

# Existência de geodésicas fechadas

ANA CRISTINA SALVIANO

Orientador:

PEDRO ANTONIO ONTANEDA PORTAL

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.*

**UFPE - Março de 2003**

# Agradecimentos

Agradeço ao professor Pedro Ontaneda por sua orientação precisa e segura deste trabalho, bem como pela sua paciência e predisposição ao longo de muitas horas a mim dispensada.

Agradeço aos professores Francesco Mercuri e Francesco Russo por participarem da banca.

Agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro.

Agradeço a Carlinda que contribuiu para tornar o texto mais claro em alguns pontos.

Agradeço aos professores Carloman Carlos Borges, Maria Hildete e Haroldo Benatti pelo incentivo inicial.

Agradeço aos meus colegas Luiz, Gastão, Jalila, Ricardo, Renata, Adson e Almir que ajudaram-me direta ou indiretamente na realização deste trabalho.

Agradeço a Tânia por sua boa vontade constante em ajudar-me.

Agradeço às minhas amigas Fabíola, Taíse, Josenildes e Vanessa que sempre torceram por mim.

Agradeço em especial aos amigos Adriano e Angelo que estiveram sempre ao meu lado e não mediram esforços para me auxiliar no que fosse necessário.

E um agradecimento mais que especial aos meus pais, Lúcia e Salviano e aos meus irmãos Cícero, Cristiane e Cláudia por toda a força que eles me deram.

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>4</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>6</b>
1.1 Preliminares Geométricos . . . . .	7
1.2 Preliminares Topológicos . . . . .	13
<b>2 O Teorema de Lyusternik e Fet</b>	<b>17</b>
2.1 Construção da deformação $\mathcal{D}$ e suas propriedades . . . . .	18
2.2 O Teorema de Lyusternik e Fet . . . . .	27
<b>3 O Teorema de Lyusternik e Fet para Espaços Geodésicos</b>	<b>29</b>
3.1 Espaços Geodésicos e Espaços CAT(k) . . . . .	30
3.2 O Teorema de Lyusternik e Fet para Espaços Geodésicos . . . . .	42
<b>Bibliografia</b>	<b>47</b>

# Introdução

A prova da existência de uma geodésica fechada sobre uma superfície qualquer de gênero zero, foi dada por Birkhoff em 1917. Depois, em 1929, Lyusternik e Schnirelmann mostraram que sobre uma tal superfície sempre existem três geodésicas fechadas sem auto-interseções. Este último resultado não pode ser melhorado, visto que em um elipsóide com três eixos diferentes, todos tendo aproximadamente o mesmo comprimento, não existem mais do que três de tais geodésicas (isto foi mostrado por Morse, ver o capítulo 5 de [9]). Mais tarde, em 1951, Lyusternik e Fet provaram a existência de ao menos uma geodésica fechada sobre toda variedade riemanniana compacta e sem bordo (ver [12] e [13]). O principal objetivo deste trabalho é demonstrar este último resultado, o teorema de Lyusternik e Fet, e generalizá-lo para espaços geodésicos. Usamos como referência o apêndice de [9], onde o conceito de diferenciabilidade é usado de forma não essencial, o que nos permitiu fazer uma generalização, quase direta, para espaços geodésicos.

O método essencial a ser usado na demonstração do teorema de Lyusternik e Fet, consiste em construir uma deformação  $\mathcal{D}$  do espaço  $PM$ , com propriedades interessantes, onde  $PM$  é o espaço das curvas fechadas diferenciáveis por partes numa variedade riemanniana compacta  $M$ .

A idéia desta construção, é a seguinte. Fixe  $k > 0$ .  $E$  denotará a integral da energia. Dada uma aplicação diferenciável por partes  $c : S = [0, 1]/\{0, 1\} \rightarrow M$ , com  $E(c) \leq k$ , dividiremos o intervalo  $[0, 1]$  em sub-intervalos suficientemente pequenos  $[t_i, t_{i+1}]$ , de forma que  $c(t_i)$ ,  $c(t_{i+1})$  têm a propriedade de que existe uma única geodésica minimizante

ligando-os. Como  $M$  é compacta, o raio de injetividade  $\eta$  de  $M$  é positivo, logo tal subdivisão é possível. Substituindo a curva  $c$  pela união dos segmentos geodésicos que unem os extremos  $c(t_i)$ ,  $c(t_{i+1})$ , obtemos uma nova curva (que é uma geodésica por pedaços), com energia menor ou igual à da curva original  $c$ . Além disso, esta geodésica por pedaços é homotópica a  $c$ . Em seguida, iteramos este processo, ligando os pontos médios dos sub-intervalos da etapa anterior por meio de uma única geodésica minimizante. Desta forma, geramos uma geodésica por pedaços,  $\mathcal{D}c$ , novamente com energia menor ou igual à da curva original  $c$  e homotópica à mesma.

Uma propriedade importante desta deformação, é a seguinte. Se a curva original é uma geodésica, a curva  $\mathcal{D}c$  obtida por meio da deformação acima mencionada, continua a mesma, isto é,  $c = \mathcal{D}c$ , se  $c$  for uma geodésica fechada. Mais ainda,  $E(\mathcal{D}c) \leq E(c)$  e  $E(\mathcal{D}c) = E(c)$  se, e somente se,  $c$  é uma geodésica fechada.

Segue uma breve descrição do conteúdo desta monografia.

No capítulo 1 apresentamos alguns fatos preliminares (definições e resultados técnicos) que serão utilizados na prova do Teorema de Lyusternik e Fet.

No capítulo 2 apresentamos a construção da deformação  $\mathcal{D}$  e suas principais propriedades. Em seguida, provamos o teorema de Lyusternik e Fet.

Finalmente, no capítulo 3 fazemos uma generalização do teorema de Lyusternik e Fet para espaços geodésicos. A idéia da demonstração é exatamente a mesma que no caso riemanniano, salvo pequenas modificações. Por exemplo, em um espaço geodésico  $X$  não existe a noção de diferenciabilidade, diante disto, substituímos o espaço  $PM$ , usado nos capítulos 1 e 2, pelo espaço  $\mathcal{P}X$ , o qual é formado pelas curvas fechadas poligonais  $c : S \rightarrow X$ .

Recife, Março de 2003.

# Capítulo 1

## Preliminares

Nosso principal objetivo neste capítulo é fixar notações e terminologias, e, como dissemos na introdução, apresentar definições e resultados técnicos que serão utilizados na prova do teorema de Lyusternik e Fet.

Dividimos o capítulo em duas seções. Na primeira seção apresentamos preliminares geométricos: definições do espaço  $PM$ , comprimento e energia de uma curva e raio de injetividade de uma variedade riemanniana. Também enunciamos resultados que descrevem a dependência contínua de geodésicas (suficientemente pequenas) em relação a seus extremos. As provas destes resultados podem ser encontrados em qualquer livro de Geometria Riemanniana, por exemplo [3] e [10].

Finalmente, ainda na primeira seção, enunciamos e provamos um resultado sobre a existência de subsequências convergentes de uma seqüência de caminhos. Com este resultado se faz desnecessário o uso do teorema de Arzelá-Ascoli (veja comentário na página 10).

Na segunda seção apresentamos preliminares topológicos: um resultado clássico sobre Topologia de variedades fechadas (que provamos, pois não o encontramos explicitamente enunciado em nenhum texto) e uma construção topológica necessária na prova do teorema de Lyusternik e Fet.

## 1.1 Preliminares Geométricos

Em todo o texto,  $M$  denotará uma variedade riemanniana e  $S$  denotará o espaço quociente  $[0, 1]/\{0, 1\} \simeq_{TOP} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ , onde  $\simeq_{TOP}$  significa homeomorfismo.

