriz de espalhamento

As simetrias estudadas no capítulo 2 continuam válidas. A conservação de fluxo implica

$$S^\dagger(\varepsilon)S(\varepsilon) = 1. \quad (3.20)$$

Para os casos $\beta = 1$ e 4 , ou seja, quando a simetria de reversão temporal está presente temos ainda

$$S^*(\varepsilon)S(\varepsilon) = 1, \quad (3.21)$$

onde o símbolo $*$ denota conjugação complexa usual para $\beta = 1$ e conjugação complexa quaterniônica para $\beta = 4$. A simetria quiral implica um vínculo extra na matriz de espalhamento. Para achar o efeito desta simetria na matriz S , notamos que a transformação $\Psi_n \rightarrow (-1)^n \Psi_n$ troca ondas incidentes com energia ε por ondas saindo da região desordenada com energia $-\varepsilon$ e vice-versa. Para visualizar esta troca de sentido de propagação, devemos notar que a mudança no sinal da energia acarreta uma translação de π/a na rede recíproca [56], ou seja,

$$\varepsilon \rightarrow -\varepsilon \implies k \rightarrow k + \frac{\pi}{a}. \quad (3.22)$$

O intervalo relevante de k é a primeira zona de Brillouin, $k \in [-\pi/a, \pi/a]$. Da equação (3.22) vemos que um k negativo é levado num k positivo e um k positivo é levado na segunda zona e então é rebatido da faixa negativa da primeira zona. Se as propriedades de espalhamento não mudam com essa troca de sentido, a matriz que conecta os estados de espalhamento é a mesma, ou seja,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{-\varepsilon}^1 \\ \mathbf{a}_{-\varepsilon}^2 \end{pmatrix} = S(\varepsilon) \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{-\varepsilon}^1 \\ \mathbf{b}_{-\varepsilon}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Usando a Eq. (3.19) com energia $-\varepsilon$, temos

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_{-\varepsilon}^1 \\ \mathbf{b}_{-\varepsilon}^2 \end{pmatrix} = S(-\varepsilon) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{-\varepsilon}^1 \\ \mathbf{a}_{-\varepsilon}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Substituindo (3.24) em (3.23), temos

$$S(\varepsilon)S(-\varepsilon) = 1, \quad (3.25)$$

combinando (3.25) com a condição unitariedade (3.20), temos

$$S(\varepsilon) = S^\dagger(-\varepsilon). \quad (3.26)$$

Diferente dos outros vínculos, a Eq. (3.26) envolve matrizes com diferentes energias, exceto no centro da banda $\varepsilon = 0$, onde a matriz S fica Hermitiana

$$S = S^\dagger. \quad (3.27)$$

3.4.2 Matriz de transferência

Como vimos no capítulo 2, um tratamento equivalente do problema de espalhamento é obtido através da matriz de transferência, definida por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_\varepsilon^1 \\ \mathbf{b}_\varepsilon^1 \end{pmatrix} = M(\varepsilon) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_\varepsilon^2 \\ \mathbf{b}_\varepsilon^2 \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

A simetria quiral implica o vínculo [51]

$$\Sigma_x M(\varepsilon) \Sigma_x = M(-\varepsilon). \quad (3.29)$$

No apêndice B mostramos que qualquer matriz de transferência no caso quiral ($\varepsilon = 0$) pode ser escrita como

$$M = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\lambda} & \sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} & \sqrt{1+\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

onde u e v são matrizes $N \times N$ ortogonais ($\beta = 1$), unitárias ($\beta = 2$) ou quatérnions reais unitárias ($\beta = 4$) e λ é uma matriz diagonal os N autovalores positivos da matriz

$$Q = \frac{1}{4}[M^\dagger M + (M^\dagger M)^{-1} - 2]. \quad (3.31)$$

Podemos obter a matriz de espalhamento a partir da matriz de transferência [23]. Usando as definições (3.19) e (3.28), obtemos

$$S = \begin{pmatrix} -v^{-1}Xv & v^{-1}Y u^{-1} \\ uYv & uX u^{-1} \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

onde $X = \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^{1/2}$ e $Y = \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^{1/2}$. Os autovalores λ_i se relacionam com os autovalores de transmissão por $\lambda_i \equiv (1 - \tau_i)/\tau_i$. A matriz de espalhamento fica

$$S = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-\tau} & \sqrt{\tau} \\ \sqrt{\tau} & \sqrt{1-\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{-1} & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Note que esta é a representação polar do caso Wigner-Dyson, Eq. (2.114), com $v_1 = v$, $v_2 = u$ e o vínculo extra $v_3 = v_1^{-1}$ e $v_4 = v_2^{-1}$.

3.5 Princípio de máxima entropia

Uma vez implementado o vínculo extra da simetria quiral nas matrizes de transferência e espalhamento, podemos determinar como a simetria atua nas propriedades dos observáveis de transporte. O sistema que vamos estudar consiste de um ponto quântico com simetria de sub-rede acoplado a reservatórios de elétrons por dois guias ideais. Para estudarmos os efeitos da simetria quiral, em $\varepsilon = 0$, assumimos a existência de uma densidade finita de autoestados de energia nula responsáveis pelo transporte no ponto quiral. Nos guias a propagação é genérica, sem necessidade de simetria de sub-rede. O acoplamento do ponto com os guias é ideal e a conexão envolve sítios das duas sub-redes, garantindo a existência de corrente [55].

A matriz S no ponto quiral deve satisfazer as relações

$$S^* S = 1 \quad \text{e} \quad S^2 = 1, \quad (3.34)$$

onde a segunda equação é a combinação da conservação de fluxo com a simetria quiral. A representação polar (3.33) da matriz S pode ser escrita como

$$S = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos 2\Phi & \text{sen} 2\Phi \\ \text{sen} 2\Phi & \cos 2\Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & v^{-1} \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

onde Φ é uma matriz diagonal com N autovalores $0 \leq \phi_i \leq \pi/2$, que se relacionam com os autovalores de transmissão por $\tau_i = \text{sen}^2(2\phi_i)$, $i = 1, \dots, N$.

Como mencionamos no capítulo 2, estamos interessados num ensemble de sistemas, que será representado por um ensemble de matrizes S . Para definir uma probabilidade $\mathcal{P}(S)$, precisamos introduzir a medida invariante para o espaço das matrizes. O cálculo da medida encontra-se no apêndice C, onde mostramos que

$$d\mu(S) \propto \prod_{i < j} \prod_{\sigma = \pm} |\text{sen}(\phi_i + \sigma \phi_j)|^\beta \prod_{i=1}^N \text{sen}^\alpha(2\phi_i) \prod_{i=1}^N d\phi_i d\mu(u) d\mu(v). \quad (3.36)$$

Onde β é o parâmetro de simetria e $\alpha = \beta - 1$. Estes expoentes, bem como a dependência das coordenadas radiais, estão intrinsecamente ligados à estrutura do espaço simétrico da matriz de espalhamento quiral. Ver tabela (3.5).

Na seção (3.1) vimos que um esquema baseado no conceito de espaços simétricos da teoria de grupos de Lie tem sido usado na classificação dos ensembles de matrizes aleatórias. Esta classificação é exaustiva para os casos do hamiltoniano, matriz de transferência e ensembles circulares, mas, como apontado por Caselle [45], não se

aplica aos ensembles de matrizes S de um sistema de dois terminais obtidos nas referências [33] e [34], exceto no caso de simetria de reversão temporal quebrada. No entanto, as classes de universalidade do problema equivalente no caso quirral podem ser classificadas do acordo com a teoria de Cartan de espaços simétricos, como mostra a tabela abaixo.

ES	G	H	\mathcal{R}	α	β	SRS	SRT
BDI	$SO(2N)$	$SO(N) \otimes SO(N)$	D_N	0	1	sim	sim
AIII	$U(2N)$	$U(N) \otimes U(N)$	C_N	1	2	irrelevante	não
CII	$Sp(2N)$	$Sp(N) \otimes Sp(N)$	C_N	3	4	não	sim

Tabela 3.2: Classes de universalidade para um ponto quântico com simetria quirral. A tabela lista os espaços simétricos (ES) na notação de Cartan, definidos por G/H , onde G é o grupo de simetria e H é o subgrupo maximal, a rede de raízes \mathcal{R} , as multiplicidades α e β das raízes e indica a presença ou ausência das simetrias de reversão temporal (SRT) e rotação de spin (SRS).

Uma vez determinada a medida invariante, a distribuição de autovalores de transmissão é encontrada através do princípio de máxima entropia. Com o procedimento análogo ao usado na seção (2.5.2), encontramos

$$P(\{\phi\}) = C_N \prod_{i < j} \prod_{\sigma = \pm} |\text{sen}(\phi_i + \sigma \phi_j)|^\beta \prod_{i=1}^N \text{sen}^\alpha(2\phi_i). \quad (3.37)$$

A Eq. (3.37) é o resultado central deste trabalho, pois, além das conexões com o conceito de espaços simétricos da teoria de grupos de Lie, é através dela que calculamos as propriedades de transporte de interesse.

A grande virtude do princípio de máxima entropia é que ele não leva em consideração os detalhes microscópicos do modelo, por exemplo, quantos sítios são usados para definir o acoplamento da cavidade com os guias. O importante é a existência do acoplamento e o fato de o mesmo usar sítios de sub-redes diferentes, garantindo a presença de corrente.

Capítulo 4

Propriedades de Transporte em Pontos Quirais

Neste capítulo usamos a densidade conjunta de probabilidade (3.37) para o cálculo de observáveis de transporte em pontos quânticos com simetria quiral. O capítulo está dividido da seguinte maneira: na seção 4.1 consideramos o caso particular de apenas um modo propagante. Neste caso obtemos analiticamente expressões para as médias e distribuições da condutância e potência de ruído de disparo. Na seção 4.2 obtemos resultados exatos usando a teoria de polinômios ortogonais. Para sistemas com simetria de reversão temporal quebrada, $\beta = 2$, encontramos o ensemble de Legendre e calculamos a condutância e a potência do ruído de disparo para um número arbitrário N de canais abertos. Na seção 4.3 apresentamos um ensemble de movimento Browniano e calculamos o valor médio da condutância dependente do número de canais abertos e do parâmetro de simetria, β . Na seqüência derivamos fórmulas semi-clássicas para a média, seção 4.4, e variância, seção 4.5, de uma estatística linear arbitrária. Uma comparação entre os resultados obtidos com os do ponto quântico de Wigner-Dyson é fornecida na seção 4.6.

4.1 Sistema com um modo propagante

Como nos pontos quânticos usuais, também podemos obter resultados exatos para o caso de apenas um modo propagante. Para $N = 1$, a distribuição (3.37) fica

$$P(\phi) = 2 \frac{\Gamma(\beta/2 + 1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\beta/2)} \sin^{\beta-1}(2\phi). \quad (4.1)$$

Em termos da variável ϕ , a condutância e a potência do ruído de disparo são dados por

$$g = \sin^2(2\phi), \quad (4.2)$$

$$p = \sin^2(2\phi) \cos^2(2\phi). \quad (4.3)$$

As médias destes observáveis resultam em

$$\langle g \rangle = 2 \int_0^{\pi/2} P(\phi) \sin^2(2\phi) d\phi = \frac{\beta}{\beta + 1}, \quad (4.4)$$

$$\langle p \rangle = 2 \int_0^{\pi/2} P(\phi) \sin^2(2\phi) \cos^2(2\phi) d\phi = \frac{\beta}{(\beta + 1)(\beta + 3)}. \quad (4.5)$$

As distribuições são dadas por

$$P(g) = 2 \int_0^{\pi/2} \delta(g - \sin^2(2\phi)) P(\phi) d\phi, \quad (4.6)$$

$$W(p) = 2 \int_0^{\pi/2} \delta(p - \sin^2(2\phi) \cos^2(2\phi)) P(\phi) d\phi. \quad (4.7)$$

No caso da condutância temos uma distribuição beta

$$P(g) = \frac{\Gamma(\beta/2 + 1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\beta/2)} \frac{g^{\beta/2-1}}{\sqrt{1-g}}, \quad (4.8)$$

bastante diferente da lei de potência $P(g) = (\beta/2)g^{\beta/2-1}$ encontrada para as classes de Wigner-Dyson [34]. Para a potência do ruído de disparo, temos

$$W(p) = \frac{\Gamma(\beta/2 + 1/2)}{\Gamma(\beta/2) \sqrt{(1-4p)\pi}} \sum_{\sigma=\pm} \frac{\lambda_{\sigma}^{\beta/2-1}}{\sqrt{1-\lambda_{\sigma}}}, \quad (4.9)$$

onde

$$\lambda_{\sigma} \equiv \frac{1 + \sigma \sqrt{1-4p}}{2}. \quad (4.10)$$

Mostramos na figura (4.1) os gráficos destas distribuições para todos os valores de β . Também comparamos estes resultados com os das classes de Wigner-Dyson, apresentados no capítulo 2.

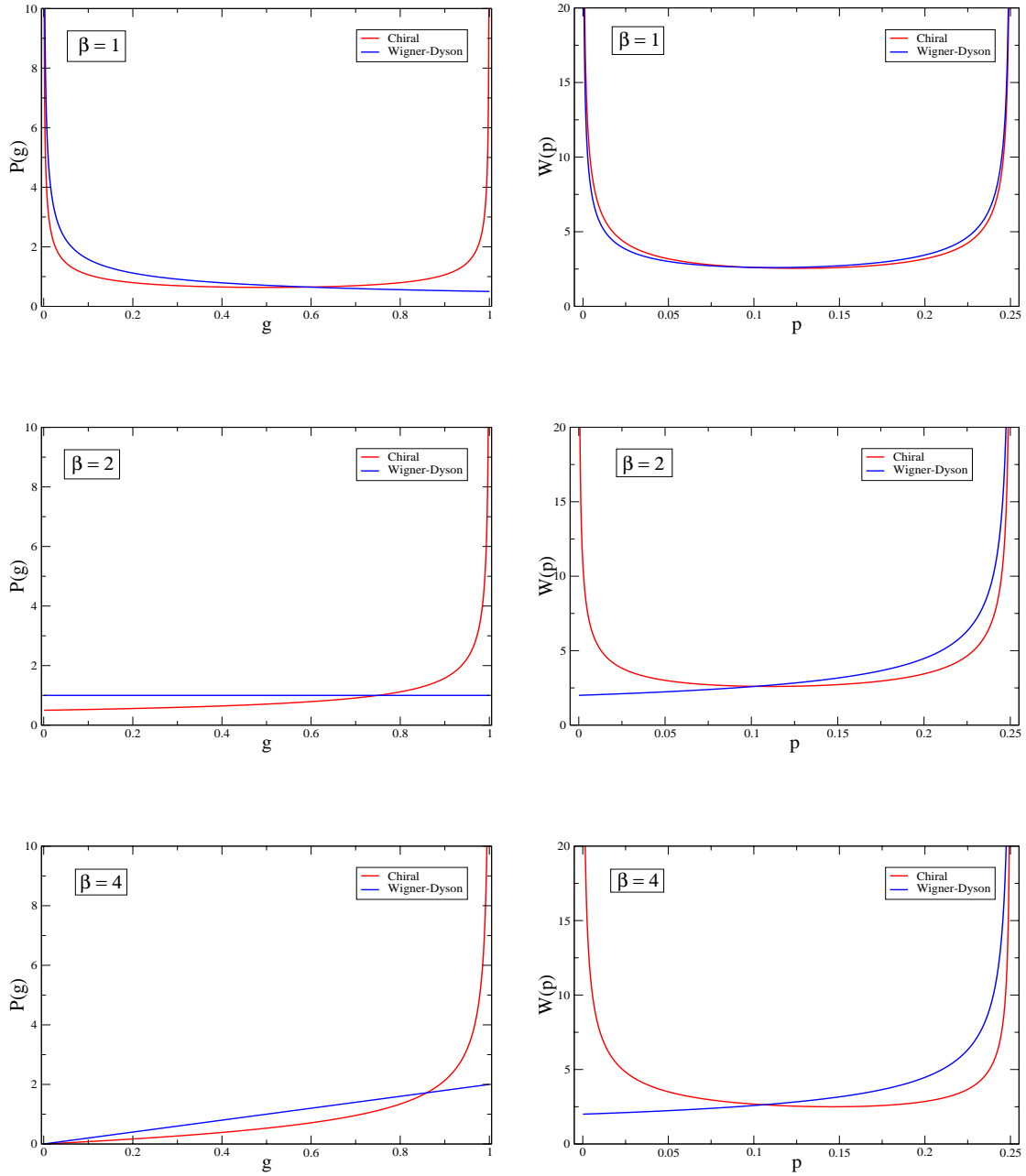


Figura 4.1: Distribuição da condutância (coluna da esquerda) e da potência do ruído de disparo (coluna da direita) para o caso $N = 1$ e $\beta = 1, 2$ e 4 . Os resultados para pontos quânticos com simetria quiral são mostrados em vermelho e os dos pontos de Wigner-Dyson, em azul.

