Sistemas Integráveis

Adriano Veiga de Oliveira

Orientador:

César Augusto Rodrigues Castilho

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

UFPE - Fevereiro de 2003

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter me dado o dom da vida e a oportunidade de estar hoje concretizando esse trabalho.

Agradeço ao professor César Castilho por sua orientação e amizade.

Agradeço aos professores Carlos Tomei e Hildeberto Cabral por participarem da banca.

Agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro.

Agradeço aos professores Danilo Felizardo, Vasco Domingues, Natanael Oliveira e Leoplodo Ramos pelo incentivo inicial.

Agradeço a todos os meus colegas colegas do dmat-UFPE que ajudaram-me direta ou indiretamente na realização deste trabalho.

Agradeço a todos os amigos sergipanos que torceram por mim.

Agradeço em especial aos amigos Ana Cristina, Angelo e Luis Del Campo que estiveram sempre ao meu lado e não mediram esforços para me auxiliar no que fosse necessário.

Agradeço de forma especial aos eternos amigos Paulo Rabelo, Solange e Marcos Aurélio (É um prazer ser amigo de vocês).

E um agradecimento mais que especial aos meus pais, Alcéua e Fátima e aos meus irmãos André, Rosana, Isabela e Paulo por toda a força que eles sempre me deram.

Conteúdo

Introdução

O principal objetivo deste trabalho é apresentar a teoria dos Sistemas Hamiltonianos Integráveis e aplicá-lo ao estudo de dois problemas básicos que servem como introdução à literatura geral. São eles, o fluxo geodésico no elipsóide e o problema mecânico de Neumann. Além disso, veremos que H.Knöer, usando a aplicação de Gauss do elipsóide na esfera unitária, mostrou que existe uma equivalência entre os dois problemas mecânicos. Usamos como principais referências os textos [1], [2], [6], [7] e [8].

A tese é organizada da seguinte forma: No capítulo 1 apresentaremos alguns conceitos básicos de mecânica hamiltoniana e lagrangeana sobre uma variedade e mostraremos a correspondência que existe entre sistemas mecânicos hamiltonianos e lagrangeanos. A seguir estudaremos um pouco de princípio variacional e da teoria clássica dos sistemas hamiltonianos integráveis através do estudo das funções geradoras e da teoria de Hamilton-Jacobi.

No capítulo 2, estudaremos um pouco da teoria dos grupos de Lie que são de suma importância no estudo de sistemas hamiltonianos com simetria e apresentaremos uma maneira de construir integrais de movimento para um sistema hamiltoniano através da aplicação momento.

No capítulo 3, daremos algumas definições básicas sobre a teoria geométrica dos sistemas hamiltonianos integráveis e demonstraremos um dos resultados mais importantes dessa teoria, o teorema de Arnold-Liouville que caracteriza o espaço de fases de um sistema integrável.

No capítulo 4, aplicamos a teoria dos sistemas hamiltonianos integráveis ao estudo do fluxo geodésico no elipsóide e do problema mecânico de Neumann.

Recife, 14 de fevereiro de 2003.

Capítulo 1

Noções básicas de mecânica hamiltoniana e lagrangeana

Nesse capítulo definiremos os conceitos básicos para o estudo dos dois principais pontos de vista da mecânica, o **Hamiltoniana** e o **Lagrangeano**. Mostraremos que apesar de importantes por razões diferentes (a mecânica hamiltoniana tem seu príncipio fundamentado no conceito de energia e seu príncipio de conservação; enquanto que a mecânica lagrangeana se fundamenta no princípio variacional), existe uma correspondência natural entre os sistemas hamiltonianos e lagrangeanos de um problema mecânico através da transformada de Legendre. Além disso, apresentaremos a teoria clássica dos sistemas integráveis. Algumas relações e propriedades envolvendo formas diferenciáveis e campo de vetores e que são necessárias para uma leitura desse capítulo podem ser encontradas na referência [7], pag. 126-128.

1.1 Variedades simpléticas

Definição 1.1.1 *Uma* variedade simplética *é um par* (P, Ω) *onde* P *é uma variedade diferenciável conexa de dimensão finita e* Ω *é uma 2-forma fechada e não degenerada sobre* P.

Exemplos:

a) Considere $\mathbb{R}^{2n}$ com coordenadas (q, p); q,p $\in \mathbb{R}^n$. Defina uma 2-forma Ω por $\Omega(v_1, v_2) = v_1^T \mathbb{J} v_2$ onde $\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ e I é a matriz identidade $n \times n$. A forma Ω é claramente não degenerada e o par $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega)$ é uma variedade simplética.

b) O cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ com coordenadas (θ, r) é uma variedade simplética com a forma $\Omega = d\theta \wedge dr$.

c) A esfera $\mathbb{S}^2$ de raio r com coordenadas (θ, φ) é uma variedade simplética com a forma $\Omega = r^2 sen\theta d\theta \wedge d\varphi$.

d) O toro $\mathbb{T}^2$ com coordenadas períodicas (θ, φ) é uma variedade simplética com a forma $\Omega = d\theta \wedge d\varphi$.

e) T^*Q, o fibrado cotangente de uma variedade Q, é sempre uma variedade simplética (ver seção 1.5). Quando Q é o espaço de configuração de um sistema mecânico, T^*Q é chamado espaço de fases.

O próximo resultado nos informa que localmente todas as variedades simpléticas são equivalentes.

Teorema 1.1.2 (Teorema de Darboux) *Seja (P, Ω) uma variedade simplética. Então em uma vizinhança apropriada de cada $z \in P$, existe um sistema de coordenadas locais tal que Ω é constante.*

Demonstração Usando coordenadas locais podemos assumir $P = E$ e $z = 0 \in E$, onde E é um espaço vetorial de dimensão finita. Seja Ω_1 a forma constante igual a $\Omega(0)$. Seja

$$\Omega_2 = \Omega_1 - \Omega$$

e defina

$$\Omega_t := \Omega + t\Omega_2, \quad para \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\Omega_t(0) &= \Omega(0) + t\Omega_2(0) \\
&= \Omega(0) + t[\Omega_1(0) - \Omega(0)] \\
&= \Omega(0)
\end{aligned}$$

é uma forma bilinear não degenerada para cada t. Logo, como o conjunto dos isomorfismos lineares de E em E^* é aberto e o intervalo $[0,1]$ é compacto, existe uma vizinhança de 0 tal que Ω_t é não degenerada para todo $t \in [0,1]$. Podemos assumir que essa vizinhança é uma bola de tal forma que, pelo lema de Poincaré, existe uma 1-forma α tal que $\Omega_2 = d\alpha$ nessa bola. Substituindo α por $\alpha - \alpha(0)$ podemos assumir $\alpha(0) = 0$. Desde que Ω_t é não degenerada, nos podemos definir um campo de vetores suave dependente do tempo $\mathbb{X}_t$ por $i_{\mathbb{X}_t}\Omega_t = -\alpha$ isto é, $\Omega_t(z)(\mathbb{X}_t, \bullet) = -\alpha$. Desde que $\alpha(0) = 0$, temos $\mathbb{X}_t(0) = 0$ e da teoria de existência local para equações diferenciais existe uma bola em que o fluxo de $\mathbb{X}_t$ está definido ao menos para um pequeno intervalo de tempo. Seja F_t o fluxo de $\mathbb{X}_t$ passando por $F_0 = id$. Usando a formula da derivada de Lie para campo de vetores dependentes do tempo, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(F_t^*\Omega_t) &= F_t^*(\pounds_{\mathbb{X}_t}\Omega_t) + F_t^*\frac{d}{dt}\Omega_t \\
&= F_t^*(di_{\mathbb{X}_t}\Omega_t + i_{\mathbb{X}_t}d\Omega_t) + F_t^*\Omega_2 \\
&= F_t^*di_{\mathbb{X}_t}\Omega_t + F_t^*\Omega_2 \\
&= F_t^*(d(-\alpha) + \Omega_2) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $F_1^*\Omega_1 = F_0^*\Omega_0 = \Omega$ e deste modo F_1 fornece uma transformação de coordenadas da forma Ω na forma constante Ω_1. ■

Corolário 1.1.3 *Se (P, Ω) é uma variedade simplética, então P tem dimensão par e em uma vizinhança de $z \in P$ existem coordenadas locais $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ tal que*

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i.$$

Demonstração Ver [1]. ■

Corolário 1.1.4 *Toda variedade simplética de dimensão $2n$ é orientável.*

Demonstração Seja (P, Ω) uma variedade simplética. Pelo corolário anterior temos que, em coordenadas locais $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$,

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i.$$

Definamos a $2n$ forma

$$\Lambda = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} \Omega \wedge ... \wedge \Omega \quad (n \text{ vezes}). \tag{1.1}$$

Pela expressão de Ω em coordenadas, temos

$$\Lambda = dq_1 \wedge ... \wedge dq_n \wedge dp_1 \wedge ... \wedge dp_n,$$

Daí, definimos uma forma volume sobre P. Logo, P é uma variedade orientável. ■

1.2 Transformações simpléticas

Definição 1.2.1 *Sejam (P_1, Ω_1) e (P_2, Ω_2) variedades simpléticas. Uma aplicação de classe C^∞*

$$\varphi : P_1 \to P_2$$

é chamada simplética (ou canônica) *se*

$$\varphi^* \Omega_2 = \Omega_1$$

ou seja, se para cada $z \in P_1$ e todo $v, w \in T_z P_1$ temos a seguinte identidade:

$$\Omega_1(z)(v, w) = \Omega_2(\varphi(z))(T_z\varphi(v), T_z\varphi(w))$$

onde $T_z\varphi$ é a derivada de φ em z.

Definição 1.2.2 *Quando a transformação simplética é um difeomorfismo, ela é chamada* Simplectomorfismo*.*

Agora, vamos caracterizar todas as transformações simpléticas lineares. Para isso, sejam $P_1 = P_2 = \mathbb{R}^{2n}$ e $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ definida como no exemplo (a) seção 1.1 e $A : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ uma aplicação linear. Por definição, A é simplética se e somente se $A^*\Omega = \Omega$. Isto significa que dados $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^{2n}$ temos

$$\begin{aligned} A^*\Omega = \Omega &\iff (A^*\Omega)(v_1, v_2) = \Omega(v_1, v_2) \\ \Omega(Av_1, Av_2) = \Omega(v_1, v_2) &\iff (Av_1)^T\mathbb{J}(Av_2) = v_1^T\mathbb{J}V_2 \\ v_1^T A^T \mathbb{J} A v_2 = v_1^T \mathbb{J} v_2 &\iff A^T\mathbb{J}A = \mathbb{J} \end{aligned}$$

onde $\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$. Portanto, a aplicação linear $A : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ é simplética se e somente se $A^T\mathbb{J}A = \mathbb{J}$.

Teorema 1.2.3 *Uma transformação canônica entre variedades simpléticas de mesma dimensão preserva o volume induzido pela forma simplética via* (1.1) *e é um difeomorfismo local.*

Demonstração Sejam (P_1, Ω_1) e (P_2, Ω_2) variedades simpléticas de mesma dimensão. Se a aplicação

$$\varphi : P_1 \to P_2$$

é canônica, a propriedade

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta$$

implica que

$$\varphi^*\Lambda = \Lambda,$$

onde

$$\Lambda = dq_1 \wedge ... \wedge dq_n \wedge dp_1 \wedge ... \wedge dp_n,$$

isto é, φ preserva a forma volume e consequentemente seu determinante Jacobiano é 1. Deste modo, pelo teorema da função inversa, φ é um difeomorfismo local. ∎

1.3 Sistemas hamiltonianos

Nessa seção, introduziremos as noções básicas que fundamentam a mecânica hamiltoniana conservativa sobre uma variedade simplética.

Definição 1.3.1 *Seja* (P, Ω) *uma variedade simplética. Um campo de vetores* $\mathbb{X}$ *sobre* P *é chamado* hamiltoniano *se existe uma função* $H : P \to \mathbb{R}$ *tal que* $i_{\mathbb{X}}\Omega = dH$*, isto é, para todo* $v \in T_z P$*, temos*

$$\Omega(z)(\mathbb{X}(z), v) = dH(z).v$$

Neste caso, escrevemos $\mathbb{X} = \mathbb{X}_H$. O conjunto de todos os campos de vetores hamiltonianos sobre P é denotado por $\mathfrak{X}_{Ham}(P)$.

Definição 1.3.2 *As* equações de Hamilton *são definidas como as equações de evolução*

$$\dot{z} = \mathbb{X}_H(z).$$

Se P tem dimensão $2n$, as equações de Hamilton em coordenadas canônicas são

$$\begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, & i = 1, ..., n \\ \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}, & i = 1, ..., n. \end{cases}$$

Definição 1.3.3 *Definiremos um* sistema hamiltoniano *como sendo a terna* $(P, \Omega, \mathbb{X}_H)$*.*

Definição 1.3.4 *Um campo de vetores* $\mathbb{X}$ *é chamado* localmente hamiltoniano *se* $i_{\mathbb{X}}\Omega$ *é fechada.*

A exigência de que $i_{\mathbb{X}}\Omega$ seja fechada na definição anterior é equivalente a $\pounds_{\mathbb{X}}\Omega = 0$, onde $\pounds_{\mathbb{X}}\Omega$ denota a derivada de Lie de Ω ao longo de $\mathbb{X}$, visto que

$$\pounds_{\mathbb{X}}\Omega = i_{\mathbb{X}}d\Omega + di_{\mathbb{X}}\Omega = di_{\mathbb{X}}\Omega.$$

Assim, se $\mathbb{X}$ é localmente hamiltoniano, segue do lema de Poincaré que existe localmente uma funcão H tal que $i_{\mathbb{X}}\Omega = dH$, assim localmente $\mathbb{X} = \mathbb{X}_H$, e desta maneira a terminologia é consistente.

Exemplo: (Um campo localmente hamiltoniano que não é hamiltoniano)
Considere o 2-toro $\mathbb{T}^2$ com coordenadas períodicas θ *e* φ. Então $\Omega = d\theta \wedge d\varphi$ é uma forma simplética sobre $\mathbb{T}^2$. Identificando o espaço tangente de $\mathbb{T}^2$ com $\mathbb{R}^2$ seja, para duas constantes a *e* b não nulas,

$$\mathbb{X}(\theta, \varphi) = a\frac{\partial}{\partial\theta} + b\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

então

$$\begin{aligned} i_{\mathbb{X}}\Omega &= (i_{\mathbb{X}}dx) \wedge d\varphi - d\theta \wedge (i_{\mathbb{X}}d\varphi) \\ &= ad\theta - bd\varphi \end{aligned}$$

que é fechada. Segue que $\mathbb{X}$ é localmente hamiltoniano. Mas todo campo de vetores localmente hamiltoniano que não se anula sobre uma variedade simplética compacta não pode ser hamiltoniano. De fato, se $\mathbb{X} = \mathbb{X}_H$ para algum H então, desde que H tem um ponto crítico sobre a variedade, $\mathbb{X}$ correspondentemente tem um zero. Logo, o campo de vetores $\mathbb{X}$ não pode ser hamiltoniano.

O próximo resultado sobre campo de vetores hamiltonianos nos mostra que seu fluxo consiste de uma família de transformações simpléticas.

Proposição 1.3.5 *O fluxo φ_t de um campo de vetores $\mathbb{X}$ consiste de uma família de transformações simpléticas (isto é, para cada t temos $\varphi_t^*\Omega = \Omega$) se e somente se $\mathbb{X}$ é localmente hamiltoniano.*

Demonstração Se φ_t é o fluxo do campo de vetores $\mathbb{X}$, temos a seguinte relação

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*\Omega = \varphi_t^*\pounds_{\mathbb{X}}\Omega$$

Assim,
$\mathbb{X}$ é localmente hamiltoniano $\Longleftrightarrow \pounds_{\mathbb{X}}\Omega = 0 \Longleftrightarrow \varphi_t$ é transformação simplética. ■

Agora veremos que uma importante propriedade da função hamiltoniana é que ela permanece constante ao longo do fluxo de seu campo.

Teorema 1.3.6 (Conservação de Energia) *Se φ_t é o fluxo de um campo de vetores $\mathbb{X}_H$ sobre uma variedade simplética P, então $H \circ \varphi_t = H$.*

Demonstração Se $\mathbb{X}_H$ é Hamiltoniano com fluxo φ_t, pela regra da cadeia, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(H(\varphi_t(z))) &= dH(\varphi_t(z)).\mathbb{X}_H(\varphi_t(z)) \\ &= \Omega(\mathbb{X}_H(\varphi_t(z)), \mathbb{X}_H(\varphi_t(z))) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $H \circ \varphi_t$ é constante em t e $H \circ \varphi_t = H$. ■

O próximo resultado destaca a importância da estrutura simplética no estudo de sistemas hamiltonianos. Essa estrutura simplifica a troca de variáveis num campo de vetores hamiltoniano visto que o novo campo hamiltoniano obtido com essa troca de variáveis é induzido pela função hamiltoniana obtida nas novas variáveis.

Proposição 1.3.7 *Um difeomorfismo $\varphi : P_1 \to P_2$ entre variedades simpléticas é simplético se e somente se satisfaz $\varphi^*\mathbb{X}_H = \mathbb{X}_{H\circ\varphi}$ para toda função $H : U \to \mathbb{R}$ (tal que $\mathbb{X}_H$ está definido) onde U é um subconjunto aberto de P_2.*

Demonstração Sejam Ω_1 e Ω_2 as formas simpléticas sobre P_1 e P_2 respectivamente. Para todo $v \in T_zP_1$ temos a seguinte relação

$$\begin{aligned} \Omega_1(z)(\mathbb{X}_{H\circ\varphi}(z), v) &= d(H \circ \varphi)(z)v \\ &= dH(\varphi(z))D\varphi(z)v \\ &= \Omega_2(\varphi(z))(\mathbb{X}_H(\varphi(z)), D\varphi(z)v). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Suponha que φ é simplética. Isso implica que

$$\Omega_1(z)(\mathbb{X}_{H\circ\varphi}(z), v) = \Omega_2(\varphi(z))(D\varphi(z)\mathbb{X}_{H\circ\varphi}(z), D\varphi(z)v). \tag{1.3}$$

Subtraindo (1.3) e (1.2) temos

$$\Omega_2(\varphi(z))(D\varphi(z)\mathbb{X}_{H\circ\varphi}(z) - \mathbb{X}_H(\varphi(z)), D\varphi(z)v) = 0, \ \textit{para todo } v \in T_zP_1,$$

donde

$$D\varphi(z)\mathbb{X}_{H\circ\varphi}(z) = \mathbb{X}_H(\varphi(z)). \tag{1.4}$$

Portanto

$$\varphi^*\mathbb{X}_H = \mathbb{X}_{H\circ\varphi}.$$

Reciprocamente, assuma que vale (1.4). Isso implica por (1.2) que

$$\Omega_1(z)(\mathbb{X}_{H\circ\varphi}(z), v) \ = \ \Omega_2(\varphi(z))(D\varphi(z)\mathbb{X}_{H\circ\varphi}(z), D\varphi(z)v),$$

como a escolha do campo é arbitrária, concluimos que

$$\varphi^*\Omega_2 = \Omega_1.$$

Portanto, φ é simplética. ■

1.4 Colchete de Poisson

Um fato importante no estudo dos sistemas hamiltonianos é que podemos munir com uma estrutura de álgebra de Lie o conjunto das funções hamiltonianas. Ou seja, podemos definir uma operação entre essas funções que satisfaz bilinearidade, antisimetria e a identidade de Jacobi.

Definição 1.4.1 *Definimos* $\mathcal{F}(P)$ = conjunto das funções diferenciáveis *sobre* P*.*

Definição 1.4.2 *O* colchete de Poisson *de duas funções* $F, G \in \mathcal{F}(P)$ *é definido por*

$$\{F, G\}(z) := \Omega(\mathbb{X}_F(z), \mathbb{X}_G(z)).$$

Em coordenadas canônicas $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$, temos

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i}).$$

Proposição 1.4.3 *Um difeomorfismo $\varphi : P_1 \to P_2$ é simplético se e somente se*

$$\varphi^*\{F, G\} = \{\varphi^* F, \varphi^* G\}$$

para toda função $F, G : U \to \mathbb{R}$, onde U é um subconjunto aberto arbitrário de P_2.

Demonstração Usaremos a identidade $\varphi^*(\pounds_X F) = \pounds_{\varphi^* \mathbb{X}}(\varphi^* F)$. Assim,

$$\varphi^*\{F, G\} = \varphi^*(\pounds_{\mathbb{X}_G} F) = \pounds_{\varphi^* \mathbb{X}_G}(\varphi^* F) \;\; e \;\; \{\varphi^* F, \varphi^* G\} = \pounds_{\mathbb{X}_{G \circ \varphi}}(\varphi^* F).$$

Consequentemente, φ preserva o colchete de Poisson se e somente se $\varphi^* \mathbb{X}_G = \mathbb{X}_{G \circ \varphi}$ para toda função $G : P \to \mathbb{R}$. Logo, pela proposição 1.3.7, φ preserva o colchete de Poisson se e somente se φ é simplética. ∎

Proposição 1.4.4 *Se φ_t é o fluxo de um campo de vetores Hamiltoniano (ou de um campo de vetores localmente Hamiltoniano) $\mathbb{X}_H$, então*

$$\varphi_t^*\{F, G\} = \{\varphi_t^* F, \varphi_t^* G\}$$

para toda $F, G \in \mathbb{F}(P)$ (ou restrita a um aberto se o fluxo não está definido em toda parte)

Demonstração Segue das proposições (1.3.5) e (1.4.3). ∎

Corolário 1.4.5 *Vale a seguinte identidade de derivação :*

$$\mathbb{X}_H(\{F, G\}) = \{\mathbb{X}_H(F), G\} + \{F, \mathbb{X}_H(G)\}$$

onde $\mathbb{X}_H(F) = \pounds_{\mathbb{X}_H} F$ é a derivada de F na direção de $\mathbb{X}_H$.

Demonstração Diferenciaremos a identidade

$$\varphi_t^*\{F,G\} = \{\varphi_t^*F, \varphi_t^*G\}$$

em relação a t em $t=0$, onde φ_t é o fluxo de $\mathbb{X}_H$.