Dados dois espaços topológicos  $A, B$ , denotamos por  $C^0(A, B)$  o espaço das aplicações contínuas  $f : A \rightarrow B$  com a topologia compacto-aberta. Lembre-se que se  $A$  é compacto e  $B$  é um espaço métrico (com métrica  $d_B$ ), a topologia compacto-aberta é metrizável, isto é, a topologia é induzida por uma métrica  $d$ , onde  $d$  é a métrica da convergência uniforme:  $d(f, g) = \sup_{a \in A} d_B(f(a), g(a))$  (ver [14], página 286).

Nesta monografia, trabalharemos com o espaço  $C^0(S, M)$ , que é o espaço das curvas fechadas em  $M$ . Como  $S$  é compacto e  $M$  é um espaço métrico,  $C^0(S, M)$  é metrizável, com métrica

$$d(c, c') = \sup_{t \in S} d(c(t), c'(t)),$$

$c, c' \in C^0(S, M)$ .

**1.1.1. Definição.** Denotaremos por  $PM$  o subespaço de  $C^0(S, M)$  formado pelas curvas fechadas diferenciáveis por partes, isto é, pelas curvas contínuas  $c : S \rightarrow M$  para as quais existe partição do intervalo  $[0, 1]$  por pontos  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = 1$  tal que  $c$  é diferenciável em cada  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, k$ .

O comprimento  $L$  e a integral da energia  $E$ , para uma curva  $c : [a, b] \rightarrow M$  (não necessariamente fechada) são dados por

$$L(c) = \int_a^b |\dot{c}| dt \quad e \quad E(c) = \frac{1}{2} \int_a^b |\dot{c}|^2 dt.$$

Por exemplo, se  $c \in PM$  (i.e.,  $c$  é fechada) temos

$$L(c) = \int_S |\dot{c}| dt = \int_0^1 |\dot{c}| dt \quad e \quad E(c) = \frac{1}{2} \int_S |\dot{c}|^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{c}|^2 dt.$$

Se  $a = 0$  e  $b = 1$ , as funções  $L$  e  $E$  estão relacionadas por  $L(c) \leq \sqrt{2 E(c)}$ , com igualdade se, e somente se,  $c$  está parametrizada proporcionalmente ao comprimento de arco, isto é,  $L(c|_{[0,t]}) = t L(c)$ .

De fato, pela desigualdade de Hölder, temos:

$$(L(c))^2 = \left( \int_0^1 |\dot{c}| dt \right)^2 \leq \int_0^1 |\dot{c}|^2 dt \int_0^1 1^2 dt = 2 E(c).$$

A igualdade vale se, e somente se, existem constantes  $\alpha$  e  $\beta$ , ambas não nulas, tais que  $\alpha |\dot{c}|^2 = \beta 1^2$ , donde

$$\begin{aligned} L(c|_{[0,t]}) &= \left( \int_0^t |\dot{c}| dt \right) = \left( \int_0^t |\dot{c}|^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_0^t 1^2 dt \right)^{1/2} \\ &= (\beta/\alpha)^{1/2} t^{1/2} t^{1/2} \\ &= (\beta/\alpha)^{1/2} t \\ &= |\dot{c}| t \\ &= \left( \int_0^1 |\dot{c}| dt \right) t \\ &= L(c) t. \end{aligned}$$

**1.1.2. Observação.** Verifica-se facilmente que  $L$  e  $E$  são aditivas no seguinte sentido. Dadas aplicações  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  e  $\beta : [b, c] \rightarrow M$  tais que  $\alpha(b) = \beta(b)$ , definimos  $\alpha \cup \beta : [a, c] \rightarrow M$  por

$$\alpha \cup \beta(t) = \begin{cases} \alpha(t), & t \in [a, b] \\ \beta(t), & t \in [b, c]. \end{cases}$$

Então  $L(\alpha \cup \beta) = L(\alpha) + L(\beta)$  e  $E(\alpha \cup \beta) = E(\alpha) + E(\beta)$ .



**1.1.3. Definição.**  $P^k M := \{c \in PM; E(c) \leq k\}$ .

Observe que  $P^0 M \simeq_{TOP} M$ , pois se  $c \in P^0 M$ , então  $E(c) = 0$ , o que implica que  $c$  é uma aplicação constante. Assim podemos fazer corresponder a  $c$  sua imagem (que consiste de um único ponto). É fácil verificar que esta correspondência é um homeomorfismo.

**1.1.4. Definição.** Sejam  $M$  uma variedade riemanniana e  $p \in M$ . O raio de injetividade  $\eta(p)$  de  $p$  é o supremo em  $\overline{\mathbb{R}}^+$  dos números  $\varrho$  tais que  $exp_p|_{B_\varrho(0_p)}$  é injetiva, onde  $B_\varrho(0_p)$  denota a bola aberta de raio  $\varrho$  e centro  $0_p$  (vetor nulo em  $T_p M$ ). Para  $A \subseteq M$ , definimos o raio de injetividade  $\eta(A)$  de  $A$  por:

$$\eta(A) = \inf_{p \in A} \eta(p).$$

$\eta(M)$  chama-se o raio de injetividade de  $M$ .

**1.1.5. Proposição.** *O raio de injetividade  $\eta(p)$  depende continuamente de  $p$ . Se  $K \subset M$  é compacto, o raio de injetividade  $\eta(K)$  é positivo. Em particular, se  $M$  é compacta, o raio de injetividade de  $M$  é positivo.*

**Prova.** Ver [10], página 131.

Dada uma variedade riemanniana compacta  $M$ , definimos  $K_M = \sup_{p \in M} \{\sigma_p(P)\}$ , onde  $P \subset T_p M$  é um 2-plano,  $\sigma_p(P)$  é a curvatura seccional de  $P$  em  $p$ . Como  $\sigma_p(P)$  é contínua em  $P$  e em  $p$  e  $M$  é compacta, temos que  $K_M < \infty$ . Definimos também

$$\eta_M = \begin{cases} \min\{\eta(M), \pi/2\sqrt{K_M}\}, & \text{se } K_M > 0 \\ \eta(M), & \text{se } K_M \leq 0. \end{cases}$$

Lembre que se  $M$  é variedade riemanniana completa,  $M$  é metrizável, com métrica

completa

$$d_M(p, q) = \inf_{c \in \Omega_{p,q}} L(c),$$

$p, q \in M$ , onde  $\Omega_{p,q}$  denota o conjunto dos caminhos diferenciáveis por partes  $c : [0, 1] \rightarrow M$  tal que  $c(0) = p$  e  $c(1) = q$  (ver [3] página 146).

**1.1.6. Observação.** Dada uma variedade riemanniana compacta  $M$ , pela proposição 1.1.5, o raio de injetividade  $\eta(M)$  de  $M$  é positivo, logo  $\eta_M$  (que denotaremos simplesmente por  $\eta$ ) também o é. Assim dados quaisquer dois pontos  $p$  e  $q$  em  $M$ , com  $d(p, q) < \eta$ , existe uma única geodésica minimizante  $c_{pq} = c_{pq}(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , ligando  $p$  a  $q$  (ver [10], página 57). Além disto, esta geodésica minimizante depende continuamente de  $p$  e  $q$  (ver [1], página 16). Quando o domínio não é necessariamente o intervalo  $[0, 1]$ , denotaremos por  $c_{pq}|[a, b]$  a geodésica minimizante de  $p$  a  $q$  definida em  $[a, b]$ .

Em alguns dos resultados adiante, usaremos consistentemente o número  $\eta/2$ , pois precisaremos de bolas fechadas.