Observe que a presença da simetria quiral modifica substancialmente as distribuições. O regime de pequeno número de canais propagantes é denominado limite quântico extremo e é realizado quando o ponto quântico é acoplado aos reservatórios de elétrons por contatos pontuais com uma condutância quantizada $2e^2/h$. Este regime é experimentalmente acessível e distribuições claramente não gaussianas são obtidas para os pontos convencionais [57].

4.2 Número arbitrário de modos propagantes

Nesta seção vamos usar o método dos polinômios ortogonais para o cálculo dos observáveis de transporte. Para isso vamos considerar a mudança de variáveis

$$x_i = \cos(2\phi_i), \quad (4.11)$$

como $0 \leq \phi_i \leq \pi/2$ temos $-1 \leq x_i \leq 1$. Em termos das novas variáveis, a distribuição de probabilidade (3.37) fica

$$P_{eq}(\{x\}) = \tilde{C}_N \prod_{i < j} |x_i - x_j|^\beta \prod_i^N w(x_i), \quad (4.12)$$

onde $(1 - x_i^2)^{\beta/2-1}$, $-1 \leq x_i \leq 1$. O subscrito *eq* denota equilíbrio, antecipando o fato da equação de Fokker-Planck (4.51) relaxar para esta distribuição num tempo longo. A expressão (4.12) é conhecida da teoria de matrizes aleatórias como ensemble de Jacobi [31] e muitos resultados úteis encontram-se na literatura. Em particular, fórmulas explícitas para a função de correlação de *n*-pontos, definida por

$$R_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{N!}{(N-n)!} \int_{-1}^1 dx_{n+1} \dots \int_{-1}^1 dx_N P(\{x\}), \quad (4.13)$$

foram derivadas na referência [58], em termos de polinômios anti-ortogonais. Para sistemas com simetria de reversão temporal quebrada (classe AIII), a distribuição de probabilidade fica

$$P_{eq}(\{x\}) = \tilde{C}_N \prod_{i < j} |x_i - x_j|^2. \quad (4.14)$$

Neste caso a função peso é $w(x) = 1$, o que caracteriza o ensemble de Legendre. Notando que o produto das diferenças que aparece na equação (4.14) pode ser visto como o quadrado de um determinante de Vandermonde e realizando operações

convenientes nas linhas desta matriz, podemos mostrar que

$$P(\{x\}) = \frac{1}{N!} \det(K_N(x_i, x_j))_{i,j=1,2,\dots,N}, \quad (4.15)$$

onde

$$K_N(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} (n + 1/2) P_n(x) P_n(y), \quad (4.16)$$

e $P_n(x)$ são os polinômios de Legendre. Este procedimento é usual nos ensembles de polinômios ortogonais da teoria de matrizes aleatórias [31], [59]. A função de correlação de n -pontos fica

$$R_n(x_1, \dots, x_n) = \det(K_N(x_i, x_j))_{i,j=1,2,\dots,n}. \quad (4.17)$$

Em particular, a densidade média de autovalores definida por

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^N \langle \delta(x - x_i) \rangle, \quad (4.18)$$

é dada pela função de um ponto

$$\rho(x) = R_1(x) = K_N(x, x) = \sum_{n=0}^{N-1} (n + 1/2) P_n^2(x). \quad (4.19)$$

Em termos das variáveis iniciais, a densidade de autovalores $\sigma(\theta)$ é tal que $\sigma(\theta)d\theta = \rho(x)dx$. Temos então

$$\sigma(\theta) = \sin 2\theta \sum_{n=0}^{N-1} (2n + 1) P_n^2(\cos 2\theta). \quad (4.20)$$

A equação (4.20) pode ser reescrita como

$$\sigma(\theta) = \lim_{\theta' \rightarrow \theta} K(\theta, \theta'), \quad (4.21)$$

onde

$$K(\theta, \theta') = \sqrt{\sin 2\theta \sin 2\theta'} \sum_{n=0}^{N-1} (2n + 1) P_n(\cos 2\theta) P_n(\cos 2\theta'). \quad (4.22)$$

Na seção (4.1) estudamos o limite quântico extremo ($N = 1$). Antes de considerarmos o caso de um número N qualquer de canais propagantes, é interessante estudar o limite oposto, ou seja, o limite em que $N \gg 1$.

4.2.1 Limite semiclássico ($N \gg 1$)

Vamos considerar o limite semiclássico onde $N \gg 1$. Usando a aproximação dos polinômios de Legendre para $n \gg 1$ [60],

$$P_n(\cos \theta) = \left(\frac{2}{\pi n \sin \theta} \right)^{1/2} \cos((n + 1/2)\theta - \pi/4) + \mathcal{O}(n^{-3/2}), \quad 0 < \theta < \pi, \quad (4.23)$$

obtemos

$$K(\theta, \theta') = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \cos \left[(2n + 1)\theta - \frac{\pi}{4} \right] \cos \left[(2n + 1)\theta' - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (4.24)$$

Definindo $n = Nr - 1/2$ e tomando o limite do contínuo, temos

$$K(\theta, \theta') = \frac{2N}{\pi} \int_0^1 dr \cos \left[2Nr\theta - \frac{\pi}{4} \right] \cos \left[2Nr\theta' - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (4.25)$$

Note que

$$\cos \left[2Nr\theta - \frac{\pi}{4} \right] \cos \left[2Nr\theta' - \frac{\pi}{4} \right] = \frac{1}{2} \cos(2Nr(\theta - \theta')) + \frac{1}{2} \sin(2Nr(\theta + \theta')), \quad (4.26)$$

onde o segundo termo oscila muito rápido para $N \gg 1$ e $0 < \theta, \theta' < \pi/2$, não contribuindo, portanto para a integral. Substituindo (4.26) em (4.25) e integrando, obtemos

$$K(\theta, \theta') = \frac{N \sin 2N(\theta - \theta')}{\pi N(\theta - \theta')}. \quad (4.27)$$

A densidade fica

$$\sigma(\theta) = \lim_{\theta' \rightarrow \theta} K(\theta, \theta') = \frac{2N}{\pi}. \quad (4.28)$$

Usando a densidade (4.28), podemos calcular o limite semiclássico da condutância e potência do ruído de disparo

$$\langle g \rangle = \sum_{i=1}^N \langle \sin^2 \theta_i \rangle = \int_0^{\pi/2} \sin^2(\theta) \sigma(\theta) d\theta = \frac{N}{2}, \quad (4.29)$$

$$\langle p \rangle = \sum_{i=1}^N \langle \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i \rangle = \int_0^{\pi/2} \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \sigma(\theta) d\theta = \frac{N}{8}, \quad (4.30)$$

concordando com os resultados do ponto quântico de Wigner-Dyson. O transporte no ponto quântico é balístico. Então, como vimos no capítulo 1, toda a resistência surge na interface entre o condutor e os contatos. A equação (4.29) pode ser interpretada como a condutância de contato média do ponto quântico. A condutância média no i -ésimo contato é $\langle g_i \rangle = N_i$, onde N_i ($i = 1, 2$) é o número de canais abertos. A condutância de contato média pode ser obtida pela lei de composição em série

$$\frac{1}{\langle g \rangle} = \frac{1}{\langle g_1 \rangle} + \frac{1}{\langle g_2 \rangle} = \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \implies \langle g \rangle = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}. \quad (4.31)$$

No caso particular de contatos idênticos, $N_1 = N_2 = N$, temos $\langle g \rangle = N/2$. Além disso, o comportamento sub-Poissônico do ruído de disparo indica a existência de correlação entre os elétrons devido ao princípio da exclusão de Pauli.

Também podemos determinar a densidade de autovalores de transmissão, $\nu(\tau)$. A partir da relação

$$\nu(\tau) = \int_0^{\pi/2} \delta(\tau - \sin^2(2\theta)) \rho(\theta) d\theta, \quad (4.32)$$

obtemos

$$\nu(\tau) = \frac{N}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}}, \quad (4.33)$$

expressão obtida para os pontos quânticos convencionais nas referências [33] e [34]. Intuitivamente, poderíamos esperar que a distribuição tivesse um pico num determinado autovalor. No entanto, o cálculo exato revela que a distribuição de autovalores é bimodal, com picos em 1 (canais perfeitamente abertos) e 0 (canais fechados). O conhecimento de toda a distribuição é importante para o cálculo da média de qualquer estatística linear dos autovalores de transmissão.

4.2.2 Solução exata usando polinômios ortogonais

Uma vez estudados os casos limite, vamos ao caso geral de um número N arbitrário de canais. Por ser matematicamente mais simples vamos considerar o caso $\beta = 2$, no qual a distribuição de probabilidade é dada pela equação (4.14).

Seja $F = \sum_{i=1}^N f(x_i)$ uma estatística linear arbitrária. A média e variância de F são dadas por

$$\langle F \rangle = \int_{-1}^1 dx f(x) \rho(x), \quad (4.34)$$

$$\text{var}(F) = \langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2 = \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 dy f(x) f(y) C(x, y), \quad (4.35)$$

onde $C(x, y) = \delta(x - y)K(x, x) - K^2(x, y)$ é a função de correlação de dois pontos. Defina

$$X_q \equiv \sum_{i=1}^N x_i^q. \quad (4.36)$$

Vamos mostrar como calcular a média de estatísticas lineares do tipo (4.36) através da equação (4.34). Por exemplo, no caso $q = 2$, temos

$$\langle X_2 \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 dx x^2 P_n^2(x), \quad (4.37)$$

onde usamos a definição (4.19) para densidade média de autovalores $\rho(x)$. Calculamos esta integral com o auxílio da relação de recorrência [61]

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) \quad (4.38)$$

e da relação de ortonormalidade dos polinômios de Legendre

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m}. \quad (4.39)$$

Temos então

$$\langle X_2 \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2n^2 + 2n - 1}{(2n-1)(2n+3)} = \frac{N(2N^2 - 1)}{4N^2 - 1}. \quad (4.40)$$

Outro caso importante é quando $q = 4$. Com um procedimento similar, encontramos

$$\langle X_4 \rangle = \frac{3N(2N^4 - 6N^2 + 3)}{16N^4 - 40N^2 + 9}. \quad (4.41)$$

Como exemplo de cálculo de variância, vamos considerar X_2 .

$$\begin{aligned} \text{var}(X_2) &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 x^4 P_n^2(x) \\ &- \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{(2n+1)(2m+1)}{4} \int_{-1}^1 x^2 P_n(x) P_m(x) \int_{-1}^1 y^2 P_n(y) P_m(y) \end{aligned}$$

efetuando as integrais, temos

$$\text{var}(X_2) = \frac{2N^2(4N^4 - 9N^2 + 3)}{(4N^2 - 1)^2(4N^2 - 9)}. \quad (4.42)$$

Podemos usar esses resultados para o cálculo de observáveis. Nesta representação os autovalores de transmissão são dados por $\tau = 1 - x^2$, com $-1 \leq x \leq 1$. A condutância e a potência do ruído de disparo são dadas pelas estatísticas lineares

$$g = \sum_i (1 - x_i^2) = N - X_2, \quad (4.43)$$

$$p = \sum_i x_i^2(1 - x_i^2) = X_2 - X_4. \quad (4.44)$$

Usando as equações (4.40) e (4.41), temos as médias

$$\langle g \rangle = \frac{2N^3}{4N^2 - 1}, \quad (4.45)$$

$$\langle p \rangle = \frac{2N^3(N^2 - 2)}{16N^4 - 40N^2 + 9}. \quad (4.46)$$

Note que as equações (4.45) e (4.46) com $N = 1$ concordam com as equações (4.4) e (4.5) no caso $\beta = 2$. A variância da condutância é dada por

$$\text{var}(g) = \text{var}(X_2) = \frac{2N^2(4N^4 - 9N^2 + 3)}{(4N^2 - 1)^2(4N^2 - 9)}. \quad (4.47)$$

Para $N \gg 1$, temos a expansão semiclássica

$$\langle g \rangle = \frac{N}{2} + \frac{1}{8N} + \mathcal{O}(N^{-3}), \quad (4.48)$$

$$\text{var}(g) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16N^2} + \mathcal{O}(N^{-4}), \quad (4.49)$$

$$\langle p \rangle = \frac{N}{8} + \frac{1}{16N} + \mathcal{O}(N^{-3}). \quad (4.50)$$

Note que o primeiro termo de expansão de $\langle g \rangle$ e $\langle p \rangle$ concorda com os resultados preliminares (4.29) e (4.30). Como no caso de Wigner-Dyson, a correção de localização fraca (termo de ordem N^0) é suprimida na presença do campo magnético. Veremos mais detalhes nas seções 4.4 e 4.5. O método de polinômios ortogonais é útil para o cálculo exato de algumas propriedades de transporte. No entanto surgem dificuldades técnicas no cálculo das integrais em situações de interesse, como no cálculo da variância da potência de ruído de disparo. Para casos $\beta = 1$ e $\beta = 4$ existe um procedimento similar, porém mais complicado, pois as integrais envolvem polinômios anti-ortogonais [58], [31]. Na próxima seção veremos que o formalismo de Fokker-Planck fornece um método sistemático de cálculo, válido para qualquer classe de simetria.