Diferenciando o lado esquerdo obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\varphi_t^*\{F,G\})(z) &= d\{F,G\}(z)(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi_t(z)) \\
&= d\{F,G\}(z)\mathbb{X}_H(z) \\
&= \mathbb{X}_H(\{F,G\})(z).
\end{aligned}$$

Para calcular o lado direito, primeiro notemos que

$$\begin{aligned}
\Omega(z)(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathbb{X}_{\varphi_t^*F}(z),\bullet) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Omega(z)(\mathbb{X}_{\varphi_t^*F}(z),\bullet) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}d(\varphi_t^*F)(z) \\
&= d\mathbb{X}_H[F](z) \\
&= \Omega(z)(\mathbb{X}_{\mathbb{X}_H[F]}(z),\bullet).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathbb{X}_{\varphi_t^*F} = \mathbb{X}_{\mathbb{X}_H[F]}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\{\varphi_t^*F,\varphi_t^*G\}(z) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Omega(z)(\mathbb{X}_{\varphi_t^*F}(z),\mathbb{X}_{\varphi_t^*G}(z)) \\
&= \Omega(z)(\mathbb{X}_{\mathbb{X}_H[F]}(z),\mathbb{X}_G(z)) + \Omega(z)(\mathbb{X}_F(z),\mathbb{X}_{\mathbb{X}_H[G]}(z)) \\
&= \{\mathbb{X}_H[F],G\}(z) + \{F,\mathbb{X}_H[G]\}(z). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposição 1.4.6 *As funções de $\mathcal{F}(P)$ formam uma álgebra de Lie com o colchete de Poisson.*

Demonstração Desde que o colchete de Poisson é $\mathbb{R}$-bilinear e antisimétrico por definição, basta mostrarmos que vale a identidade de Jacobi. Da identidade

$$\{F,G\} = i_{\mathbb{X}_F}\Omega(\mathbb{X}_G) = dF(\mathbb{X}_G) = \mathbb{X}_G(F)$$

e pelo corolário anterior temos

$$\begin{aligned}\{\{F,G\},H\} &= \mathbb{X}_H(\{F,G\}) \\ &= \{\mathbb{X}_H(F),G\}+\{F,\mathbb{X}_H(G)\} \\ &= \{\{F,H\},G\}+\{F,\{G,H\}\}.\end{aligned}$$

que é a identidade de Jacobi. ■

Definição 1.4.7 *Definiremos* $\mathfrak{X}(P)$ = conjunto dos campos de vetores diferenciáveis *sobre* P.

Proposição 1.4.8 *O conjunto dos campos de vetores hamiltonianos* $\mathfrak{X}_{Ham}(P)$ *é uma subàlgebra de Lie de* $\mathfrak{X}(P)$*. De fato,* $[\mathbb{X}_F,\mathbb{X}_G]=-\mathbb{X}_{\{F,G\}}$.

Demonstração Basta mostrar a última identidade acima:

$$\begin{aligned}[\mathbb{X}_F,\mathbb{X}_G](H) &= \mathbb{X}_F\mathbb{X}_G(H)-\mathbb{X}_G\mathbb{X}_F(H) \\ &= \mathbb{X}_F(\{H,G\})-\mathbb{X}_G(\{H,F\}) \\ &= \{\{H,G\},F\}-\{\{H,F\},G\} \\ &= -\{H,\{F,G\}\} \\ &= -\mathbb{X}_{\{F,G\}}(H). \ \blacksquare\end{aligned}$$

Proposição 1.4.9 *Seja* φ_t *o fluxo de* $\mathbb{X}_H$ *e* $F\in\mathcal{F}(P)$*, então,*

$$\frac{d}{dt}(F\circ\varphi_t)=\{F\circ\varphi_t,H\circ\varphi_t\}=\{F,H\}\circ\varphi_t.$$

Demonstração Da identidade $\{F,G\}=\mathbb{X}_G(F)$ e da regra da cadeia,

$$\frac{d}{dt}(F\circ\varphi_t)=dF(\varphi_t(z)).\mathbb{X}_H(\varphi_t(z))=\{F,H\}(\varphi_t(z))$$

Desde que φ_t é simplética, temos que

$$\{F,H\}(\varphi_t(z))=\{F\circ\varphi_t,H\circ\varphi_t\}(z). \ \blacksquare$$

Definição 1.4.10 *Chamaremos a equação* $\dot{F} = \{F, H\} = \Omega(\mathbb{X}_F, \mathbb{X}_H)$ *de* equação do movimento na forma do colchete de Poisson*.*

Definição 1.4.11 *Uma função* $F \in \mathcal{F}(P)$ *é chamada de* integral de movimento *de um campo de vetores* $\mathbb{X}$ *se* F *é constante ao longo de qualquer curva integral desse campo.*

O próximo resultado caracteriza uma integral de movimento de um campo de vetores hamiltoniano $\mathbb{X}_H$ atráves do colchete de Poisson.

Corolário 1.4.12 *Uma função* $F \in \mathcal{F}(P)$ *é uma constante de movimento para o campo de vetores* $\mathbb{X}_H$ *se e somente se* $\{F, H\} = 0$*.*

Demonstração F é uma constante de movimento $\Longleftrightarrow \frac{d}{dt}(F \circ \varphi_t) = 0 \Longleftrightarrow \{F, G\} = 0.$ ■

1.5 O fibrado cotangente

1.5.1 O caso linear

Sabemos que se W é um espaço vetorial de dimensão finita, então $T^*W = W \times W^*$.

Definição 1.5.1 *Chamaremos de* 1-forma canônica *a 1-forma* Θ*, definida sobre* $W \times W^*$ *da seguinte maneira:*

$$\Theta_{(w,\alpha)}(u, \beta) =< \alpha, u >$$

Definição 1.5.2 *Chamaremos de* 2-forma canônica *a 2-forma* Ω *definida por*

$$\Omega_{(w,\alpha)}((u, \beta), (v, \gamma)) =< \gamma, u > - < \beta, v > \tag{1.5}$$

onde $(w, \alpha) \in W \times W^*$ *é o ponto base,* $u, v \in W$ *e* $\beta, \gamma \in W^*$*.*

A próxima proposição mostra que a *2-forma canônica* é exata.

Proposição 1.5.3 *A 2-forma Ω definida por (1.5) pode ser escrita como $\Omega = \sum_i dq_i \wedge dp_i$ em coordenadas $q_1, ..., q_n$ em W e correspondentes coordenadas duais $p_1, ..., p_n$ em W^*. A 1-forma canônica associada é dada por*

$$\Theta = \Sigma_i p_i dq_i$$

Além disso, $\Omega = -d\Theta$.

Demonstração Se $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ são coordenadas em $W \times W^*$, então

$$(\frac{\partial}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial}{\partial q_n}, \frac{\partial}{\partial p_1}, ..., \frac{\partial}{\partial p_n})$$

denota a base induzida para $T_{(w,\alpha)}(T^*W)$ e $(dq_1, ..., dq_n, dp_1, ..., dp_n)$ denota a base dual associada de $T^*_{(w,\alpha)}(T^*W)$. Escreva

$$(u, \beta) = (\Sigma_j u_j \frac{\partial}{\partial q_j}, \Sigma_j \beta_j \frac{\partial}{\partial p_j})$$

e

$$(v, \gamma) = (\Sigma_j v_j \frac{\partial}{\partial q_j}, \Sigma_j \gamma_j \frac{\partial}{\partial p_j})$$

Daí,

$$\begin{aligned}
(dq_i \wedge dp_i)_{(w,\alpha)}((u, \beta), (v, \gamma)) &= (dq_i \otimes dp_i - dp_i \otimes dq_i)((u, \beta), (v, \gamma)) \\
&= dq_i(u, \beta) dp_i(v, \gamma) - dp_i(u, \beta) dq_i(v, \gamma) \\
&= u_i \gamma_i - \beta_i v_i.
\end{aligned}$$

Com isso,

$$\Omega_{(w,\alpha)}((u, \beta), (v, \gamma)) = <\gamma, u> - <\beta, v> = \Sigma_i u_i \gamma_i - \beta_i v_i.$$

Logo,

$$\Omega = \Sigma_i dq_i \wedge dp_i.$$

Da mesma forma,

$$(p_i dq_i)_{(w,\alpha)}(u,\beta) = \alpha_i dq_i(u,\beta) = \alpha_i.u_i$$

e

$$\Theta_{(w,\alpha)}(u,\beta) = < \alpha, u > = \Sigma_i \alpha_i u_i.$$

Comparando, temos que

$$\Theta = \Sigma_i p_i dq_i.$$

Portanto,

$$-d\Theta = -d(\Sigma_i p_i dq_i) = \Sigma_i dq_i \wedge dp_i = \Omega.$$

Além disso, como a matriz que representa Ω nessas coordenadas é a matriz $\mathbb{J}$, Ω é não degenerada. ■

1.5.2 O caso não linear

Definição 1.5.4 *Seja Q uma variedade. Definimos $\Omega = -d\Theta$, onde Θ é uma 1-forma sobre T^*Q definida por*

$$\Theta_\beta(v) = < \beta, T\pi_Q^*.v >$$

onde $\beta \in T^*Q$, $v \in T_\beta(T^*Q)$, $\pi_Q^* : T^*Q \to Q$ é a projeção e $T\pi_Q^* : T(T^*Q) \to TQ$ é a aplicação tangente de π_Q^*.

A proposição 1.5.3 mostra que $(T^*Q, \Omega = -d\theta)$ é uma variedade simplética. De fato, em coordenadas locais com $(w,\alpha) \in U \times W^*$, onde U é aberto em W e $(u,\beta),(v,\gamma) \in W \times W^*$, a 2-forma $\Omega = -d\theta$ é dada por

$$\Omega_{(w,\alpha)}((u,\beta),(v,\gamma)) = \gamma(u) - \beta(v).$$

1.5.3 Levantamento cotangente

Definição 1.5.5 *Dados duas variedades Q e S e um difeomorfismo $f : Q \to S$, o levantamento cotangente*

$$T^*f : T^*S \to T^*Q$$

de f é definido por

$$< T^*f(\alpha_s), v >=< \alpha_s, (Tf.v) >$$

onde $\alpha_s \in T^*_sS$, $v \in T_qQ$ e $s = f(q)$.

Denotando por $\pi^*_Q : T^*Q \longrightarrow Q$ e $\pi^*_S : T^*S \longrightarrow S$ as projeções canônicas dos fibrados cotangentes, a definição anterior pode ser representada pelo seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} T^*Q \arrow[d, "\pi^*_Q"'] & T^*S \arrow[l, "T^*f"'] \arrow[d, "\pi^*_S"] \\ Q \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

O importante dessa definição é que T^*f por construção é uma transformação simplética. Isto é verificado na seguinte proposição:

Proposição 1.5.6 *Um difeomorfismo $\varphi : T^*S \longrightarrow T^*Q$ preserva as 1-formas canônicas Θ_S e Θ_Q sobre T^*S e T^*Q, respectivamente, se e somente se φ é o levantamento cotangente T^*f de algum difeomorfismo $f : Q \longrightarrow S$.*

Demonstração Primeiro suponha que $f : Q \longrightarrow S$ é um difeomorfismo. Então para $\beta \in T^*S$ e $v \in T_\beta(T^*S)$, temos que

$$\begin{aligned} ((T^*f)^*\Theta_Q)_\beta.v &= (\Theta_Q)_{T^*f(\beta)}.TT^*f(v) \\ &= < T^*f(\beta), (T\pi^*_Q \circ TT^*f).v > \\ &= < \beta, T(f \circ \pi^*_Q \circ T^*f).v > \\ &= < \beta, T\pi^*_S.v > \\ &= (\Theta_S)_\beta.v \end{aligned}$$

desde que $f \circ \pi_Q^* \circ T^* f = \pi_S^*$.
Reciprocamente, suponha que $\varphi_* \Theta_Q = \Theta_S$, isto é,

$$< \varphi(\beta), T(\pi_Q^* \circ \varphi)(v) >=< \beta, T\pi_S^*(v) > \tag{1.6}$$

para todo $\beta \in T^*S$ e $v \in T_\beta(T^*S)$. Como φ é um difeomorfismo, a imagem de $T_\beta(\pi_Q^* \circ \varphi)$ é $T_{\pi_Q^*(\varphi(\beta))}Q$, deste modo $\beta = 0$ em (1.6) implica que $\varphi(0) = 0$. Argumentando de maneira similar para φ^{-1} em lugar de φ, concluimos que φ restrito a seção zero S de T^*S é um difeomorfismo sobre a seção zero Q de T^*Q. Defina

$$f : Q \longrightarrow S$$

por $f = \varphi^{-1}|_Q$. Vamos mostrar que φ preserva fibra ou, equivalentemente, que $f \circ \pi_Q^* = \pi_S^* \circ \varphi^{-1}$. Para isso vamos usar o seguinte lema:

Lema 1.5.7 *Defina o fluxo F_t^Q sobre T^*Q por $F_t^Q(\alpha) = e^t\alpha$ e seja V_Q o campo de vetores por ele gerado. Então,*

$$< \Theta_Q, V_Q >= 0, \quad \pounds_{V_Q}\Theta_Q = \Theta_Q, \quad i_{V_Q}\Omega_Q = -\Theta_Q. \tag{1.7}$$

Demonstração Como F_t^Q preserva fibra, V_Q deve ser tangente as fibras e daí, $T_{\pi_Q^*} \circ V_Q = 0$. Isto implica por $\Theta_\alpha(v) =< \beta, T_{\pi_Q^*}.v >$ que $< \Theta_Q, V_Q >= 0$.
Para provar a segunda fórmula, note que $\pi_Q^* \circ F_t^Q = \pi_Q^*$. Seja $\alpha \in T_q^*Q, v \in T_\alpha(T^*Q)$ e Θ_α denotando Θ_Q calculado em α, temos que

$$\begin{aligned}
((F_t^Q)^*\Theta)_\alpha.v &= \Theta_{F_t^Q(\alpha)}.TF_t^Q(v) \\
&= < F_t^Q(\alpha), (T\pi_Q^* \circ TF_t^Q)(v) > \\
&= < e^t\alpha, T(\pi_Q^* \circ F_t^Q)(v) > \\
&= e^t < \alpha, T\pi_Q^*(v) > \\
&= e^t\Theta_\alpha.v
\end{aligned}$$

Isto é,

$$(F_t^Q)^*\Theta_Q = e^t\Theta_Q.$$

Tomando a derivada em relação a t em $t = 0$ obtemos a segunda fórmula. Finalmente, as primeiras duas fórmulas implicam que

$$i_{V_Q}\Omega_Q = -i_{V_Q}d\Theta_Q = \pounds_{V_Q}\Theta_Q + di_{V_Q}\Theta_Q = -\Theta_Q. \quad \square$$

Agora, continuaremos a prova da proposicão 1.5.6.
Note que por (1.7) temos

$$\begin{aligned} i_{\varphi^* V_Q}\Omega_S &= i_{\varphi^* V_Q}\varphi^*\Omega_Q \\ &= \varphi^*(i_{V_Q}\Omega_Q) \\ &= -\varphi^*\Theta_Q \\ &= -\Theta_S \\ &= i_{V_S}\Omega_S \end{aligned}$$

como Ω_S é não degenerada temos que $\varphi^* V_Q = V_S$. Daí φ comuta com os fluxos F_t^Q e F_t^S, isto é, para todo $\beta \in T^*S$ nos temos $\varphi(e^t\beta) = e^t\varphi(\beta)$. Fazendo $t \to -\infty$ nessa igualdade obtemos $(\varphi \circ \pi_S^*)(\beta) = (\pi_Q^* \circ \varphi)(\beta)$, desde que $e^t\beta \to \pi_S^*(\beta)$ e $e^t\varphi(\beta) \to (\pi_Q^* \circ \varphi)((\beta))$ quando $t \to -\infty$. Daí,

$$\pi_Q^* \circ \varphi = \varphi \circ \pi_S^*, \quad ou \quad f \circ \pi_Q^* = \pi_S^* \circ \varphi^{-1}.$$

Finalmente, mostraremos que $T^*f = \varphi$. Para $\beta \in T^*S, v \in T_\beta(T^*S)$, temos

$$\begin{aligned} < T^*f(\beta), T(\pi_Q^* \circ \varphi)(v) > &= < \beta, T(f \circ \pi_Q^* \circ \varphi)(v) > \\ &= < \beta, T\pi_S^*(v) > \\ &= (\Theta_S)_\beta.v \\ &= (\varphi^*\Theta_Q)_\beta.v \\ &= (\Theta_Q)_{\varphi(\beta)}.T_\beta\varphi(v) \\ &= < \varphi(\beta), T_\beta(\pi_Q^* \circ \varphi)(v) > \end{aligned}$$

que nos mostra que $T^*f = \varphi$, desde que a imagem de $T_\beta(\pi_Q^* \circ v)$ é todo o espaço tangente de $(\pi_Q^* \circ \varphi)(\beta))$ em Q. $\blacksquare$

1.6 Sistemas lagrangeanos

Nesta seção falaremos de forma breve sobre a teoria que fundamenta a mecânica lagrangeana. Veremos que mesmo formulada sobre um ponto de vista independente daquele da mecânica hamiltoniana, existe uma correspondência entre os dois sistemas.

1.6.1 A transformada de Legendre

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $\theta : V \to TV^*$ uma forma linear sobre V. Então θ determina uma aplicação $\mathcal{L} : V \to V^*$ definida da seguinte forma: para cada $v \in V$, θ_v é uma forma linear sobre $T_v(V)$; como existe uma identificação natural, ℓ, de T_vV com V (dependendo somente da estrutura de espaço vetorial), temos que $\theta_v \circ \ell^{-1}$ é um funcional linear sobre V, isto é, um elemento de V^* e o denotaremos por $\mathcal{L}(v)$. Suponhamos agora que $\mathcal{L}$ é um difeomorfismo. Então a aplicação inversa $\mathcal{L}^{-1} : V^* \to V$ também vem de uma forma sobre V^*. De fato, para cada $v^* \in V^*$, $\mathcal{L}^{-1}(v^*) \in V$ é uma forma linear sobre V^* e portanto pode ser vista como uma forma linear sobre $T_{v^*}(V^*)$ por conta da identificação de $T_{v^*}(V^*)$ com V^*. Daí, $\mathcal{L}^{-1}(v^*)$ determina um elemento de $T^*_{v^*}(V^*)$ para cada $v^* \in V^*$, isto é, $\mathcal{L}^{-1}$ determina uma forma θ^* sobre V^*. Claramente pela construção feita $\mathcal{L}^{-1} : V^* \longrightarrow V$ é determinada por θ^*.

Se $d\theta = 0$ então $d\theta^* = 0$. De fato, seja $e_1, ..., e_n$ uma base de V e $dq_1, ..., dq_n$ a base dual associada de V^* e sejam $q = (q_1, ..., q_n) \in V$ e $p = (p_1, ..., p_n) \in V^*$ tais que $\mathcal{L}(q) = p$. Se $\theta = \sum_i \theta_i dq_i$ então $\mathcal{L}(q_1, ..., q_n) = (\theta_1(q_1, ..., q_n), ..., \theta_n(q_1, ..., q_n))$ e desta maneira, se $\theta = dL$, a aplicação $\mathcal{L}$ é dada por

$$\mathcal{L}(q_1, ..., q_n) = (\frac{\partial L}{\partial q_1}(q_1, ..., q_n), ..., \frac{\partial L}{\partial q_n}(q_1, ..., q_n)). \tag{1.8}$$

Agora, seja H uma função definida sobre V^* por

$$H(p) =< p, \mathcal{L}^{-1}(p) > -L(\mathcal{L}^{-1}(p))$$

ou

$$H(p_1, ..., p_n) = \Sigma_i p_i q_i - L(q_1, ..., q_n) \tag{1.9}$$

onde em (1.9), os $q_i's$ são vistos como função dos $p_i's$ via $\mathcal{L}^{-1}$.
Assim,

$$dH(p_1, ..., p_n) = \Sigma_i q_i dp_i + \Sigma_i p_i dq_i - \Sigma_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i$$

e por (1.8)

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}(q_1, ..., q_n) = p_i(q_1, ..., q_n)$$

com isso,

$$dH(p_1, ..., p_n) = \Sigma_i q_i dp_i$$

e desta maneira,

$$\theta^* = dH.$$

Agora, seja Q uma variedade diferenciável e $L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Para cada ponto $q \in Q$, T_qQ é um espaço vetorial e assim, pela construção acima, $L|_{T_qQ}$ induz uma aplicação $\mathbb{F}L_q : T_qQ \longrightarrow T_q^*Q$. Com isso, teremos uma aplicação

$$\mathbb{F}L : TQ \longrightarrow T^*Q \quad \textit{tal que} \;\; \mathbb{F}L|_{T_qQ} = \mathbb{F}L_q$$

está aplicação é chamada *transformada de Legendre* (correspondente a L).

Se $q_1, ..., q_n$ são coordenadas locais em uma vizinhança $U \subseteq Q$, então nos podemos introduzir coordenadas $(q_1, ..., q_n, \dot{q_1}, ..., \dot{q_n})$ em $\pi_Q^{-1}(U) \subseteq TQ$. As coordenadas são definidas por

$$q_i(v) = q_i(\pi(v))$$

e os $\dot{q_i}'s$ são determinados por

$$v = \Sigma_i \dot{q_i}(v)(\frac{\partial}{\partial q_i})_{\pi(v)}.$$

De forma analóga, sobre T^*Q temos coordenadas locais $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ onde os p_i 's são dados por

$$\theta^* = \Sigma_i p_i(\theta^*)(dq_i)_{\pi^*(\theta^*)}.$$

Em termos dessas coordenadas a transformação $\mathbb{F}L$ é dada por

$$q_i = q_i \circ \mathbb{F}L$$

e

$$p_i \circ \mathbb{F}L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

onde $L = L(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n)$.
Se $\mathbb{F}L$ é uma aplicação regular, a função L é chamada *lagrangeano regular* e no caso de $\mathbb{F}L$ ser um difeomorfismo a função L é chamada *lagrangeano hiperregular*. Neste caso, para todo $v \in TQ$, a aplicação $\mathbb{F}L^{-1}$ vem de uma função H. Aqui H é dada por (1.9) e depende da escolha de v.

1.6.2 Formulação lagrangeana

Definição 1.6.1 *Sejam Θ a 1-forma simplética canônica de T^*Q e Ω a 2-forma simplética canônica de T^*Q. Usando a transformada de Legendre $\mathbb{F}L$ podemos obter uma 1-forma Θ_L e uma 2-forma fechada Ω_L sobre TQ definidas da seguinte maneira*

$$\Theta_L = \mathbb{F}L^*\Theta \quad e \quad \Omega_L = \mathbb{F}L^*\Omega.$$

Chamaremos Θ_L de 1-forma lagrangeana *e Ω_L de* 2-forma lagrangeana.
Além disso, como d comuta com o pull-back, temos

$$\Omega_L = -d\Theta_L.$$

Proposição 1.6.2 *Sejam Q uma variedade e $L \in \mathcal{F}(Q)$. Então L é um lagrangeano regular se e somente se $\mathbb{F}L$ é um difeomorfismo local, se e somente se Ω_L é uma forma simplética sobre TQ.*

Demonstração Devido ao teorema 1.2.3, é suficiente mostrarmos que L é lagrangiano regular $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{F}L$ é um difeomorfismo local. De fato,

$$L \textit{ é regular} \iff T_q\mathbb{F}L \textit{ é sobrejetiva}, \textit{ para todo } q \in TQ$$

$$\iff \quad T_q\mathbb{F}L \textit{ é um isomorfismo}, \quad \textit{para todo } q \in TQ$$

Logo, pelo teorema da função inversa, concluimos que L é regular $\iff$ $\mathbb{F}L$ é um difeomorfismo local. ■

Definição 1.6.3 *Dado $L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$, a ação de L é a aplicação $A : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $A(v) = \mathbb{F}L(v)v$ e a energia de L é $E = A - L$.*
Em coordenadas locais,

$$A(q, \dot{q}_i) = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i \dot{q}_i,$$

$$E(q, \dot{q}_i) = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L(q, \dot{q}_i).$$

Definição 1.6.4 *Um campo de vetores lagrangeano para L é um campo de vetores $\mathbb{X}_E$ sobre TQ tal que $\Omega_L(\mathbb{X}_E, \bullet) = dE$.*

Os campos de vetores lagrangeanos possuem a propriedade especial de serem equações de segunda ordem. Uma das grandes diferenças entre a formulação hamiltoniana e lagrangeana é que equações de segunda ordem são possíveis sobre TQ, mas não sobre T^*Q.