Note que a observação 1.1.6. também vale substituindo  $[0, 1]$  por  $[a, b]$ . Note ainda que a continuidade da aplicação  $(q, r) \mapsto c_{qr}, /q, r \in M$ , implica nas observações a seguir.

**1.1.7. Observação.** Se  $p_n \rightarrow p$  e  $q_n \rightarrow q$ ,  $d(p_n, q_n) \leq \eta/2$ , então  $c_{p_n q_n} \rightarrow c_{pq}$ , e é verdade que  $E(c_{p_n q_n}) \rightarrow E_{c_{pq}}$ , apesar de  $E$  não ser contínua em  $PM$ .

De fato, temos que  $E(c_{p_n q_n}) = (L(c_{p_n q_n}))^2/2 = d^2(p_n, q_n)/2$ . Como a função distância é contínua, segue que  $E(c_{p_n q_n}) = d^2(p_n, q_n)/2 \rightarrow d^2(p, q)/2 = (L(c_{pq}))^2/2 = E(c_{pq})$ .

**1.1.8. Observação.** Sejam  $\alpha = c_{pq}|[a, b]$  e  $\alpha_n = c_{p_n q_n}|[a_n, b_n]$ . Se  $\alpha_n$  é tal que  $\alpha_n(a_n) = p_n \rightarrow p, \alpha_n(b_n) = q_n \rightarrow q, a_n \rightarrow a$  e  $b_n \rightarrow b$ , então  $\alpha_n \rightarrow \alpha$ ,  $\alpha(a) = p, \alpha(b) = q$ . Observe que  $\alpha_n$  e  $\alpha$  têm domínios diferentes. Neste caso,  $\alpha_n \rightarrow \alpha$  significa que estamos con-

siderando  $\alpha$  definida em todo  $\mathbb{R}$ :  $\alpha(t) = \alpha(a)$ ,  $t \leq a$ ,  $\alpha(t) = \alpha(b)$ ,  $t \geq b$ . Analogamente para  $\alpha_n$ . Assim,  $d(\alpha_n, \alpha) := \sup_{t \in \mathbb{R}} d(\alpha_n(t), \alpha(t))$ . Equivalentemente,  $\alpha_n \rightarrow \alpha$ , se  $\beta_n \rightarrow \beta$ , onde  $\beta_n : [0, 1] \rightarrow M$ ,  $\beta : [0, 1] \rightarrow M$  são obtidas de  $\alpha_n$  e  $\alpha$  reparametrizando linearmente os domínios. A verificação destes fatos é simples.

Finalmente, apresentamos um resultado sobre a existência de subsequências convergentes de uma seqüência de caminhos. Este resultado faz desnecessário o uso do teorema de Arzelá-Ascoli no próximo capítulo. Este ponto merece o comentário a seguir.

Normalmente, para provar a existência de subsequências convergentes de uma seqüência num espaço de funções usa-se o teorema de Arzelá-Ascoli. No nosso caso, não podemos usá-lo diretamente, pois, em geral, uma seqüência de caminhos (em  $PM$ ) não é equicontínua. Seria possível contornar isto mudando a definição de  $PM$  (reparametrizando todas as curvas pelo comprimento do arco), mas, neste caso, o domínio das curvas não seria necessariamente o intervalo  $[0, 1]$  e sim  $[0, l]$ , onde  $l$  é o comprimento da curva (assim o domínio depende da curva). Com esta modificação, a definição da deformação  $\mathcal{D}$ , que será introduzida no capítulo 2, ficaria muito mais complicada. Por conta disto, é preferível supor que toda curva tem o mesmo domínio (i.e.,  $[0, 1]$ ) e aplicar as proposições 1.1.10 e 2.1.11 ao invés do teorema de Arzelá-Ascoli, quando necessário.

Precisaremos de um lema.

**1.1.9. Lema.** *Em  $C^0(S, M)$ ,  $c_n \rightarrow c$  se, e somente se, para toda seqüência convergente  $t_n$  em  $[0, 1]$ ,  $\lim c_n(t_n) = c(\lim t_n)$ .*

**Prova.** Suponhamos que  $c_n \rightarrow c$  e  $\lim t_n = t_0$ . Como  $c$  é contínua,  $c(t_n) \rightarrow c(t_0)$ . Por outro lado, pela desigualdade triangular, temos que

$$\begin{aligned} d(c_n(t_n), c(t_0)) &\leq d(c_n(t_n), c(t_n)) + d(c(t_n), c(t_0)) \\ &\leq d(c_n, c) + d(c(t_n), c(t_0)). \end{aligned}$$

Assim,  $c_n(t_n) \rightarrow c(t_0)$ .

Reciprocamente, se  $c_n$  não convergisse para  $c$  em  $C^0(S, M)$ , existiria um  $\epsilon > 0$  e uma seqüência  $t_n$  sobre  $[0, 1]$  (que podemos assumir ser convergente com limite  $t_0$ ) tal que  $d(c_n(t_n), c(t_n)) \geq \epsilon$ , para todo  $n$ . Portanto,  $d(c_n(t_n), c(t_0)) + d(c(t_0), c(t_n)) \geq d(c_n(t_n), c(t_n)) \geq \epsilon$ , para todo  $n$ . Como  $\lim c(t_n) = c(t_0)$ ,  $c_n(t_n)$  não convergiria para  $c(t_0)$ .  $\square$

**1.1.10. Proposição.** *Seja  $\{c_n\}$  uma seqüência em  $PM$ ,  $M$  compacta, com  $c_n(0) = p_n$ ,  $c_n(1) = q_n$ . Suponha que  $d(p_n, q_n) \leq \eta/2$ , para todo  $n$ . Se as seqüências  $\{E(c_n)\}$  e  $\{d^2(p_n, q_n)/2\}$  são ambas convergentes com o mesmo limite, então  $c_n$  possui uma subseqüência convergente, cujo limite  $c$  é o único segmento geodésico com extremos  $p = c(0)$  e  $q = c(1)$ . Além disso,  $L(c) \leq \eta/2$ .*

**Prova.** Sejam  $p_n = c_n(0)$  e  $q_n = c_n(1)$ . Como  $M$  é compacta, existe uma subseqüência de  $\{c_n\}$  (que denotaremos ainda por  $\{c_n\}$ ) tal que  $\{p_n\}$  e  $\{q_n\}$  são convergentes com limite  $p$  e  $q$  respectivamente. Como  $d(p_n, q_n) \leq \eta/2$ , temos que  $d(p, q) \leq \eta/2$ , logo existe uma única geodésica minimizante  $c = c_{pq}$  ligando  $p$  a  $q$ . Pela observação 1.1.6,  $c_{p_n q_n}$  converge para  $c_{pq}$ . Afirmamos que  $\{c_n\}$  converge para  $c$  em  $PM$ . Pelo lema 1.1.9, basta mostrarmos que para toda seqüência  $\{t_n\}$  em  $[0, 1]$  com  $\lim t_n = t_0 \in [0, 1]$ , a seqüência  $\{c_n(t_n)\}$  converge para  $c(t_0)$ .

Para ver isto, ponhamos  $c_n(t_n) = r_n$  e seja  $\{r_{n_k}\}$  uma subseqüência convergente de  $\{r_n\}$ . Seja  $r$  seu limite. Consideremos as seqüências  $\{\alpha_k\}$ ,  $\{\beta_k\}$ , onde

$$\alpha_k = c_{p_{n_k} r_{n_k}}|[0, t_{n_k}] \quad e \quad \beta_k = c_{r_{n_k} q_{n_k}}|[t_{n_k}, 1].$$

Usando a observação 1.1.6 e a observação 1.1.8, temos que tais seqüências convergem para

$$\alpha_{pr} = c_{pr}|[0, t_0] \quad e \quad \alpha_{rq} = c_{rq}|[t_0, 1]$$

respectivamente.