4.3 Método da equação de Fokker-Planck

No capítulo 2, assumimos que os níveis x_i executam um movimento Browniano em função de um tempo fictício t , com distribuição de equilíbrio $P_{eq}(\{x\})$ para $t \rightarrow \infty$. A evolução temporal da distribuição de probabilidade é dada pela equação de Fokker-Planck

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\{x\}, t) = \mathcal{L}_{FP} P(\{x\}, t), \quad (4.51)$$

onde

$$\mathcal{L}_{FP} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(J_{\beta} \omega_N s(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} (J_{\beta} \omega_N)^{-1} \right), \quad (4.52)$$

com

$$J_{\beta} = \prod_{i < j} |x_i - x_j|^{\beta} \quad , \quad \omega_N = \prod_{i=1}^N \omega(x_i), \quad (4.53)$$

$$\omega(x) = (1 - x^2)^{\beta/2 - 1} \quad \text{e} \quad s(x) = 1 - x^2. \quad (4.54)$$

Podemos colocar o operador de Fokker-Planck (4.52) na forma padrão [62]

$$\mathcal{L}_{FP} = \sum_i \left[-\frac{\partial}{\partial x_i} D_i^{(1)} + \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} D_i^{(2)} \right], \quad (4.55)$$

onde $D_i^{(1)}$ é o coeficiente de deriva e $D_i^{(2)}$ é o coeficiente de difusão. Estes coeficientes são dados por

$$D_i^{(1)} = \beta \sum_{j \neq i} \frac{1 - x_i^2}{x_i - x_j} - \beta x_i, \quad (4.56)$$

$$D_i^{(2)} = s(x_i) = 1 - x_i^2. \quad (4.57)$$

O operador adjunto formal \mathcal{L}_{FP}^\dagger é definido por

$$\int d^N x P_1(\{x\}) \mathcal{L}_{FP} P_2(\{x\}) = \int d^N x P_2(\{x\}) \mathcal{L}_{FP}^\dagger P_1(\{x\}). \quad (4.58)$$

Usando o operador de Fokker-Planck (4.52) em (4.58), temos

$$\mathcal{L}_{FP}^\dagger = (J_\beta \omega_N)^{-1} \mathcal{L}_{FP} (J_\beta \omega_N). \quad (4.59)$$

O operador adjunto formal pode ser escrito na forma

$$\mathcal{L}_{FP}^\dagger = \sum_{i=1}^N \left[D_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_i} + D_i^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right]. \quad (4.60)$$

Substituindo as Eqs. (4.56) e (4.57), temos

$$\mathcal{L}_{FP}^\dagger = \sum_i \left[-\beta x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + (1 - x_i^2) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right] + \beta \sum_{i \neq j} \frac{1 - x_i^2}{x_i - x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (4.61)$$

Cálculo de médias

Seja $F = F(x_1, \dots, x_N)$ um observável qualquer. Sua evolução temporal é calculada a partir de

$$\langle F \rangle_t = \int d^N x F(\{x\}) P(\{x\}, t). \quad (4.62)$$

Tomando a derivada de $\langle F \rangle_t$ em relação ao tempo temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle F \rangle_t = \int d^N x F(\{x\}) \frac{\partial}{\partial t} P(\{x\}, t) = \int d^N x F(\{x\}) \mathcal{L}_{FP} P(\{x\}, t), \quad (4.63)$$

onde usamos a Eq. (4.51). Da definição do operador adjunto formal, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle F \rangle_t = \int d^N x P(\{x\}, t) \mathcal{L}_{FP}^\dagger F(\{x\}). \quad (4.64)$$

Obtemos a média dos observáveis a partir a equação (4.64). Como na seção anterior, vamos considerar observáveis do tipo $X_q = \sum_{i=1}^N x_i^q$. Vamos ilustrar como o cálculo é feito para alguns casos:

1. $F = X_1$

A atuação do operador adjunto (4.61) sobre X_1 é dada por

$$\mathcal{L}_{FP}^\dagger X_1 = -\beta N X_1. \quad (4.65)$$

Substituindo (4.65) em (4.64) temos a equação

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle X_1 \rangle_t = -\beta N \langle X_1 \rangle_t, \quad (4.66)$$

cuja solução é

$$\langle X_1 \rangle_t = \langle X_1 \rangle_0 e^{-\beta N t}. \quad (4.67)$$

A solução no equilíbrio é obtida tomando-se o limite $t \rightarrow \infty$

$$\langle X_1 \rangle_{eq} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle X_1 \rangle_t = 0. \quad (4.68)$$

2. $F = X_2$

A atuação do operador adjunto \mathcal{L}_{FP}^\dagger sobre X_2 é dada por

$$\mathcal{L}_{FP}^\dagger X_2 = N(N\beta + 2 - \beta) - (2\beta N + 2 - \beta)X_2 - \beta(X_1)^2. \quad (4.69)$$

Vemos que X_2 não é autovetor de \mathcal{L}_{FP}^\dagger . Substituindo (4.69) em (4.64) temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle X_2 \rangle_t = N(N\beta + 2 - \beta) - (2\beta N + 2 - \beta) \langle X_2 \rangle_t - \beta \langle (X_1)^2 \rangle_t. \quad (4.70)$$

Note que aparece o termo $\langle (X_1)^2 \rangle_t$. Precisamos obter a equação de movimento para este observável.

3. $F = (X_1)^2$

A atuação do operador adjunto \mathcal{L}_{FP}^\dagger sobre $(X_1)^2$ fornece

$$\mathcal{L}_{FP}^\dagger (X_1)^2 = 2N - 2X_2 - 2\beta N (X_1)^2. \quad (4.71)$$

Substituindo (4.71) em (4.64) temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle (X_1)^2 \rangle_t = 2N - 2\langle X_2 \rangle_t - 2\beta N \langle (X_1)^2 \rangle_t. \quad (4.72)$$

No equilíbrio temos $\frac{\partial}{\partial t} \langle X_2 \rangle_t = 0 = \frac{\partial}{\partial t} \langle (X_1)^2 \rangle_t$. As equações (4.70) e (4.72) fornecem o sistema

$$\beta \langle X_1^2 \rangle + (2\beta N + 2 - \beta) \langle X_2 \rangle = N(N\beta + 2 - \beta), \quad (4.73)$$

$$\beta N \langle X_1^2 \rangle + \langle X_2 \rangle = N, \quad (4.74)$$

cuja solução é

$$\langle X_2 \rangle = \frac{N(\beta N^2 + (2 - \beta)N - 1)}{2\beta N^2 + (2 - \beta)N - 1}, \quad (4.75)$$

$$\langle X_1^2 \rangle = \frac{N^2}{2\beta N^2 + (2 - \beta)N - 1}. \quad (4.76)$$

Podemos utilizar os resultados anteriores para calcular a média da condutância,

$$\langle g \rangle = \sum_{i=1}^N \langle 1 - x_i^2 \rangle = N - \langle X_2 \rangle = \frac{\beta N^3}{2\beta N^2 + (2 - \beta)N - 1}, \quad (4.77)$$

que concorda com as equações (4.45) para $\beta = 2$ e (4.4) para $N = 1$. No limite $N \gg 1$, a equação (4.77) fica

$$\langle g \rangle = \frac{N}{2} + \frac{\beta - 2}{4\beta} + \frac{\beta^2 - 2\beta + 4}{8\beta^2 N} + \mathcal{O}(N)^{-2}. \quad (4.78)$$

É instrutivo comparar a Eq.(4.78) com o resultado da condutância do ponto quântico convencional

$$\langle g \rangle_{WD} = \frac{N}{2} + \frac{\beta - 2}{4\beta} + \frac{(\beta - 2)^2}{8\beta^2 N} + \mathcal{O}(N)^{-2}. \quad (4.79)$$

Note que nas duas equações temos um termo de ordem N^0 consistente com a correção de localização fraca para $\beta = 1$ e anti-localização para $\beta = 4$. Como veremos adiante, a coincidência nas amplitudes desses efeitos nos casos Quiral e Wigner-Dyson é característico da condutância e não se estende, em geral, a outros observáveis.

4.4 Correção de localização fraca

Vimos no capítulo 1 que o fenômeno da localização fraca resulta na correção do valor médio de um observável de transporte, por exemplo, a condutância. Esse efeito é suprimido pela aplicação de um campo magnético, ver figura 1.2. Embora pequena, a correção de localização fraca é universal, pois não depende da forma da amostra nem de detalhes microscópicos, dependendo apenas da presença ou ausência das simetrias de reversão temporal e rotação de spin.

Nesta seção vamos calcular uma expressão para média de uma estatística linear arbitrária no limite $N \gg 1$. Para fazer contato com resultados já obtidos na literatura para os pontos quânticos usuais, vamos fazer a mudança de variáveis

$$x = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}, \quad (4.80)$$

onde $0 \leq \lambda \leq \infty$. Em termos das novas variáveis, o operador de Fokker-Planck (4.52) fica

$$\mathcal{L}_{FP} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left(\tilde{J}_\beta \tilde{\omega}_N \tilde{s}(\lambda_i) \frac{\partial}{\partial \lambda_i} (\tilde{J}_\beta \tilde{\omega}_N)^{-1} \right), \quad (4.81)$$

com

$$\tilde{J}_\beta = \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta, \quad \tilde{\omega}_N = \prod_{i=1}^N \tilde{\omega}(\lambda_i), \quad (4.82)$$

$$\tilde{\omega}(\lambda) = \frac{\lambda^{\beta/2-1}}{(1+\lambda)^{N\beta}} \quad \text{e} \quad \tilde{s}(\lambda) = \lambda(1-\lambda^2). \quad (4.83)$$

Na forma padrão temos

$$\mathcal{L}_{FP} = \sum_{i=1}^N \left[-\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \tilde{D}_i^{(1)} + \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^2} \tilde{D}_i^{(2)} \right], \quad (4.84)$$

onde os coeficientes de deriva e difusão são dados por

$$\tilde{D}_i^{(1)} = \beta \sum_{j(\neq i)} \frac{\lambda_i(1+\lambda_i)^2}{\lambda_i - \lambda_j} + V(\lambda_i), \quad (4.85)$$

$$\tilde{D}_i^{(2)} = \lambda_i(1+\lambda_i)^2, \quad (4.86)$$

$$V(\lambda_i) = \frac{\beta}{2}(1+\lambda_i)^2 + (2-N\beta)\lambda_i(1+\lambda_i). \quad (4.87)$$

Seja $F = F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = F(\{\lambda\})$ um observável arbitrário. Como visto no capítulo 2, sua evolução temporal é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle F \rangle_t = \sum_{i=1}^N \int d^N \lambda \tilde{P}(\{\lambda\}, t) \left[-\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \tilde{D}_i^{(1)} + \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^2} \tilde{D}_i^{(2)} \right] F(\{\lambda\}), \quad (4.88)$$

onde $\tilde{P}(\{\lambda\}, t)$ é a densidade conjunta em termos das novas variáveis. Escolhendo

$$F(\{\lambda\}) = \sum_{n=1}^N \delta(\lambda - \lambda_n), \quad (4.89)$$

temos a evolução temporal da densidade média

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(\lambda, t) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[-\tilde{s}(\lambda) \frac{\partial \ln \tilde{\omega}}{\partial \lambda} \tilde{\rho}(\lambda, t) + \tilde{s}(\lambda) \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial \lambda} - \beta \tilde{s}(\lambda) \mathcal{P} \int_0^\infty d\lambda' \frac{\tilde{\rho}(\lambda, \lambda', t)}{\lambda - \lambda'} \right], \quad (4.90)$$

onde \mathcal{P} indica o valor principal da integral. A função de correlação de dois pontos que aparece na integral é definida por

$$\tilde{\rho}(\lambda, \lambda', t) = \sum_{i \neq j} \langle \delta(\lambda - \lambda_i) \delta(\lambda' - \lambda_j) \rangle_t. \quad (4.91)$$

A equação (4.90) é exata e vale para qualquer valor de N . No limite $N \gg 1$ podemos usar a aproximação de Dyson

$$\mathcal{P} \int_0^\infty d\lambda' \frac{\tilde{\rho}(\lambda, \lambda', t)}{\lambda - \lambda'} \simeq \tilde{\rho}(\lambda, t) \left[\mathcal{P} \int_0^\infty d\lambda' \frac{\tilde{\rho}(\lambda', t)}{\lambda - \lambda'} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \tilde{\rho}(\lambda, t) \right]. \quad (4.92)$$

Desta forma a equação (4.90) fica

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(\lambda, t) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{s}(\lambda) \tilde{\rho}(\lambda) \left[-\frac{\partial \ln \tilde{\omega}}{\partial \lambda} + \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial \lambda} - \beta \mathcal{P} \int_0^\infty d\lambda' \frac{\tilde{\rho}(\lambda', t)}{\lambda - \lambda'} \right]. \quad (4.93)$$

A solução no equilíbrio é

$$\mathcal{P} \int_0^\infty d\lambda' \frac{\tilde{\rho}(\lambda', t)}{\lambda - \lambda'} = \frac{2 - \beta}{2\beta} \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial \lambda} + \frac{N}{1 + \lambda} - \frac{\beta - 2}{2\beta\lambda}. \quad (4.94)$$

Para resolver a equação (4.94), vamos decompor $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 + \delta\tilde{\rho}$ em um termo de ordem $\tilde{\rho}_0$ de ordem N e um termo dependente da simetria $\delta\tilde{\rho}$ de ordem N^0 (responsável pelo efeito de “localização fraca”). Desta forma temos

$$\mathcal{P} \int_0^\infty d\lambda' \frac{\tilde{\rho}_0(\lambda')}{\lambda - \lambda'} = \frac{N}{1 + \lambda}, \quad (4.95)$$

$$\mathcal{P} \int_0^\infty d\lambda' \frac{\delta\rho(\lambda')}{\lambda - \lambda'} = \gamma \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}_0}{\partial \lambda} + \frac{1}{\lambda} \right), \quad (4.96)$$

onde $\gamma = (2 - \beta)/(2\beta)$. Vamos assumir que $\tilde{\rho}_0(\lambda) = 0$ para $\lambda > \lambda_c$. Assim, a equação (4.95) torna-se

$$\mathcal{P} \int_0^{\lambda_c} d\lambda' \frac{\tilde{\rho}_0(\lambda')}{\lambda - \lambda'} = \frac{N}{1 + \lambda}. \quad (4.97)$$

A solução da eq.(4.97) com $N = (N_1 + N_2)/2$ e satisfazendo a condição

$$\mathcal{P} \int_0^{\lambda_c} d\lambda' \tilde{\rho}_0(\lambda') = \min(N_1, N_2) \quad (4.98)$$

foi calculada por Beenakker [63]

$$\tilde{\rho}_0(\lambda) = \frac{\sqrt{N_1 N_2}}{\pi(1 + \lambda)} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_c} \right)^{1/2}, \quad (4.99)$$

onde

$$\lambda_c = \frac{4N_1 N_2}{(N_1 - N_2)^2}. \quad (4.100)$$

Da mesma forma, para resolver (4.96) assumimos que $\delta\tilde{\rho}$ é nula para $\lambda > \lambda_d > \lambda_c$. Substituindo (4.99) em (4.96), temos

$$\mathcal{P} \int_0^{\lambda_d} d\lambda' \frac{\delta\rho(\lambda')}{\lambda - \lambda'} = \gamma \left(\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2(\lambda - \lambda_c)} - \frac{1}{(1 + \lambda)} \right). \quad (4.101)$$

Para resolver (4.101) vamos escrever

$$\delta\tilde{\rho} = \frac{\gamma}{2} (\delta\tilde{\rho}_1 + \delta\tilde{\rho}_2 - 2\delta\tilde{\rho}_3). \quad (4.102)$$

As contribuições de cada termo são dadas pelas equações

$$\mathcal{P} \int_0^{\lambda_d} d\lambda' \frac{\delta\tilde{\rho}_1(\lambda')}{\lambda - \lambda'} = \frac{1}{\lambda} \implies \delta\tilde{\rho} = \delta(\lambda), \quad (4.103)$$

$$\mathcal{P} \int_0^{\lambda_d} d\lambda' \frac{\delta\tilde{\rho}_2(\lambda')}{\lambda - \lambda'} = \frac{1}{\lambda - \lambda_c} \implies \delta\tilde{\rho} = \delta(\lambda - \lambda_c), \quad (4.104)$$

$$\mathcal{P} \int_0^{\lambda_d} d\lambda' \frac{\delta\tilde{\rho}_3(\lambda')}{\lambda - \lambda'} = \frac{1}{1 + \lambda}. \quad (4.105)$$

A terceira equação pode ser resolvida com o mesmo artifício: fazendo $(a + b)/2 = 1$ e impondo a condição $\int_0^{\lambda_d} d\lambda \delta\tilde{\rho}_3(\lambda) = \min(a, b)$, temos

$$\delta\tilde{\rho}_3(\lambda) = \frac{\sqrt{ab}}{\pi(1 + \lambda)} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_d} \right)^{1/2}; \quad \lambda_d = \frac{4ab}{(a - b)^2}. \quad (4.106)$$