Definição 1.6.5 *Uma equação de segunda ordem sobre uma variedade Q é um campo de vetores $\mathbb{X}$ sobre TQ tal que $T_{\pi_Q} \circ \mathbb{X}$ é a identidade sobre TQ.*

Daí, se $\mathbb{X}$ é uma equação de segunda ordem sobre Q temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
& TTQ \arrow[dl, "T_{\pi_Q}"'] & \\
TQ \arrow[rr, "identidade"] & & TQ \arrow[ul, "\mathbb{X}"'] \arrow[dl, "\mathbb{X}"] \\
& TTQ \arrow[ul, "T_{\pi_Q}"] &
\end{tikzcd}$$

A próxima proposição caracteriza as equações de segunda ordem através de suas curvas integrais.

Proposição 1.6.6 *Seja $\mathbb{X}$ um campo de vetores sobre TQ. Então $\mathbb{X}$ é uma equação de segunda ordem sobre Q se e somente se para toda curva integral $c : I \longrightarrow TQ$ de $\mathbb{X}$, $(\pi_Q \circ c)' = c$.*

Demonstração Para cada $w \in TQ$ existe uma curva $c : I \longrightarrow TQ$ em w tal que $c'(t) = \mathbb{X}(c(t))$, para todo $t \in I$. Daí,

$$T_{\pi_Q} \circ \mathbb{X} \textit{ é a identidade } \Longleftrightarrow T_{\pi_Q} \circ c'(t) = c(t)$$

Mas,

$$\begin{aligned} T_{\pi_Q} \circ c'(t) &= T_{\pi_Q} \circ Tc(t,1), \\ &= T(\pi_Q \circ c)(t,1), \\ &= (\pi_Q \circ c)'(t). \end{aligned}$$

Logo, $\mathbb{X}$ é uma equação de segunda ordem se e somente se $(\pi_Q \circ c)' = c$, para toda curva integral $c : I \longrightarrow TQ$ de $\mathbb{X}$. ■

Definição 1.6.7 *Se $c : I \longrightarrow TQ$ é uma curva integral de um campo de vetores $\mathbb{X}$ sobre TQ, chamaremos a aplicação $\pi_Q \circ c : I \longrightarrow Q$ uma curva integral de base de $\mathbb{X}$. De forma análoga, se $\mathbb{X}$ é um campo de vetores sobre T^*Q e $c : I \longrightarrow T^*Q$ é uma curva integral de $\mathbb{X}$ então a aplicação $\pi_Q^* \circ c : I \longrightarrow Q$ é chamada uma curva integral de base de $\mathbb{X}$.*

Daí, um campo de vetores $\mathbb{X}$ é uma equação de segunda ordem sobre Q se e somente se para toda curva integral c de $\mathbb{X}$, c é igual a derivada de sua curva integral de base. O próximo resultado fornece um critério simples para equações de segunda ordem em termo de coordenadas locais.

Proposição 1.6.8 *Seja $\mathbb{X} \in \mathfrak{X}(TQ)$ e (U, φ) uma carta de Q com $\varphi(U) = U' \subseteq \mathbb{R}^n$. Suponha que a representação local de $\mathbb{X}$ tem a forma*

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_\varphi : U' \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow U' \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ (u', e) &\mapsto \mathbb{X}_\varphi(u', e) = (u', e, \mathbb{X}_1(u', e), X_2(u'.e)) \end{aligned}$$

Então $\mathbb{X}$ é uma equação de segunda ordem se e somente se, para toda carta, $\mathbb{X}_1(u', e) = e$ para todo $e \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração Consideremos a carta (U, φ) com $\varphi(U) = U'$. Desta forma, temos que

$$\begin{array}{rcl} (\pi_Q)_\varphi : U' \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & U' \\ (u', e) & \mapsto & u' \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} (T_{\pi_Q})_\varphi : U' \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & U' \times \mathbb{R}^n \\ (u', e, e_1, e_2) & \mapsto & (u', e_1). \end{array}$$

Mas,

$$(T_{\pi_Q})_\varphi \circ \mathbb{X}_\varphi = identidade \text{ } se \text{ } T_{\pi_Q} \circ \mathbb{X} = identidade \iff \mathbb{X}_1(u', e) = e. \blacksquare$$

Teorema 1.6.9 *Sejam $\mathbb{X}_E$ um campo de vetores para $L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$ (não necessariamente regular). Assuma que $\mathbb{X}_E$ é uma equação de segunda ordem. Em uma carta $U \times E$, se $(u(t), v(t))$ é uma curva integral de $\mathbb{X}_E$, ela satisfaz a equação de Lagrange*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = v(t) \\ \frac{d}{dt}\{D_2L(u(t), v(t))w\} = D_1L(u(t), v(t))w \end{cases}$$

para todo $w \in E$. Em coordenadas locais elas são equivalentes as equações clássicas de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Demonstração Ver [1]. $\blacksquare$

1.6.3 Relação entre a formulação lagrangeana e hamiltoniana

Como comentado no início do capítulo, existe uma identificação entre os sistemas lagrangeano e hamiltoniano atráves da transformada de Legendre. O interessante dessa identificação é que em termos práticos ela se resume a uma mudança de coordenadas entre os dois sistemas mecânicos. Não entraremos em detalhe sobre as demonstrações dos resultados que iremos apresentar. Para isso, recomendamos a referência [1].

A transição da formulação lagrangeana para a hamiltoniana é dada como segue:

Teorema 1.6.10 *Seja L um Lagrangeano hiperregular sobre Q e seja $H = E \circ (\mathbb{F}L)^{-1} : T^*Q \longrightarrow \mathbb{R}$, onde E é a energia de L. Então $\mathbb{X}_E$ e $\mathbb{X}_H$ são $\mathbb{F}L$-relacionados, isto é, $(\mathbb{F}L)_*\mathbb{X}_E = \mathbb{X}_H$ e as curvas integrais de $\mathbb{X}_E$ são aplicadas por $\mathbb{F}L$ nas curvas integrais de $\mathbb{X}_H$. Além disso, $\mathbb{X}_E$ e $\mathbb{X}_H$ tem a mesma curva integral de base.*

Usando a notação em coordenadas (1.9), verifica-se que a transformação $F\mathbb{L}$ converte as equações de Lagrange nas equações de Hamilton. Para fazer a construção reversa precisamos dos seguintes resultados:

Proposição 1.6.11 *Seja L um lagrangeano hiperregular sobre Q e seja $H = E \circ (\mathbb{F}L)^{-1}$, onde E é a energia de L. Então $\Theta(\mathbb{X}_H) = A \circ (\mathbb{F}L)^{-1}$, onde A é a ação de L, e Θ é a* 1-*forma canônica.*

Corolário 1.6.12 *Seja L um lagrangeano hiperregular sobre Q e $\Theta_L = \mathbb{F}L^*\Theta$. Então $A = \Theta_L(\mathbb{X}_E)$, onde E é a energia e A a ação de L.*

Essa última proposição diz que podemos obter L se conhecemos $\mathbb{F}L$ e E. Se $H \in \mathcal{F}(T^*Q)$, pela construção feita na seção (1.6.1), temos $\mathbb{F}H : T^*Q \to T^{**}Q \approx TQ$. Desta forma, podemos fazer agora a transição para a formulação lagrangeana.

Proposição 1.6.13 *Seja $H \in \mathcal{F}(T^*Q)$. Então $\mathbb{F}H$ é um difeomorfismo local se e somente se $\mathbb{F}^2H$ é não degenerada. Neste caso, diremos que H é um* hamiltoniano regular.

Definição 1.6.14 *A* ação *de $H \in \mathcal{F}(T^*Q)$ será definida por $G = \Theta(\mathbb{X}_H)$.*

Definição 1.6.15 *Uma função $H \in T^*Q$ é chamada* hamiltoniano hiperregular *se a aplicação $\mathbb{F}H : T^*Q \longrightarrow TQ$ é um difeomorfismo.*

Proposição 1.6.16 *Seja H um hamiltoniano hiperregular sobre T^*Q. Defina $E = H \circ (\mathbb{F}H)^{-1}$, $A = G \circ (\mathbb{F}H)^{-1}$ e $L = A - E$. Então L é um lagrangeano hiperregular sobre TQ. De fato, $\mathbb{F}L = (\mathbb{F}H)^{-1}$.*

O resultado inverso da proposição 1.6.16 é:

Proposição 1.6.17 *Seja L um lagrangeano hiperregular sobre TQ e seja $H = E \circ (\mathbb{F}L)^{-1}$. Então H é um Hamiltoniano hiperregular e $\mathbb{F}H = (\mathbb{F}L)^{-1}$.*

Teorema 1.6.18 *Existe uma correspondência bijetiva entre o lagrangeano hiperregular L sobre TQ e o hamiltoniano hiperregular H sobre T^*Q da seguinte forma: H é construído de L como no teorema* 1.6.10 *e L é construído de H como na proposição* 1.6.16. *Além disso, os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R} & & \\
T^*Q \arrow[ur, "G"] \arrow[dr, "H"'] \arrow[rr, shift left, "\mathbb{F}H"] & & TQ \arrow[ul, "A"'] \arrow[dl, "E=A-L"] \arrow[ll, shift left, "\mathbb{F}L"] \arrow[r, "L"] & \mathbb{R} \\
 & \mathbb{R} & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
TT^*Q \arrow[r, shift left, "T\mathbb{F}H"] & TTQ \arrow[l, shift left, "T\mathbb{F}L"] & \\
T^*Q \arrow[u, "\mathbb{X}_H"] \arrow[r, shift left, "\mathbb{F}H"] \arrow[d, "H"'] & TQ \arrow[u, "\mathbb{X}_E"'] \arrow[l, shift left, "\mathbb{F}L"] \arrow[r, "L"] \arrow[d, "E"] & \mathbb{R} \\
\mathbb{R} & \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

1.7 Princípio variacional

Definição 1.7.1 *Seja Q uma variedade e $L : TQ \to \mathbb{R}$ um lagrangeano regular. Fixe os pontos q_1 e q_2 em Q e um intervalo $[a, b]$ e seja*

$$\Omega(q_1, q_2, [a, b]) = \{c : [a, b] \to \mathbb{R} \mid c \text{ é uma curva } C^2 \text{ com } c(a) = q_1 \text{ e } c(b) = q_2\}$$

chamado o espaço das curvas *de* q_1 *a* q_2. *Definimos a aplicação*

$$J : \Omega(q_1, q_2, [a, b]) \to \mathbb{R} \ \ por \ \ J(c) = \int_a^b L(c(t), \dot{c}(t))dt.$$

O conjunto $\Omega(q_1, q_2, [a, b])$ é uma variedade C^∞ de dimensão infinita.

Proposição 1.7.2 *O espaço tangente da variedade* $\Omega(q_1, q_2, [a, b])$ *em um ponto, isto é uma curva* $c \in \Omega(q_1, q_2, [a, b])$, *é dado como segue:*

$$T_c\Omega(q_1, q_2, [a, b]) = \{v : [a, b] \to TQ \mid \ v \text{ é uma aplicacao } C^2, \ \pi_Q \circ v = c \text{ e } v(a) = v(b) = 0\}$$

onde $\pi_Q : TQ \to Q$ *denota a projeção canônica.*

Demonstração O espaço tangente de uma variedade consiste de todos os vetores tangentes a curvas na variedade. Assim, considere uma curva $c_\lambda \in \Omega(q_1, q_2, [a, b])$ com $c_0 = c$. Desta forma um vetor tangente é dado por

$$v = \frac{dc_\lambda}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}.$$

Mas, $c_\lambda(t)$ para cada t é uma curva passando por $c_0(t) = c(t)$ daí, v é um vetor tangente a Q no ponto $c(t)$. Assim, $v(t) \in T_{c(t)}Q$, isto é, $\pi_Q \circ v = c$. Além disso, as restrições $c_\lambda(a) = q_1$ e $c_\lambda(b) = q_2$ induzem $v(a) = 0$ e $v(b) = 0$ e v é uma aplicação de classe C^2. ∎

Proposição 1.7.3 *O funcional* $J(c) = \int_a^b L(c(t), \dot{c}(t))dt$ *é diferenciável e sua diferencial, em coordenadas locais, é dada por*

$$dJ(c).v = \int_a^b \sum_i (\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}).v_i dt$$

onde, em coordenadas locais, $c(t) = (q_1(t), ..., q_n(t))$ *e* $v(t) = (v_1(t), ..., v_n(t))$.

Demonstração Seja $v = \frac{dc_\lambda}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}$ um vetor tangente a curva $c_\lambda \in \Omega(q_1, q_2, [a,b])$ com $c_0 = c$. Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} dJ(c)v &= \frac{dJ(c_\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} \\ &= \frac{d}{d\lambda}\int_a^b L(c_\lambda(t), \dot{c}_\lambda(t))dt\Big|_{\lambda=0}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Diferenciando (1.10) sobre o sinal da integral e usando coordenadas locais temos que

$$dJ(c)v = \int_a^b \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} v_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{v}_i\right)dt.$$

Mas, integrando por partes,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{v}_i dt &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} v_i\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} v_i dt \\ &= -\int_a^b \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} v_i dt \end{aligned}$$

pois, $v(a) = 0$ e $v(b) = 0$.
Logo,

$$dJ(c).v = \int_a^b \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right).v_i dt. \ \blacksquare$$

Definição 1.7.4 *Dizemos que uma curva $c \in \Omega(q_1, q_2, [a,b])$ é um extremal do funcional $J : \Omega(q_1, q_2, [a,b]) \to \mathbb{R}$ se $dJ(c) = 0$, ou seja, se $dJ(c).v = 0$, para todo $v \in T_c\Omega(q_1, q_2, [a,b])$.*

Classicamente, a condição $dJ(c) = 0$ é denotada por $\delta\int_a^b L(c(t), \dot{c}(t))dt = 0$. O próximo resultado é de grande importância no estudo do cálculo das variações.

Teorema 1.7.5 (Príncipio variacional de Hamilton) *Seja L um lagrangeano regular sobre TQ. A curva $c \in \Omega(q_1, q_2, [a,b])$ é uma curva integral de base do campo de* *vetores $\mathbb{X}_E$ (campo de vetores lagrangeano para L), isto é, satisfaz (em coordenadas locais) as equações de Lagrange*

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

se e somente se é um extremal do funcional $J : \Omega(q_1, q_2, [a, b]) \to \mathbb{R}$ onde, em coordenadas locais, $c(t) = (q_1(t), ..., q_n(t))$.

Demonstração A condição $dJ(c) = 0$ significa que $dJ(c).v = 0$ para todo $v \in T_c\Omega(q_1, q_2, [a, b])$ e isto ocorre se e somente se

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

desde que v é arbitrário, $v(a) = v(b) = 0$ e o integrando é contínuo.[1] ■

A versão do teorema acima para sistemas hamiltonianos é o seguinte:

Teorema 1.7.6 (Príncipio variacional de Hamilton no espaço de fases) *Considere a variedade configuracional Q e o hamiltoniano $H : T^*Q \longrightarrow \mathbb{R}$. A curva $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ em T^*Q satisfaz as equações de Hamilton se e somente se*

$$\delta \int_a^b [\Sigma_i p_i \dot{q}_i - H(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)]dt = 0$$

Demonstração Ver [7]. ■

1.8 Funções geradoras

Considere um difeomorfismo simplético $\varphi : T^*Q_1 \to T^*Q_2$ descrito pelas funções

$$p_i = p_i(q_j, s_j) \quad , \quad r_i = r_i(q_j, s_j) \tag{1.11}$$

[1] Esse resultado segue do lema: Se $f(t)$ é uma função contínua sobre $[a, b]$, então $\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$ para toda função $g \in C^k$, com $g(a) = g(b) = 0$ se e somente se $f = 0$.

onde (q_i, p_i) e (s_j, r_j) são coordenadas cotangentes sobre T^*Q_1 e T^*Q_2, respectivamente. Em outras palavras, assuma que nos temos uma aplicação

$$\Gamma : Q_1 \times Q_2 \to T^*Q_1 \times T^*Q_2$$

cuja imagem é o gráfico de φ. Seja Θ_1 a 1-forma sobre T^*Q_1 e Θ_2 a 1-forma sobre T^*Q_2. Pela definição de simplectomorfismo,

$$d(\Theta_1 - \varphi^*\Theta_2) = 0$$

isto implica por (1.11) que

$$\Sigma_i(p_i dq_i - r_i ds_i)$$

é fechada. Da mesma forma, $\Gamma^*(\Theta_1 - \Theta_2)$ é fechada. Esta condição é mantida (e implica localmente pelo lema de Poincaré) se $\Gamma^*(\Theta_1 - \Theta_2)$ é exata, isto é,

$$\Gamma^*(\Theta_1 - \Theta_2) = dS \tag{1.12}$$

para uma função $S(q, s)$. Em coordenadas (1.12) escreve-se

$$p_i dq_i - r_i ds_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial S}{\partial s_i} ds_i,$$

que é equivalente a

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad , \quad r_i = -\frac{\partial S}{\partial s_i}. \tag{1.13}$$

Nos chamaremos S de *função geradora* para a transformação canônica φ. Naturalmente, presupor uma outra relação em (1.11) nos leva a uma conclusão diferente em (1.13).

Em geral considere um difeomorfismo $\varphi : P_1 \to P_2$, onde (P_1, Ω_1), (P_2, Ω_2) são variedades simpléticas, e denote o gráfico de φ por $\Gamma(\varphi) \subseteq P_1 \times P_2$. Seja $i_\varphi : \Gamma(\varphi) \to P_1 \times P_2$ a inclusão e seja $\Omega = \pi_1^*\Omega_1 - \pi_2^*\Omega_2$, onde $\pi_i : P_1 \times P_2 \to P_i$ é a projeção . Primeiro verificaremos que φ é simplética se e somente se $i_\varphi^*\Omega = 0$. De fato, desde que $\pi_1 \circ i_\varphi = \varphi \circ \pi_1$ sobre $\Gamma(\varphi)$, segue que

$$i_\varphi^*\Omega = (\pi_1|_{\Gamma(\varphi)})^*(\Omega_1 - \varphi^*\Omega_2)$$

e daí $i_\varphi^*\Omega = 0$ se e somente se φ é simplética pois, $\pi_1|_{\Gamma(\varphi)}$ é injetiva.

Agora suponhamos a escolha de uma 1-forma Θ tal que $\Omega = -d\Theta$. Então $i_\varphi^*\Omega = -di_\varphi^*\Theta = 0$, deste modo localmente sobre $\Gamma(\varphi)$ existe uma função $S : \Gamma(\varphi) \to \mathbb{R}$ tal que

$$i_\varphi^*\Theta = dS.$$

Isto define a função geradora da transformação canônica φ.

Desde que $\Gamma(\varphi)$ é difeomorfo a P_1 e também a P_2, podemos olhar S como uma função de P_1 ou P_2. Se $P_1 = T^*Q_1$ e $P_2 = T^*Q_2$, podemos igualmente olhar (ao menos localmente) S como definida sobre $Q_1 \times Q_2$. Nesse caminho, a construção geral de funções geradoras reduz-se ao caso das equações (1.13).

Exemplo: Seja $f : P_1 \longrightarrow P_2$ com coordenadas canônicas $(Q_1, ..., Q_n, P_1, ..., P_n)$ e $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ sobre P_1 e P_2, respectivamente, e considere

$$\Theta_1 = \sum_i P_i dQ_i, \qquad \Theta_2 = \sum_i p_i dq_i.$$

Então escrevendo

$$f(Q_1, ..., Q_n, P_1, ..., P_n) = (q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$$

e tomando S como função de $(q_1, ..., q_n, Q_1, ..., Q_n)$, a relação $i_f^*\Theta = -dS$ se escreve

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial S}{\partial Q_i}.$$

Agora, seja

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

dada por

$$Q = (\frac{p}{\pi\omega})^{1/2} sen(2\pi q)$$
$$P = (\frac{p\omega}{\pi})^{1/2} cos(2\pi q).$$

Então f é simplética fora de $p = 0$, isto é, $dP \wedge dQ = dp \wedge dq$ e podemos escolher

$$S(q, Q) = -\frac{1}{2}\omega Q^2 cotg(2\pi q).$$

Daí, S gera uma transformação canônica que leva o hamiltoniano do oscilador harmônico $H(Q,P) = \frac{1}{2}(P^2 + \omega^2 Q^2)$ no hamiltoniano $H^*(q,p) = (\frac{\omega}{2\pi})p$ cujas curvas integrais são facilmente encontradas.

1.9 Teoria de Hamilton-Jacobi

Na seção anterior estudamos um pouco de funções geradoras de transformações canônicas; agora tentaremos fazer uma conexão das mesmas com o fluxo do sistema hamiltoniano via a equação de Hamilton-Jacobi. Para isso, comecaremos com o princípio variacional

$$\delta \int_a^b L(q_i(t), \dot{q}_i(t))dt = 0 \tag{1.14}$$

e observamos que se a derivada total em relação ao tempo de uma função é adicionada a L, a condição (1.14) não se altera, desde que a função tenha valor fixo em $t = a$ e $t = b$. Se $S(q, q_0, t - t_0)$ é uma função de $q, q_0 \in Q$, podemos trocar L por

$$\overline{L} := L - \frac{dS}{dt} = L - \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i - \frac{\partial S}{\partial t} \tag{1.15}$$

sem alterar (1.14). Isto é consistente com o fato de que as equações de Euler-Lagrange para $\frac{dS}{dt}$ são satisfeitas, de forma que as equações de Euler-Lagrange para L e $L - \frac{dS}{dt}$ também são satisfeitas (dizemos que $\frac{dS}{dt}$ é um lagrangeano nulo). O momento para L é

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

enquanto que para $\overline{L}$ é

$$\overline{p}_i = \frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{q}_i}. \tag{1.16}$$

O hamiltoniano para $\overline{L}$ é $\overline{H} = \overline{p}_i \dot{q}_i - \overline{L}$ e por (1.15) e (1.16), temos

$$\overline{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{1.17}$$

O novo hamiltoniano assumirá uma forma bem simples se exigirmos que $\overline{H} = constante$ e $\overline{p} = 0$. Notemos que $\overline{p} = 0$ significa $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$, que é uma das equações definindo uma função geradora. Daí, (1.17) se escreve

$$H(q_1, ..., q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_n}) + \frac{\partial S}{\partial t} = constante$$

que é a *equação de Hamilton-Jacobi.*

Nosso objetivo agora é encontrar uma transformação simplética φ tal que o novo hamiltoniano esteja totalmente em equilíbrio, isto é, $H \circ \varphi = E = constante$, deste modo Q_i e P_i podem ser tratadas como constantes de integração para $H \circ \varphi$. O próximo resultado resume a situação.