Pela observação 1.1.2, temos

$$E(\alpha_{pr} \cup \alpha_{rq}) = E(\alpha_{pr}) + E(\alpha_{rq}).$$

Escrevemos  $\alpha = \alpha_{pr} \cup \alpha_{rq}$ . Observe que  $\alpha(t_0) = r$ . Pela observação 1.1.7,

$$E(\alpha) = E(\alpha_{pr}) + E(\alpha_{rq}) = \lim E(\alpha_k) + \lim E(\beta_k).$$

Mas  $E(\alpha_k) \leq E(c_{n_k}|_{[0,t_n]})$  e  $E(\beta_k) \leq E(c_{n_k}|_{[t_n,1]})$ . Assim,

$$\lim E(\alpha_k \cup \beta_k) = \lim(E(\alpha_k) + E(\beta_k)) \leq \lim E(c_{n_k}).$$

Por hipótese,

$$\lim E(c_{n_k}) = d^2(p, q)/2 = E(c).$$

Conseqüentemente  $E(\alpha) \leq E(c)$ . Como  $c : [0, 1] \rightarrow M$  é a única curva minimizante ligando  $p$  a  $q$  e também  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$  é uma curva de  $p$  a  $q$ , por (i) da proposição 1.1.6,  $\alpha = c$ . Em particular,  $r = \alpha(t_0) = c(t_0)$ . Assim, toda subsequência convergente de  $c_n(t_n)$  converge para  $c(t_0)$ . Como  $M$  é compacta, isto mostra que  $c_n(t_n) \rightarrow c(t_0)$ .  $\square$

## 1.2 Preliminares Topológicos

Para a prova do Teorema de Lyusternik e Fet usaremos a proposição a seguir. Lembre que uma variedade é fechada se ela é compacta e sem bordo.

**1.2.1. Proposição.** *Seja  $M$  uma variedade topológica fechada e conexa de dimensão  $n \geq 1$ . Então existe um inteiro  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , tal que  $\pi_k(M)$  é não trivial.*

**Observação.** Se  $M$  não for conexa, a conclusão da proposição ainda vale, mas o inteiro  $k$  depende da componente conexa.

**Prova.** (da proposição 1.2.1) Suponha  $\pi_k(M) = 0$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Como toda variedade topológica é homotopicamente equivalente a um complexo  $CW$  (ver [8], página 346), o teorema de Whitehead (ver [7], página 346) implica que  $M$  é contrátil. Mas, como  $M$  é fechada, pela Dualidade de Poincaré  $H^n(M, \mathbb{Z}_2) \simeq H_0(M, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \neq 0$ ,  $n \geq 1$ . Isto é uma contradição, pois  $H^n(X) = 0$ ,  $n \geq 1$ , quando  $X$  é contrátil.  $\square$

Ainda, para a prova do teorema de Lyusternik e Fet, precisaremos da construção a seguir. No que segue desta seção, consideraremos o círculo  $S$  como  $\{t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2; t_1^2 + t_2^2 = 1\}$ .

Sejam  $\mathbb{S}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+2}; |x| = 1\}$  a esfera unitária de  $\mathbb{R}^{n+2}$  e  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq 1\}$  o  $n$ -disco,  $n \geq 0$ . Vamos definir uma aplicação

$$\mathcal{F} : C^0(\mathbb{S}^{n+1}, M) \rightarrow C^0\left((D^n, \partial D^n), (C^0(S, M), P^0 M)\right), n \geq 0.$$

Dada uma aplicação contínua  $f : \mathbb{S}^{n+1} \rightarrow M$ . Definimos

$$\mathcal{F}(f) : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (C^0(S, M), P^0 M)$$

como segue.

Primeiro identificamos o  $n$ -disco  $D^n$ ,  $n \geq 1$ , com  $h(D^n)$ , onde

$$\begin{aligned} h : D^n &\rightarrow \mathbb{S}^{n+1} \\ (x_0, \dots, x_{n-1}) &\mapsto (\sqrt{1 - (x_0^2 + \dots + x_{n-1}^2)}, x_0, \dots, x_{n-1}, 0). \end{aligned}$$

Para  $n = 0$ , identificamos  $D^0 = \{0\}$  com  $(1, 0) \in \mathbb{S}^1$ . Ou seja, identificamos  $D^n$  com o semi-equador  $\{y = (y_0, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{S}^{n+1}; y_0 \geq 0 \text{ e } y_{n+1} = 0\}$  sobre  $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ , veja figura 1.1.

Em seguida, associamos a cada  $p = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in D^n$  o círculo

$$a_p(t) = (t_1 \sqrt{1 - |p|^2}, x_0, \dots, x_{n-1}, t_2 \sqrt{1 - |p|^2}) = (y_0, \dots, y_{n+1}),$$

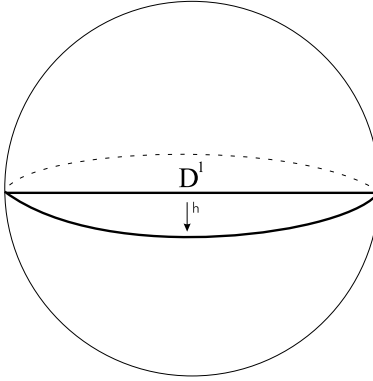


Figura 1.1: Identificação de  $D^1$  com o semi-equador  $\{y = (y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{S}^2; y_0 \geq 0 \text{ e } y_2 = 0\}$

onde  $t = (t_1, t_2) \in S$ . Isto é,  $a_p : S \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  é o círculo parametrizado proporcionalmente ao comprimento de arco, com  $a_p(0) = p$  e que é ortogonal ao hiperplano  $\{y_{n+1} = 0\}$ , veja a figura 1.2. Observe que para  $p \in \partial D^n$ ,  $a_p(t) = p$ , para todo  $t \in S$ , ou seja,  $a_p$  é uma aplicação constante. Observe também que  $(p, t) \mapsto a_p(t)$  é contínua.

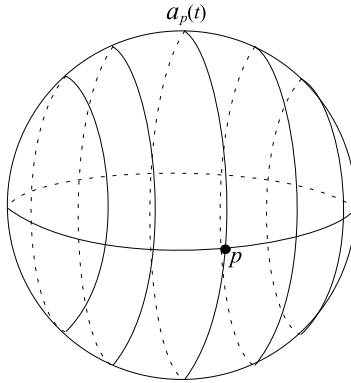


Figura 1.2: Esfera “folheada” por meio dos círculos  $a_p(t)$ .

Definimos

$$\mathcal{F}(f)(p) := f \circ a_p(t).$$

Segue da continuidade de  $(p, t) \mapsto a_p(t)$  que  $\mathcal{F}(f)$  é contínua, logo

$$\mathcal{F}(f) \in C^0\left((D^n, \partial D^n), (C^0(S, M), P^0 M)\right).$$

Note que todo  $y = (y_0, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{S}^{n+1} - \partial D^n$  possui uma única representação  $y = a_p(t)$ ,  $p \in D^n$ . De fato, tome  $p = p_y = (y_1, \dots, y_n)$  e  $t = t_y = \left(\frac{y_0}{\sqrt{1-|p_y|^2}}, \frac{y_{n+1}}{\sqrt{1-|p_y|^2}}\right)$ . Mais ainda, a aplicação  $y \mapsto p_y$  é contínua e  $y \mapsto t_y$  é contínua em  $\mathbb{S}^{n+1} - \partial D^n$ .