Juntando todas as contribuições temos

$$\delta\tilde{\rho}(\lambda) = \frac{\gamma}{2} (\delta(\lambda) + \delta(\lambda - \lambda_c)) - \frac{\gamma\sqrt{ab}}{\pi(1 + \lambda)} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_d} \right)^{1/2}. \quad (4.107)$$

Voltando para as variáveis originais $\lambda = (1 - x)/(1 + x)$, e tomando o limite $N_1 \rightarrow N_2$ e $b \rightarrow a$, temos

$$\delta\rho(x) = \frac{\gamma}{2} (\delta(x + 1) + \delta(x - 1)) - \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (4.108)$$

Esta equação fica ainda mais simples com a mudança de variáveis $x = \cos\theta$, com $0 \leq \theta \leq \pi$. Temos

$$\delta\sigma(\theta) = \frac{\gamma}{2} [\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi)] - \frac{\gamma}{\pi}. \quad (4.109)$$

Combinando (4.99) e (4.109), temos a aproximação da densidade de autovalores para $N \gg 1$

$$\sigma(\theta) = \frac{N}{\pi} + \frac{\gamma}{2} \left[\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi) - \frac{2}{\pi} \right] + \mathcal{O}(N^{-1}). \quad (4.110)$$

Podemos usar as identidades

$$\delta(\theta) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\theta), \quad (4.111)$$

$$\delta(\theta - \pi) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(n\theta), \quad (4.112)$$

para expressar a equação (4.110) na forma

$$\sigma(\theta) = \frac{N}{\pi} + \frac{2\gamma}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n\theta). \quad (4.113)$$

Agora vamos calcular a média de uma estatística linear $F = \sum_i f(x)$. Em termos da variável θ , temos

$$\langle F \rangle = \sum_{n=1}^N \langle f(\cos \theta_n) \rangle = \int_0^\pi d\theta \sigma(\theta) f(\cos \theta). \quad (4.114)$$

Usando a densidade (4.113), temos

$$\langle F \rangle = N f_0 + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}, \quad (4.115)$$

onde os coeficientes são dados por

$$f_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta f(\cos \theta) \quad \text{e} \quad f_{2n} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\theta f(\cos \theta) \cos(2n\theta). \quad (4.116)$$

Note que os f_n são os coeficientes de Fourier da série de cossenos de $f(\cos \theta)$

$$f(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos(n\theta). \quad (4.117)$$

Vamos considerar dois exemplos:

Condutância

Vimos que a condutância é dada por $g = \sum_i f(x_i)$, com $f(x) = 1 - x^2$. Na variável θ temos

$$f(\cos \theta) = \sin^2 \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\theta). \quad (4.118)$$

Os coeficientes não nulos são $f_0 = 1/2$ e $f_2 = -1/2$. Então a média da condutância é dada por

$$\langle g \rangle = \frac{N}{2} + \frac{\beta - 2}{4\beta} + \mathcal{O}(N^{-1}), \quad (4.119)$$

que está de acordo com a equação (4.78).

Potência do ruído de disparo

Vimos que a potência do ruído de disparo é dada por $p = \sum_i f(x_i)$, com $f(x) = x^2(1 - x^2)$. Mudando a variável temos

$$f(\cos \theta) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos(4\theta). \quad (4.120)$$

Os coeficientes não nulos são $f_0 = 1/8$ e $f_4 = -1/8$. Então a média é dada por

$$\langle p \rangle = \frac{N}{8} + \frac{\beta - 2}{16\beta} + \mathcal{O}(N^{-1}). \quad (4.121)$$

4.5 Variância de uma estatística linear

Como vimos no capítulo 1, a condutância de sistemas mesoscópicos a baixas temperaturas apresenta flutuações universais em torno do seu valor médio. Tais flutuações se estendem a outros observáveis e não dependem do tempo, sendo completamente reproduzíveis desde que a amostra permaneça na mesma temperatura. Apesar de variar de amostra para amostra, a amplitude (variância) destas flutuações é universal, independentemente de detalhes microscópicos como a distribuição de impurezas ou geometria da amostra. Na seção anterior estudamos o valor esperado de uma estatística linear arbitrária no limite $N \gg 1$. Para estudar as flutuações em torno da média vamos reescrever a densidade de probabilidade (4.12) como uma distribuição de Gibbs

$$P(\{x\}) = Z^{-1} \exp[-\beta H(\{x\})], \quad (4.122)$$

onde Z é uma constante de normalização e

$$H(\{x\}) = - \sum_{i < j} \ln |x_i - x_j| + \sum_i V(x_i). \quad (4.123)$$

O termo de potencial é dado por $V(x) = \frac{\beta-2}{2} \ln(1 - x^2)$.

As flutuações em torno da média são quantificadas pela variância. Uma expressão geral para a variância de uma estatística linear $F = \sum_i f(\lambda_i)$, com $a \leq \lambda_i \leq b$, no limite $N \gg 1$ foi obtida por Beenakker [64]

$$\text{var}(F) = \frac{1}{\beta\pi^2} \mathcal{P} \int_a^b d\lambda \int_a^b d\mu \left[\frac{(\mu - a)(b - \mu)}{(\lambda - a)(b - \lambda)} \right]^{1/2} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \mu} \frac{d}{d\mu} f(\mu), \quad (4.124)$$

pelo método da derivada funcional [32]. A Eq. (4.124) é válida para qualquer ensemble onde a interação é logarítmica (independente do termo de potencial). A densidade de probabilidade (4.122) satisfaz esses requisitos e podemos usar (4.124) com $a = -1$ e $b = 1$ para calcular a variância de numa estatística linear arbitrária num ponto quântico com simetria quiral. Temos então

$$\text{var}(F) = \frac{1}{\beta\pi^2} \mathcal{P} \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 dy \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} \frac{f(x)}{x-y} \frac{d}{dy} f(y). \quad (4.125)$$

Comparando (4.125), após uma integração por partes, com (4.35) obtemos a função de correlação de dois pontos

$$C(x, y) = -\frac{1}{\beta\pi^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sqrt{1-y^2} \ln |x-y|). \quad (4.126)$$

Efetuada as derivadas, temos

$$C(x, y) = \frac{1}{\beta\pi^2} \frac{xy-1}{(x-y)^2 \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}; \quad x \neq y. \quad (4.127)$$

Uma maneira mais conveniente de escrever a função de correlação (4.126) é através de

$$C(x, y) = \frac{1}{2\beta\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \left(\frac{1-xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}{1-xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} \right). \quad (4.128)$$

Introduzindo as variáveis $x = \cos \theta$ e $y = \cos \phi$, a equação (4.128) fica

$$\tilde{C}(\theta, \phi) = \frac{1}{2\beta\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} \ln \left| \frac{1 - \cos(\theta + \phi)}{1 - \cos(\theta - \phi)} \right|. \quad (4.129)$$

Esta expressão pode ser escrita em termos da função

$$A(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \right), \quad (4.130)$$

como

$$\tilde{C}(\theta, \phi) = \frac{1}{2\beta\pi^2} [A(\theta + \phi) + A(\theta - \phi)]. \quad (4.131)$$

Usando a identidade

$$\operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \right), \quad (4.132)$$

temos

$$A(\theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n \cos(n\theta). \quad (4.133)$$

Substituindo (4.133) em (4.131), a função de correlação fica

$$\tilde{C}(\theta, \phi) = \frac{2}{\beta\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \cos(n\theta) \cos(n\phi). \quad (4.134)$$

Nas novas variáveis $0 \leq \theta, \phi \leq \pi$, a variância de uma estatística linear é dada por

$$\operatorname{var}(F) = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\phi f(\cos \theta) f(\cos \phi) \tilde{C}(\theta, \phi). \quad (4.135)$$

Usando a função de correlação (4.134), temos

$$\operatorname{var}(F) = \frac{1}{2\beta} \sum_{n=1}^{\infty} n f_n^2, \quad (4.136)$$

onde

$$f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} d\theta f(\cos \theta) \cos(n\theta). \quad (4.137)$$

Vamos considerar os mesmos exemplos da seção anterior:

Condutância

Vimos que os coeficientes não nulos são $f_0 = 1/2$ e $f_2 = -1/2$, então a variância da condutância é dada por

$$\operatorname{var}(g) = \frac{1}{4\beta}, \quad (4.138)$$

que, para $\beta = 2$, concorda com a equação (4.49).

Potência do ruído de disparo

Vimos que os coeficientes não nulos são $f_0 = 1/8$ e $f_4 = -1/8$, então a variância é dada por

$$\text{var}(p) = \frac{1}{32\beta}. \quad (4.139)$$

4.6 Comparação com o caso Wigner-Dyson

Nas últimas seções encontramos expansões semiclássicas para uma estatística linear arbitrária no caso quirar. Vamos obter expressões análogas para o ponto quântico de Wigner-Dyson. Neste caso a distribuição dos autovalores de transmissão é dada pela equação

$$P(\{\tau\}) = C_N \prod_{i<j} |\tau_i - \tau_j|^\beta \prod_i \omega(\tau_i), \quad (4.140)$$

onde $\omega(\tau) = \tau^{\beta/2-1}$ e $0 \leq \tau_i \leq 1$. Este caso foi estudado nas referências [33] e [34]. Com a mudança de variáveis $\tau_i = 1/(1 + \lambda_i)$, $0 \leq \lambda_i < \infty$, a Eq. (4.140) pode ser escrita como

$$P(\{\lambda\}) = Z^{-1} \exp[\beta H(\{\lambda\})], \quad (4.141)$$

$$H(\{\lambda\}) = - \sum_{i<j} \ln |\lambda_i - \lambda_j| + \sum_i V(\lambda_i), \quad (4.142)$$

$$V(\lambda) = \left(N + \frac{2-\beta}{2\beta} \right) \ln(1 + \lambda). \quad (4.143)$$

A média e variância de uma estatística linear são dadas por

$$\langle F \rangle = \int_0^\infty d\lambda f(\lambda) \tilde{\rho}(\lambda), \quad (4.144)$$

$$\text{var}(F) = \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty d\lambda' f(\lambda) f(\lambda') \tilde{C}(\lambda, \lambda'). \quad (4.145)$$

A densidade de autovalores no limite $N \gg 1$ é dada pela equação integral

$$\mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\tilde{\rho}(\lambda')}{\lambda - \lambda'} d\lambda' + \frac{2-\beta}{2\beta} \frac{d}{d\lambda} \ln \tilde{\rho}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} V(\lambda), \quad (4.146)$$

cuja solução é obtida com os mesmos recursos usados na seção (4.4). Temos

$$\tilde{\rho}(\lambda) = \frac{\sqrt{N_1 N_2}}{\pi(1+\lambda)} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_c} \right)^{1/2} - \frac{\gamma}{2} [\delta(\lambda - \lambda_c) - \delta(\lambda)]. \quad (4.147)$$

A função de correlação $\tilde{C}(\lambda, \lambda')$ foi calculada na referência [32] para N grande. Temos

$$\tilde{C}(\lambda, \lambda') = -\frac{1}{\beta\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\lambda'} \ln \left| \frac{\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda'}}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda'}} \right|. \quad (4.148)$$

Voltando para a variável τ e tomando o limite $N_2 \rightarrow N_1$, temos

$$\rho_{WD}(\tau) = \frac{N}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} + \frac{\gamma}{2} [\delta(\tau) - \delta(\tau-1)], \quad (4.149)$$

$$C_{WD}(\tau, \tau') = -\frac{1}{\beta\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\tau'} \ln \left| \frac{\sqrt{(1-\tau)\tau'} - \sqrt{(1-\tau')\tau}}{\sqrt{(1-\tau)\tau'} + \sqrt{(1-\tau')\tau}} \right|, \quad (4.150)$$

onde o subscrito WD indica o caso Wigner-Dyson. A função de correlação (4.150) pode ser reescrita num forma mais conveniente

$$C_{WD}(\tau, \tau') = \frac{1}{2\pi\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\tau'} \ln \left| \frac{\sqrt{(1-\tau)\tau(1-\tau')\tau'} - \tau\tau' + (\tau + \tau')/2}{-\sqrt{(1-\tau)\tau(1-\tau')\tau'} - \tau\tau' + (\tau + \tau')/2}} \right|. \quad (4.151)$$

Efetuada a mudança de variáveis $\tau = \sin^2(\theta/2)$ e $\tau' = \sin^2(\phi/2)$, $0 \leq \theta, \phi \leq \pi$, e seguindo os mesmos passos usados nas seções (4.4) e (4.5), podemos mostrar que a média e variância de uma estatística linear arbitrária no ponto quântico de Wigner-Dyson são dadas por

$$\langle F \rangle_{WD} = N f_0 + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} f_{4n-2} + \mathcal{O}(N^{-1}), \quad (4.152)$$

$$\text{var}(F)_{WD} = \frac{1}{4\beta} \sum_{n=1}^{\infty} n f_n^2 + \mathcal{O}(N^{-1}). \quad (4.153)$$

Resumimos os resultados dos casos quiral e Wigner-Dyson na tabela (4.1). Comparando-os, concluímos que no limite semiclássico a simetria quiral afeta apenas os termos sensíveis à coerência de fase. O valor dominante, $N f_0$, da média dos observáveis de transporte pode ser obtido pela soma de probabilidades clássicas, desprezando as contribuições devido à interferência quântica. Note que a coincidência

	Quiral	Wigner-Dyson
Média	$\langle F \rangle = N f_0 + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}$	$\langle F \rangle = N f_0 + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} f_{4n-2}$
Variância	$\text{var}(F) = \frac{1}{2\beta} \sum_{n=1}^{\infty} n f_n^2$	$\text{var}(F) = \frac{1}{4\beta} \sum_{n=1}^{\infty} n f_n^2$

Tabela 4.1: Resumo dos resultados para as médias e variâncias de estatísticas lineares nos casos Quiral e Wigner-Dyson.

entre a amplitude do termo de localização fraca para a condutância média não se estende para outros observáveis. Para a potência do ruído de disparo, por exemplo, este termo é nulo no caso usual, mas finito para o ponto quiral, Eq. (4.121). Além disso, observamos a relação entre as variâncias nos dois casos

$$\text{var}(F)_{\text{quiral}} = 2\text{var}(F)_{WD}. \quad (4.154)$$

Um resultado similar foi obtido para a condutância de um fio quântico desordenado com simetria quiral [65].

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Nesta tese estudamos propriedades de transporte em pontos quânticos com simetria quirial. Esta simetria adicional surge em sistemas com desordem não diagonal como no modelo de *hopping* aleatório. O estudo de transporte quântico em sistemas com esta simetria tinha-se restringido até então quase inteiramente a fios quânticos, nos quais são usados métodos desenvolvidos para problemas de fios convencionais (sem simetria quirial), como a equação de DMPK e o modelo σ não-linear supersimétrico. No entanto, pouco se falava sobre pontos quânticos quirais, cujo análogo convencional foi amplamente estudado por métodos da teoria de matrizes aleatórias (TMA). Estava faltando, portanto, uma análise detalhada e sistemática das propriedades dos pontos no caso quirial, realizada em nosso trabalho.

Os trabalhos anteriores mostraram que em sistemas com simetria de subrede as propriedades espectrais e de transporte no centro da banda ($\varepsilon = 0$) diferiam das propriedades genéricas previstas pelo modelo de Anderson, no qual são definidas as classes de universalidade de Wigner-Dyson. Por exemplo, a condutância depende de detalhes específicos do modelo microscópico como a paridade do número de sítios e a forma do acoplamento. No nosso trabalho, estudamos o regime universal sem nos preocuparmos com os detalhes microscópicos dos contatos, bastando que existam e permitam a passagem de uma corrente finita. Este é o grande mérito do princípio de máxima entropia usado no capítulo 3, que leva em conta apenas as simetrias universais do sistema, como presença ou ausência de simetrias de reversão temporal e rotação de spin, além, é claro, da simetria quirial. Nosso sistema é constituído por um ponto quântico (com simetria de subrede) acoplado via contatos pontuais idênticos, que estabelecem N canais de propagação, a reservatórios de elétrons.