Teorema 1.9.1 *Seja $P = T^*Q$ com a estrutura simplética $\Omega = -d\Theta$. Seja $\mathbb{X}_H$ um campo de vetores hamiltoniano sobre P, e seja $S : Q \longrightarrow \mathbb{R}$. Então as seguintes condições são equivalentes:*
(i) Para toda curva $c(t)$ em Q satisfazendo

$$c'(t) = T_{\tau_Q^*} \mathbb{X}_H(dS(c(t)))$$

a curva $t \mapsto dS(c(t))$ é uma curva integral de X_H.
(ii) S satisfaz a equação de Hamilton-Jacobi $H \circ dS = E$, isto é,

$$H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}) = E.$$

Demonstração Assuma (ii) e seja $p(t) = dS(c(t))$, onde $c(t)$ satisfaz a equação estabelecida. Então, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} p'(t) &= TdS(c(t)).c'(t) \\ &= TdS(c(t)).T_{\tau_Q^*} \mathbb{X}_H(dS(c(t))) \\ &= T(dS \circ \tau_Q^*).\mathbb{X}_H(dS(c(t))) \end{aligned}$$

Agora usaremos a seguinte identidade simplética:

Lema 1.9.2 *Em T^*Q temos, para toda função $S : Q \longrightarrow \mathbb{R}$,*

$$\Omega(T(dS \circ \tau_Q^*).v, w) = \Omega(v, w - T(dS \circ \tau_Q^*).w)$$

Com isso, para todo $w \in T_{p(t)}P$,

$$\begin{aligned} \Omega(T(dS \circ \tau_Q^*).\mathbb{X}_H(p(t)), w) &= \Omega(\mathbb{X}_H(p(t)), w) - \Omega(\mathbb{X}_H(p(t)), T(dS \circ \tau_Q^*).w) \\ &= \Omega(\mathbb{X}_H(p(t)), w) - dH(p(t))TdS(p(t))w. \quad \square \end{aligned}$$

Mas, do fato que $dH(p(t))TdS(p(t)) = d(H \circ dS)(p(t))$ e assumindo (ii) temos

$$T(dS \circ \tau_Q^*).\mathbb{X}_H(p(t)) = \mathbb{X}_H(p(t)). \tag{1.18}$$

De forma análoga, mostra-se que $(i) \Rightarrow (ii)$. ■

1.9.1 O problema do oscilador harmônico como um exemplo do método de Hamilton-Jacobi

Tentaremos ilustrar como funciona em coordenadas a técnica de Hamilton-Jacobi para resolver o movimento de um sistema mecânico. Para isso, trabalharemos o problema simples de um oscilador Harmônico unidimensional. O Hamiltoniano é

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q) = E, \quad onde\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Primeiro obtemos a equação de Hamilton-Jacobi para S fazendo $p = \frac{\partial S}{\partial q}$ e substituindo no Hamiltoniano. Com isso,

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q\right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{1.19}$$

como a dependência explicita de S em relação a t está envolvida somente no último termo, uma solução de (1.19) pode ser expressa na forma

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha t$$

onde α é uma constante de integração. Com está escolha de solução o tempo pode ser eliminado da equação (1.19)

$$\frac{1}{2m}\Big[\Big(\frac{\partial W}{\partial q}\Big)^2 + m^2\omega^2 q^2\Big] = \alpha. \tag{1.20}$$

A constante de integração α é desta maneira identificada com a energia total E. Isto é verificado diretamente da equação (1.19) e da relação

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$$

que se reduz para

$$H = \alpha.$$

Da equação (1.20) temos que

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2},$$

e integrando chegamos a

$$W = \sqrt{2m\alpha}\int\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\alpha}}\,dq.$$

Com isso,

$$S = \sqrt{2m\alpha}\int\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\alpha}}\,dq - \alpha t.$$

Como desejamos não S mas sim suas derivadas parciais. A solução para q surge da equação

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\int\frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\alpha}}} - t$$

e integrando temos

$$t + \beta = \frac{1}{\omega}\,arcsen\Big(q\sqrt{\frac{m\omega^2}{2\alpha}}\Big).$$

Logo,

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}}\,sen[\omega(t+\beta)]$$

que é uma solução familiar de um oscilador harmônico. A solução para o momento p pode ser obtida por

$$\begin{aligned} p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} &= \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2} \\ &= \sqrt{2m\alpha(1 - sen^2\omega(t+\beta))} \\ &= \sqrt{2m\alpha}\,\cos\omega(t+\beta). \end{aligned}$$

Para terminarmos, as constantes α e β devem estar conectadas com as condições iniciais q_0 e p_0 e o tempo $t = 0$. Como

$$\alpha = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2)$$

temos que, nas condições iniciais,

$$2m\alpha = p_0^2 + m^2\omega^2 q_0^2.$$

Da mesma forma,

$$tg\,\omega(t+\beta) = \frac{sen\,\omega(t+\beta)}{cos\,\omega(t+\beta)} = m\omega\frac{q}{p}$$

e nas condições iniciais obtemos

$$tg\,\omega = m\omega\frac{q_0}{p_0}.$$

Assim, a função S é a geradora de uma transformação canônica para uma nova coordenada que mede o ângulo de fase do oscilador e um novo momento canônico identificado como a energia total do sistema.

Capítulo 2

Introdução aos grupos de Lie

2.1 Grupos de Lie

Definição 2.1.1 *Um* Grupo de Lie *é uma variedade diferenciável G que possui uma estrutura de grupo consistente com sua estrutura de variedade do ponto de vista que a multiplicação de grupo*

$$\begin{array}{rcl} \mu : G \times G & \longrightarrow & G \\ (g,h) & \mapsto & gh \end{array}$$

e a aplicação inversão

$$\begin{array}{rcl} I : G & \longrightarrow & G \\ g & \mapsto & g^{-1} \end{array}$$

são aplicações diferenciáveis.

Definição 2.1.2 *Definiremos as aplicações*

$$\begin{array}{rcl} L_g : G & \longrightarrow & G \\ h & \mapsto & gh \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rcl} R_h : G & \longrightarrow & G \\ g & \mapsto & gh \end{array}$$

e as chamaremos de translação à esquerda *e* translação à direita*, respectivamente.*

Algumas propriedades das translações:

1. $L_{g_1} \circ L_{g_2} = L_{g_1 g_2} \quad , \quad R_{h_1} \circ R_{h_2} = R_{h_2 h_1}$;
2. Se $e \in G$ é o elemento identidade de G, então $L_e = R_e = id$;
3. $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}} \quad , \quad (R_h)^{-1} = R_{h^{-1}}$;

De 1, 2 e 3 concluimos que L_g e R_h são difeomorfismos.

4. $L_g \circ R_h = R_h \circ L_g$;
5. $T_{gh} L_{g^{-1}} \circ T_h L_g = T_h(L_{g^{-1}} \circ L_g) = id$, ou seja, $T_h L_g$ é um isomorfismo.

Exemplos:

a) Todo espaço vetorial V é um grupo de Lie abeliano com operações:

$$\begin{array}{rcl} \mu : G \times G & \longrightarrow & G \\ \mu(x,y) & = & x+y \end{array} \qquad , \qquad \begin{array}{rcl} I : G & \longrightarrow & G \\ I(x) & = & -x \end{array}$$

Este grupo de Lie é chamado *grupo vetorial*.

b) $GL(n,\mathbb{R}) = \{\varphi \mid \varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo linear$\}$ é um grupo de Lie de dimensão n^2, chamado grupo linear.

Dada uma carta de G, podemos construir um atlas sobre um grupo de Lie G usando a translação à esquerda (ou à direita). Suponha, por exemplo, que (U, φ) é uma carta no ponto $e \in G$, e que $\varphi : U \longrightarrow V$. Defina uma carta (U_g, φ_g) no ponto $g \in G$ escrevendo

$$U_g = L_g(U) = \{L_g h \mid h \in U\}$$

e definindo

$$\begin{array}{rcl} \varphi_g = \varphi \circ L_{g^{-1}} : U_g & \longrightarrow & V \\ h & \mapsto & \varphi(g^{-1}h). \end{array}$$

O conjunto das cartas $\{(U_g, \varphi_g)\}$ forma um atlas de G e a diferenciabilidade das aplicações de transição

$$\varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}^{-1} = \varphi \circ L_{g_1^{-1} g_2} \circ \varphi^{-1} : \varphi_2(U_{g_1} \cap U_{g_2}) \longrightarrow \varphi_1(U_{g_1} \cap U_{g_2})$$

segue da diferenciabilidade da multiplicação e inversão de Grupo.

2.1.1 Campo de vetores invariantes

Definição 2.1.3 *Um campo de vetores X sobre G é chamado* invariante à esquerda *se para todo $g \in G$ nos temos $L_g^* X = X$, isto é, se*

$$(T_h L_g)X(h) = X(gh)$$

para todo $h \in G$.

Denotaremos por $\mathfrak{X}(G)$ o conjunto de todos os campos de vetores sobre G, $\mathfrak{X}_L(G)$ o conjunto de todos os campos de vetores invariantes à esquerda sobre G e $\mathfrak{X}_R(G)$ o conjunto de todos os campos de vetores invariantes à direita sobre G.

Proposição 2.1.4 *O conjunto $\mathfrak{X}_L(G)$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(G)$.*

Demonstração Dados $X, Y \in \mathfrak{X}_L(G)$ e $g \in G$ temos que

$$L_g^*[X, Y] = [L_g^* X, L_g^* Y] = [X, Y]$$

e com isso, $[X, Y] \in \mathfrak{X}_L(G)$.
Logo, $\mathfrak{X}_L(G)$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(G)$. ∎

Definição 2.1.5 *Dado $\xi \in T_e G$, definiremos o campo de vetores X_ξ sobre G por*

$$X_\xi(g) = T_e L_g(\xi).$$

Proposição 2.1.6 *X_ξ é um campo de vetores invariante à esquerda.*

Demonstração Dados $\xi \in T_eG$ e $g, h \in G$ temos que

$$\begin{aligned} X_\xi(gh) &= T_eL_{gh}(\xi) \\ &= T_e(L_g \circ L_h)(\xi) \\ &= T_hL_g(T_eL_h(\xi)) \\ &= T_hL_g(X_\xi(h)). \end{aligned}$$

Logo, X_ξ é um campo invariante à esquerda. ∎

Proposição 2.1.7 *Os espaços vetoriais $\mathfrak{X}_L(G)$ e $T_e(G)$ são isomorfos.*

Demonstração Consideremos as aplicações lineares

$$\begin{aligned} \phi_1 : \ \mathfrak{X}_L(G) &\longrightarrow T_eG \quad , \quad X \mapsto X(e) \\ \phi_2 : \ T_eG &\longrightarrow \mathfrak{X}_L(G) \quad , \quad \xi \mapsto X_\xi \end{aligned}$$

Como

$$\phi_1(\phi_2(\xi)) = \phi_1(X_\xi) = X_\xi(e) = \xi \qquad e \qquad \phi_2(\phi_1(X)) = \phi_2(X(e)) = X_{X(e)} = X$$

temos que

$$\phi_1 \circ \phi_2 = id_{T_eG} \qquad e \qquad \phi_2 \circ \phi_1 = id_{\mathfrak{X}_L(G)}.$$

Logo, ϕ_1 e ϕ_2 definem um isomorfismo linear entre $\mathfrak{X}_L(G)$ e $T_e(G)$.
Portanto, $\mathfrak{X}_L(G)$ e $T_e(G)$ são espaços vetoriais isomorfos. ∎

2.1.2 A álgebra de Lie de um grupo de Lie

Definição 2.1.8 *Definiremos o* colchete de Lie *sobre T_eG por*

$$[\xi, \eta] := [X_\xi, X_\eta](e)$$

onde $\xi, \eta \in T_eG$.

Com esse colchete, o espaço tangente T_eG torna-se uma álgebra de Lie. Dizemos então que definimos um colchete em T_eG via extensão à esquerda. Notemos que,

$$[X_\xi, X_\eta] = X_{[\xi,\eta]},$$

para todo $\xi, \eta \in T_eG$.

Definição 2.1.9 *O espaço vetorial T_eG com essa estrutura de álgebra de Lie é chamado a* álgebra de Lie de G*. Denotaremos essa álgebra por $\mathfrak{g}$.*

Exemplo:

A álgebra de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$, denotada por $\mathfrak{gl}(n)$, é o espaço vetorial das transformações de $\mathbb{R}^n$, $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, com o colchete comutador

$$[A,B] = AB - BA.$$

Para mostrar isso, vamos calcular o colchete. Primeiro, notemos que para todo $\xi \in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$

$$\begin{array}{rcl} X_\xi : GL(n,\mathbb{R}) & \longrightarrow & L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n) \\ A & \mapsto & A\xi \end{array}$$

é um campo de vetores invariante à esquerda sobre $GL(n,\mathbb{R})$. De fato, para todo $B \in GL(n,\mathbb{R})$, a aplicação

$$L_B : GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(n,\mathbb{R})$$

definida por $L_B(A) = BA$ é uma aplicação linear e

$$X_\xi(L_B(A)) = BA\xi = T_A L_B X_\xi(A).$$

Portanto, pela fórmula local

$$[X,Y](x) = DY(x).X(x) - DX(x).Y(x)$$

temos que

$$\begin{aligned} [\xi, \eta] &= [X_\xi, X_\eta](I) \\ &= DX_\eta(I).X_\xi(I) - DX_\xi(I).X_\eta(I) \\ &= \xi\eta - \eta\xi \end{aligned}$$

desde que $DX_\eta(I).X_\xi(I) = \xi.\eta$ pela linearidade de $X_\eta(A) = A\eta$ em A.

2.1.3 Subgrupos a um parâmetro e a aplicação exponencial

Sabemos que se X_ξ é o campo de vetores invariante à esquerda correspondente a $\xi \in \mathfrak{g}$ então existe uma única curva integral $\gamma_\xi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ de X_ξ passando pela identidade e, isto é, $\gamma_\xi(0) = e$ e $\gamma_\xi^{'}(t) = X_\xi(\gamma_\xi(t))$.

Definição 2.1.10 *A aplicação* $exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ *definida por* $exp(\xi) = \gamma_\xi(1)$*, é chamada a* aplicação exponencial *da álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *em* G.

Exemplos:

a) Seja $G = V$ um grupo vetorial, isto é, V é um espaço vetorial e a operação de grupo é a adição de vetores. Então $\mathfrak{g} = V$ e $exp : V \longrightarrow V$ é a aplicação identidade definida por $exp(v) = v$ para todo $v \in V$.

b) Seja $G = GL(n, \mathbb{R})$ e $\mathfrak{g} = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Para todo $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, a aplicação

$$\gamma_A : \mathbb{R} \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

definida por

$$t \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} A^i$$

é um subgrupo a um parâmetro, pois

$$\begin{aligned} \gamma_A(0) &= I \\ \gamma_A^{'}(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} A^i = \gamma_A(t)A. \end{aligned}$$

Portanto, a aplicação exponencial é dada por

$$\begin{aligned} exp : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) &\longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto \gamma_A(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} = e^A. \end{aligned}$$

Definição 2.1.11 *Seja $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow G$ uma curva satisfazendo*

$$\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t) \quad \textit{para todo } s, t \in \mathbb{R}$$

Chamaremos a curva γ de subgrupo a um parâmetro *de G.*

Proposição 2.1.12 *Seja $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow G$ um subgrupo a um parâmetro contínuo de G, então γ é suave e $\gamma(t) = exp(t\xi)$ para algum $\xi \in \mathfrak{g}$ e para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração Ver [7]. ■

2.1.4 Homomorfismo de grupos

Definição 2.1.13 *Um* homomorfismo $f : G \longrightarrow H$ entre grupos de Lie G *e* H *é uma aplicação diferenciável tal que para todo $g, h \in G$, $f(gh) = f(g)f(h)$.*

Definição 2.1.14 *Dados os campos de vetores X e Y e um difeomorfismo $f : G \to H$. Diremos que X e Y são* f-relacionados *se satisfazem a identidade*

$$f_*X = Y.$$

onde $X \in TG$ e $Y \in TH$.

Proposição 2.1.15 *Seja G e H grupos de Lie com álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, respectivamente. Se $f : G \longrightarrow H$ é um homomorfismo entre grupos de Lie então $T_e f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ é um homomorfismo entre álgebras de Lie, isto é,*

$$(T_e f[\xi, \eta]) = [T_e f(\xi), T_e f(\eta)]$$

para todo $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$. Além disso, $f \circ exp_G = exp_H \circ T_e f$.

Demonstração Desde que f é um homomorfismo, $f \circ L_g = L_{f(g)} \circ f$. Daí, $Tf \circ TL_g = TL_{f(g)} \circ Tf$ donde temos que

$$X_{T_e f(\xi)}(f(g)) = T_g f(X_\xi(g))$$

isto é, os campos de vetores X_ξ e $X_{T_e f(\xi)}$ são f-relacionados. Segue que os campos de vetores $[X_\xi, X_\eta]$ e $[X_{T_e f(\xi)}, X_{T_e f(\eta)}]$ também são f-relacionados para todo $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$. Daí,

$$\begin{aligned} T_e f([\xi,\eta]) &= (Tf \circ [X_\xi, X_\eta])(e) \\ &= [X_{T_e f(\xi)}, X_{T_e f(\eta)}](\bar{e}) \\ &= [T_e f(\xi), T_e f(\eta)] \end{aligned}$$

onde $e = e_G$ e $\bar{e} = e_H = f(e)$.
Isso implica que $T_e f$ é um isomorfismo de álgebras de lie. Fixando $\xi \in \mathfrak{g}$, notemos que

$$\begin{aligned} \alpha : t &\mapsto f(exp_G(\xi t)) \\ \beta : t &\mapsto exp_H(tT_e f(\xi)) \end{aligned}$$

são subgrupos a um parâmetro de H. Além disso,

$$\alpha'(0) = T_e f(\xi) = \beta'(0).$$

Desde que α e β são subgrupos a um parâmetro de H, elas satisfazem a mesma *edo* de primeira ordem, e pelo teorema de existência e unicidade, $\alpha(t) = \beta(t)$. para todo $t \in \mathbb{R}$
Em particular,

$$f(exp_G \xi) = exp_H(T_e f(\xi))$$

para todo $\xi \in \mathfrak{g}$. ■

Corolário 2.1.16 *Sejam $f_1, f_2 : G \longrightarrow H$ homomorfismos entre grupos de Lie e suponha que G é conexo. Se $T_e f_1 = T_e f_2$ então $f_1 = f_2$.*

Demonstração Seja (U_e, φ) uma carta canônica em $e \in G$ e $U = U_e$ então, pela proposição (2.1.15), para $a = exp(\xi) \in U$ temos que

$$\begin{aligned} f_1(a) &= f_1(exp(\xi)) \\ &= exp(T_e f_1(a)) \\ &= exp(T_e f_2(a)) \\ &= f_2(a). \end{aligned}$$

Desde que U gera G e f_1, f_2 são homomorfismos, $f_1 = f_2$. $\blacksquare$

Definição 2.1.17 *Para todo $g \in G$, considere a aplicação*

$$\begin{aligned} I_g : G &\longrightarrow G \\ h &\mapsto I_g(h) = ghg^{-1}. \end{aligned}$$

Chamaremos essa aplicação de automorfismo interno *associado a g. Claramente, I_g é diferenciável e é um homomorfismo pois,*

$$I_g(hk) = ghkg^{-1} = ghg^{-1}gkg^{-1} = I_g(h)I_g(k).$$

Definição 2.1.18 *Chamaremos de* aplicação adjunta *associada a g a seguinte aplicação*

$$\begin{aligned} Ad_g : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ \xi &\mapsto Ad_g(\xi) = T_e I_g(\xi) \end{aligned}$$

Definição 2.1.19 *Da mesma forma, chamaremos de* aplicação coadjunta *associada com g a aplicação*

$$\begin{aligned} Ad_g^* : \mathfrak{g}^* &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ < Ad_g^*(\eta), \xi > &= < \eta, Ad_g(\xi) > \end{aligned}$$

onde $\mathfrak{g}^*$ é o dual da álgebra de Lie de G.

Lema 2.1.20 *Para todo $\xi \in \mathfrak{g}$ e $g \in G$*

$$exp(Ad_g\xi) = g(exp\xi)g^{-1}.$$

Demonstração Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "TI_g"] \arrow[d, "exp"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "exp"] \\
G \arrow[r, "I_g"] & G
\end{tikzcd}$$

Desde que I_g é um homomorfismo, temos que o diagrama é comutativo então, para $\xi \in \mathfrak{g}, g \in G$, temos que

$$gexp(\xi)g^{-1} = exp(Ad_g\xi)$$

como desejado. ■

2.1.5 Subgrupos de Lie

Definição 2.1.21 *Um* subgrupo de Lie *H de um grupo de Lie G é um subgrupo de G que é também uma subvariedade imersa de G. Se H é uma subvariedade de G, então H é chamado um* subgrupo de Lie regular.

Teorema 2.1.22 *Se H é um subgrupo fechado de um grupo de Lie G, então H é uma subvariedade de G e em particular H é um subgrupo de Lie regular de G.*

Demonstração Ver [3]. ■

Teorema 2.1.23 *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, e seja $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Então existe um subgrupo de Lie conexo H de G cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{h}$.*

Demonstração Ver [3]. ■

2.1.6 Quocientes

Seja H um subgrupo fechado de um grupo de Lie G. Denotaremos por G/H o conjunto de todas as classes laterais à esquerda, isto é, a coleção $\{gH \mid g \in G\}$.

Teorema 2.1.24 *Seja $\pi : G \longrightarrow G/H$ a projeção definida por $\pi(g) = gH$. Existe uma única estrutura de variedade diferenciável sobre G/H tal que a projeção π é uma submersão.*

Demonstração Ver [1]. ■

2.2 Alguns grupos de Lie clássicos

2.2.1 O grupo linear real, $GL(n, \mathbb{R})$

Definição 2.2.1 *Chamaremos de* grupo linear real *o conjunto*

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) | det(A) \neq 0\}.$$

É importante destacarmos que $GL(n, \mathbb{R})$ é aberto em $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ (e desta forma é não compacto), que sua álgebra de Lie é $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ com o colchete comutador e que a aplicação determinante

$$det : GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

aplica $GL(n, \mathbb{R})$ sobre duas componentes conexas de $\mathbb{R} - \{0\}$ e, com isso, $GL(n, \mathbb{R})$ é não conexo. Defina

$$GL^+(n, \mathbb{R}) := \{A \in Gl(n, \mathbb{R}) \mid det(A) > 0\} \ \ e \ \ GL^-(n, \mathbb{R}) := \{A \in Gl(n, \mathbb{R}) \mid det(A) < 0\}.$$

Podemos resumir a discursão na seguinte proposição.

Proposição 2.2.2 *O grupo $GL(n,\mathbb{R})$ é um grupo de Lie n^2 dimensional não compacto, desconexo e cuja álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ consiste de todas as matrizes $n\times n$ com o colchete*

$$[A,B] = AB - BA.$$

O grupo $GL(n,\mathbb{R})$ tem duas componentes conexas. A saber, $GL^{+}(n,\mathbb{R})$ e $GL^{-}(n,\mathbb{R})$.