Vamos agora definir uma aplicação

$$\mathcal{G} : C^0\left((D^n, \partial D^n), (C^0(S, M), M)\right) \rightarrow C^0(\mathbb{S}^{n+1}, M).$$

Para  $g : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (C^0(S, M), P^0 M)$  contínua, definimos:  $\mathcal{G}(g) : \mathbb{S}^{n+1} \rightarrow M$ , da seguinte forma,

$$\mathcal{G}(g)(y) = \begin{cases} g(p_y)(t_y), & y \notin \partial D^n \\ g(p_y)(0), & y \in \partial D^n. \end{cases}$$

Como  $g(\partial D^n) \subset P^0 M$ , uma verificação direta mostra que  $\mathcal{G}(g)$  é contínua.

### 1.2.2. Proposição.

(i)  $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = 1$ ,  $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = 1$ ;

(ii)  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  são contínuas. De fato  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  são isometrias (considerando os espaços com a métrica da convergência uniforme).

(iii)  $\mathcal{F}\left(\text{diff}(\mathbb{S}^{n+1}, M)\right) \subset C^0\left((D^n, \partial D^n), (PM, P^0 M)\right)$ . Aqui,  $\text{diff}(\mathbb{S}^{n+1}, M) = \{f : \mathbb{S}^{n+1} \rightarrow M, f \text{ diferenciável}\}$ ;

(iv)  $\mathcal{F}(\text{constante}) = \text{constante}$ ;

(v)  $\mathcal{G}(\text{constante}) = \text{constante}$ .

**Prova.** Verificação direta.  $\square$



## Capítulo 2

# O Teorema de Lyusternik e Fet

Daremos neste capítulo uma demonstração do teorema de Lyusternik e Fet. O método essencial a ser usado, como dissemos na introdução, consiste em construir uma deformação  $E$ -decrecente contínua de  $P^k M$ . Lembre que a idéia da construção desta deformação é a seguinte. Dada uma aplicação diferenciável por partes  $c \in P^k M$ , dividiremos o intervalo  $[0, 1]$  em subintervalos suficientemente pequenos  $[t_i, t_{i+1}]$ , de forma que  $c(t_i), c(t_{i+1})$  têm a propriedade de que existe uma única geodésica minimizante ligando-os. Como  $M$  é compacta, o raio de injetividade  $\eta$  de  $M$  é positivo, logo tal subdivisão é possível. Substituindo a curva  $c$  pela união dos segmentos geodésicos que unem os extremos  $c(t_i), c(t_{i+1})$ , obtemos uma nova curva (que é uma geodésica por pedaços) com energia menor ou igual à da curva original  $c$ . Além disso, esta geodésica por pedaços é homotópica a  $c$ . Em seguida, iteramos este processo, ligando os pontos médios dos subintervalos da etapa anterior por meio de uma única geodésica minimizante. Desta forma, geramos uma geodésica por pedaços  $\mathcal{D}c$  novamente com energia menor ou igual à da curva original  $c$  homotópica à mesma.

Uma propriedade importante desta deformação, é a seguinte. Se a curva original é uma geodésica, a curva  $\mathcal{D}c$  obtida por meio da deformação acima mencionada, continua a mesma, isto é,  $c = \mathcal{D}c$  se  $c$  for uma geodésica fechada. Mais ainda,  $E(\mathcal{D}c) \leq E(c)$ , e  $E(\mathcal{D}c) = E(c)$  se, e somente se,  $c$  é uma geodésica fechada.

Este capítulo está dividido em duas seções. Na primeira seção, construímos a deformação  $\mathcal{D}$  e provamos algumas de suas propriedades. Na segunda seção, provamos o teorema de Lyusternik e Fet.

## 2.1 Construção da deformação $\mathcal{D}$ e suas propriedades

Neste capítulo,  $M$  denotará sempre uma variedade riemanniana compacta e escrevemos  $\eta = \eta_M$ , onde  $\eta_M$  é definido após a proposição 1.1.5.

O lema a seguir mostra que a subdivisão mencionada acima é possível.

**2.1.1. Lema.** *Fixe  $k > 0$  e escolha um inteiro par  $x > 0$  com  $4k/x \leq \eta^2/4$ . Para todo  $c \in P^k M$  e todo  $t, t' \in [0, 1]$ , com  $|t - t'| \leq 2/x$ , temos  $d(c(t), c(t')) \leq \eta/2$ .*

**Prova.** Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} d^2(c(t), c(t')) \leq L^2(c(t), c(t')) &= \left( \int_t^{t'} |\dot{c}| dt \right)^2 \\ &\leq \int_t^{t'} |\dot{c}|^2 dt \int_t^{t'} 1^2 dt \\ &= 2 E(c|_{[t, t']}) (2/x) \leq \eta^2/4. \quad \square \end{aligned}$$

**2.1.2. Observação.** Segue do lema acima que existe uma única geodésica minimizante  $c_{c(t_0)c(t_0+2/x)}|_{[t_0, t_0+2/x]}$  ligando  $c(t_0)$  a  $c(t_0+2/x)$ .

Definamos agora, a deformação básica.

**2.1.3. Definição.** Fixe  $k > 0$  e escolha um inteiro par  $x > 0$  como no lema anterior. Sejam  $a, b \in [0, 1]$ ,  $a < b$ , tais que  $|b - a| \leq 2/x$ . Escolha também  $\sigma \in [a, b]$ . Definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\sigma^{[a,b]} : P^k M &\rightarrow P^k M \\ c &\mapsto \mathcal{D}_\sigma^{[a,b]} c, \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{D}_\sigma^{[a,b]}$  é dado por

$$\begin{cases} \mathcal{D}_\sigma^{[a,b]} c|_{\mathfrak{C}[a,\sigma]} = c|_{\mathfrak{C}[a,\sigma]} \\ \mathcal{D}_\sigma^{[a,b]} c|_{[a,\sigma]} = c_{c(a)c(\sigma)}|[a,\sigma]. \end{cases}$$

Veja uma ilustração deste processo na figura 2.1.

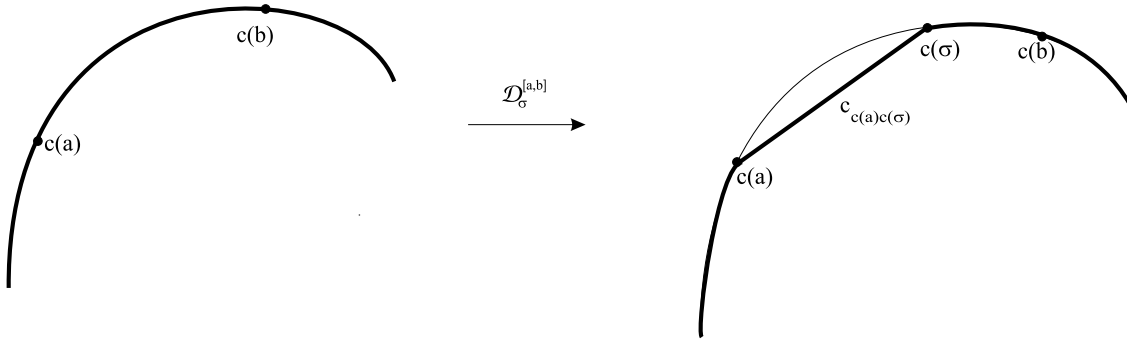


Figura 2.1: Exemplo de uma deformação  $\mathcal{D}_\sigma^{[a,b]}$ .

Note que  $\mathcal{D}_\sigma^{[a,b]}$  está bem definida, pois  $d(c(a), c(\sigma)) \leq \eta/2$ . Além disso,  $\mathcal{D}_a^{[a,b]} = Id$  e escrevemos  $\mathcal{D}^{[a,b]} \equiv \mathcal{D}_b^{[a,b]}$ .