Uma vez estabelecido o regime universal, montamos um ensemble de matrizes

de espalhamento aleatórias e calculamos a medida de Haar do grupo associado a essas matrizes. Esta medida, juntamente com o princípio de máxima entropia, possibilitou o cálculo da distribuição conjunta dos autovalores de transmissão, o resultado mais importante de nosso trabalho. Além de estabelecer uma conexão direta com a teoria de espaços simétricos, permitindo assim uma classificação dos ensembles pela tabela de Cartan, esta distribuição também possibilita o cálculo dos observáveis de transporte como a condutância e a potência do ruído de disparo pela teoria de Ladauer-Büttiker. Dos resultados, obtidos por métodos como a teoria ensembles de polinômios ortogonais da TMA e a equação de Fokker-Planck, destacamos fórmulas semiclássicas para a obtenção da média e variância de uma estatística linear arbitrária dos autovalores de transmissão. Além da parte analítica, o trabalho teve uma parte computacional na qual obtivemos a matriz de espalhamento numericamente, através da equação de Mahaux-Weidenmüller, a partir do Hamiltoniano da cavidade, modelado por uma matriz aleatória pertencente aos ensembles gaussianos da teoria de Wigner-Dyson.

Uma seqüência natural do trabalho é a generalização dos resultados para números diferentes de canais de propagação nos guias, além de prosseguir os cálculos numéricos. Em princípio bastaria montar um Hamiltoniano aleatório quirral (blocos fora da diagonal) e usar o programa já desenvolvido para o caso Wigner-Dyson. No entanto existem algumas dificuldades técnicas. Uma proposta para obter o resultado correto é determinar as implicações da simetria quirral nas propriedades da matriz de acoplamento, além da relação de ortogonalidade mostrada no capítulo 2. Outro efeito importante a ser explorado é a transição gradual (*crossover*) entre a classe quirral e classe usual de Wigner-Dyson, causada pelo afastamento da energia em relação ao centro da banda ($\varepsilon = 0$). Também pretendemos estudar a transição gradual ponto-fio, que pode ser descrita pela teoria de matrizes de transferência aleatórias com a condição inicial de ponto quântico no limite $L \rightarrow 0$.

Enfim, é importante frisar que embora tenha recebido bastante atenção teórica, há vários obstáculos para a realização experimental de pontos e fios quirrais. Além do efeito da interação elétron-elétron, que não é levado em consideração, o principal obstáculo é que a simetria quirral é bastante frágil e pode ser facilmente quebrada. Por exemplo: desordem no sítio ou *hopping* além de primeiros vizinhos podem tirar o sistema do ponto quirral no centro da banda. Então, é mais provável realizar sistemas no regime de *crossover* entre as classes, o que torna este problema fundamental. Obviamente, para entender esta transição, o comportamento nas classes puras tem que estar bem estabelecido. Da mesma forma, o regime de ponto quântico corresponde a um limite teórico importante para estudar a transição gradual ponto-fio.

Apêndice A

Quatérnions

Em problemas de spin semi-inteiro com invariância sob reversão temporal e sem simetria rotacional, as matrizes unitárias que comutam com o operador de reversão temporal formam o grupo simplético [59],[31]. A álgebra do grupo simplético fica simplificada com o uso dos quatérnions. Uma conveniência do uso dos quatérnions é que a degenerescência de Kramer aparece naturalmente. Neste apêndice, vamos introduzir o conceito de quatérnion, listar as principais propriedades e mostrar como a matriz de transferência no caso simplético pode ser escrita em termos de quatérnions.

A.1 Definição

Considere a base $\mathcal{B} = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$, com

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Qualquer matriz complexa 2×2 pode ser expressa na base de quatérnions na forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(a+d)e_0 + \frac{i}{2}(d-a)e_1 + \frac{1}{2}(c-b)e_2 + \frac{i}{2}(c+b)e_3. \quad (\text{A.2})$$

Um quatérnion é definido por 4 números complexos $q^{(i)}$, $i = 0, 1, 2$ e 3 , coeficientes da representação de uma matriz 2×2 na base \mathcal{B} . Podemos escrever

$$q = q^{(0)}e_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{e} \equiv q^{(0)}e_0 + q^{(1)}e_1 + q^{(2)}e_2 + q^{(3)}e_3 = \sum_{\alpha=0}^3 q^{(\alpha)}e_{\alpha}, \quad (\text{A.3})$$

cuja representação matricial é

$$q \equiv \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^{(0)} + iq^{(1)} & -q^{(2)} - iq^{(3)} \\ q^{(2)} - iq^{(3)} & q^{(0)} - iq^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

A.2 Propriedades

Uma vez definidos, vamos listar algumas propriedades importantes dos quatérnions

1. Um quatérnion é “real” se os coeficientes $q^{(\alpha)}$ forem reais. Note que um quatérnion real não corresponde a uma matriz real 2×2 . De fato, sendo α e β números complexos, um quatérnion real geral pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

onde $q^{(0)} = \text{Re}(\alpha)$, $q^{(1)} = \text{Im}(\alpha)$, $q^{(2)} = -\text{Re}(\beta)$ e $q^{(3)} = -\text{Im}(\beta)$.

2. O “quatérnion conjugado” \bar{q} é dado por

$$\bar{q} = q^{(0)}e_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}, \quad (\text{A.6})$$

cuja representação matricial é

$$\bar{q} = \begin{pmatrix} q_{22} & -q_{12} \\ -q_{21} & q_{11} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

3. O “complexo conjugado” q^* do quatérnion q é

$$q^* = q^{(0)*}e_0 + \mathbf{q}^* \cdot \mathbf{e}, \quad (\text{A.8})$$

cuja representação matricial é

$$q^* = \begin{pmatrix} q_{22}^* & -q_{21}^* \\ -q_{12}^* & q_{11}^* \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

4. Quando $q^* = q$, o quatérnion é dito real.
5. Quando $q^* = -q$, o quatérnion é dito imaginário puro.
6. Quando $\bar{q} = q$, o quatérnion é dito auto-dual.

7. O conjugado hermitiano q^\dagger de um quatérnion q é obtido pela aplicação das conjugações (A.6) e (A.8)

$$q^\dagger = \bar{q}^* = q^{(0)*}e_0 - \mathbf{q}^* \cdot \mathbf{e}. \quad (\text{A.10})$$

Na representação matricial, esta operação se reduz à conjugação hermitiana usual de uma matriz 2×2

$$q^\dagger = \begin{pmatrix} q_{11}^* & q_{21}^* \\ q_{12}^* & q_{22}^* \end{pmatrix}.$$

8. Quando $q^\dagger = q$, o quatérnion é dito hermitiano.
 9. Quando $q^\dagger = -q$, o quatérnion é dito anti-hermitiano.
 10. O conjugado de um produto de quatérnions é

$$\overline{(q_1 q_2 \dots q_n)} = \bar{q}_n \dots \bar{q}_2 \bar{q}_1. \quad (\text{A.11})$$

11. O conjugado hermitiano de um produto de quatérnions é

$$(q_1 q_2 \dots q_n)^\dagger = q_n^\dagger \dots q_2^\dagger q_1^\dagger. \quad (\text{A.12})$$

Qualquer matriz $2N \times 2N$ pode ser tratada com N^2 blocos de matrizes 2×2 , estas sendo expressas em termos de quatérnions. Em geral, uma matriz $2N \times 2N$ complexa torna-se uma matriz $N \times N$ com elementos quatérnions complexos.

Vamos considerar uma matriz A ($2N \times 2N$) que pode ser escrita como uma matriz Q ($N \times N$) com elementos quatérnions q_{kj} , ($k, j = 1, 2, \dots, N$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2N,1} & \dots & a_{2N,2N} \end{pmatrix} \longrightarrow Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{N,1} & \dots & q_{N,N} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

onde

$$q_{ij} = \begin{pmatrix} a_{2i-1,2j-1} & a_{2i-1,2j} \\ a_{2i,2j-1} & a_{2i,2j} \end{pmatrix}.$$

As operações usuais em A são refletidas em Q da seguinte maneira:

1. Transposição

$$(Q^T)_{jk} = (q_{kj})^T = -e_2 \bar{q}_{kj} e_2. \quad (\text{A.14})$$

2. Conjugação hermitiana

$$(Q^\dagger)_{kj} = q_{kj}^\dagger. \quad (\text{A.15})$$

3. Reversão temporal

A matriz “revertida no tempo” é

$$A^R = K A^* K^T, \quad (\text{A.16})$$

onde

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & \\ 1 & 0 & & \phi & & \\ & & \ddots & & & \\ & \phi & & 0 & -1 & \\ & & & 1 & 0 & \end{pmatrix}_{2N \times 2N}. \quad (\text{A.17})$$

Em termos de quatérnions, temos

$$Q^R = K Q^* K^T, \quad (\text{A.18})$$

onde

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_y & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_y & \end{pmatrix}_{N \times N}. \quad (\text{A.19})$$

O elemento de matriz é

$$(Q^R)_{kj} = \sigma_y q_{kj}^* \sigma_y^T. \quad (\text{A.20})$$

Efetando este produto de matriz e usando (A.9), temos

$$q_{kj}^R = q_{kj}^*, \quad (\text{A.21})$$

onde o “*” indica conjugação complexa quaterniônica. Então, se A é invariante sob reversão temporal, $q_{kj}^R = q_{kj}^* = q_{kj}$ e os elementos da matriz Q são quatérnions reais, dizemos que a matriz Q é quatérnion real.

A.3 Matriz de transferência

Vimos que a matriz de transferência no caso simpletico é dada por

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

com α, β, γ e δ matrizes complexas.

A simetria de reversão temporal do sistema é expressa por

$$M^* = \Sigma M \Sigma^T, \quad (\text{A.23})$$

onde

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

e K é a matriz (A.19).

Esta simetria implica que a matriz M pode ser escrita como

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ K\beta^*K^T & K\alpha^*K^T \end{pmatrix}. \quad (\text{A.25})$$

Considerando α e β matrizes $N \times N$ de quatérnions e usando a propriedade (A.21), temos

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}, \quad (\text{A.26})$$

onde “*” significa conjugação complexa quaterniônica.

Apêndice B

Parametrização da matriz de transferência

A parametrização da matriz de transferência para todas as classes de universalidade foi feita por Mello e Pichard [66]. Na descrição destes, o caso simplético ficou bastante complicado. Este problema foi resolvido por Macêdo [67] através do uso de quatérnions que simplificou a parametrização, possibilitando avanços no entendimento do problema.

Neste apêndice, vamos seguir as idéias dos dois trabalhos mencionados para parametrizar a matriz de transferência no caso Quiral.

B.1 Caso ortogonal

Já vimos as conseqüências das simetrias de invariância sob reversão temporal, de conservação de fluxo e Quiral na estrutura da matriz de transferência. Elas são

1. Reversão temporal

$$\Sigma_x M \Sigma_x = M^* \tag{B.1}$$

2. Conservação de fluxo

$$M \Sigma_z M^\dagger = \Sigma_z \tag{B.2}$$

$$M^\dagger \Sigma_z M = \Sigma_z \tag{B.3}$$

3. Quiral

$$\Sigma_x M \Sigma_x = M. \tag{B.4}$$

Agora vamos discutir a estrutura geral de M e sua parametrização. Suponha que M tem a forma

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

onde cada elemento de matriz denota uma matriz $N \times N$. Da simetria de reversão temporal, temos

$$\delta = \alpha^*, \quad \gamma = \beta^* \quad (\text{B.6})$$

e a Eq. (B.5) fica

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

A simetria Quiral (B.4) implica serem α e β matrizes reais. Então,

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

Enquanto a conservação de fluxo, (B.2), aplicada em (B.8) resulta em

$$\alpha^T \alpha - \beta^T \beta = 1 \quad (\text{B.9a})$$

$$\alpha^T \beta = \beta^T \alpha, \quad (\text{B.9b})$$

onde 1 designa a matriz identidade $N \times N$. A condição equivalente (B.3) aplicada à (B.8) implica

$$\alpha \alpha^T - \beta \beta^T = 1, \quad (\text{B.10a})$$

$$\alpha \beta^T = \beta \alpha^T. \quad (\text{B.10b})$$

A Eq. (B.8), com as restrições (B.9) e (B.10), constitui a forma mais geral da matriz de transferência M . Para α e β arbitrários, a matriz M tem $2N^2$ parâmetros reais. No entanto, temos $N(N+1)/2$ equações de vínculo (B.10a) e em $N(N-1)/2$ em (B.10b). Então, o número ν de parâmetros reais livres é

$$\nu = N^2. \quad (\text{B.11})$$

Agora vamos considerar a representação polar

$$\alpha = ulv, \quad \beta = u'l'v', \quad (\text{B.12})$$

onde u, v, u' e v' são matrizes ortogonais $N \times N$ e l, l' são matrizes diagonais reais e positivas.

A matriz diagonal na representação polar é única: l contém as raízes quadradas positivas dos autovalores da matriz simétrica $h = \alpha\alpha^T$. No entanto, as matrizes u e v não são únicas: suponha que l tem a estrutura

$$l = \begin{pmatrix} l_1 I_{n_1} & & \phi \\ & \ddots & \\ \phi & & l_k I_{n_k} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.13})$$

onde I_{n_i} é a matriz identidade $n_i \times n_i$, l_i são números positivos e $\sum_{i=1}^k n_i = N$. Então a transformação

$$u \rightarrow ud, \quad v \rightarrow d^T v \quad (\text{B.14})$$

com d tendo a estrutura

$$d = \begin{pmatrix} u_1 & & \phi \\ & \ddots & \\ \phi & & u_k \end{pmatrix}, \quad (\text{B.15})$$

($u_i, i = 1, \dots, k$, são matrizes ortogonais $n_i \times n_i$) deixa α invariante:

$$\alpha = ulv \rightarrow udl d^T v = ulv \quad (\text{B.16})$$

Substituindo (B.12) em (B.9a)-(B.10b), temos

$$v^T l^2 v - v'^T l'^2 v' = 1, \quad (\text{B.17})$$

$$v^T l u^T u' l' v' = v'^T l' u'^T u l v, \quad (\text{B.18})$$

$$u l^2 u^T - u' l'^2 u'^T = 1, \quad (\text{B.19})$$

$$u l v v'^T l' u'^T = u' l' v' v^T l u^T. \quad (\text{B.20})$$

A equação (B.19) pode ser escrita como

$$w \mu w^T = \mu', \quad (\text{B.21})$$

onde $w = u'^T u$, $\mu = l^2 - 1$ e $\mu' = l'^2$. Pode-se verificar facilmente que a matriz w satisfazendo (B.21) só pode ser escrita na forma

$$w = P d_1, \quad (\text{B.22})$$

onde P é uma matriz de permutação e d_1 é uma matriz ortogonal com a estrutura (B.15). Temos então

$$u' = u d_1^T P^T \quad (\text{B.23})$$

e

$$l' = P \sqrt{l^2 - 1} P^T. \quad (\text{B.24})$$

Similarmente, de (B.17) obtemos

$$v' = P d_2 v, \quad (\text{B.25})$$

onde d_2 é outra matriz ortogonal com a estrutura (B.15). Se substituirmos (B.23), (B.24) e (B.25) em (B.18) e (B.20), temos

$$s \equiv d_1^T d_2 = s^T, \quad (\text{B.26})$$

vemos que s é ortogonal e $[s, l] = 0$. Então, dado $\alpha = ulv$, a forma geral de escrever β é

$$\beta = us \sqrt{l^2 - 1} v. \quad (\text{B.27})$$

Como qualquer matriz ortogonal pode ser diagonalizada por uma transformação ortogonal, temos

$$R^T s R = 1, \quad (\text{B.28})$$

onde R é a matriz cujas colunas são compostas de autovetores de s . Podemos utilizar a arbitrariedade da representação (B.12) e redefinir

$$\begin{cases} u \rightarrow u R^T \\ v \rightarrow R v \end{cases} \quad ; \quad [R, l] = 0 \quad (\text{B.29})$$

então,

$$\alpha = ulv, \quad (\text{B.30})$$

$$\beta = u \sqrt{l^2 - 1} v. \quad (\text{B.31})$$

Conclusão: No caso Quiral - ortogonal, qualquer matriz de transferência pode ser escrita como

$$M = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\lambda} & \sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} & \sqrt{1+\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \quad (\text{B.32})$$

onde $\lambda = l^2 - 1$. Lembrando que o número de parâmetros livres de uma matriz ortogonal $N \times N$ é $N(N-1)/2$, o número de parâmetros reais livres de (B.36) é

$$\nu = 2\frac{N(N-1)}{2} + N = N^2, \quad (\text{B.33})$$

o que concorda com (B.11).