Demonstração Ver [7]. ■

2.2.2 O grupo linear real especial, $SL(n,\mathbb{R})$

Considere a aplicação determinante

$$det : L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

e o grupo linear real

$$GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n) | det(A) \neq 0\}.$$

Notemos que $\mathbb{R} - \{0\}$ é um grupo multiplicativo e que

$$det : GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$$

é um homomorfismo de grupos de Lie desde que $det(AB) = det(A)det(B)$.

Lema 2.2.3 *A aplicação $det : L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ é C^∞, e sua derivada é dada por*

$$Ddet(A)B = detA.traço(A^{-1}B).$$

Demonstração Primeiro observemos que

$$\begin{aligned} det(A+\lambda B) &= det(A.(I+\lambda A^{-1}B)) \\ &= det(A).det(I+\lambda A^{-1}B) \\ &= det(A).(1+\lambda \text{traço} A^{-1}B + ... + \lambda^n \text{traço} A^{-1}B) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
Ddet(A)B &= \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} det(A+\lambda B)) \\
&= det(A)(\text{traço}A^{-1}B + 2\lambda\text{traço}A^{-1}B + ... + n\lambda^{n-1}\text{traço}A^{-1}B)|_{\lambda=0} \\
&= det(A).\text{traço}A^{-1}B. \blacksquare
\end{aligned}$$

Definição 2.2.4 *Definiremos o* grupo linear real especial *por*

$$\begin{aligned}
SL(n,\mathbb{R}) &= \{A \in GL(n,\mathbb{R}) | det(A) = 1\} \\
&= det^{-1}(1).
\end{aligned}$$

2.2.3 O grupo ortogonal, $O(n)$

Considere em $\mathbb{R}^n$ o produto interno canônico

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

onde $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. Relembrando, uma matriz A é ortogonal se e somente se

$$AA^T = I \Longleftrightarrow < Ax, Ay >=< x, y > \Longleftrightarrow \parallel Ax \parallel = \parallel x \parallel$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Definição 2.2.5 *Definimos o* grupo ortogonal *como sendo o conjunto*

$$O(n) := \{A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \mid A \text{ é ortogonal}\}.$$

Proposição 2.2.6 *A álgebra de Lie $\mathfrak{o}(n)$ de $O(n)$ é o espaço das matrizes anti-simétricas $n \times n$ com o colchete*

$$[A, B] = AB - BA.$$

Demonstração ver [7]. $\blacksquare$

2.2.4 O grupo ortogonal especial, $SO(n)$

Definição 2.2.7 *Definimos o grupo ortogonal especial como sendo o conjunto*

$$\begin{aligned} SO(n) &= O(n) \cap SL(n, \mathbb{R}) \\ &= \{A \in O(n) | detA = 1\} \end{aligned}$$

Vamos destacar dois grupos ortogonais interessantes.

Grupo de rotações no plano, $SO(2)$

Consideremos o conjunto $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ parametrizado pelo ângulo polar θ, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Para cada $\theta \in [0, 2\pi]$, seja

$$A_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}.$$

A matriz A_θ representa uma rotação de angulo θ no sentido antí-horário e além disso, $A_\theta \in SO(2)$ pois, $A_\theta . A_\theta^T = I$.
Agora, seja $A \in SO(2)$ e assuma que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Por definição, $A.A^T = I$ e isso implica que

$$a^2 + b^2 = 1,\ c^2 + d^2 = 1,\ ac + bd = 0.$$

Donde, temos que existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que

$$a = d = cos\theta,\ b = -sen\theta,\ c = sen\theta.$$

Portanto,

$$A = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}.$$

Assim, concluimos que o conjunto $SO(2)$ é o conjunto das rotações no plano e podemos identificá-lo como um grupo de Lie de $\mathbb{S}^1$.

A álgebra de Lie de $SO(3)$

Agora mostraremos que a álgebra de Lie de $SO(3)$ é isomorfa a álgebra de Lie de $(\mathbb{R}^3, \times)$, onde $\times$ denota o produto vetorial usual. Para isso definiremos o isomorfismo entre álgebras de Lie,

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\ } : (\mathfrak{so}(3), [,]) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^3, \times) \\ A & \mapsto & \widehat{A} \end{array}$$

onde $A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$, $\widehat{A} = (a_1, a_2, a_3)$ e mostraremos que

$$\widehat{[A,B]} = [\widehat{A}, \widehat{B}] = \widehat{A} \times \widehat{B} \qquad \textit{para todo } A, B \in \mathfrak{so}(3).$$

Primeiro observemos que um elemento da algebra de Lie de $SO(3)$ é uma matriz anti-simétrica. Daí, um vetor tangente A na identidade do grupo deve satisfazer a condição $A^T = -A$. Isso segue se tomarmos uma curva

$$\gamma : J \longrightarrow SO(3)$$

com $\gamma(0) = I$, $\dot{\gamma}(0) = A$. Essa curva satisfaz $\gamma(t)^T \cdot \gamma(t) = I$; diferenciando e calculando em $t = 0$ temos

$$\dot{\gamma}(0)^T \cdot \gamma(0) + \gamma(0)^T \cdot \dot{\gamma}(0) = 0 \Longleftrightarrow A^T + A = 0 \Longleftrightarrow A^T = -A.$$

Agora, para

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3)$$

temos

$$\begin{array}{rcl} [A,B] & = & AB - BA \\ & = & \begin{pmatrix} 0 & v_2w_1 - v_1w_2 & v_3w_1 - v_1w_3 \\ -v_2w_1 + v_1w_2 & 0 & v_3w_2 - v_2w_3 \\ -v_3w_1 + v_1w_3 & -v_3w_2 + v_2w_3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3). \end{array}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\widehat{A} \times \widehat{B} &= (v_1, v_2, v_3) \times (w_1, w_2, w_3) \\ &= (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1).\end{aligned}$$

Logo, $\widehat{[A,B]} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1) = \widehat{A} \times \widehat{B}$.

2.3 Ação de grupos de Lie

Definição 2.3.1 *Seja M uma variedade diferenciável. Uma* ação do grupo de Lie G sobre M *é uma aplicação diferenciável* $\Phi : G \times M \longrightarrow M$ *tal que:*

i) $\Phi(e, x) = x$ *para todo* $x \in M$*;*

ii) $\Phi(g, \Phi(h, x)) = \Phi(gh, x)$ *para todo* $g, h \in M$ *e* $x \in M$*.*

Exemplos:

a) Se H é um subgrupo de um grupo de Lie G, então $\Phi : H \times G \longrightarrow G$ definida por $\Phi(h, g) = hg$ é uma ação de H sobre G.

b) O círculo unitário no plano complexo $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$ é um grupo de Lie abeliano com a operação de multiplicação. O espaço tangente $T_e\mathbb{S}^1$ é paralelo ao eixo imaginário, e nos identificaremos $\mathbb{R}$ com $T_e\mathbb{S}^1$ por $t \mapsto 2\pi it$. Desde modo, a aplicação exponencial é dada por

$$\begin{aligned} exp : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ t &\mapsto e^{2\pi it} \end{aligned}$$

e $exp^{-1}(1) = \mathbb{Z}$.
O grupo $\mathbb{S}^1$ age sobre $\mathbb{C}^2$ com

$$\Phi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

definida por $\Phi(e^{i\theta},(z_1,z_2)) = (e^{i\theta}z_1, e^{-i\theta}z_2)$. As condições

$$i) \quad \Phi(1,(z_1,z_2)) = 1.(z_1,z_2)$$

$$\begin{aligned} ii) \quad \Phi(e^{i\theta},\Phi(e^{i\beta},(z_1,z_2))) &= \Phi(e^{i\theta},(e^{i\beta}z_1,e^{-i\beta}z_2)) \\ &= (e^{i(\theta+\beta)}z_1, e^{-i(\theta+\beta)}z_2) \\ &= \Phi(e^{i(\theta+\beta)},(z_1,z_2)) \end{aligned}$$

mostram que Φ é uma ação.

Agora, para todo $g \in G$ seja $\Phi_g : M \longrightarrow M$ definida por $\Phi_g(x) = \Phi(g,x)$ temos que: de $i)$ $\Phi_e = id_M$ e de $ii)$ $\Phi_{gh} = \Phi_g \circ \Phi_h$. Isto nos dá que $(\Phi_g)^{-1} = \Phi_{g^{-1}}$ donde concluimos que a aplicação Φ_g é um difeomorfismo.

Definição 2.3.2 *Seja Φ uma ação de G em M. Para todo $x \in M$, a* órbita (ou Φ-órbita) *de x é definida por*

$$G \cdot x = \{\Phi_g(x) \mid g \in G\}.$$

Definição 2.3.3 *Uma ação é chamada:*

$i)$ Transitiva *se possui somente uma órbita ou, de forma equivalente, se para todo $x, y \in M$ existe um $g \in M$ tal que $g \cdot x = y$;*

$ii)$ Efetiva *se $\Phi_g = id_M$ implica $g = e$; isto é, $g \mapsto \Phi_g$ é injetiva;*

$iii)$ Livre *se não possui pontos fixos, isto é, $\Phi_g(x) = x$ implica que $g = e$ ou, de forma equivalente, se para cada $x \in M$, $g \mapsto \Phi_g(x)$ é injetiva.*

Definição 2.3.4 *Sejam $\Phi : G \times M \longrightarrow M$ uma ação e $x \in M$. O conjunto*

$$G_x = \{g \in G \mid \Phi_g x = x\}$$

é chamado grupo de isotropia *de Φ em x.*

Notemos que uma ação é livre se $G_x = \{e\}$ para todo $x \in M$, e que toda ação livre é efetiva. De forma natural uma ação Φ de um grupo G sobre uma variedade M define uma relação de equivalência dada da seguinte forma: Dados $x, y \in M$, diremos que $x \sim y$ se existe um $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$, isto é se $x \in G \cdot y$ (e daí $y \in G \cdot x$). Denotaremos a classe do elemento x por $[x]$ e chamaremos o conjunto $M/G = \{[x] \mid x \in M\}$, das classe de equivalência, de *espaço das órbitas*.

Agora, consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \pi : M &\longrightarrow M/G \\ x &\mapsto G \cdot x. \end{aligned}$$

Vamos munir M/G com uma estrutura topológica dada pela topologia quociente definindo um conjunto $U \subseteq M/G$ como sendo aberto em M/G se e somente se $\pi^{-1}(U)$ é aberto em Q. Essa topologia em geral não torna M/G um espaço de Hausdorff. Para mais detalhes ver [1].

O próximo resultado nos dá uma condição para que o espaço M/G seja de Hausdorff.

Proposição 2.3.5 *Seja $\Phi : G \times M \longrightarrow M$ uma ação de um grupo de Lie G e seja $R = \{(m, \Phi_g m) \in M \times M \mid (g, m) \in G \times M\}$. Se R é um subconjunto fechado de $M \times M$, então a topologia quociente de M/G é Hausdorff.*

Demonstração Ver [1]. ■

Um caminho natural a seguir é o de tentarmos garantir que o espaço das órbitas M/G possui uma estrutura de variedade diferenciável e uma condição necessária e suficiente para isso é dada pelo seguinte resultado:

Teorema 2.3.6 *Se G age sobre M e $R = \{(m, \Phi_g m) \in M \times M \mid (g, m) \in G \times M\}$. Então R é uma subvariedade fechada de $M \times M$ se e somente se M/G tem uma estrutura de variedade diferenciável tal que $\pi : M \longrightarrow M/G$ é uma submersão.*

Demonstração Ver [1]. ■

Corolário 2.3.7 *Seja H um subgrupo fechado de um grupo de Lie G. Se $\Phi : H \times G \longrightarrow G$ é definida por $\Phi(h, g) = hg$, então G/H é uma variedade diferenciável e $\pi : G \longrightarrow G/H$ é uma submersão.*

Demonstração Ver [1]. ■

Definição 2.3.8 *Uma ação $\Phi : G \times M \longrightarrow M$ é chamada* própria *se e somente a aplicação $\tilde{\Phi} : G \times M \longrightarrow M \times M$ definida por $\tilde{\Phi}(g, x) = (x, \Phi(g, x))$ é própria, isto é, se $K \subseteq M \times M$ é compacto, então $\tilde{\Phi}^{-1}(K)$ é compacto. Equivalentemente, se x_n converge em M e $\Phi_{g_n} x_n$ converge em M, então g_n tem uma subsequência convergente em G.*

Desde que $G_x = \Phi_x^{-1}(x)$ e a aplicação $\Phi_x : G \longrightarrow M$ definida por $\Phi_x(g) = \Phi(g, x)$ é contínua, G_x é um subgrupo fechado de G e portanto é uma subvariedade diferenciável. Se a ação é própria então G_x é compacto. Como $\Phi_x(gh) = \Phi_g \circ \Phi_h x = \Phi_g x$ para todo $h \in G_x$, Φ_x induz uma aplicação $\tilde{\Phi}_x : G/G_x \longrightarrow G \cdot x \subseteq M$, definida por $\tilde{\Phi}_x(gG_x) = \Phi_g x$. Esta aplicação é injetiva porque se $\Phi_g x = \Phi_h x$, então $g^{-1}h \in G_x$, isto é, $gG_x = hG_x$.

Corolário 2.3.9 *Se $\Phi : G \times M \longrightarrow M$ é uma ação e $x \in M$, então $\tilde{\Phi}_x : G/G_x \longrightarrow G \cdot x \subseteq M$ é uma imersão. Se Φ é própria, a órbita $G \cdot x$ é uma subvariedade fechada de M e $\tilde{\Phi}_x$ é um difeomorfismo.*

Demonstração Ver [1]. ■

Corolário 2.3.10 *Se Φ é uma ação transitiva de G sobre M, então para todo $x \in M$, $G \cdot x = M$ e teremos $M \cong_{diff} G/G_x$.*

Demonstração Ver [1]. ■

Definição 2.3.11 *No caso do corolário acima, a variedade M é chamada* espaço homogêneo.

Proposição 2.3.12 *Se $\Phi : G \times M \longrightarrow M$ é uma ação livre e própria, então M/G é uma variedade diferenciável e $\pi : M \longrightarrow M/G$ é uma submersão.*

Demonstração Ver [1]. ■

Definição 2.3.13 *Suponha que $\Phi : G \times M \longrightarrow M$ é uma ação sobre M. Se $\xi \in T_eG$, então a aplicação $\Phi^\xi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ definida por $\Phi^\xi(t, x) = \Phi(exp(t\xi), x)$ é uma $\mathbb{R}$-ação sobre M, isto é, Φ^ξ é um fluxo sobre M. O correspondente campo de vetores sobre M dado por*

$$\xi_M(x) = \frac{d}{dt}\Phi(exp(t\xi), x)|_{t=0}$$

é chamado o gerador infinitesimal *da ação correspondente a ξ.*

Antes de passarmos a um exemplo, considere a definição:

Definição 2.3.14 *Seja $\Phi : G \times T_eG \longrightarrow T_eG$ definida por $\Phi(g, \eta) = Ad_g\eta = T_e(R_{g^{-1}}L_g)\eta$, então Φ é uma ação chamada* ação adjunta *de G sobre T_eG.*

Exemplos:

a) Considere a ação adjunta de G sobre T_eG. Se $\xi \in T_eG$ então temos que $\xi_{T_eG} = ad_\xi$, onde

$$\begin{aligned} ad : T_eG \times T_eG &\longrightarrow T_eG \\ (\xi, \eta) &\mapsto ad(\xi, \eta) = [\xi, \eta]. \end{aligned}$$

De fato, seja $\phi_t(g) = g.exp(t\xi) = R_{exp(t\xi)}g$, o fluxo de X_ξ. Então

$$[\xi, \eta] = [X_\xi, X_\eta](e)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt} T_{\phi_t(e)}\phi_{-t} X_\eta(\phi_t(e))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} T_{exp(t\xi)} R_{exp(-t\xi)} X_\eta(exp(t\xi))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} T_{exp(t\xi)} R_{exp(-t\xi)} T_e L_{exp(t\xi)}\eta|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} T_e(L_{exp(t\xi)} R_{exp(-t\xi)})\eta|_{t=0}.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$\xi_{T_eG}(\eta) = \frac{d}{dt} Ad_{exp(t\xi)}\eta|_{t=0} = [\xi, \eta] = ad_\xi \eta.$$

Corolário 2.3.15 *Seja $\Phi : G \times M \longrightarrow M$ uma ação sobre M. Para todo $g \in G$ e $\xi, \eta \in T_eG$ temos*
i) $(Ad_g\xi)_M = \Phi^*_{g^{-1}}\xi_M$ *e*
ii) $[\xi_M, \eta_M] = -[\xi, \eta]_M$.

Demonstração Ver [1]. ■

Definição 2.3.16 *Sejam M e N variedades e G um grupo de Lie. Sejam Φ e Ψ ações de G sobre M e N, respectivamente, e $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que f é* equivariante *com respeito a essas ações se para todo $g \in G$,*

$$f \circ \Phi_g = \Psi_g \circ f$$

isto é, o seguinte diagrama comuta.

$$
\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{f} & N \\
\Phi_g \downarrow & & \downarrow \Psi_g \\
M & \xrightarrow{f} & N
\end{array}
$$

Proposição 2.3.17 *Seja $f : M \longrightarrow N$ uma função equivariante com respeito as ações Φ e Ψ de G sobre M e N, respectivamente. Então para todo $\xi \in \mathfrak{g}$,*

$$Tf \circ \xi_M = \xi_N \circ f$$

onde ξ_M e ξ_N denotam os geradores infinitesimais de M e N, respectivamente, associados com ξ; em outras palavras, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ {\scriptstyle \xi_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \xi_N} \\ M & \xrightarrow{Tf} & N \end{array}$$

Demonstração Pela equivariância,

$$f \circ \Phi_{exp(t\xi)} = \Psi_{exp(t\xi)} \circ f.$$

Diferenciando com respeito a t em $t = 0$ e usando a regra da cadeia temos

$$Tf \circ (\frac{d}{dt}\Phi_{exp(t\xi)}|_{t=0}) = (\frac{d}{dt}\Psi_{exp(t\xi)}|_{t=0}) \circ f$$

isto é, $Tf \circ \xi_M = \xi_N \circ f$. ■

2.4 A aplicação momento

Definição 2.4.1 *Seja (P, Ω) uma variedade simplética conexa e $\Phi : G \times P \longrightarrow P$ uma* ação simplética *do grupo de Lie G sobre P; isto é, para cada $g \in G$, a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \Phi_g : P & \longrightarrow & P \\ x & \mapsto & \Phi(g, x) \end{array}$$

é simplética. Diremos que uma aplicação

$$\mathbb{J} : P \longrightarrow \mathfrak{g}^*,$$

onde $\mathfrak{g}^*$ é o dual da àlgebra de Lie de G, é uma **aplicação momento** *para essa ação se para todo $\xi \in \mathfrak{g}$,*

$$d\hat{\mathbb{J}}(\xi) = i_{\xi_P}\Omega$$

onde $\hat{\mathbb{J}}(\xi) : P \longrightarrow \mathbb{R}$ *é definida por* $\hat{\mathbb{J}}(\xi)(x) = \mathbb{J}(x) \cdot \xi$ *e* ξ_P *é o gerador infinitesimal da ação correspondente a* ξ*. Em outras palavras,* $\mathbb{J}$ *é uma aplicação momento se*

$$\mathbb{X}_{\hat{\mathbb{J}}(\xi)} = \xi_P$$

para todo $\xi \in \mathfrak{g}$.

O próximo resultado é de fundamental importância para o estudo de um sistema hamiltoniano integrável com simetria, pois, nos mostra uma maneira de construir integrais primeiras para o sistema.

Teorema 2.4.2 *Seja* Φ *uma ação simplética de* G *sobre* (P, Ω) *com aplicação momento* $\mathbb{J}$*. Suponha que* $H : P \longrightarrow \mathbb{R}$ *é invariante pela ação, isto é,*

$$H(x) = H(\Phi_g(x)) \qquad \textit{para todo } x \in P, g \in G$$

então $\mathbb{J}$ *é uma integral para* $\mathbb{X}_H$*; isto é, se* F_t *é o fluxo de* $\mathbb{X}_H$*,*

$$\mathbb{J}(F_t(x)) = \mathbb{J}(x)$$

Demonstração Desde que, por hipotése, H é invariante temos que $H(\Phi_{exp(t\xi)}x) = H(x)$ para todo $\xi \in \mathfrak{g}$. Diferenciando em $t = 0$ obtemos

$$dH(x) \cdot \xi_P(x) = 0$$

isto é,

$$L_{\mathbb{X}_{\hat{\mathbb{J}}(\xi)}} H = 0.$$

Assim,

$$\{H, \hat{\mathbb{J}}(\xi)\} = 0.$$

Com isso,

$$\hat{\mathbb{J}}(\xi)(F_t(x)) = \hat{\mathbb{J}}(\xi)(x) \qquad \textit{para todo } \xi.$$

Portanto,

$$\mathbb{J}(F_t(x))(\xi) = \mathbb{J}(x)(\xi) \quad \textit{para todo } \xi.$$

Logo, $\mathbb{J}(F_t(x)) = \mathbb{J}(x)$. ∎

Exemplos: Vamos calcular a aplicação momento para a ação de $SO(3)$ sobre $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{rcl} \Phi : SO(3) \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (A, x) & \mapsto & A \cdot x. \end{array}$$

Seja a ação

$$\begin{array}{rcl} \Phi_A : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ q & \mapsto & A \cdot q. \end{array}$$

onde $A \in SO(3)$ e $q \in \mathbb{R}^3$. O levantamento da ação ao fibrado cotangente $T^*\mathbb{R}^3$ pode ser visualizado pelo seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} (q,p) \in T^*\mathbb{R}^3 \arrow[r, "(T^*\Phi_{A^T})^{-1}"] & T^*\mathbb{R}^3 \ni (Aq, Ap) \\ q \in \mathbb{R}^3 \arrow[u] \arrow[r, "\Phi_A"] & \mathbb{R}^3 \ni Aq \arrow[u] \end{tikzcd}$$

onde $T^*\Phi_A(q,p) = (A^{-1}q, A^T p)$. Portanto,

$$(T^*\Phi_A)^{-1}(q,p) = (Aq, (A^T)^{-1}p) = (Aq, Ap)$$

desde que $A \in SO(3)$. Calculando o levantamento da ação obtemos

$$\begin{array}{rcl} T^*\Phi_{A^{-1}} : SO(3) \times T^*\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & T^*\mathbb{R}^3 \\ (A, (q,p)) & \mapsto & (Aq, Ap). \end{array}$$

Agora, calculemos o gerador infinitesimal da ação correspondente a um elemento $\tilde{A}$ da álgebra de Lie:

$$\xi_{T^*\mathbb{R}^3}(z) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (exp(\tilde{A}t)) \cdot z$$

onde $z = (p, q) \in T^*\mathbb{R}^3$ e $\tilde{A} \in \mathfrak{so}(3)$.
Com isso, podemos calcular $\hat{\mathbb{J}}(\tilde{A})$:

$$\Omega(\xi_{T^*\mathbb{R}^3}, \bullet)(q, p) = d\hat{\mathbb{J}}(\tilde{A})(q, p)$$

onde $\xi_{T^*\mathbb{R}^3} = (\tilde{A}q, \tilde{A}p)$ e $\Omega = dq \wedge dp$. Assim,

$$\tilde{A}q \cdot dp - \tilde{A}p \cdot dq = \frac{\partial \hat{\mathbb{J}}(\tilde{A})}{\partial q} \cdot dq + \frac{\partial \hat{\mathbb{J}}(\tilde{A})}{\partial p} \cdot dp$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \hat{\mathbb{J}}(\tilde{A})}{\partial q} = -\tilde{A} \cdot p = -A \times p \\ \\ \frac{\partial \hat{\mathbb{J}}(\hat{A})}{\partial p} = \tilde{A} \cdot q = A \times q \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \hat{\mathbb{J}}(\hat{A})(q, p) = (A \times q).p = -(A \times p).q$$

Escrevendo

$$\begin{aligned} \mathbb{J}(q, p) \cdot \tilde{A} &= \hat{\mathbb{J}}(\tilde{A})(q, p) = (A \times q).p \\ &= (q \times p).A = (q \times p) \cdot \tilde{A} \end{aligned}$$

Obtemos que

$$\mathbb{J}(q, p) = q \times p.$$

Capítulo 3

Sistemas hamiltonianos integráveis

3.1 Definições básicas

Definição 3.1.1 *Seja* (P, Ω) *uma variedade simplética,* $H \in \mathcal{F}(P)$ *uma função hamiltoniana e* $f_1 = H, f_2, ..., f_k$ *constantes de movimento. O conjunto* $\{f_1, ..., f_k\}$ *é dito em involução se* $\{f_i, f_j\} = 0$ *para todo* $1 \leq i, j \leq k$.