**2.1.4. Observação.** Segue da definição de  $\mathcal{D}_\sigma^{[a,b]}$  que para todo  $\sigma \in [a, b]$ , temos  $E(\mathcal{D}_\sigma^{[a,b]} c) \leq E(c)$ , valendo a igualdade se, e somente se,  $c|_{[a,\sigma]}$  é uma geodésica minimizante.

Observe que  $\mathcal{D}_\sigma^{[a,b]}$  depende da escolha de  $k$  e de  $x$ .

**2.1.5. Proposição.** *A aplicação  $\mathcal{D}^{[a,b]} : P^k M \times [a, b] \rightarrow P^k M$  definida por  $\mathcal{D}^{[a,b]}(c, \sigma) = \mathcal{D}_\sigma^{[a,b]}c$  é contínua.*

**Prova.** Por simplicidade, escreveremos  $\mathcal{D}_\sigma c$  no lugar de  $\mathcal{D}_\sigma^{[a,b]}c$ .

Sejam  $\{c_n\}$  uma seqüência convergente em  $P^k M$  com limite  $c$  e  $\{\sigma_n\}$  uma seqüência convergente em  $[a, b]$ , com limite  $\sigma$ . Mostraremos que  $\{\mathcal{D}_{\sigma_n} c_n\}$  converge para  $\mathcal{D}_\sigma c$ . Vamos supor  $\sigma_n < \sigma$ , o caso  $\sigma_n > \sigma$  é análogo.

Devemos mostrar  $\mathcal{D}_{\sigma_n} c_n(t) \rightarrow \mathcal{D}_\sigma c(t)$  uniformemente para  $t \in [0, 1]$ . Pela desigualdade triangular, temos:

$$d(\mathcal{D}_{\sigma_n} c_n, \mathcal{D}_\sigma c) \leq d(\mathcal{D}_{\sigma_n} c_n, \mathcal{D}_{\sigma_n} c) + d(\mathcal{D}_{\sigma_n} c, \mathcal{D}_\sigma c).$$

Analisemos  $d(\mathcal{D}_{\sigma_n} c_n, \mathcal{D}_{\sigma_n} c)$  e  $d(\mathcal{D}_{\sigma_n} c, \mathcal{D}_\sigma c)$  separadamente.

(i) Temos que  $d(\mathcal{D}_{\sigma_n} c_n, \mathcal{D}_{\sigma_n} c) = \sup_{t \in [0, 1]} d(\mathcal{D}_{\sigma_n} c_n(t), \mathcal{D}_{\sigma_n} c(t))$ .

Se  $t \in \mathbb{C}[a, \sigma_n]$

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{\sigma_n} c_n(t) = c_n(t) \\ \mathcal{D}_{\sigma_n} c(t) = c(t). \end{cases}$$

Neste caso,  $d(\mathcal{D}_{\sigma_n} c_n(t), \mathcal{D}_{\sigma_n} c(t)) \leq d(c_n, c)$ , isto é,  $\mathcal{D}_{\sigma_n} c_n(t) \rightarrow \mathcal{D}_\sigma c(t)$  uniformemente para  $t \in \mathbb{C}[a, \sigma_n]$ .

Se  $t \in [a, \sigma_n]$ ,

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{\sigma_n} c_n(t) = c_{c_n(a)c_n(\sigma_n)}|[a, \sigma_n](t) \\ \mathcal{D}_{\sigma_n} c(t) = c_{c(a)c(\sigma_n)}|[a, \sigma_n](t). \end{cases}$$

Usando a observação 1.1.6 e o fato de que  $c_n(a) \rightarrow c(a), c_n(\sigma_n) \rightarrow c(\sigma_n)$ , temos  $\mathcal{D}_{\sigma_n} c_n(t) \rightarrow \mathcal{D}_{\sigma_n} c(t)$  uniformemente, para  $t \in [a, \sigma_n]$ .

Portanto,  $\mathcal{D}_{\sigma_n} c_n(t) \rightarrow \mathcal{D}_{\sigma_n} c(t)$  uniformemente, para  $t \in [0, 1]$ .

(ii) Temos que  $d(\mathcal{D}_{\sigma_n} c, \mathcal{D}_{\sigma} c) = \sup_{t \in [0, 1]} d(\mathcal{D}_{\sigma_n} c(t), \mathcal{D}_{\sigma} c(t))$ .

Se  $t \in \mathbb{C}[a, \sigma]$ ,  $\mathcal{D}_{\sigma_n} c(t) = \mathcal{D}_{\sigma} c(t) = c(t)$ . Assim,  $d(\mathcal{D}_{\sigma_n} c(t), \mathcal{D}_{\sigma} c(t)) = 0$ .

Se  $t \in [a, \sigma]$ , temos dois casos a analisar:

(1)  $t \in [a, \sigma_n]$

Como  $\sigma_n \rightarrow \sigma$ , pela observação 1.1.6 e pela observação 1.1.8, temos  $\mathcal{D}_{\sigma_n} c|_{[a, \sigma_n]} = c_{c(a)c(\sigma_n)}|_{[a, \sigma_n]} \rightarrow c_{c(a)c(\sigma)}|_{[a, \sigma]} = \mathcal{D}_{\sigma} c|_{[a, \sigma]}$ . Portanto, neste caso,  $\mathcal{D}_{\sigma_n} c(t) \rightarrow \mathcal{D}_{\sigma} c(t)$  uniformemente, para  $t \in [a, \sigma_n]$ .

(2)  $t \in [\sigma_n, \sigma]$

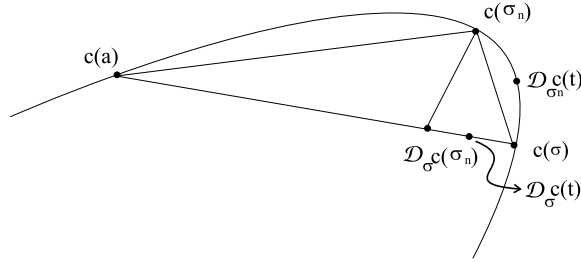


Figura 2.2: Ilustração de  $\mathcal{D}_{\sigma_n} c(t)$  e de  $\mathcal{D}_{\sigma} c(t)$ ,  $t \in [a, \sigma]$ .

Neste caso, temos que  $\mathcal{D}_{\sigma_n} c(t) \rightarrow \mathcal{D}_{\sigma} c(t)$  uniformemente, para  $t \in [\sigma_n, \sigma]$ . Isto se deduz facilmente da desigualdade

$$d(\mathcal{D}_{\sigma_n} c(t), \mathcal{D}_{\sigma} c(t)) = d(c(t), \mathcal{D}_{\sigma} c(t)) \leq d(c(t), c(\sigma)) + d(\mathcal{D}_{\sigma} c(\sigma), \mathcal{D}_{\sigma} c(t))$$

(veja figura 2.2) e do fato de que  $\sigma_n \rightarrow \sigma$ .

Logo,  $\mathcal{D}_{\sigma_n} c(t) \rightarrow \mathcal{D}_\sigma c(t)$  uniformemente, para  $t \in [0, 1]$ .

Portanto,  $\mathcal{D}_{\sigma_n} c_n(t) \rightarrow \mathcal{D}_\sigma c(t)$  uniformemente, para  $t \in [0, 1]$ .  $\square$

**2.1.6. Corolário.**  $c \simeq \mathcal{D}_\sigma^{[a,b]} c$ . ( $\simeq$  denota equivalência de homotopia.)

Iteremos agora a deformação básica.