B.2 Caso unitário

Neste caso não há simetria de reversão temporal e as matrizes α e β da equação (B.8) são complexas. A conservação de fluxo, (B.2), aplicada em (B.8) com coeficientes complexos resulta em

$$\alpha^\dagger \alpha - \beta^\dagger \beta = 1 \quad (\text{B.34a})$$

$$\alpha^\dagger \beta = \beta^\dagger \alpha. \quad (\text{B.34b})$$

A condição equivalente, (B.3), implica

$$\alpha \alpha^\dagger - \beta \beta^\dagger = 1 \quad (\text{B.35a})$$

$$\alpha \beta^\dagger = \beta \alpha^\dagger. \quad (\text{B.35b})$$

A equação (B.8), com α e β complexos, juntamente com as restrições (B.34) e (B.35) constituem a forma mais geral da matriz de transferência no caso unitário. Para α e β arbitrários, a matriz M tem $4N^2$ parâmetros reais, mas temos $2N^2$ equações de vínculos, resultando em $\nu = 2N^2$ parâmetros livres.

O procedimento da representação polar é análogo e não o repetiremos aqui. A única diferença é que as matrizes u e v são unitárias e a matriz s é unitária e auto-adjunta. Com os mesmos cálculos chegamos à expressão

$$M = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\lambda} & \sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} & \sqrt{1+\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} = U \Gamma V. \quad (\text{B.36})$$

Surge aqui um detalhe interessante. Como u e v são matrizes unitárias, temos um total de

$$\nu = 2N^2 + N$$

parâmetros reais livres. Temos N parâmetros além do necessário. Isso ocorre devido a não unicidade da representação. Considere a transformação

$$u \rightarrow uu_0, \quad v \rightarrow v_0v \quad (\text{B.37})$$

que deixa α e β invariantes. É necessário que $u_0 = d^{(1)}$ e $v_0 = d^{(2)}$ com $[d^{(i)}, l] = 0$. Aplicando a transformação, temos

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow ud^{(1)}ld^{(2)}v = ud^{(1)}d^{(2)}lv \\ \beta &\rightarrow ud^{(1)}\sqrt{l^2 - 1}d^{(2)}v = ud^{(1)}d^{(2)}\sqrt{l^2 - 1}v \end{aligned}$$

a invariância de α e β implica que $d^{(1)}d^{(2)} = 1$ ou $d^{(2)} = d^{(1)\dagger}$. Isto é, se

$$G = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad (\text{B.38})$$

com d tendo a estrutura (B.15), então $M = UGV$ é invariante pela transformação

$$U \rightarrow UG, \quad V \rightarrow G^\dagger V. \quad (\text{B.39})$$

Em particular, no caso não degenerado, d fica

$$d = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_N} \end{pmatrix} \quad (\text{B.40})$$

e a arbitrariedade se restringe a N fases. Podemos usar essa liberdade para eliminar N parâmetros na matriz de transferência, resultando em

$$\nu = 2N^2, \quad (\text{B.41})$$

número correto de parâmetros reais livres na matriz de transferência no caso Quiral-Unitário.

B.3 Caso simplético

Neste caso estudamos partículas de spin $1/2$ satisfazendo a conservação de fluxo e a reversão temporal. Por ser mais conveniente, vamos usar a linguagem de quatérnions. Levando em conta as simetrias Quiral e de reversão temporal, a matriz M tem a forma (B.8) com α e β matrizes quatérnions reais. Para α e β arbitrários temos $8N^2$ parâmetros reais livres. A conservação de corrente, (B.2), impõe os vínculos

$$\bar{\alpha}\alpha - \bar{\beta}\beta = 1 \quad (\text{B.42})$$

$$\bar{\alpha}\beta = \bar{\beta}\alpha. \quad (\text{B.43})$$

De forma análoga, a equação (B.3) fornece

$$\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1, \quad (\text{B.44})$$

$$\alpha\bar{\beta} = \beta\bar{\alpha}, \quad (\text{B.45})$$

onde a barra indica conjugação quaterniônica. O número de vínculos de (B.44) é $2N^2 - N$. Já a equação (B.45) fornece $2N^2 + N$. Então o número de parâmetros reais livres da matriz de transferência no caso quiral-simplético é

$$\nu = 8N^2 - N(2N + 1) - N(2N - 1) = 4N^2. \quad (\text{B.46})$$

Usando a representação polar

$$\alpha = ulv, \quad \beta = u'l'v'$$

com u, v, u' e v' matrizes quatérnions reais unitárias e l, l' matrizes quatérnions reais e diagonais. Usando o mesmo procedimento adotado anteriormente, temos

$$\beta = us\sqrt{l'^2 - 1}v \quad (\text{B.47})$$

onde s é uma matriz quatérnion real, unitária e auto-dual, tal que $[s, l] = 0$. Vamos analisar os vínculos impostos a s .

1. Quatérnion real: $s = s^*$

$$s = \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N1} & \dots & s_{NN} \end{pmatrix}, \quad \text{onde } s_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_{ij} & \beta_{ij} \\ -\beta_{ij}^* & \alpha_{ij}^* \end{pmatrix}, \quad (\text{B.48})$$

com α_{ij} e $\beta_{ij} \in \mathbb{C}$.

2. Auto-dual: $s = \bar{s}$

$$s_{ij} = (\bar{s})_{ij} = \overline{(s_{ji})}$$

então,

$$\begin{pmatrix} \alpha_{ij} & \beta_{ij} \\ -\beta_{ij}^* & \alpha_{ij}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{ji}^* & -\beta_{ji} \\ \beta_{ji}^* & \alpha_{ji} \end{pmatrix},$$

o que implica $\alpha_{ji} = \alpha_{ij}^*$ e $\beta_{ji} = -\beta_{ij}$. Então os elementos da diagonal têm a forma

$$s_{ii} = \alpha_{ii} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.49})$$

onde $\alpha_{ii} \in \mathbb{R}$.

3. $[s, l] = 0$: s tem a mesma a estrutura de bloco de l

No caso não degenerado

$$l = \begin{pmatrix} l_1 e_0 & & \\ & \ddots & \\ & & l_{NN} e_0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad s = \begin{pmatrix} \alpha_{11} e_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_{NN} e_0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.50})$$

4. Unitariedade: $ss^\dagger = s\bar{s} = 1$

Usando (B.50), temos $(\alpha_{ii})^2 = 1$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Conclusão: $s = \pm 1$. Escolhendo o sinal positivo, temos

$$\begin{cases} \alpha = ulv \\ \beta = u\sqrt{l^2 - 1}v \end{cases} \quad (\text{B.51})$$

Fazendo $l^2 = 1 + \lambda$, temos

$$M = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\lambda} & \sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} & \sqrt{1+\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} = UTV. \quad (\text{B.52})$$

Como o número de parâmetros reais de uma matriz quatérnion real unitária é $2N^2 + N$, a parametrização tem $4N^2 + 3N$ parâmetros livres, possuindo assim $3N$ parâmetros redundantes. Para entender essa redundância vamos considerar a questão da unicidade da parametrização. Considere a transformação

$$u \rightarrow ud_1, \quad v \rightarrow d_2v,$$

com d_1 e d_2 quatérnions reais unitários $N \times N$ tais que $[d_1, l] = 0 = [d_2, l]$. Temos

$$\alpha \rightarrow ud_1d_2\sqrt{1+\lambda v}, \quad \beta \rightarrow ud_1d_2\sqrt{\lambda v}.$$

M é invariante se $d_1d_2 = 1$, ou $d_2 = d_1^\dagger = \bar{d}_1$. Ou seja, se

$$G = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

então $M = UTV$ é invariante pela transformação $U \rightarrow UG$, $V \rightarrow \bar{G}V$. Vamos analisar a estrutura de d .

1. Caso particular: $N = 1$

d é quatérnion real unitário

$$d = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}, \quad \text{com} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (\text{B.53})$$

vemos que $d \in SU(2)$ e possui 3 parâmetros livres.

2. Caso geral: $N > 1$

Neste caso

$$d = \begin{pmatrix} d_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & d_{NN} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.54})$$

onde d_{ii} ($i = 1, \dots, N$) $\in SU(2)$. Temos N matrizes $SU(2)$ fornecendo $3N$ parâmetros que podem ser usados para eliminar os $3N$ parâmetros redundantes de (B.52).

Apêndice C

Matriz de espalhamento: Medida invariante

A medida é definida pela condição de ser invariante por um automorfismo de uma dada classe de simetria nela mesma:

$$d\mu^\beta(S) = d\mu^\beta(S'). \quad (\text{C.1})$$

Para $\beta = 1$, a matriz transformada S' se relaciona com S por

$$S' = U_0 S U_0^T, \quad (\text{C.2})$$

onde U_0 é uma matriz unitária arbitrária. Obviamente, (C.2) é um automorfismo do conjunto das matrizes unitárias simétricas nele mesmo. Para $\beta = 2$,

$$S' = U_0 S V_0, \quad (\text{C.3})$$

onde U_0 e V_0 são matrizes unitárias arbitrárias. Para $\beta = 4$, temos

$$S' = U_0 S \bar{U}_0, \quad (\text{C.4})$$

onde U_0 é uma matriz unitária simplética.

A medida invariante para o ensemble de matrizes de espalhamento nas classes de Wigner-Dyson foi trabalhada nas referências [33],[34], para os casos $\beta = 1$ e $\beta = 2$. Antes de calcular a medida invariante da matriz S na classe Quiral, vamos considerar o resultado conhecido da geometria diferencial:

Teorema C.1 *Dado o elemento de arco*

$$ds^2 = \sum g_{\mu\nu} \delta x_\mu \delta x_\nu \quad (\text{C.5})$$

que define o tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$. Se ds^2 é invariante pela transformação $x_\mu = x_\mu(x'_1, x'_2, \dots)$, então o elemento de volume

$$dV = |\det g(x)|^{1/2} \prod_{\mu} \delta x_{\mu} \quad (\text{C.6})$$

também é invariante sob a mesma transformação.

Voltando ao problema da matriz S , definimos o elemento de arco

$$ds^2 = \text{Tr}[dS^\dagger dS]. \quad (\text{C.7})$$

Esta expressão é invariante sob as transformações (C.2), (C.3) e (C.4).

C.1 Caso ortogonal

A representação polar da matriz S no caso $\beta = 1$, é

$$S = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-\tau} & \sqrt{\tau} \\ \sqrt{\tau} & \sqrt{1-\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^\text{T} & 0 \\ 0 & u^\text{T} \end{pmatrix} \equiv VRV^\text{T}. \quad (\text{C.8})$$

Diferenciando S obtemos

$$\begin{aligned} dS &= (dV)RV^\text{T} + V(dR)V^\text{T} + VR(dV^\text{T}) \\ &= V[\delta VR + dR + R(\delta V)^\text{T}]V^\text{T}, \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

onde introduzimos a matriz anti-simétrica

$$\delta V = V^\text{T}dV, \quad (\delta V)^\text{T} = dV^\text{T}V = -(\delta V). \quad (\text{C.10})$$

O elemento de arco (C.7) fica

$$\begin{aligned} ds^2 = \text{Tr}[& \delta VR\delta VR + \delta VRdR + \delta VRR(\delta V)^\text{T} + \\ & dR\delta VR + (dR)^2 + dRR(\delta V)^\text{T} + \\ & R(\delta V)^\text{T}\delta VR + R(\delta V)^\text{T}dR + R(\delta V)^\text{T}R(\delta V)^\text{T}]. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

As diferenciais da equação anterior podem ser expressas como

$$dR = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{d\tau}{\sqrt{\rho}} & \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \\ \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} & -\frac{d\tau}{\sqrt{\rho}} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.12})$$

$$\delta V = \begin{pmatrix} v^T dv & 0 \\ 0 & u^T du \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta v & 0 \\ 0 & \delta u \end{pmatrix}, \quad (\text{C.13})$$

onde $\rho = 1 - \tau$ e $\delta u, \delta v$ são matrizes anti-ortogonais. Efetuando o produto das matrizes, temos $R^2 = 1, RdR = -dRR$ e

$$\text{Tr}[R(\delta V)^T dR] = \text{Tr}[dR(\delta V)R] = \text{Tr}[dRR(\delta V)^T] = \text{Tr}[(\delta V)RdR] = 0. \quad (\text{C.14})$$

Resultando em

$$ds^2 = \text{Tr}[2(\delta V)^T \delta V + (dR)^2 + (\delta V)R(\delta V)R + R(\delta V)^T R(\delta V)^T]. \quad (\text{C.15})$$

Como $R(\delta V)^T R(\delta V)^T = (\delta V R \delta V R)^T$ e o traço de uma matriz é igual ao de sua transposta, temos

$$ds^2 = \text{Tr}[2(\delta V)^T \delta V + (dR)^2 + 2(\delta V)R(\delta V)R]. \quad (\text{C.16})$$

Calculando os traços

$$\text{Tr}[(dR)^2] = \frac{1}{2} \text{tr} \left(\frac{d\tau d\tau}{\tau(1-\tau)} \right), \quad (\text{C.17})$$

$$\text{Tr}[(\delta V)^T \delta V] = \text{tr}[(\delta v)^T \delta v] + \text{tr}[(\delta u)^T \delta u], \quad (\text{C.18})$$

$$\text{Tr}[(\delta V)R(\delta V)R] = \text{tr}[\delta v \sqrt{\rho} \delta v \sqrt{\rho} + \delta v \sqrt{\tau} \delta u \sqrt{\tau} + \delta u \sqrt{\tau} \delta v \sqrt{\tau} + \delta u \sqrt{\rho} \delta u \sqrt{\rho}]. \quad (\text{C.19})$$

Substituindo (C.17), (C.18) e (C.19) em (C.16), o elemento de linha fica

$$ds^2 = 2 \text{tr} \left[(\delta v)^T \delta v + (\delta u)^T \delta u + \delta v \sqrt{\rho} \delta v \sqrt{\rho} + \delta v \sqrt{\tau} \delta u \sqrt{\tau} + \delta u \sqrt{\tau} \delta v \sqrt{\tau} + \delta u \sqrt{\rho} \delta u \sqrt{\rho} + \frac{1}{4} \frac{d\tau d\tau}{\tau\rho} \right]. \quad (\text{C.20})$$