Definição 3.1.2 *Sejam* $f_1, ..., f_k$ *como na definição anterior. O conjunto* $\{f_1, ..., f_k\}$ *é dito ser independente se o conjunto dos pontos de críticos da função* $F : P \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *definida por* $F(p) = (f_1(p), ..., f_k(p))$ *tem medida zero em* P. *Denotaremos esse conjunto por* $\sigma(F) = \{p \in P \mid df_1(p), ..., df_k(p)$ *são linearmente dependentes*$\}$.

Definição 3.1.3 *Um sistema hamiltoniano* $(P, \Omega, \mathbb{X}_H)$*, onde dim*$(P) = 2n$ *é chamado* integrável (ou completamente integrável) *se possui* n *constantes de movimento independentes e em involução.*

Definição 3.1.4 *Seja* $\omega \in \mathbb{R}^n$ *um vetor fixo e considere o fluxo* $F_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *definido por* $F_t(v) = v + t\omega$. *Denote a projeção canônica por* $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^{n-k}$ *e seja* $\varphi_t : \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^{n-k} \longrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^{n-k}$ *o único fluxo satisfazendo* $\pi \circ F_t = \varphi_t \circ \pi$. *O fluxo* φ_t *é chamado* fluxo tipo-translação *definido por* F_t.

Pela definição, escrevemos

$$\varphi_t(x_1,...,x_k,\theta_{k+1},...,\theta_n) = (x_1+t\omega_1,...,x_k+t\omega_k,\theta_{k+1}+t\omega_{k+1}(mod\ 1),...,\theta_n+t\omega_n(mod\ 1))$$

onde $\omega = (\omega_1,...,\omega_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_1,...,x_k \in \mathbb{R}$, e $\theta_{k+1},...,\theta_n \in \mathbb{S}^1$ são coordenadas (variáveis angulares) sobre o toro $\mathbb{T}^{n-k} = \mathbb{S}^1 \times ... \times \mathbb{S}^1$ ($n-k$ vezes).

Definição 3.1.5 *Se $k = 0$ o fluxo é chamado* condicionalmente periodico*.*

Nesse caso, $\varphi_t : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n$ e se $\theta_1,...,\theta_n$ são funções coordenadas sobre $\mathbb{T}^n$, temos que

$$\theta_i(\varphi_t(x)) = \theta_i(x) + t\omega_i(mod\ 1), \qquad 1 \leq i \leq n$$

onde $x \in \mathbb{T}^n$, $t \in \mathbb{R}$ e os ω_i's são chamados de *frequência do fluxo.*

3.2 O teorema de Arnold-Liouville

Teorema 3.2.1 *Sejam $(P,\Omega,\mathbb{X}_H)$ um sistema hamiltoniano, $f_1 = H, f_2,...f_n \in \mathcal{F}(P)$ constantes de movimento independentes e em involução e $n = \frac{1}{2}\dim(P)$. Defina a função*

$$\begin{array}{rcl} F : P & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ p & \mapsto & F(p) = (f_1(p),...,f_n(p)) \end{array}$$

e considere o conjunto de nível

$$I_c = \{p \in P \mid F(p) = c,\ c = (c_1,...,c_n) \in \mathbb{R}^n, c\ constante\}.$$

Suponhamos que $I_c \cap \sigma(F) = \varnothing$ e que cada um dos campos de vetores hamiltonianos $\mathbb{X}_{f_i}|_{I_c}$, $1 \leq i \leq n$ seja completo. Então,

(i) I_c é uma variedade diferenciável, invariante para toda função $f_1,...,f_n$, isto é, toda curva integral de $\mathbb{X}_{f_i}$ começando em um ponto de I_c permanece em I_c.

(ii) Cada componente conexa da variedade I_c é difeomorfa ao cilindro $\mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^{n-k}$ e se a variedade I_c é compacta e conexa, então ela é difeomorfa ao toro n-dimensional $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times ... \times \mathbb{S}^1$.

(iii) O fluxo de fase com a função de Hamilton H, em cada componente conexa de I_c, é conjugado com um fluxo tipo-translação. Se I_c é compacta e conexa o fluxo conjugado é condicionalmente períodico.

Demonstração Para provar (i) observemos que o conjunto $\{df_1(p), ..., df_n(p)\}$ é linearmente independente para todo $p \in I_c$, pois, $I_c \cap \sigma(F) = \varnothing$. Com isso, a matriz $T_pF = (df_1(p), ..., df_n(p))^T$ é sobrejetiva para todo $p \in I_c$ e portanto, $c \in \mathbb{R}^n$ é um valor regular da função F. Logo, $I_c = F^{-1}(c)$ é uma variedade diferenciável de dimensão n.
Agora provaremos que I_c é invariante para toda $f_1, ..., f_n$. Primeiramente, seja φ_t^i o fluxo do campo de vetores $\mathbb{X}_{f_i}$. Como, por hipótese, $\{f_i, f_j\} = 0$ temos que

$$\frac{d}{dt} f_i(\varphi_t^j)(p) = df_i(\varphi_t^j)(p)\mathbb{X}_{f_j}(\varphi_t^j(p)) = \{f_i, f_j\}(\varphi_t^j(p)) = 0$$

assim $f_i(\varphi_t^j) = f_i(p)$ ao longo do tempo, para todo $p \in I_c$ e, portanto, I_c é invariante pelo fluxo de $\mathbb{X}_{f_i}$.
Agora provaremos o ítem (ii). Consideremos I_c^0 uma componente conexa de I_c

Afirmação 1 *Os fluxos φ_t^i e φ_t^j comutam para todo $i, j = 1, ..., n$.*

Demonstração Com efeito, dados os campos de vetores $\mathbb{X}_{f_i}$ e $\mathbb{X}_{f_j}$ temos que

$$\begin{aligned}
[\mathbb{X}_{f_i}, \mathbb{X}_{f_j}](f) &= \mathbb{X}_{f_i}(\mathbb{X}_{f_j}(f)) - \mathbb{X}_{f_j}(\mathbb{X}_{f_i}(f)) \\
&= \mathbb{X}_{f_i}(\{f, f_j\}) - \mathbb{X}_{f_j}(\{f, f_i\}) \\
&= \{\{f, f_j\}, f_i\} - \{\{f, f_i\}, f_j\} \\
&= -\{f, \{f_i, f_j\}\} \\
&= -\mathbb{X}_{\{f_i, f_j\}}(f).
\end{aligned}$$

Como, por hipotese, $\{f_i, f_j\} = 0$ para todo i, j, isto implica que $[\mathbb{X}_{f_i}, \mathbb{X}_{f_j}] = 0$ para todo i, j. Com isso, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}((\varphi_t^j)^*\mathbb{X}_{f_i})\Big|_{t=t_0} &= \lim_{t\longrightarrow t_0} \frac{((\varphi_t^j)^*\mathbb{X}_{f_i})(p) - \mathbb{X}_{f_i}(p)}{t - t_0} = \lim_{s\longrightarrow 0} \frac{((\varphi_{s+t_0}^j)^*\mathbb{X}_{f_i})(p) - \mathbb{X}_{f_i}(p)}{s} \\
&= \frac{d}{ds}((\varphi_{s+t_0}^j)^*\mathbb{X}_{f_i})(p)\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}((\varphi_s^j)^* \circ (\varphi_{t_0}^j)^*\mathbb{X}_{f_i})(p)\Big|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}((\varphi_s^j)^*((\varphi_{t_0}^j)^*\mathbb{X}_{f_i})(p))\Big|_{s=0} = \pounds_{\mathbb{X}_{f_j}}((\varphi_{t_0}^j)^*\mathbb{X}_{f_i}) \\
&= [\mathbb{X}_{f_j}, (\varphi_{t_0}^j)^*\mathbb{X}_{f_i}] = [(\varphi_{t_0}^j)^*\mathbb{X}_{f_j}, (\varphi_{t_0}^j)^*\mathbb{X}_{f_i}] \\
&= (\varphi_{t_0}^j)^*[\mathbb{X}_{f_j}, \mathbb{X}_{f_i}] = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $(\varphi_t^j)^*\mathbb{X}_{f_i}$ não depende de t e com isso, $(\varphi_t^j)^*\mathbb{X}_{f_i} = (\varphi_t^j)^*\mathbb{X}_{f_i}\Big|_{t=0} = \mathbb{X}_{f_i}$ para todo t. Logo,

$$\varphi_s^i = \varphi_{-t}^j \circ \varphi_s^i \circ \varphi_t^j \Longleftrightarrow \varphi_s^i \circ \varphi_t^j = \varphi_t^j \circ \varphi_s^i. \ \square$$

Desde que os fluxos φ_t^i comutam, podemos definir uma ação

$$\Phi : \mathbb{R}^n \times I_c^0 \longrightarrow I_c^0$$

$$\Phi((t_1, ..., t_n), \alpha) = (\varphi_{t_1}^1 \circ \varphi_{t_2}^2 \circ ... \circ \varphi_{t_n}^n)(\alpha)$$

com $\alpha \in I_c^0$, $(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n$ é considerado como um grupo de Lie com estrutura aditiva.

Afirmação 2 *A ação Φ é transitiva.*

Demonstração Como $\Phi(\mathbb{R}^n, \alpha)$ é fechado e conexo em I_c^0. Basta mostrar que a aplicação $\Phi(\bullet, \alpha) : \mathbb{R}^n \longrightarrow I_c^0$ é aberta. De fato, se $e_1, ..., e_n$ denotam a base canônica de $\mathbb{R}^n$ temos que

$$T_0\Phi(\bullet, \alpha) \cdot e_i = \frac{d}{dt}\varphi_t^i(\alpha) = \mathbb{X}_{f_i}(\alpha)$$

e pela independência dos vetores $\mathbb{X}_{f_i}$, a aplicação $T_0\Phi(\bullet, \alpha) : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_\alpha I_c^0$ é um isomorfismo e daí $\Phi(\bullet, \alpha)$ é um difeomorfismo local numa vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^n$. Com isso,

$\Phi(\bullet, \alpha) : \mathbb{R}^n \longrightarrow I_c^0$ é uma aplicação aberta, donde $\Phi(\mathbb{R}^n, \alpha)$ é aberto e consequentemente $\Phi(\mathbb{R}^n, \alpha) = I_c^0$. Logo, a ação é transitiva. $\square$

Desde que $\Phi : \mathbb{R}^n \times I_c^0 \longrightarrow I_c^0$ é transitiva, pelo corolário 2.3.10, a variedade I_c^0 é difeomorfa ao espaço homogêneo $\mathbb{R}^n/H$, onde H é o subgrupo de isotropia de um elemento arbitrário $\alpha_0 \in I_c^0$, isto é,

$$H = \{(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n \mid \Phi((t_1, ..., t_n), \alpha_0) = \alpha_0\}.$$

Desde que $\dim I_c^0 = n$, devemos ter $\dim H = 0$, isto é, H é um subgrupo discreto de $\mathbb{R}^n$.

Afirmação 3 *H é gerado por k vetores $(0 \leq k \leq n)$ linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$, $a_1, ..., a_k$; isto é,*

$$H = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v = \sum_{i=k+1}^{n} m_i a_i, \ m_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Demonstração Ver [2]. $\square$

Pelo corolário 2.3.10 existe um difeomorfismo $h : \mathbb{R}^n/H \longrightarrow I_c^0$ definido por

$$h([t_1, ..., t_n]) = \Phi((t_1, ..., t_n), \alpha_0)$$

onde $[t_1, ..., t_n] \in \mathbb{R}^n/H$. Agora, sejam $a_1, ..., a_k$ vetores de $\mathbb{R}^n$ tais que o conjunto $\{a_1, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_n\}$ forma uma base de $\mathbb{R}^n$. Defina o isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ a_i & \mapsto & Ta_i = e_i \end{array}$$

onde os vetores $e_1, ..., e_n$ formam a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Desta forma,

$$T(H) = \{(0, ..., 0)\} \times \mathbb{Z}^{n-k} \subset \mathbb{R}^n$$

e com isso, a aplicação T induz um difeomorfismo

$$\hat{T} : \mathbb{R}^n/H \longrightarrow \mathbb{R}^n/\{(0, ..., 0)\} \times \mathbb{Z}^{n-k} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^{n-k}$$

definido por $\hat{T}([x]) = [Tx]$. Ou seja, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi_H"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{R}^n/H \arrow[r, "\hat{T}"] & \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^{n-k} \end{tikzcd}$$

Assim, a aplicação $\hat{T} \circ h^{-1} : I_c^0 \longrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^{n-k}$ é um difeomorfismo. Portanto, cada componente conexa de I_c é difeomorfa ao cilindro $\mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^{n-k}$ e se a variedade I_c for compacta e conexa ela é difeomorfa ao toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$.
Finalizaremos com a prova do ítem (iii). Primeiro, observemos que o difeomorfismo $h \circ \hat{T}^{-1} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^{n-k} \longrightarrow I_c^0$ define o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^{n-k} \arrow[r, "\hat{T}^{-1}"] \arrow[d, "\psi_t"'] & \mathbb{R}^n/H \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\mathcal{X}_t"] & I_c^0 \arrow[d, "\varphi_t^1|_{I_c^0}"] \\ \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^{n-k} \arrow[r, "\hat{T}^{-1}"'] & \mathbb{R}^n/H \arrow[r, "h"'] & I_c^0 \end{tikzcd}$$

com os fluxos $\mathcal{X}_t = h^{-1} \circ \varphi_t^1|_{I_c^0} \circ h$, $\psi_t = \hat{T} \circ \mathcal{X}_t \circ \hat{T}^{-1}$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_t([t_1, ..., t_n]) &= (h^{-1} \circ \varphi_t^1)(\Phi((t_1, ..., t_n), \alpha_0)) \\ &= h^{-1} \circ \Phi((t + t_1, t_2, ..., t_n), \alpha_0) \\ &= [t + t_1, t_2, ..., t_n]. \end{aligned}$$

Considere o fluxo $F_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $F_t(v) = v + tTe_1$. O fluxo $\psi_t = \hat{T} \circ \mathcal{X}_t \circ \hat{T}^{-1}$ é o fluxo tipo-translação (definido por F_t) conjugado com o fluxo φ_t^1. De fato,

$$\begin{aligned} (\psi_t \circ \pi)(t_1, ..., t_n) &= (\hat{T} \circ \mathcal{X}_t \circ \hat{T}^{-1} \circ \pi)(t_1, ..., t_n) \\ &= (\hat{T} \circ \mathcal{X}_t \circ \pi_H \circ T^{-1})(t_1, ..., t_n) \\ &= (\hat{T} \circ \mathcal{X}_t)[y_1, ..., y_n] \\ &= \hat{T} \circ \pi_H(t + y_1, y_2, ..., y_n) \\ &= \pi \circ T(te_1 + (y_1, ..., y_n)) \\ &= \pi(tTe_1 + (t_1, ..., t_n)) \\ &= (\pi \circ F_t)(t_1, ..., t_n). \end{aligned}$$

Assim, fica definido sobre cada componente conexa de I_c um fluxo tipo-translação. Se a variedade I_c é compacta e conexa, ψ_t é um fluxo condicionalmente períodico conjugado com o fluxo φ_t^1 do campo de vetores Hamiltoniano $\mathbb{X}_H$.

Com isso, encerramos a demonstração do teorema de *Arnold-Liouville*. ■

3.3 Variáveis de ação-ângulo

A construção das variáveis de ação-ângulo que será feita nessa seção pode ser encontrada no livro do Abraham e Marsden (referência [1]). Uma outra referência é o livro do Arnold (referência [2]).

Primeiramente, vamos considerar o espaço vetorial simplético $\mathbb{R}^{2n}$ com coordenadas canônicas $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ e cujos vetores estão identificados pela seguinte relação de equivalência

$$(q, p) \sim (q', p') \Longleftrightarrow q = q' \ e \ p - p' \in \ \mathbb{Z}.$$

O espaço quociente $\mathbb{R}^{2n}/\sim \ \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ herda de maneira natural uma estrutura simplética de $\mathbb{R}^{2n}$ via a projeção canônica. Seguindo esse caminho, consideremos a variedade simplética $B^n \times \mathbb{R}^n$, onde $B^n \subset \mathbb{R}^n$ é uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$, e introduzamos coordenadas canônicas $(I_1, ..., I_n, \varphi_1, ..., \varphi_n)$ tais que $I_i = q_i$, com q_i em B^n e $\varphi_i = p_i(mod\ 1)$, $i = 1, ..., n$. Diremos que um hamiltoniano H possui coordenadas de ação-ângulo $(I_1, ..., I_n, \varphi_1, ..., \varphi_n)$ em $B^n \times \mathbb{T}^n$ se H não depende das variáveis $\varphi_1, ..., \varphi_n$ e nesse caso, as equações de Hamilton são dadas por

$$\dot{I}_i = 0 \quad , \quad \dot{\varphi}_i = -\frac{\partial H}{\partial I_i} = \omega_i(I_1, ..., I_n)$$

e as aplicações $I_i : B^n \times \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ são constantes de movimento para $\mathbb{X}_H$.

Definição 3.3.1 *Um Hamiltoniano $H \in \mathcal{F}(P)$ sobre uma variedade simplética (P, Ω) admite* coordenadas de ação-ângulo *$(I_1, ..., I_n, \varphi_1, ..., \varphi_n)$ em algum aberto $U \subset P$, se:*

(i) existe um difeomorfismo simplético $\psi : U \longrightarrow B^n \times \mathbb{T}^n$;

(ii) $H \circ \psi^{-1} \in \mathcal{F}(B^n \times \mathbb{T}^n)$ *admite coordenadas de ação-ângulo* (I, φ) *(como acima), isto é, o campo de vetores hamiltoniano* $\psi_* \mathbb{X}_H = \mathbb{X}_{H \circ \psi^{-1}}$ *tem a forma*

$$\psi_* \mathbb{X}_H = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (H \circ \psi^{-1})}{\partial I_i} \frac{\partial}{\partial \varphi i}$$

e, com isso, as equações de hamilton são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{I}_i &= 0 \\ \dot{\varphi}_i &= -\frac{\partial (H \circ \psi^{-1})}{\partial I_i} = \omega_i(I_1, ..., I_n) \end{aligned}$$

Agora passaremos a construção das coordenadas de ação-ângulo sobre uma variedade simplética (P, Ω) de dimensão $2n$ onde são dados um hamiltoniano H e n integrais de movimento, $f_1 = H, f_2, ..., f_n$ independentes e em involução. Trabalharemos em um aberto de $\mathbb{R}^{2n}$, domínio de uma carta simplética de (P, Ω) cujas coordenadas locais são denotadas por $q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n$. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto tal que todo $c \in U$ é valor regular da função da função $F = (f_1, ..., f_n)$ e consideremos que F^{-1} é difeomorfo a $U \times \mathbb{T}^n$. Vamos passar a construção de um difeomorfismo simplético $\psi : F^{-1}(U) \longrightarrow B^n \times \mathbb{T}^n$. Localmente, a forma simplética $\Omega = \Sigma_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$ é exata, $\Omega = -d\Theta$, onde $\Theta = \Sigma_{i=1}^n p_i dq_i$. Seja $I_c \cong \mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times ... \times \mathbb{S}^1$, e denote por $\gamma_1(c), ..., \gamma_n(c)$ os n ciclos fundamentais de I_c correspondendo aos n fatores de $\mathbb{S}^1$. Defina $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\lambda_i(c) = \oint_{\gamma_i(c)} i_c^*(\Theta), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

onde $i_c : I_c \longrightarrow P$ é a inclusão canônica. Vemos que $\lambda_i(c)$ é a integral de uma 1-forma Θ sobre o ciclo $\lambda_i(c)$ e depende somente da fronteira de $\lambda_i(c)$. Assumiremos que λ é um difeomorfismo sobre a sua imagem e definiremos a aplicação $\lambda \circ F : F^{-1}(U) \longrightarrow \lambda(U)$ tal que $\lambda(U) = B^n \subset \mathbb{R}^n$ (fazendo uma escolha adequada de U); desta forma, obtemos parte do difeomorfismo desejado. Passaremos a construção de uma aplicação Γ que junto com $\lambda \circ F$ nos dará tal difeomorfismo. Primeiramente, vamos mostrar que $i_c^*(\Theta) \in \Omega^1(I_c)$ é uma 1-forma fechada. Por hipótese, os campos de vetores hamiltonianos $\mathbb{X}_{f_1}, ..., \mathbb{X}_{f_n}$ são linearmente independentes em cada ponto de P. Daí, $\mathbb{X}_{f_1}(q,p), ..., \mathbb{X}_{f_n}(q,p)$ formam uma base de $T_{(q,p)}I_c$ e é suficiente mostrar que

$$d(i_c^*(\Theta))(\mathbb{X}_{f_i}|_{I_c}, \mathbb{X}_{f_j}|_{I_c}) = 0, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Mas, de fato,

$$\begin{aligned} d(i_c^*(\Theta))(\mathbb{X}_{f_i}|_{I_c}, \mathbb{X}_{f_j}|_{I_c}) &= i_c^*(d\Theta)(\mathbb{X}_{f_i}|_{I_c}, \mathbb{X}_{f_j}|_{I_c}) \\ &= -i_c^*\Omega(\mathbb{X}_{f_i}|_{I_c}, \mathbb{X}_{f_j}|_{I_c}) \\ &= -\Omega(\mathbb{X}_{f_i}, \mathbb{X}_{f_j}) \circ i_c \\ &= -\{f_i, f_j\} \circ i_c = 0. \end{aligned}$$

Agora, pela hipótese de independência das funções f_i, $1 \leq i \leq n$ a matriz $(\partial f_i / \partial p_j)$ tem determinante diferente de zero e daí fixando $(q_1^0, ..., q_n^0)$, a equação $F(q,p) - \lambda^{-1}(I) = 0$, para I fixo, pode ser resolvido para p em uma vizinhança de q^0, usando o teorema da função implicita, e daí nessa vizinhança temos uma função $p = p(q, I)$. Definamos

$$S(q, I) = \int_{(q^0, p^0)}^{(q,p)} i_{\lambda^{-1}(I)}^*(\Theta)$$

onde a integral é calculada sobre uma curva ligando os pontos (q^0, p^0) *e* (q, p) e que se encontra no toro $I_{\lambda^{-1}(I)}$. Como $i_{\lambda^{-1}(I)}^*(\Theta)$ é fechada, a integral não depende da curva se (q, p) é tomado próximo de (q^0, p^0).