**2.1.7. Definição.** Fixe  $k > 0$  e escolha um inteiro par  $x > 0$  como no lema 2.1.1. Seja  $j$  um inteiro par  $0 \leq j \leq x - 2$ . Para  $\sigma \in [j/x, (j+2)/x]$ , definimos  $\mathcal{D}_\sigma c$ ,  $c \in P^k M$ , por

$$\mathcal{D}_\sigma c = \mathcal{D}_\sigma^{[j/x, (j+2)/x]} \circ \mathcal{D}^{[(j-2)/x, j/x]} \circ \dots \circ \mathcal{D}^{[2/x, 4/x]} \circ \mathcal{D}^{[0, 2/x]} c.$$

Observe que  $\mathcal{D}_\sigma$  está bem definida, pois  $\mathcal{D}_a^{[a,b]} = Id$ . Observe ainda que, pelo corolário 2.1.6,  $\mathcal{D}_1 c$  é homotópica a  $c$ .

Veja uma ilustração desta deformação na figura 2.3.

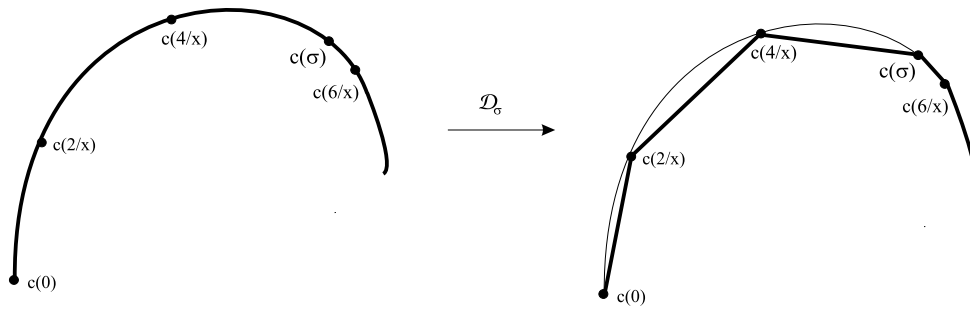


Figura 2.3: Exemplo de uma deformação com  $\sigma \in [4/x, 6/x]$ .

Observe que  $\mathcal{D}_1 c = c$  se, e somente se,  $c|_{[j/x, j+2/x]}$ , é uma geodésica,  $j$  par. Mais ainda,  $E(\mathcal{D}_1 c) \leq E(c)$ , com igualdade se, e somente se,  $c|_{[j/x, j+2/x]}$  é uma geodésica.

Definamos agora  $\mathcal{D}_\sigma$  para  $\sigma \in [1, 2]$ . Para isto, faremos uma pequena modificação em  $\mathcal{D}_\sigma c$ ,  $\sigma \in [0, 1]$ . O processo é inteiramente análogo ao anterior, mas agora dividimos o intervalo  $[0, 1]$  em subintervalos da forma  $[(j+1)/x, (j+3)/x]$ ,  $0 \leq j \leq x-2$ , cujo comprimento também é  $2/x$ . Em seguida, como antes, ligamos os pontos  $c(\frac{j+1}{x})$ ,  $c(\frac{j+3}{x})$  por meio de uma única geodésica minimizante. Como desejamos continuar a deformação  $\mathcal{D}_\sigma$ ,  $\sigma \in [0, 1]$ , devemos começar a deformação  $\mathcal{D}_\sigma$ ,  $\sigma \in [1, 2]$ , onde  $\mathcal{D}_\sigma$ ,  $\sigma \in [0, 1]$  terminou, isto é, com  $\mathcal{D}_1 c$  ao invés de  $c$ .

**2.1.8. Definição.** Para  $\sigma \in [1, 2]$ ,  $c \in P^k M$ , definimos

$$\mathcal{D}_\sigma c := (\mathcal{D}_{\sigma-1}(\mathcal{D}_1 c \circ \theta)) \circ \theta^{-1},$$

onde  $\theta : S \rightarrow S$ ,  $\theta(t) = t + \frac{1}{x} \pmod{[0, 1]}$ .

Note que a proposição 2.1.5 implica que a aplicação  $(\sigma, c) \mapsto \mathcal{D}_\sigma c$ ,  $\sigma \in [0, 2]$ ,  $c \in P^k M$ , é contínua.

De agora em diante, denotaremos por  $\mathcal{D}$  a deformação  $\mathcal{D}_2$ . Veja uma ilustração de  $\mathcal{D}c$  na figura 2.4.

**2.1.9. Observação.** Temos que, pelo corolário 2.1.6,  $\mathcal{D}c \simeq c$ . Note também que (ver observação 2.1.4)  $\mathcal{D}c = c$  se, e somente se,  $c$  é uma constante ou uma geodésica fechada. Mais ainda,  $E(\mathcal{D}c) \leq E(\mathcal{D}_1 c) \leq E(c)$ , com igualdade se, e somente se,  $c$  é uma função constante ou uma geodésica fechada.

A observação acima implica que se  $E(c) = \inf_{c \simeq c'} E(c')$ , então  $c$  é uma geodésica fechada ou uma função constante.

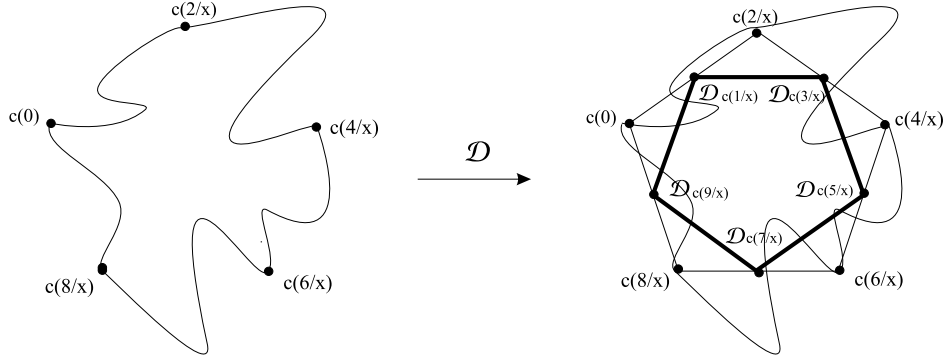


Figura 2.4:  $\mathcal{D}c$  com  $x=10$ .

O lema 2.1.11 é uma versão global da proposição 1.1.10. Antes, precisaremos de um resultado sobre seqüências, de fácil demonstração, dado no lema a seguir.

**2.1.10. Lema.** *Sejam  $\{a_n^1\}, \dots, \{a_n^l\}; \{b_n^1\}, \dots, \{b_n^l\}$ ,  $2l$  seqüências limitadas de números reais tais que  $a_n^i \leq b_n^i$ , para todo  $i$ , para todo  $n$ , e tal que  $\lim \Sigma_l a_n^i = \lim \Sigma_l b_n^i$ . Então existe subseqüência  $n_k$  tal que  $\lim a_{n_k}^i = \lim b_{n_k}^i$ , para todo  $i = 1, \dots, l$ .*

**2.1.11. Lema.** *Seja  $\{c_n\}$  uma seqüência em  $P^k M$ ,  $M$  compacta, tal que  $\{E(c_n)\}$  e  $\{E(\mathcal{D}c_n)\}$  são ambas convergentes com o mesmo limite  $k_0 > 0$ . Então  $\{c_n\}$  possui uma subseqüência convergente cujo limite é uma geodésica fechada  $c_0$ . Além disso,  $E(c_0) = k_0$ .*

**Prova.** Por simplicidade, denotaremos as seqüências e subseqüências com os mesmos símbolos.

Como  $E(c_n) \geq E(\mathcal{D}_1 c_n) \geq E(\mathcal{D}c_n)$ , temos também que  $\lim E(c_n) = \lim E(\mathcal{D}_1 c_n)$ .

Observe que  $\mathcal{D}_1 c_n$  é uma seqüência de curvas fechadas, cada uma das quais é um polígono cujos lados são segmentos geodésicos de comprimento  $\leq \eta/2$ . Tal polígono está



completamente determinado por seus  $x/2$  vértices.