Efetuando os produtos das matrizes, calculando os novos traços e usando o fato de as matrizes δu e δv serem simétricas, temos

$$\begin{aligned} \text{tr}[(\delta v)^T (\delta v)] &= 2 \sum_{a<b} (\delta v)_{ab}^2 \\ \text{tr}[(\delta u)^T (\delta u)] &= 2 \sum_{a<b} (\delta u)_{ab}^2 \\ \text{tr}[\delta v \sqrt{\rho} \delta v \sqrt{\rho}] &= -2 \sum_{a<b} \sqrt{\rho_a \rho_b} (\delta v)_{ab}^2 \\ \text{tr}[\delta v \sqrt{\tau} \delta u \sqrt{\tau}] &= -2 \sum_{a<b} \sqrt{\tau_a \tau_b} (\delta v)_{ab} (\delta u)_{ab} \\ \text{tr}[\delta u \sqrt{\tau} \delta v \sqrt{\tau}] &= -2 \sum_{a<b} \sqrt{\tau_a \tau_b} (\delta u)_{ab} (\delta v)_{ab} \\ \text{tr}[\delta u \sqrt{\rho} \delta u \sqrt{\rho}] &= -2 \sum_{a<b} \sqrt{\rho_a \rho_b} (\delta u)_{ab}^2. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Substituindo (C.21) em (C.20), o elemento de linha fica

$$ds^2 = 4 \sum_{a < b} [(1 - \sqrt{\rho_a \rho_b})[(\delta u)_{ab}^2 + (\delta v)_{ab}^2] - 2\sqrt{\tau_a \tau_b}(\delta u)_{ab}(\delta v)_{ab}] + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \frac{(d\tau_a)^2}{\tau_a \rho_a}. \quad (\text{C.22})$$

Esta equação tem a estrutura (C.5) e fornece os elementos de matriz do tensor métrico g . Note que temos $\nu = N^2$ variáveis independentes (duas matrizes anti-simétricas $N \times N$ e uma diagonal). Logo, g é uma matriz $\nu \times \nu$. Nomeando as linhas e colunas usando as ν variáveis na ordem

$$(\delta u)_{12}, (\delta v)_{12}, (\delta u)_{13}, (\delta v)_{13}, \dots, (\delta u)_{1,N}, (\delta v)_{1,N}, (\delta u)_{23}, (\delta v)_{23}, \dots, \quad (\text{C.23})$$

$$(\delta u)_{2,N}, (\delta v)_{2,N}, \dots, (\delta u)_{N-1,N}, (\delta v)_{N-1,N}, d\tau_1, \dots, d\tau_N,$$

temos $N(N-1)/2$ blocos 2×2 com linhas e colunas rotuladas por $(\delta u)_{ab}$ e $(\delta v)_{ab}$

$$\begin{array}{cc} (\delta u)_{ab} & (\delta v)_{ab} \\ (\delta u)_{ab} & \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{\rho_a \rho_b} & -\sqrt{\tau_a \tau_b} \\ -\sqrt{\tau_a \tau_b} & 1 - \sqrt{\rho_a \rho_b} \end{pmatrix} \end{array} \quad (\text{C.24})$$

e N “ blocos unidimensionais ” $1/(\tau_a \rho_a)$, rotulados por $d\tau_a$. O determinante de g é dado por

$$\det g \propto \prod_{a < b} [(1 - \sqrt{\rho_a \rho_b})^2 - \tau_a \tau_b] \prod_{a=1}^N \frac{1}{\rho_a \tau_a}. \quad (\text{C.25})$$

O elemento de volume invariante é dado por

$$d\mu(S) = \sqrt{|\det g|} \prod_{a=1}^N d\tau_a \prod_{a < b} (\delta u)_{ab} (\delta v)_{ab}. \quad (\text{C.26})$$

Fazendo a mudança de variáveis $\tau_a \rightarrow \text{sech}^2(x_a)$, ($a = 1, \dots, N$), temos

$$d\mu(S) \propto \prod_{a < b} |\tanh(x_b) - \tanh(x_a)| \prod_{a=1}^N \text{sech}(x_a) \prod_{a=1}^N dx_a \prod_{a < b} (\delta u)_{ab} (\delta v)_{ab}. \quad (\text{C.27})$$

C.2 Caso unitário

A representação polar da matriz S no caso $\beta = 2$, é

$$S = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-\tau} & \sqrt{\tau} \\ \sqrt{\tau} & \sqrt{1-\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^\dagger & 0 \\ 0 & u^\dagger \end{pmatrix} \equiv V R V^\dagger, \quad (\text{C.28})$$

com u e v matrizes unitárias. Diferenciando S , obtemos

$$dS = V[\delta V R + dR + R(\delta V)^\dagger]V^\dagger, \quad (\text{C.29})$$

onde introduzimos a matriz anti-unitária

$$\delta V = V^\dagger dV, \quad (\delta V)^\dagger = dV^\dagger V = -(\delta V). \quad (\text{C.30})$$

O elemento de arco (C.7) fica

$$ds^2 = \text{Tr}[\delta V R \delta V R + \delta V R dR + \delta V R R(\delta V)^\dagger + dR \delta V R + (dR)^2 + dR R(\delta V)^\dagger + R(\delta V)^\dagger \delta V R + R(\delta V)^\dagger dR + R(\delta V)^\dagger R(\delta V)^\dagger]. \quad (\text{C.31})$$

O procedimento é análogo ao anterior, após efetuar os produtos de matriz elemento de linha

$$ds^2 = 2\text{tr}\{(\delta u)^\dagger(\delta u) + (\delta v)^\dagger(\delta v) + \frac{1}{4}\frac{d\tau d\tau}{\tau\rho} + \text{Re}[\sqrt{\rho}(\delta v)^\dagger\sqrt{\rho}(\delta v) + \sqrt{\tau}(\delta u)^\dagger\sqrt{\tau}(\delta v) + \sqrt{\tau}(\delta v)^\dagger\sqrt{\tau}(\delta u) + \sqrt{\rho}(\delta u)^\dagger\sqrt{\rho}(\delta u)]\}. \quad (\text{C.32})$$

As matrizes anti-hermitianas δu e δv podem ser escritas como

$$\delta v = \delta a_1 + i\delta s_1, \quad (\text{C.33})$$

$$\delta u = \delta a_2 + i\delta s_2, \quad (\text{C.34})$$

onde $\delta a_1, \delta a_2$ são matrizes reais simétricas e $\delta s_1, \delta s_2$ são matrizes reais anti-simétricas. Em termos destas matrizes, o elemento de linha fica

$$ds^2 = 2\sum_a \left\{ (1 - \rho_a) \sum_{i=1}^2 (\delta s_i)_{aa}^2 - 2\tau_a (\delta s_1)_{aa} (\delta s_2)_{aa} + \frac{1}{4} \frac{(d\tau_a)^2}{\tau_a \rho_a} \right\} + 4\prod_{a<b} \left\{ (1 - \sqrt{\rho_a \rho_b}) \sum_{i=1}^2 [(\delta a_i)_{ab}^2 + (\delta s_i)_{ab}^2] - 2\sqrt{\tau_a \tau_b} [(\delta a_1)_{ab} (\delta a_2)_{ab} + (\delta s_1)_{ab} (\delta s_2)_{ab}] \right\}. \quad (\text{C.35})$$

Fazendo $\rho_a = 1 - \tau_a$, o termo diagonal de (C.35) fica

$$2\sum_a \left\{ \tau_a [(\delta s_1)_{aa} - (\delta s_2)_{aa}]^2 + \frac{1}{4} \frac{(d\tau_a)^2}{\tau_a (1 - \tau_a)} \right\}. \quad (\text{C.36})$$

Note que as $2N$ variáveis $(\delta s_1)_{aa}$ e $(\delta s_2)_{aa}$ aparecem apenas como N combinações $\delta y_a \equiv (\delta s_1)_{aa} - (\delta s_2)_{aa}$. Em termos de δy_a , o elemento de linha fica

$$ds^2 = 2 \sum_a \left\{ \tau_a (\delta y_a)^2 + \frac{1}{4} \frac{(d\tau_a)^2}{\tau_a \rho_a} \right\} + 4 \prod_{a < b} \left\{ (1 - \sqrt{\rho_a \rho_b}) [(\delta a_1)_{ab}^2 + (\delta a_2)_{ab}^2 + (\delta s_1)_{ab}^2 + (\delta s_2)_{ab}^2] - 2\sqrt{\tau_a \tau_b} [(\delta a_1)_{ab}(\delta a_2)_{ab} + (\delta s_1)_{ab}(\delta s_2)_{ab}] \right\}. \quad (\text{C.37})$$

Na equação (C.37), os $(\delta s_i)_{ab}$ e $(\delta a_i)_{ab}$ para $i = 1, 2$ e $a < b$ contribuem com $4 \cdot N(N-1)/2$ variáveis independentes. Temos ainda os $(\delta y)_a$ que, juntamente com os τ_a , fornecem $2N$. Totalizando $\nu = 2N^2$, número correto de variáveis independentes no caso Quiral unitário. Agrupando convenientemente as $2N^2$ variáveis independentes, o tensor métrico tem uma estrutura simples constituída de blocos 1×1 e 2×2 ao longo da diagonal. Temos N blocos unidimensionais $2\tau_a$ rotulados por δy_a , N blocos unidimensionais $1/(\tau_a \rho_a)$ rotulados por $d\tau_a$, $N(N-1)/2$ blocos rotulados por $(\delta s_1)_{ab}$ e $(\delta s_2)_{ab}$

$$\begin{array}{cc} (\delta s_1)_{ab} & (\delta s_2)_{ab} \\ (\delta s_1)_{ab} & \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{\rho_a \rho_b} & -\sqrt{\tau_a \tau_b} \\ -\sqrt{\tau_a \tau_b} & 1 - \sqrt{\rho_a \rho_b} \end{pmatrix} \end{array} \quad (\text{C.38})$$

e outros $N(N-1)/2$ blocos idênticos à (C.38) rotulados por $(\delta a_1)_{ab}$ e $(\delta a_2)_{ab}$. O determinante de g é

$$\det g \propto \prod_{a < b} [(1 - \sqrt{\rho_a \rho_b})^2 - \tau_a \tau_b]^2 \prod_{a=1}^N \frac{1}{\rho_a}. \quad (\text{C.39})$$

Fazendo a transformação $\tau_a \rightarrow \text{sech}^2(x_a)$, temos o elemento de volume invariante

$$d\mu(S) \propto \prod_{a < b} |\tanh(x_b) - \tanh(x_a)|^2 \prod_{a=1}^N \text{sech}^2(x_a) \prod_{a=1}^N dx_a \prod_{a=1}^N (\delta y)_a \prod_{a < b} (\delta s_1)_{ab} (\delta s_2)_{ab} (\delta a_1)_{ab} (\delta a_2)_{ab}. \quad (\text{C.40})$$

C.3 Caso simplético

A representação polar da matriz S no caso $\beta = 4$, é

$$S = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-\tau} & \sqrt{\tau} \\ \sqrt{\tau} & \sqrt{1-\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v} & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{pmatrix} \equiv VR\bar{V}, \quad (\text{C.41})$$

com u e v matrizes quatérnions reais unitárias. Diferenciando S , obtemos

$$dS = V[\delta V R + dR + R(\overline{\delta V})]\bar{V}, \quad (\text{C.42})$$

onde introduzimos a matriz anti-auto-dual.

$$\delta V = \bar{V} dV, \quad (\overline{\delta V}) = d\bar{V} V = -(\delta V). \quad (\text{C.43})$$

O elemento de arco (C.7) fica

$$ds^2 = \text{Tr}[\delta V R \delta V R + \delta V R dR + \delta V R R(\overline{\delta V}) + dR \delta V R + (dR)^2 + dR R(\overline{\delta V}) + R(\overline{\delta V}) \delta V R + R(\overline{\delta V}) dR + R(\overline{\delta V}) R(\overline{\delta V})]. \quad (\text{C.44})$$

O procedimento é análogo ao anterior, após efetuar os produtos das matrizes e calcular os traços, o elemento de linha fica

$$ds^2 = 2\text{tr}\{ (\overline{\delta u})(\delta u) + (\overline{\delta v})(\delta v) + \frac{1}{4} \frac{d\tau d\tau}{\tau \rho} + \delta v \sqrt{\rho} \delta v \sqrt{\rho} + \delta v \sqrt{\tau} \delta u \sqrt{\tau} + \delta u \sqrt{\tau} \delta v \sqrt{\tau} + \delta u \sqrt{\rho} \delta u \sqrt{\rho} \}. \quad (\text{C.45})$$

Vamos calcular o traço do primeiro termo da equação (C.45)

$$\text{tr}[(\overline{\delta v})(\delta v)] = \sum_{ab} \text{tr}[(\overline{\delta v})_{ba}(\delta v)_{ab}] = \sum_{ab} \text{tr}[(\overline{\delta v_{ab}})(\delta v)_{ab}] = 2 \sum_{ab} \sum_{i=0}^3 (\delta v_{ab}^{(i)})^2, \quad (\text{C.46})$$

onde usamos a propriedade da conjugação quaterniônica $(\overline{\delta v})_{ba} = (\overline{\delta v_{ab}})$. Como δv é anti -auto -dual, pode ser decomposta na base de quatérnions em uma matriz anti-simétrica $\delta v_{ab}^{(0)} = -\delta v_{ba}^{(0)}$ e três matrizes simétricas $\delta v_{ab}^{(i)} = \delta v_{ba}^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$. Então,

$$\text{tr}[(\overline{\delta v})(\delta v)] = 2 \sum_{a=1}^N \sum_{i=1}^3 (\delta v_{aa}^{(i)})^2 + 4 \sum_{a < b}^N \sum_{i=0}^3 (\delta v_{ab}^{(i)})^2 \quad (\text{C.47})$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} \text{tr}[(\overline{\delta u})(\delta u)] &= 2 \sum_{a=1}^N \sum_{i=1}^3 (\delta u_{aa}^{(i)})^2 + 4 \sum_{a < b}^N \sum_{i=0}^3 (\delta u_{ab}^{(i)})^2, \\ \text{tr}[\delta v \sqrt{\tau} \delta u \sqrt{\tau}] &= -2 \sum_{a=1}^N \tau_a \sum_{i=1}^3 \delta v_{aa}^{(i)} \delta u_{aa}^{(i)} - 4 \sum_{a < b}^N \sqrt{\tau_a \tau_b} \sum_{i=0}^3 \delta v_{ab}^{(i)} \delta u_{ab}^{(i)}, \\ \text{tr}[\delta u \sqrt{\tau} \delta v \sqrt{\tau}] &= -2 \sum_{a=1}^N \tau_a \sum_{i=1}^3 \delta u_{aa}^{(i)} \delta v_{aa}^{(i)} - 4 \sum_{a < b}^N \sqrt{\tau_a \tau_b} \sum_{i=0}^3 \delta u_{ab}^{(i)} \delta v_{ab}^{(i)}, \\ \text{tr}[\delta v \sqrt{\rho} \delta v \sqrt{\rho}] &= -2 \sum_{a=1}^N \rho_a \sum_{i=1}^3 (\delta v_{aa}^{(i)})^2 - 4 \sum_{a < b}^N \sqrt{\rho_a \rho_b} \sum_{i=0}^3 (\delta v_{ab}^{(i)})^2, \\ \text{tr}[\delta u \sqrt{\rho} \delta u \sqrt{\rho}] &= -2 \sum_{a=1}^N \rho_a \sum_{i=1}^3 (\delta u_{aa}^{(i)})^2 - 4 \sum_{a < b}^N \sqrt{\rho_a \rho_b} \sum_{i=0}^3 (\delta u_{ab}^{(i)})^2. \end{aligned} \quad (\text{C.48})$$