Defina a aplicação $\Gamma = (\Gamma_1, ..., \Gamma_n) : F^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{T}^n$ por

$$\Gamma_i(q, p) = \frac{\partial S(q, I)}{\partial I_i}\Big|_{I=(\lambda \circ F)(q,p)}.$$

Claramente, Γ_i são funções de multi-valores. A variação de Γ_i sobre os ciclos $\gamma_k(\lambda^{-1}(I))$ é dada por

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_k(\lambda^{-1}(I))} d(\Gamma_i \circ i_{\lambda^{-1}(I)}) &= \oint_{\gamma_k(\lambda^{-1}(I))} d(\frac{\partial S}{\partial I_i} \circ i_{\lambda^{-1}(I)}) \\ &= \frac{\partial}{\partial I_i} \int_{\gamma_k(\lambda^{-1}(I))} dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial I_i}\int_{\gamma_k(\lambda^{-1}(I))} i^*_{\lambda^{-1}(I)}(\Theta) \\ &= \frac{\partial I_k}{\partial I_i} = \delta_i^k \end{aligned}$$

tal que *mod* 1, os Γ_i's estão bem definidos e com isso determinam coordenadas angulares sobre o toro.

Defina agora $\psi = (\lambda \circ F) \times \Gamma : F^{-1}(U) \longrightarrow B^n \times \mathbb{T}^n$ e considere que essa aplicação é bijetiva (localmente isso é verificado por construção). Notemos que

$$\partial S/\partial q_i = p_i(q, I)$$

para isso, fixemos I e observemos que sobre o toro $I_{\lambda^{-1}(I)}$, a aplicação $S(q, I)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} S(q,I) &= \int_{(q^0,p^0)}^{(q,p)} \sum_{i=1}^n p_i dq_i \\ &= constante \ + \sum \int_{q^0}^{q} p_i(q,I) dq_i \end{aligned}$$

tomando como curva de integração a união de dois segmentos

$$\overline{(q^0, p^0), (q^0, p(q, I))} \quad e \quad \overline{(q^0, p(q, I)), (q, p)}$$

temos então as relações

$$\Gamma_i(q,p) = \partial S/\partial I_i \quad , \quad p_i = \partial S/\partial q_i.$$

Portanto, S é a função geradora da aplicação $\psi : (q, p) \mapsto (I, \varphi)$, $\varphi = \Gamma$ e daí ψ é simplética. Como uma aplicação simplética é um difeomorfismo local e, além disso, ψ é bijetiva, temos que ψ é um difeomorfismo global. Logo, a condição (i) da definição é satisfeita.

Para mostrarmos que o hamiltoniano H não depende da coordenada de ângulo φ, lembremos que

$$\frac{\partial (H \circ \psi^{-1})}{\partial \varphi_i} = dI_i(\mathbb{X}_{H\circ\psi^{-1}})$$

$$
\begin{aligned}
&= d(\lambda_i \circ F)(\mathbb{X}_H) \circ \psi^{-1} \\
&= (d\lambda_i \circ TF)(\mathbb{X}_H) \circ \psi^{-1}
\end{aligned}
$$

e que

$$
\begin{aligned}
TF(\mathbb{X}_H) &= (df_1(\mathbb{X}_H), ..., df_n(\mathbb{X}_H)) \\
&= -(\{H, f_1\}, ..., \{H, f_n\}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

que nos dá a condição (ii) da definição.

Capítulo 4

O fluxo geodésico no elipsóide e o problema mecânico de Neumann

Dois dos exemplos mais notáveis de sistemas integráveis são o fluxo geodésico no elipsóide e o problema mecânico de C.Neumann. Ambos podem ser abordados a partir do ponto de vista clássico da equação de Hamilton-Jacobi. Mais recentemente K.Uhlenbeck ([8]) demonstrou a existência de integrais involutivas algébricas para o problema do fluxo geodésico. H.Kn$\ddot{o}$er, usando a aplicação de Gauss do elipsóide na esfera unitária, mostrou a equivalência dos dois problemas.

4.1 Sistemas hamiltonianos com vínculo

Consideremos sobre a variedade simplética $\mathbb{R}^{2n}$ (com a forma simplética canônica e o colchete de Poisson definidos como na seção 1.1) funções diferenciáveis $G_i : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., 2r$. Vamos analisar o seguinte conjunto:

$$M = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid G_1(x) = ... = G_{2r}(x) = 0\}.$$

Lema 4.1.1 *Se $dG_1, ..., dG_{2r}$ são linearmente independentes sobre M então, M é uma subvariedade diferenciável de $\mathbb{R}^{2n}$ de dimensão $2n - 2r$.*

Demonstração Defina a função $G = (G_1, ..., G_{2r}) : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2r}$. A função G é diferenciável e além disso,

$$T_pG = (dG_1, ..., dG_{2r})^T$$

é sobrejetiva para todo $p \in M$. Portanto, $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ é um valor regular da função G. Logo, $M = G^{-1}\{0\}$ é uma subvariedade de dimensão $2n - 2r$. ■

Lema 4.1.2 *A variedade M é simplética se e somente se $det(\{G_j, G_k\})_{j,k=1,...,2r} \neq 0$ sobre M.*

Demonstração Assuma que M é simpletica e suponha que a matriz $(\{G_j, G_k\})$ é singular em $x \in M$, então existem números reais $a_1, ..., a_{2r}$ não todos nulos, tal que

$$< \nabla G_j, \mathbb{J}(\Sigma_{k=1}^{2r} a_k \nabla G_k) >= \Sigma_{k=1}^{2r} a_k \{G_j, G_k\} = 0$$

para todo j. Ou seja, o vetor $v = \mathbb{J}(\Sigma_{k=1}^{2r} a_k \nabla G_k) \neq 0$ é tangente a M em x. Então,

$$\Omega(u, v) =< u, \mathbb{J}(\mathbb{J}(\Sigma_{k=1}^{2r} a_k \nabla G_k)) >= - < u, \Sigma_{k=1}^{2r} a_k \nabla G_k) >= 0,$$

para todo vetor $u \in T_xM$. Daí, Ω é degenerada sobre M, o que é uma contradição. Agora, suponha que para algum $0 \neq v \in T_xM$, $\Omega(u, v) =< u, \mathbb{J}v >= 0$ para todo $u \in T_xM$, então $\mathbb{J}v = \Sigma_{k=1}^{2r} a_k \nabla G_k$ com $a_k \neq 0$ para algum k. Então,

$$\{G_j, \Sigma_{k=1}^{2r} a_k G_k\} =< \nabla G_j, \mathbb{J}(\Sigma_{k=1}^{2r} a_k \nabla G_k) >= - < \nabla G_j, v >= 0.$$

Isto implica que $det(\{G_j, G_k\})_{j,k=1,...,2r} = 0$. Contradição. ■

Agora, suponhamos sobre $\mathbb{R}^{2n}$ um campo de vetores hamiltoniano $\mathbb{X}_H$. Uma pergunta natural que surge é a seguinte: A restrição de $\mathbb{X}_H$ a variedade simplética M constitue um campo de vetores tangentes a M? Em geral isso não acontece, pois, a condição que nos dá a tangencia do campo em M

$$\mathbb{X}_H G_j = \{G_j, H\} = 0 \qquad para\ j = 1, 2, ..., 2r$$

nem sempre é satisfeita. Nosso objetivo agora, será tentar definir um campo de vetores sobre $\mathbb{R}^{2n}$ cuja restrição a variedade simplética M seja um campo de vetores tangentes a M. Considere o campo de vetores

$$\mathbb{X}_H - \sum_{j=1}^{2r} \lambda_j(x)\mathbb{X}_{G_j}, \tag{4.1}$$

onde os λ_j são determinados de modo que o campo de vetores seja tangente a M, ou seja, para todo $k = 1, 2, ..., 2r$

$$\{H, G_k\} - \sum_{j=1}^{2r} \lambda_j\{G_j, G_k\} = 0$$

e como $det(\{G_j, G_k\})_{j,k=1,...,2r} \neq 0$ em M, os $\lambda_i = \lambda_i(x)$ são definidos de forma única em M.

Lema 4.1.3 *O campo de vetores* (4.1) *é induzido pela função hamiltoniana*

$$H^* = H - \sum_{j=1}^{2r} \lambda_j G_j.$$

Demonstração Ver [4]. ■

Assim, o campo de vetores (4.1) é dado por

$$\mathbb{X}_{H^*} = \mathbb{X}_H - \sum_{j=1}^{2r} \lambda_j \mathbb{X}_{G_j}.$$

Definição 4.1.4 *Chamaremos o campo de vetores* $\mathbb{X}_{H^*}$ *de* campo de vetores vinculado *a variedade simplética* M *e a terna* $(M, \Omega|_M, \mathbb{X}_{H^*})$ *de sistema vinculado.*

Uma outra pergunta que surge naturalmente é: Se H define um sistema integrável em $\mathbb{R}^{2n}$ então H^* define um sistema integrável em M? Novamente, em geral isso não acontece. Mas, tentaremos então descrever uma situação especial onde esse caso ocorre.

Assuma que $\mathbb{X}_H$ é integrável com integrais $F_1, F_2, ..., F_n$ independentes e em involução. Assuma que a variedade M é dada por

$$F_1, ..., F_r = 0, \qquad G_1, ..., G_r = 0$$

onde $G_1, ..., G_r$ são funções satisfazendo

$$det(\{F_i, G_j\})_{i,j=1,...,r} \neq 0 \tag{4.2}$$

e, com isso, M é uma variedade simplética. O novo hamiltoniano é dado por

$$H^* = H - \sum_{j=1}^{r}(\lambda_j F_j + \mu_j G_j)$$

onde

$$0 = \{H^*, F_k\} = \sum_{j=1}^{r} \mu_j \{G_j, F_k\} \Longrightarrow \mu_1 = ... = \mu_r = 0$$

sobre M por (4.2). Portanto, podemos tomar

$$H^* = H - \sum_{j=1}^{r} \lambda_j F_j$$

onde os λ_j são definidos por $\{H^*, G_k\} = 0$ $(k = 1, ..., r)$ e, daí, o campo vinculado é dado por

$$\mathbb{X}_{H^*} = \mathbb{X}_H - \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \mathbb{X}_{F_j}.$$

Lema 4.1.5 *As funções $F_k|_M$ são integrais primeiras do sistema vinculado.*

Demonstração De fato,

$$\{F_k, H^*\} = \{F_k, H\} - \Sigma\lambda_j\{F_k, F_j\}.$$

Assim, como as funções $F_k|_M$ estão em involução, temos

$$\{F_k, H^*\} = 0.$$

Logo, as funções $F_k|_M$ são integrais primeiras do sistema vinculado. ∎

4.2 O fluxo geodésico no elipsóide

Passaremos agora ao estudo do fluxo geodésico no elipsóide. Para isso, consideraremos o sistema que formula esse problema como um sistema vinculado do sistema mecânico da partícula livre em $\mathbb{R}^{2n}$. Preliminarmente, considere a matriz diagonal com entradas reais $A = diag(a_0, ..., a_n)$ onde $0 < a_0 < a_1 < ... < a_n$.

Definição 4.2.1 *Definimos* $Q_\lambda(x, y) =< (A - \lambda I)^{-1}x, y >$ *onde* $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$*,* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $\lambda \neq a_i$*,* $i = 1, ..., n$*.*

Definição 4.2.2 *Chamaremos de família de quádricas confocais em* $\mathbb{R}^{n+1}$ *uma família de quádricas definida por* $Q_\lambda(x) = Q_\lambda(x, x) = 1$*. É imediato que:*
(i) se $\lambda < a_0$ *então* $Q_\lambda(x) = 1$ *define um elipsóide;*
(ii) se $\lambda > a_0$ *então* $Q_\lambda(x) = 1$ *define um hiperbolóide.*

Na verdade, o que se observa é que para valores convenientes de λ, a expressão $Q_\lambda(x) = 1$ define $n+1$-tipos diferentes de quádricas confocais. A existência de tais quádricas é assegurada pelo seguinte resultado:

Lema 4.2.3 *Seja* $x = (x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *com* $\Pi_{i=0}^{n} x_i \neq 0$*. Então existem* $n+1$*-quádricas confocais diferentes passando por* x*, uma em cada intervalo* (a_i, a_{i+1})*,* $i = 0, ..., n$*.*

Demonstração Defina a função $F_\lambda(x) = 1 - Q_\lambda(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ fixo. Para cada intervalo (a_i, a_{i+1}), F é uma função contínua em λ e além disso,

$$\lim_{\lambda \longrightarrow a_i^-} F_\lambda(x) = -\infty \quad e \quad \lim_{\lambda \longrightarrow a_{i+1}^+} F_\lambda(x) = +\infty.$$

Portanto, a função $F_\lambda(x)$ possui uma raiz em cada intervalo (a_i, a_{i+1}) e concluimos que existem $n+1$-quádricas confocais diferentes passando por x, uma em cada intervalo (a_i, a_{i+1}).
■

Um fato interessante é que essas $n+1$ quádricas confocais se intersectam no ponto x ortogonalmente. De fato, o próximo resultado mostra que se uma linha reta tangencia n quádricas confocais, a mesma tem n vetores normais associados a ela. Esses vetores são claramente todos ortogonais entre si.

Lema 4.2.4 *Se r é uma reta tangente a duas quádricas confocais $Q_{\lambda_1}(x) = 1$ e $Q_{\lambda_2}(x) = 1$ distintas, então os vetores normais a essas quádricas nos pontos de tangência são ortogonais.*

Demonstração Seja $r : u + tv$ a reta tangente a ambas as quádricas e $x^{(1)} = u + t_1 v$, $x^{(2)} = u + t_2 v$ os pontos de tangência de r com $Q_{\lambda_1}(x) = 1$ e $Q_{\lambda_2}(x) = 1$, respectivamente. A condição de tangência nos pontos $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ é dada por

$$< \nabla Q_{\lambda_1}(x^{(1)}), v >= 0 \quad e \quad < \nabla Q_{\lambda_2}(x^{(2)}), v >= 0.$$

Nosso objetivo é mostrar que $< \nabla Q_{\lambda_1}(x^{(1)}), \nabla Q_{\lambda_1}(x^{(1)}) >= 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
< \nabla Q_{\lambda_1}(x^{(1)}), \nabla Q_{\lambda_2}(x^{(2)}) > &= 4.\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{(1)} x_i^{(2)}}{(a_i - \lambda_1)(a_i - \lambda_2)} \\
&= \frac{4}{\lambda_1 - \lambda_2}.\sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{x_i^{(1)} x_i^{(2)}}{a_i - \lambda_1} - \frac{x_i^{(1)} x_i^{(2)}}{a_i - \lambda_2} \Big) \\
&= \frac{4}{\lambda_1 - \lambda_2}.(Q_{\lambda_1}(x^{(1)}, x^{(2)}) - Q_{\lambda_2}(x^{(1)}, x^{(2)})) \\
&= \frac{4}{\lambda_1 - \lambda_2}.(Q_{\lambda_1}(x^{(1)}, x^{(1)} - t_1 v + t_2 v) - Q_{\lambda_2}(x^{(2)} - t_2 v + t_1 v, x^{(2)})) \\
&= \frac{4}{\lambda_1 - \lambda_2}.(Q_{\lambda_1}(x^{(1)}) - Q_{\lambda_2}(x^{(2)}) + (t_2 - t_1) Q_{\lambda_1}(x^{(1)}, v) - \\
&- (t_1 - t_2) Q_{\lambda_2}(x^{(2)}, v)) \\
&= 0. \blacksquare
\end{aligned}$$

Agora passaremos a formulação do problema do fluxo geodésico no elipsóide. As equações diferenciais que definem o fluxo geodésico no elipsóide são dadas por:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\nu A^{-1} x \tag{4.3}$$

onde ν é determinado por

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(< A^{-1}x, x >) \\ &= < A^{-1}\dot{x}, \dot{x} > + < A^{-1}x, \ddot{x} > \\ &= < A^{-1}\dot{x}, \dot{x} > -\nu < A^{-1}x, A^{-1}x > \end{aligned}$$

donde

$$\nu = \frac{< A^{-1}\dot{x}, \dot{x} >}{< A^{-1}x, A^{-1}x >}.$$

4.2.1 Formulação hamiltoniana

Para passar ao sistema Hamiltoniano que formula o problema, vincularemos a partícula livre de energia $H = \dfrac{\|y\|^2}{2}$ ao fibrado tangente do elipsóide. Os vínculos são

$$G_1(x) =< A^{-1}x, x > -1 = 0 \quad e \quad G_2(x) =< A^{-1}x, y >= 0$$

e o Hamiltoniano do sistema vinculado é dado por

$$H^* = \frac{1}{2}\|y\|^2 - \lambda_1 G_1(x) - \lambda_2 G_2(x)$$

onde λ_1 e λ_2 são determinados a partir de $\{H^*, G_1\} = 0$ e $\{H^*, G_2\} = 0$.

Afirmação 4 $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{< A^{-1}y, y >}{< A^{-1}x, A^{-1}x >} \quad e \quad \lambda_2 = \dfrac{< A^{-1}x, y >}{< A^{-1}x, A^{-1}x >}.$

Demonstração De fato, como

$$0 = \{H^*, G_1\} = \{H, G_1\} - \lambda_1\{G_1, G_1\} - \lambda_2\{G_2, G_1\} \Longleftrightarrow \lambda_2 = -\frac{\{H, G_1\}}{\{G_1, G_2\}}$$

$$0 = \{H^*, G_2\} = \{H, G_2\} - \lambda_1\{G_1, G_2\} - \lambda_2\{G_2, G_2\} \Longleftrightarrow \lambda_1 = \frac{\{H, G_2\}}{\{G_1, G_2\}},$$

e, além disso, sabendo que

$$\begin{aligned}
\{G_1, G_2\} &= \frac{\partial G_1}{\partial x}\frac{\partial G_2}{\partial y} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\frac{\partial G_2}{\partial x} = 2. < A^{-1}x, A^{-1}x > \\
\{H, G_1\} &= \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G_1}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G_1}{\partial x} = -2. < A^{-1}x, y > \\
\{H, G_2\} &= \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G_2}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G_1}{\partial x} = -1. < A^{-1}y, y > .
\end{aligned}$$

Chegamos ao resultado $\lambda_1 = -\frac{1}{2}\frac{< A^{-1}y, y >}{< A^{-1}x, A^{-1}x >}$ e $\lambda_2 = \frac{< A^{-1}x, y >}{< A^{-1}x, A^{-1}x >}$. ■

Com isso, nosso Hamiltoniano pode ser escrito na seguinte forma:

$$H^* = \frac{1}{2}\|y\|^2 + \frac{\mu}{2}\Phi_0(x, y) - \frac{\mu}{2} < A^{-1}x, y >^2$$

onde $\mu = \|A^{-1}x\|^{-2}$, $\Phi_0(x, y) = (< A^{-1}x, x > -1)(< A^{-1}y, y >) - < A^{-1}x, y >^2$. Mas, como o termo $< A^{-1}x, y >$ e todas as suas derivadas anulam-se sobre o fibrado tangente do elipsóide podemos considerar como nosso Hamiltoniano a função

$$H^* = \frac{1}{2}\|y\|^2 + \frac{\mu}{2}\Phi_0(x, y).$$

Assim, o sistema vinculado é dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial y} = y \\ \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial x} = -\mu < A^{-1}y, y > A^{-1}x \end{cases}$$

que é equivalente a (4.3). Para começarmos a análise do campo de vetores $\mathbb{X}_{H^*} = \frac{1}{2}\mathbb{X}_H + \frac{\mu}{2}\mathbb{X}_{\Phi_0}$, observemos que os campos de vetores $\mathbb{X}_H$ e $\frac{\mu}{2}\mathbb{X}_{\Phi_0}$ são independentes pois, $\{\|y\|^2, \Phi_0\} = 0$. Portanto, discutiremos os dois campos separadamente. O primeiro é descrito por

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = y \\ \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

e seu fluxo é dado pela aplicação $\varphi_t(x, y) = (x + ty, y)$. O segundo campo de vetores é descrito por

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu\Phi_{0y} \\ \\ \dot{y} = -\mu\Phi_{0x}. \end{cases}$$

4.2.2 Construção das integrais de movimento

Agora faremos a construção das integrais de movimento do campo de vetores $\frac{\mu}{2}\mathbb{X}_{\Phi_0}$, utilizando o fluxo de linhas tangentes a família de quádricas confocais com o elipsóide.

Definição 4.2.5 *Definimos* $\Phi_\lambda(x,y) := (1-Q_\lambda(x))Q_\lambda(y)+Q_\lambda^2(x,y)$*, para todo* $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Lema 4.2.6 *O conjunto* $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \Phi_\lambda(x,y) = 0\}$ *representa o cone de retas passando pelo ponto* x *que são tangentes à quádrica* Q_λ.

Demonstração Com efeito, dada uma reta $r : x+ty$, a mesma será tangente a quádrica Q_λ se e somente se existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$Q_\lambda(x+ty, x+ty) = 1 \quad e \quad Q_\lambda(x+ty, y) = 0.$$

Como

$$Q_\lambda(x+ty, x+ty) = Q_\lambda(x,x) + 2tQ_\lambda(x,y) + t^2Q_\lambda(y,y)$$

e

$$Q_\lambda(x+ty, y) = Q_\lambda(x,y) + tQ_\lambda(y,y)$$

temos que

$$t = -\frac{Q_\lambda(x,y)}{Q_\lambda(y,y)}$$

e, além disso,

$$Q_\lambda(x,x) - 2\frac{Q_\lambda(x,y)}{Q_\lambda(y,y)}Q_\lambda(x,y) + \frac{Q_\lambda^2(x,y)}{Q_\lambda^2(y,y)}Q_\lambda(y,y) = 1$$

donde

$$(1 - Q_\lambda(x,x))Q_\lambda(y) + Q_\lambda^2(x,y) = 0.$$

Logo, $\Phi_\lambda(x,y) = 0$. ■

Lema 4.2.7 $\Phi_\lambda(x,y) = \sum_{k=1}^n \frac{F_k(x,y)}{a_k - \lambda}$*, onde* $F_k(x,y) = y_k^2 + \sum_{j\neq k} \frac{(x_jy_k - x_ky_j)^2}{a_k - a_j}$

Demonstração Com efeito,

$$
\begin{aligned}
\Phi_\lambda(x,y) &= \Big(1-\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{a_j-\lambda}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k^2}{a_k-\lambda}\Big)+\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{x_iy_j}{a_j-\lambda}\Big)^2\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{y_k^2}{a_k-\lambda}-\Big(\sum_{j,k}\frac{x_j^2y_k^2}{(a_j-\lambda)(a_k-\lambda)}-\sum_{j,k}\frac{x_jy_jx_ky_k}{(a_j-\lambda)(a_k-\lambda)}\Big)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{y_k^2}{a_k-\lambda}-\sum_{j,k\ j\neq k}\frac{x_j^2y_k^2-x_jy_jx_ky_k}{(a_j-\lambda)(a_k-\lambda)}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{y_k^2}{a_k-\lambda}-\sum_{j,k\ j\neq k}\frac{1}{a_k-a_j}\Big(\frac{x_j^2y_k^2-x_jy_jx_ky_k}{a_j-\lambda}-\frac{x_j^2y_k^2-x_jy_jx_ky_k}{a_k-\lambda}\Big)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{y_k^2}{a_k-\lambda}-\sum_{j,k\ j\neq k}\frac{1}{a_k-a_j}\Big(\frac{x_j^2y_k^2-x_jy_jx_ky_k}{a_j-\lambda}+\frac{x_k^2y_j^2-x_jy_jx_ky_k}{a_j-\lambda}\Big)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{y_k^2}{a_k-\lambda}-\sum_{j,k\ j\neq k}\frac{1}{a_k-a_j}\frac{(x_jy_k-x_ky_j)^2}{a_j-\lambda}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{y_k^2}{a_k-\lambda}+\sum_{j,k\ j\neq k}\frac{1}{a_k-a_j}\frac{(x_ky_j-x_jy_k)^2}{a_k-\lambda}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{y_k^2+\sum_{j\neq k}\frac{(x_ky_j-x_jy_k)^2}{a_k-a_j}}{a_k-\lambda}
\end{aligned}
$$

Portanto, $\Phi_\lambda(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{F_k(x,y)}{a_k-\lambda}$. ■

Lema 4.2.8 *As funções $F_k(x,y)$, $k=1,...,n$ estão em involução, ou seja, $\{F_k,F_j\}=0$, $k,j=1,...,n$.*

Demonstração Ver [4]. ■

Logo, as funções $F_k(x,y)$ são integrais de movimento do campo de vetores $\mathbb{X}_{H^*}$.

4.3 O problema mecânico de Neumann

O sistema em questão descreve o movimento de um ponto material sobre a esfera

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{q \in \mathbb{R}^n \mid \|q\| = 1\}$$

sob a influência de um potencial quadrático $U(q) = \frac{1}{2} < Aq, q >$ onde $A = diag(a_0, ..., a_n)$. As equações de movimento do sistema são dadas por

$$\begin{cases} \frac{d^2q}{dt^2} = -Aq + \mu q \\ \\ \mu =< Aq, q > -\|\dot{q}\|^2. \end{cases}$$

Mostraremos que esse sistema é integrável. Primeiro, estenderemos o sistema para $\mathbb{R}^{2n}$ considerando o sistema formado pelo movimento de um ponto material sobre a influência do potencial $U(q) = \frac{1}{2} < Aq, q >$. As equações são obtidas vinculando o campo de vetores $\mathbb{X}_H$, com

$$H = \frac{1}{2} < Aq, q > + \frac{1}{2}(\|q\|^2\|p\|^2 - < q, p >^2),$$

ao fibrado tangente de $\mathbb{S}^{n-1}$ e é suficiente mostrar que esse sistema é integrável. Para isso, primeiro vamos expandir a função racional

$$\Phi_\lambda(p, q) = (1 - Q_\lambda(p))Q_\lambda(q) + Q^2_\lambda(p, q)$$

em $\lambda = \infty$. Fazendo $\lambda = \frac{1}{w}$ e expandindo obtemos

$$\begin{aligned} Q_{\frac{1}{w}}(p, q) &= < \frac{p}{a - \frac{1}{w}}, q > \\ &= w < \frac{p}{aw - 1}, q > \\ &= -w < p(1 + aw + a^2w^2 + ...), q > \\ &= -(w < p, q > + w^2 < ap, q > + o(w^3)) \end{aligned}$$

daí,

$$\Phi_{\frac{1}{w}}(p, q) = (1 + w\|p\|^2 + w^2 < ap, p > + o(w^3))(-w\|q\|^2 - w^2 < aq, q > - o(w^3)) +$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad (w < p,q > +w^2 < ap,q > +o(w^3))^2 \\
&= \quad -w\|q\|^2 - w^2 < aq,q > -w^2\|p\|^2\|q\|^2 + w^2 < p,q >^2 +o(w^3).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\Phi_\lambda(p,q) \quad = \quad -\frac{1}{\lambda}\|q\|^2 - \frac{1}{\lambda^2}(2H(q,p)) + o(\frac{1}{\lambda^3}). \tag{4.4}$$

Agora, expandindo $\Phi_\lambda(p,q) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{F_k(p,q)}{a_k - \lambda}$ em $\lambda = \infty$ temos:

$$
\begin{aligned}
\Phi_\lambda(p,q) &= -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} F_k(p,q) - \frac{1}{\lambda^2}\sum_{k=1}^{n} a_k F_k(p,q) + o(\frac{1}{\lambda^3}) \\
&= -\frac{1}{\lambda}\|p\|^2 - \frac{1}{\lambda^2}\sum_{k=1}^{n} a_k F_k(p,q) + o(\frac{1}{\lambda^3}). \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

Assim, de (4.4) e (4.5) concluimos que

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k F_k(p,q).$$

Logo, pelo lema (4.2.8), as funções $F_k(p,q)$ estão em involução e, com isso, são as desejadas integrais do sistema de Neumann.

4.4 Conexão entre o sistema de Neumann e o fluxo geodésico no elipsóide via a aplicação normal de Gauss

Nesta seção, mostraremos que o fluxo geodésico sobre o elipsóide $< A^{-1}q, q >= 1$ e o problema de Neumann são relativamente fechados no sentido que as soluções do fluxo geodésico podem ser levadas em soluções do problema de Neumann. Para isso, usaremos a aplicação normal de Gauss

$$
\begin{aligned}
g : Q_0 &\longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\
x &\mapsto q = rA^{-1}x
\end{aligned}
$$

onde $r = \|A^{-1}x\|^{-1}$.

Comecaremos fazendo uma reparametrização no tempo pela mudança de variável $s = \psi(t)$. Com isso,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{ds^2} &= \frac{d}{ds}\Big(\frac{dx}{ds}\Big)\\
&= \frac{d}{ds}\Big(\frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds}\Big)\\
&= \frac{d}{ds}\Big(\frac{dx}{dt}\frac{1}{\dot\psi}\Big)\\
&= \frac{1}{\dot\psi}\frac{d}{ds}\Big(\frac{dx}{dt}\Big) - \Big(\frac{\ddot\psi}{\dot\psi^3}\frac{dx}{dt}\Big)\\
&= \frac{1}{\dot\psi^2}\frac{d^2x}{dt^2} - \Big(\frac{\ddot\psi}{\dot\psi^3}\frac{dx}{dt}\Big)\\
&= \frac{1}{\dot\psi^2}\Big(\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{\ddot\psi}{\dot\psi}\frac{dx}{dt}\Big)
\end{aligned}$$

substituindo na equação (4.3) obtemos

$$\ddot{x} = -\nu\dot\psi^2 A^{-1}x + \frac{\ddot\psi}{\dot\psi}\dot{x}.$$

Escolhendo $\psi(t)$ tal que $\nu\dot\psi^2 = 1$ e supondo $B = A^{-1}$ e $b = \dfrac{\ddot\psi}{\dot\psi}$, a equação toma a forma

$$\ddot{x} = -Bx + b\dot{x}, \quad b = b(t) = \frac{\ddot\psi}{\dot\psi}\ . \tag{4.6}$$

Lema 4.4.1 *Se* $< Bx, x >= 1$ *então* $\dfrac{< B\dot{x}, \dot{x} >}{< Bx, Bx >} = 1$ *e* $b = 2\dfrac{< Bx, B\dot{x} >}{< Bx, Bx >}$.

Demonstração Primeiro, derivando duas vezes a expressão $< Bx, x >= 1$ temos

$$< B\dot{x}, \dot{x} > + < Bx, \ddot{x} >= 0.$$

Por (4.6)

$$< B\dot{x}, \dot{x} > + < Bx, -Bx + b\dot{x} >= 0$$

daí,

$$0 =< B\dot{x}, \dot{x} > +b < Bx, \dot{x} > - < Bx, Bx >=< B\dot{x}, \dot{x} > - < Bx, Bx > \tag{4.7}$$

e, com isso,

$$\frac{< B\dot{x}, \dot{x} >}{< Bx, Bx >} = 1.$$

Da mesma forma, derivando (4.7) temos

$$\begin{aligned} 0 &= < B\ddot{x}, \dot{x} > - < B\dot{x}, Bx > \\ &= < -Bx + b\dot{x}, B\dot{x} > - < B\dot{x}, Bx > \\ &= - < Bx, B\dot{x} > +b < \dot{x}, B\dot{x} > - < B\dot{x}, Bx > . \end{aligned}$$

Donde,

$$b \;=\; 2\frac{< Bx, B\dot{x} >}{< \dot{x}, B\dot{x} >} = 2\frac{< Bx, B\dot{x} >}{< Bx, Bx >} \, . \quad \blacksquare$$

Teorema 4.4.2 *A aplicação normal de Gauss* $g : Q_0 \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ *leva soluções de* (4.6) *satisfazendo*

$$< Bx, x >= 1, \quad < Bx, \dot{x} >= 0 \quad < B\dot{x}, \dot{x} >=< Bx, Bx >$$

em soluções do problema de Neumann

$$\ddot{q} = -Bq + \nu q, \qquad \nu =< Bq, q > -\|\dot{q}\|^2$$

satisfazendo

$$\|q\|^2 = 1, \qquad < q, \dot{q} >= 0, \qquad \Psi_0(\dot{q}, q) = 0$$

onde Ψ_λ *é obtido de* Φ_λ *trocando-se* A^{-1} *por* B.

Demonstração Diferenciando $q = rBx$ temos

$$\dot{q} = \dot{r}Bx + rB\dot{x} = rB\Big(\dot{x} + \frac{\dot{r}}{r}x\Big)$$

e por (4.6)

$$\begin{aligned}\ddot{q} &= \ddot{r}Bx + \dot{r}B\dot{x} + \dot{r}B\dot{x} + rB\ddot{x} \\ &= \ddot{r}Bx + 2\dot{r}B\dot{x} + rB(-Bx + b\dot{x}) \\ &= -Bq + (2\dot{r} + rb)B\dot{x} + \frac{\ddot{r}}{r}q.\end{aligned}$$

Mas,

$$r = \frac{1}{\|Bx\|} \Longrightarrow \dot{r} = -\frac{< B\dot{x}, Bx >}{\| Bx \|^3} \Longrightarrow \frac{\dot{r}}{r} = -\frac{< B\dot{x}, Bx >}{\| Bx \|^2} = -\frac{b}{2} \Longrightarrow 2\dot{r} + br = 0.$$

Daí,

$$\ddot{q} = -Bq + \frac{\ddot{r}}{r}q$$

que é nossa equação diferencial desejada.

A aplicação $(x, \dot{x}) \mapsto (q, \dot{q})$ definida por

$$\begin{cases} q = rBx \\ \\ \dot{q} = \dot{r}Bx + rB\dot{x} = rB\Big(\dot{x} + \dfrac{\dot{r}}{r}x\Big), \qquad \dfrac{\dot{r}}{r} = -\dfrac{< B\dot{x}, Bx >}{< Bx, Bx >} \end{cases}$$

é uma extensão da aplicação de Gauss ao fibrado tangente do elipsóide Q_0. ■

4.5 Solução do problema de Neumann usando as equações de Hamilton-Jacobi

Agora mostraremos a integrabilidade do sistema de Neumann usando o metódo da separação das variáveis na equação de Hamilton-Jacobi. Para isso, faremos uma escolha apropriada de coordenadas, que são definidas como segue.

Definição 4.5.1 *Dados* $a_0 < a_1 < ... < a_n$ *e* $x = (x_0, x_1, ..., x_n)$, $\Pi_{\nu=0}^{n} x_\nu \neq 0$. *Defina* $u_j = u_j(x)$ *como soluções da equação*

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{x_\nu^2}{z - a_\nu} = \frac{\prod_{j=1}^{n}(z - u_j)}{\prod_{\nu=0}^{n}(z - a_\nu)}$$

onde os u_j intercalam os a_ν como segue

$$a_0 < u_1 < a_1 < ... < u_n < a_n.$$

Vamos considerar $U(z) = \prod_{j=1}^n (z - u_j)$ e $A(z) = \prod_{\nu=0}^n (z - a_\nu)$. Para $z = u_j(x)$ temos

$$\begin{cases} \sum_{\nu=0}^n \dfrac{x_\nu^2}{z - a_\nu} = 0 \\ \\ \sum_\nu^n x_\nu^2 = 1, \end{cases}$$

daí, os $u_j(x)$ podem ser vistos como coordenadas sobre a esfera. $z = u_j$ define a interseção da esfera com uma família de cones confocais.

Da expressão acima podemos escrever x_ν^2 em termos de u_j, calculando o resíduo em $z = a_j$,

$$x_\nu^2 = \frac{U(a_\nu)}{A'(a_\nu)} \tag{4.8}$$

Lema 4.5.2 *O conjunto $\{u_1, ..., u_n\}$ forma um sistema ortogonal de coordenadas.*

Demonstração Tomando o logaritmo de (4.8) temos que

$$\begin{aligned} \ln(x_\nu^2) &= \ln(U(a_\nu)) - \ln(A'(a_\nu)) \\ &= \sum_{j=1}^n \ln(a_\nu - u_j) - \ln(A'(a_\nu)) \end{aligned}$$

derivando obtemos

$$\begin{aligned} \frac{2x_\nu dx_\nu}{x_\nu^2} &= -\sum_{j=1}^n \frac{du_j}{a_\nu - u_j} \\ \frac{2dx_\nu}{x_\nu} &= -\sum_{j=1}^n \frac{du_j}{a_\nu - u_j} \end{aligned}$$

Queremos calcular $\Sigma_\nu dx_\nu \otimes dx_\nu$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{\nu} dx_\nu \otimes dx_\nu &= \sum_{\nu}\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{x_\nu}{2}\frac{du_j}{u_j-a_\nu}\Big)\otimes\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_\nu}{2}\frac{du_i}{u_i-a_\nu}\Big)\\
&= \frac{1}{4}\sum_{\nu}\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{x_\nu^2}{(u_j-a_\nu)(u_i-a_\nu)}du_j\otimes du_i\Big)\\
&= \frac{1}{4}\Big(\sum_{i\neq j}\sum_{\nu}\frac{x_\nu^2}{u_j-u_i}\Big(\frac{1}{u_i-a_\nu}-\frac{1}{u_j-a_\nu}\Big)du_j\otimes du_i\Big)\\
&+ \frac{1}{4}\sum_{i}\sum_{\nu}\frac{x_\nu^2}{(u_j-a_\nu)^2}du_i\otimes du_i\\
&= \frac{1}{4}\sum_{i\neq j}\frac{1}{u_j-u_i}\Big(\sum_{\nu}\frac{x_\nu^2}{u_i-a_\nu}-\sum_{\nu}\frac{x_\nu^2}{u_j-a_\nu}\Big)du_j\otimes du_i\\
&+ \frac{1}{4}\sum_{i}\sum_{\nu}\frac{x_\nu^2}{(u_j-a_\nu)^2}du_i\otimes du_i\\
&= \frac{1}{4}\sum_{i}\sum_{\nu}\frac{x_\nu^2}{(u_j-a_\nu)^2}du_i\otimes du_i,
\end{aligned}
$$

observemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{\nu}\frac{x_\nu^2}{(u_j-a_\nu)^2} &= -\frac{d}{dz}\Big(\sum_{\nu}\frac{x_\nu^2}{z-a_\nu}\Big)\Big|_{z=u_j}\\
&= -\frac{d}{dz}\Big(\sum_{\nu}\frac{U(z)}{A(z)}\Big)\Big|_{z=u_j}\\
&= -\frac{U'(u_j)}{A(u_j)}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\sum_{\nu} dx_\nu\otimes dx_\nu = \sum_{i} -\frac{1}{4}\frac{U'(u_j)}{A(u_j)}du_i\otimes du_i. \quad \blacksquare
$$

Agora, queremos escrever o hamiltoniano do problema de Neumann em termos das novas variáveis $\{u_j\}$. Para isso, vamos escrever as fórmulas da energia cinética e potencial do problema nessas coordenadas.

Lema 4.5.3 *Nas novas coordenadas,*

$$T = \frac{1}{2}\Sigma_{j=1}^{n} g_j \dot{u}_j^2 \tag{4.9}$$

$$V = \frac{1}{2}\Big(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu - \sum_{j=1}^{n} u_j\Big) \tag{4.10}$$

Demonstração Ver [6]. ■

Introduzindo as variáveis canônicamente conjugadas v_j por

$$v_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_j},$$

o Hamiltoniano se escreve

$$H = T + V = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(g_j^{-1}v_j^2 - u_j).$$

Daí, as equações de movimento são dadas por

$$\dot{u}_j = H_{v_j} \quad , \quad \dot{v}_j = -H_{u_j}$$

e a equação de Hamilton-Jacobi

$$H\Big(u, \frac{\partial S}{\partial u}\Big) = constante.$$

Na verdade queremos uma solução $S = S(u, \eta)$, dependendo de $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n)$, da equação

$$H\Big(u, \frac{\partial S}{\partial u}\Big) = \eta_1. \tag{4.11}$$

Daí, a transformação canônica $(u, v) \mapsto (\xi, \eta)$ definida por

$$v_j = \frac{\partial S}{\partial u_j} \quad , \quad \xi_j = \frac{\partial S}{\partial \eta_j}$$

leva o hamiltoniano em $H = \eta_1$ e as equações diferenciais em

$$\dot{\xi}_j = \delta_{j1} \quad , \quad \dot{\eta}_j = 0.$$

Para isso, faremos uma separação de variáveis na equação (4.11).

4.5.1 Separação das variáveis

No problema, a equação de Hamilton-Jacobi assume a forma

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(g_j^{-1}\Big(\frac{\partial S}{\partial u_j}\Big)^2 - u_j\Big) = 2\eta_1. \tag{4.12}$$

Para resolver essa equação usaremos as identidades

Lema 4.5.4 *Se $P(z) = \eta_1 z^{n-1} + \eta_2 z^{n-2} + ... + \eta_n$ é um polinômio então*

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{P(u_j)}{U'(u_j)} = \eta_1 \quad e \quad \sum_{j=1}^{n}\frac{u_j^n}{U'(u_j)} = \sum_j u_j$$

Demonstração Considere a função

$$f(z) = \frac{P(z)}{U(z)} - \frac{\eta_1}{z} = \frac{zP(z) - \eta_1 U(z)}{zU(z)} \tag{4.13}$$

Como os coeficientes líderes de $zP(z)$ e $\eta_1 U(z)$ são ambos η_1, segue que o numerador de (4.13) é de grau $n-1$ (no máximo). Logo f é da forma $\dfrac{G(z)}{H(z)}$ onde $grau(H) = n+1 \geqslant grau(G)+2$ e os pólos de $f(z)$ são $0, u_1, u_2, ..., u_n$. Seja C_R o círculo de raio R centrado na origem. Para $|z|$ suficientemente grande (digamos $|z| \geqslant R$) temos $|f(z)| \leqslant \dfrac{C}{|z|^2}$, com C constante. Podemos supor, também, que C_R contém no seu interior as singularidades de f, então

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{C_R} f(z)dz\Big| &= \Big|\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta\Big| \\
&\leqslant \int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta})|Rd\theta \\
&\leqslant \frac{C}{R^2}R\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{2\pi C}{R}.
\end{aligned}$$

Daí, $\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \longrightarrow 0$ quando $R \longrightarrow \infty$. Logo, $\int_{C_R} f(z)dz = 0$. Assim,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{P(u_j)}{U'(u_j)} = \frac{1}{2\pi}\int_{C_R} \frac{P(z)}{U(z)}dz = \frac{1}{2\pi}\int_{C_R} \frac{\eta_1}{z}dz = \eta_1.$$

Analogamente, mostra-se a segunda relação. $\blacksquare$

A equação (4.12) é reescrita:

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(-4\frac{A(u_j)}{U'(u_j)}\Big(\frac{\partial S}{\partial u_j}\Big)^2 - u_j\Big) = 2\eta_1$$

fazendo

$$B_j = -4A(u_j)\Big(\frac{\partial S}{\partial u_j}\Big)^2$$

temos

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{B_j}{U'(u_j)} - u_j\Big) - 2\eta_1 = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{U'(u_j)}(B_j - u_j^n - 2P(u_j)) = 0.$$

Podemos resolver a equação acima colocando cada termo identicamente igual a zero:

$$B_j - u_j^n - 2P(u_j) = -4A(u_j)\Big(\frac{\partial S}{\partial u_j}\Big)^2 - u_j^n - 2P(u_j) = 0.$$

Fazendo

$$Q(z) = z^n + 2\eta_1 z^{n-1} + ... + 2\eta_n$$

a equação é separada em

$$\Big(\frac{\partial S}{\partial u_j}\Big)^2 = -\frac{Q(u_j)}{4A(u_j)}$$

e é resolvida por

$$S = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_{u_j}\sqrt{-\frac{Q(z)}{A(z)}}\ dz.$$

Assim, encontramos explicitamente a função geradora que nos fornece a transformação de coordenadas $(u, v) \mapsto (\xi, \eta)$ e leva o sistema de equações diferenciais do nosso hamiltoniano inicial no sistema de equações diferenciais completamente integrável

$$\begin{cases} \dot{\xi}_j = \delta_{j1} \\ \\ \dot{\eta}_j = 0 \end{cases}$$

mostrando a integrabilidade do problema de C.Neumann.

Bibliografia

[1] Abraham, R. e Marsden, J. E., *Foundations of Mechanics*, Addison-Wesley(1978).

[2] Arnold, V. I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag(1978).

[3] Boothby, W. M., *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press. Inc.(1986)

[4] Deift, P., Lund., F. e Trubowitz, E., *Nonlinear Wave Equations and Constrained Harmonic Motion*, Commun. Math. Phys. 74, 141-188(1980)

[5] Goldstein, H., *Classical Mechanics*, Second Edition, Addison-Wesley(1980).

[6] Guckenheimer, J., Moser, J., and Newhouse, S. E., *Dynamical Sistem*, Progress in Mathematics Vol.8, Birkhauser Boston(1980).

[7] Marsden, J. E., *Introduction to Mechanics and Simmetry*, Springer-Verlag(1994).

[8] Moser, J., *Integrable Hamiltonian System and Spectral Theory*, Lezioni Fermiane, Pisa(1981).