Substituindo (C.47) e (C.48) em (C.45), temos

$$\begin{aligned}
ds^2 = & 4 \sum_{a=1}^N \left\{ \sum_{i=1}^3 [(\delta v_{aa}^{(i)})^2 + (\delta u_{aa}^{(i)})^2 - 2\tau_a (\delta u_{aa}^{(i)}) (\delta v_{aa}^{(i)}) \right. \\
& \left. - (1 - \tau_a) [(\delta v_{aa}^{(i)})^2 + (\delta u_{aa}^{(i)})^2] + \frac{1}{4} \frac{(d\tau_a)^2}{\tau_a \rho_a} \right\} \\
& + 8 \sum_{a < b} \sum_{i=1}^3 \left\{ (\delta v_{ab}^{(i)})^2 + (\delta u_{ab}^{(i)})^2 - 2\sqrt{\tau_a \tau_b} (\delta u_{ab}^{(i)}) (\delta v_{ab}^{(i)}) \right. \\
& \left. - \sqrt{\rho_a \rho_b} (\delta u_{ab}^{(i)}) [(\delta v_{ab}^{(i)})^2 + (\delta u_{ab}^{(i)})^2] \right\}.
\end{aligned} \tag{C.49}$$

Definindo $\delta y_a^{(i)} \equiv \delta v_{aa}^{(i)} - \delta u_{aa}^{(i)}$, o elemento de linha fica

$$\begin{aligned}
ds^2 = & 4 \sum_{a=1}^N \left\{ \tau_a \sum_{i=1}^3 (\delta y_a^{(i)})^2 + \frac{1}{4} \frac{(d\tau_a)^2}{\tau_a \rho_a} \right\} \\
& + 8 \sum_{a < b} \sum_{i=1}^3 \left\{ (1 - \sqrt{\rho_a \rho_b}) [(\delta v_{ab}^{(i)})^2 + (\delta u_{ab}^{(i)})^2] - 2\sqrt{\tau_a \tau_b} (\delta u_{ab}^{(i)}) (\delta v_{ab}^{(i)}) \right\}
\end{aligned} \tag{C.50}$$

Na equação (C.50), os $\delta u_{ab}^{(i)}$ e $\delta v_{ab}^{(i)}$ para $i = 0, 1, 2, 3$ e $a < b$ contribuem cada um com $4 \cdot N(N - 1)/2$ variáveis independentes. Temos ainda os $\delta y_a^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$ que, juntamente com os τ_a , fornecem $4N$. Totalizando $\nu = 4N^2$, número correto de variáveis independentes no caso Quiral simplético. O tensor métrico pode ser colocado numa estrutura simples constituída de blocos 1×1 e 2×2 ao longo da diagonal. Temos $3N$ blocos unidimensionais τ_a rotulados por $\delta y_a^{(i)}$, N blocos unidimensionais $1/(\tau_a \rho_a)$ rotulados por $d\tau_a$, $2N(N - 1)$ blocos rotulados por $\delta v_{ab}^{(i)}$ e $\delta u_{ab}^{(i)}$. Para cada valor de i , temos blocos com a estrutura

$$\begin{aligned}
& \begin{matrix} \delta v_{ab}^{(i)} & \delta u_{ab}^{(i)} \end{matrix} \\
& \begin{matrix} \delta v_{ab}^{(i)} \\ \delta u_{ab}^{(i)} \end{matrix} \left(\begin{array}{cc} 1 - \sqrt{\rho_a \rho_b} & -\sqrt{\tau_a \tau_b} \\ -\sqrt{\tau_a \tau_b} & 1 - \sqrt{\rho_a \rho_b} \end{array} \right).
\end{aligned} \tag{C.51}$$

O determinante de g é

$$\det g \propto \prod_{a < b} [(1 - \sqrt{\rho_a \rho_b})^2 - \tau_a \tau_b]^4 \prod_{a=1}^N \frac{\tau_a^2}{\rho_a}. \tag{C.52}$$

Fazendo a transformação $\tau_a \rightarrow \text{sech}^2(x_a)$, temos o elemento de volume invariante

$$d\mu(S) \propto \prod_{a < b} |\tanh(x_b) - \tanh(x_a)|^4 \prod_{a=1}^N \text{sech}^4(x_a) \prod_{a=1}^N dx_a \prod_{a=1}^N \prod_{i=1}^3 \delta y_a^{(i)} \prod_{a < b} \prod_{i=0}^3 \delta v_{ab}^{(i)} \delta u_{ab}^{(i)}. \tag{C.53}$$

Das equações (C.27), (C.40) e (C.53), podemos escrever:

$$d\mu(S) \propto \prod_{a < b} |\tanh(x_b) - \tanh(x_a)|^\beta \prod_{a=1}^N \operatorname{sech}^\beta(x_a) \prod_{a=1}^N dx_a d\mu(u) d\mu(v). \quad (\text{C.54})$$

Outra maneira de escrever a medida é através da transformação $\tau_a \rightarrow \operatorname{sen}^2(2\phi_a)$. O que resulta em:

$$d\mu(S) \propto \prod_{a < b} \prod_{\sigma = \pm} |\operatorname{sen}(\phi_b + \sigma\phi_a)|^\beta \prod_{a=1}^N \operatorname{sen}^{\beta-1}(2\phi_a) \prod_{a=1}^N d\phi_a d\mu(u) d\mu(v). \quad (\text{C.55})$$

Bibliografia

- [1] Ilya Prigogine. *O fim das certezas*. Unesp, 1996.
- [2] J. Rau and B. Müller. From reversible quantum microdynamics to irreversible quantum transport. *Physics Reports*, 272:1–59, 1996.
- [3] R. Kubo, M. Toda, and N. Hashitsume. *Statistical Physics II*. Springer, 1991.
- [4] L. E. Reichl. *A Modern Course in Statistical Physics*. Wiley-Interscience, second edition, 1990.
- [5] David K. Ferry and Stephen M. Goodnick. *Transport in Nanostructures*. Cambridge University Press, 1997.
- [6] C. P. Umbach, S. Washburn, R. B. Laibowitz, and R. A. Webb. Magnetoresistance of small, quasi-one-dimensional, normal-metal rings and lines. *Physical Review B*, **30**(7), 1984.
- [7] W. J. Skocpol, L. D. Jackel, R. E. Howard, P. M. Mankiewich, D. M. Tennant, A. E. White, and R. C. Dynes. Quantum Transport in Narrow Mosfet Channels. *Surface Science*, **170**(1-2), 1986.
- [8] A. D. Stone. Magnetoresistance Fluctuations in Mesoscopic Wires and Rings. *Physical Review Letters*, **54**:2692, 1985.
- [9] Supriyo Datta. *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [10] Yoseph Imry. *Introduction to Mesoscopic Physics*. Oxford University Press, 1997.
- [11] João Eduardo Farias de Araújo. Estatística de Autovalores de Transmissão para Pontos Quânticos: Uma Abordagem Supersimétrica, 2000. Dissertação de mestrado orientada pelo prof. Antônio Murilo Santos Macêdo.

-
- [12] B. J. van Wees et al. Quantized Conductance of Point Contacts in a Two-Dimensional Electron Gas. *Physical Review Letters*, **60**(9):848, 1988.
- [13] D. Wharam et al. One-dimensional transport and the quantization of ballistic resistance. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, **21**:L209–L214, 1988.
- [14] C. M. Marcus et al. Quantum Chaos in Open versus Closed Quantum Dots: Signatures of Interacting Particles. *Chaos, Solitons & Fractals*, **8**(7-8):1261–1279, 1997.
- [15] M. J. Berry, J. A. Katine, R. M. Westervelt, and A. C. Gossard. Influence of shape on electron transport in ballistic quantum dots. *Physical Review B*, **50**(23):17721, 1994.
- [16] Fritz Haake. *Quantum Signatures of Chaos*. Springer-Verlag, 1991.
- [17] H. J. Stöckmann and J. Stein. “Quantum” Chaos in Billiards Studied by Microwave Absorption. *Physical Review Letters*, **64**(19):2215, 1990.
- [18] R. Landauer. Spatial Variation of Currents and Fields Due to Localized Scatterers in Metallic Conduction. *IBM J. Res. Develop*, **1**:223, 1957.
- [19] R. Landauer. Electrical Resistance of Disordered One-Dimensional Lattices. *Phil. Mag.*, **21**:863, 1970.
- [20] M. Büttiker. Four-Terminal Phase Coherent Conductance. *Physical Review Letters*, **57**(14):1761, 1986.
- [21] C. H. Lewenkopf and H. A. Weidenmüller. Stochastic versus Semiclassical Approach to Quantum Chaotic Scattering. *Annals of Physics*, **212**:53–83, 1991.
- [22] P. W. Brouwer. Generalized circular ensemble of scattering matrices for a chaotic cavity with non-ideal leads. *Physical Review B*, **51**(23):16878–16884, 1995.
- [23] P. A. Mello, P. Pereira, and K. Kumar. Macroscopic approach to multichannel disordered conductors. *Annals of Physics*, **181**:290, 1988.
- [24] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison Wesley Company, 1985.
- [25] Albert Messiah. *Quantum Mechanics*, volume I. North-Holland Publishing Company, 1970.

-
- [26] Ya. M. Blanter and M. Büttiker. Shot Noise in Mesoscopic Conductors. *Physics Reports*, **336**(1-2):2–166, 2000.
- [27] Frederick Reif. *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. McGraw-Hill International Editions, 1965.
- [28] Thomas Guhr, Axel Müller, and Hans A. Weidenmüller. Random Matrix Theories in Quantum Physics: Common Concepts.
- [29] R. Balian. Random Matrices and Information Theory. *Nuovo Cimento B*, **57**(1):183, 1968.
- [30] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, third edition, 1999.
- [31] Madan Lau Metha. *Random Matrices*. Academic Press, Inc., 1992.
- [32] C. W. Beenakker. Random-matrix theory of mesoscopic fluctuations in conductors and superconductors. *Physical Review B*, **47**(23):15763, 1993.
- [33] Harold U. Baranger and Pier. A. Mello. Mesoscopic Transport through Chaotic Cavities: A Random S-Matrix Theory Approach. *Physical Review Letters*, **76**(1):142, 1994.
- [34] R. A. Jalabert , J.-L. Pichard and C. W. J. Beenakker. Universal Quantum Signatures of Chaos in Ballistic Transport. *Europhysics Letters*, 27(4):255–260, Aug 1994.
- [35] Freeman J. Dyson. Statistical Theory of the Energy Levels of Complex Systems. **I**. *Journal of Mathematical Physics*, **47**(1):140, 1962.
- [36] Yan V. Fyodorov and Hans-Jügen Sommers. Statistics of resonance poles, phase shifts and time delays in quantum chaotic scattering: Random matrix approach for systems with broken time-reversal invariance. *Journal of Mathematical Physics*, **38**(4):191, 1997.
- [37] A. Albeverio et al. S-matrix, resonances, and wave functions for transport through billiards with leads. *Journal of Mathematical Physics*, **37**(10):4888, 1996.
- [38] A. M. S. Macêdo. Average Conductance Coefficients in Multiterminal Chaotic Cavities. *Physical Review B*, **63**(11):115309, 2001.

-
- [39] Freeman J. Dyson. A Brownian-Motion for the Eigenvalues of a Random Matrix. *Journal of Mathematical Physics*, **3**(6):1191, 1962.
- [40] Klaus Frahm and Jean-Louis Pichard. Brownian Motion Ensembles and Parametric Correlations of the Transmission Eigenvalues: Applications to Coupled Quantum Billiards to disordered wires. *J. Phys. (France)*, 5(7):877–906, July 1995.
- [41] A. M. S. Macêdo. Brezin-Zee dynamical correlator: An S-matrix Brownian motion approach. *Physical Review E*, **55**(2):1457–1462, 1997.
- [42] P. Dennery and A. Krzywicki. *Mathematics for Physicists*. Dover, New York, 1971.
- [43] Glauber Tomaz. Classificação de Ensembles de Movimento Browniano na Teoria de Matrizes Aleatórias, 1995. Dissertação de mestrado orientada pelo prof. Antônio Murilo Santos Macêdo.
- [44] M. R. Zirnbauer. Riemannian symmetric superspaces and their origin in random-matrix theory. *Journal of Mathematical Physics*, **30**(10):4986, 1996.
- [45] M. Caselle. A new classification scheme for Random Matrix Theories. cond-mat/9610017.
- [46] Sigurdur Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*. Academic Press, Inc., 1978.
- [47] P. W. Anderson. Absence of Diffusion in Certain Random Lattices. *Physical Review*, **109**:1492, 1958.
- [48] D. C. Herbert and R. Jones. Localized states in disordered systems. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, **4**(10):1145, 1971.
- [49] Freeman J. Dyson. The Dynamics of a Disordered Linear Chain. *Physical Review*, **92**(6):1331, 1953.
- [50] M. Inui, S. A. Trugman, and Elihu Abrahams. Unusual properties of midband states in systems with off-diagonal disorder. *Physical Review B*, **49**(5):3190, 1994.
- [51] Christopher Mudry and P. W. Brouwer. Random magnetic flux problem in a quantum wire. *Physical Review B*, **59**(20):13221, 1999.

-
- [52] P. W. Brouwer, C. Mudry, B. D. Simons, and A. Altland. Delocalization in Coupled One-Dimensional Chains. *Physical Review Letters*, **81**(4):862, 1998.
- [53] P. W. Brouwer, C. Mudry, and A. Furusaki. Density of States in Coupled Chains with Off-Diagonal Disorder. *Physical Review Letters*, **84**(13):2913, 2000.
- [54] Alexander Altland and Rainer Merkt. Spectral and transport properties of quantum wires with bond disorder. *Nuclear Physics B*, **607**(3):511–548, 2001.
- [55] P. W. Brouwer, E. Racine, A. Furusaki, Y. Hatsugai, Y. Morita, and C. Mudry. Zero modes in the random hopping model. cond-mat/0201580.
- [56] Charles Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley & Sons, seventh edition, 1996.
- [57] C. M. Marcus et al. Distributions of the Conductance and its Parametric Derivatives in Quantum Dots. *Physical Review Letters*, **81**(9):1917, 1998.
- [58] M. Adler, P. J. Forrester, T. Nagao, and P. van Moerbeke. Classical Skew Orthogonal Polynomials and Random Matrices. *Journal of Statistical Physics*, **99**(1-2):141–170, 2000.
- [59] L. E. Reichl. *The Transition to Chaos in Conservative Classical Systems: Quantum Manifestations*. Springer-Verlag, 1998.
- [60] Gabor Szegő. *Orthogonal Polynomials*. American Mathematical Society, 1939.
- [61] George B. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, third edition, 1985.
- [62] H. Risken. *The Fokker-Planck Equation*. Springer-Verlag, 1989.
- [63] C. W. Beenakker. Random-matrix theory of quantum transport. *Reviews of Modern Physics*, **69**(3):527, 1997.
- [64] C. W. Beenakker. Universality of Brezin and Zee spectral correlator. *Nuclear Physics B*, **422**(3):515–520, 1994.
- [65] Christopher Mudry, P. W. Brouwer, and Akira Furusaki. Crossover from the chiral to the standard universality classes in the conductance of a quantum wire with random hopping only. *Physical Review B*, **62**(12):8249, 2000.

-
- [66] Pier. A. Mello and Jean-Louis Pichard. Symmetries and parametrization of transfer matrix in electronic quantum transport theory. *J. Phys. I*, **1**:493, 1991.
- [67] A. M. S. Macêdo and J. T. Chalker. Effects of spin-orbit interactions in disordered conductors: a random matrix approach. *Physical Review B*, (46):14985, 1992.