Como  $M$  é compacta, existe subsequência de  $c_n$  tal que as  $x/2$  seqüências de vértices de  $\mathcal{D}c_n$  convergem.

Lembre que, pela observação 1.1.6, uma seqüência de segmentos geodésicos converge se seus extremos convergem. Portanto  $\mathcal{D}_1c_n$  possui uma subsequência convergente  $\mathcal{D}_1c_n$  com limite  $c_0$ , onde  $c_0$  é um polígono cujos lados são segmentos geodésicos. É claro que  $E(c_0) = k_0$  (ver observação 1.1.7).

Como  $\mathcal{D}_1c_n \Big|_{[j/x, (j+2)/x]}$ ,  $j = 0, 2, \dots, x-2$ , é um segmento geodésico e  $c_n(j/x) = \mathcal{D}_1c_n(j/x)$ , para  $j$  par, temos

$$\frac{1}{2} d^2\left(c_n(j/x), c_n((j+2)/x)\right) = E\left(\mathcal{D}_1c_n \Big|_{[j/x, (j+2)/x]}\right).$$

Por outro lado, pelo lema 2.1.10 e pelo fato de que  $\lim E(c_n) = \lim E(\mathcal{D}_1c_n)$  temos que existe subsequência de  $c_n$  tal que

$$\begin{aligned} \lim E(c_n \Big|_{[j/x, (j+2)/x]}) &= \lim E(\mathcal{D}_1c_n \Big|_{[j/x, (j+2)/x]}) \\ &= \frac{1}{2} \lim d^2\left(c_n(j/x), c_n((j+2)/x)\right). \end{aligned}$$

Logo pela proposição 1.1.10, concluímos que existe uma subsequência de  $c_n$  tal que  $\lim c_n = \lim \mathcal{D}_1c_n = c_0$ . Repetindo o processo acima substituindo  $c_n$  por  $\mathcal{D}_1c_n$ ,  $\mathcal{D}_1c_n$  por  $\mathcal{D}c_n$  e o intervalo  $[j/x, (j+2)/x]$  pelo intervalo  $[(j+1)/x, (j+3)/x]$ , obtemos uma subsequência de  $\mathcal{D}_1c_n$  tal que  $\lim \mathcal{D}_1c_n = \lim \mathcal{D}c_n = c_0$ . Assim existe subsequência de  $c_n$ , tal que  $\lim c_n = \lim \mathcal{D}c_n = c_0$ .

Finalmente,  $k_0 = E(c_0) = E(\lim \mathcal{D}c_n) = E(\mathcal{D} \lim(c_n)) = E(\mathcal{D}c_0)$  (pois  $\mathcal{D}$  é contínua). Assim, pela observação 2.1.9 concluímos que  $c_0$  é uma geodésica fechada.  $\square$

**2.1.12. Definição.** Para  $k > 0$ , definimos

$$\mathcal{C}_k = \{c \in PM; c \text{ é geodésica fechada e } E(c) = k\}.$$

O lema a seguir apresenta a propriedade mais importante da deformação  $\mathcal{D}$ .

**2.1.13. Lema.** *Seja  $\mathcal{U}$  uma vizinhança aberta do conjunto  $\mathcal{C}_{k_0}$ . Seja  $k > k_0$  e considere a deformação  $\mathcal{D}$  sobre  $P^k M$  introduzida acima. Então existe um  $\epsilon = \epsilon(\mathcal{U}) > 0$  tal que*

$$\mathcal{D}(P^{k_0+\epsilon} M) \subset \mathcal{U} \cup P^{k_0-\epsilon} M.$$

**2.1.14. Observação.** No caso em que  $\mathcal{C}_{k_0} = \emptyset$ , podemos escolher  $\mathcal{U} = \emptyset$ .

**2.1.15. Observação.** Lembre que  $\mathcal{D}$  depende das escolhas de  $k$  e de  $x$ . Para o lema acima, basta escolhermos qualquer  $x$  par tal que  $0 < \frac{4k}{x} < \frac{\eta^2}{4}$ .

**Prova.** (do lema 2.1.13) Como  $\mathcal{D}$  é contínua e  $\mathcal{D}|_{\mathcal{C}_{k_0}} = Id$ , existe uma vizinhança aberta  $\mathcal{U}'$  de  $\mathcal{C}_{k_0}$ ,  $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ , com  $\mathcal{D}(\mathcal{U}') \subset \mathcal{U}$ . Provaremos o lema por contradição. Se não existisse  $\epsilon > 0$  com a propriedade desejada, teríamos uma seqüência  $\{c_n\}$ ,  $c_n \notin \mathcal{U}'$ , com

$$k_0 - \frac{1}{n} \leq E(\mathcal{D}c_n) \leq E(c_n) \leq k_0 + \frac{1}{n}.$$

Do lema 2.1.11 obteríamos que  $\{c_n\}$  possuiria uma subseqüência convergente com limite  $c$ , sendo  $c$  uma geodésica fechada, com  $E(c) = k_0$  e  $c \notin \mathcal{U}'$ , que seria uma contradição, pois  $c \in \mathcal{C}_{k_0} \subset \mathcal{U}'$ .  $\square$

**2.1.16. Observação.** Note que  $(P^k M, P^0 M)$  é contrátil se  $k \leq \eta^2/8$ , isto é,  $P^0 M$  é retrato por deformação forte de  $P^k M$ .

De fato, se  $k \leq \eta^2/8$ ,  $E(c) \leq k \leq \eta^2/8$  para todo  $c \in P^k M$ , donde  $L(c) \leq \eta/2$ , isto é,  $c$  está inteiramente contida em uma vizinhança convexa de raio  $\eta/2$ , que é contrátil. Assim, podemos contrair  $c$  a  $c(0)$ , logo  $c$  é canonicamente contrátil. Rigorosamente, definimos  $H_t : P^k M \rightarrow P^k M$ ,  $t \in [0, 1]$ , por  $(H_t c)(s) := c_{c(0)c(s)}(1 - t)$ . Temos que  $H_0 c = c$  e  $H_1 c = c(0)$ . A proposição 2.1.5 implica que  $H$  é contínua.

## 2.2 O Teorema de Lyusternik e Fet

Por definição, toda variedade riemanniana tem dimensão  $\geq 1$ .

**2.2.1. Teorema (Lyusternik e Fet).** *Sobre toda variedade Riemanniana fechada  $M$ , existe uma geodésica fechada.*

**Prova.** Suponha que  $M$  é conexa. Pela proposição 1.2.1 existe um inteiro  $n$ ,  $0 \leq n \leq \dim M - 1$ , tal que  $\pi_{n+1} M \neq 0$ . Seja  $f : \mathbb{S}^{n+1} \rightarrow M$  uma aplicação diferenciável que não é homotópica a uma aplicação constante. Considere a aplicação

$$F := \mathcal{F}(f) : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (PM, P^0 M),$$

onde  $\mathcal{F}$  é a aplicação definida no final do capítulo 1. Note que, como  $f$  é diferenciável,  $\mathcal{F}(f)(D^n) \subset PM$  (veja (iii) da proposição 1.2.2).

Definamos

$$k_0 = \inf_{G \simeq F} \left\{ \sup_{p \in D^n} E(G(p)) \right\},$$

onde o ínfimo é tomado no conjunto das aplicações  $G : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (PM, P^0 M)$ , com  $G \simeq F$ .

Afirmamos que  $k_0 > 0$ , caso contrário, teríamos uma contradição como segue. Se  $k_0 = 0$ , existe  $G \simeq F$  tal que  $E(G(p)) < \eta^2/8$ , para todo  $p \in D^n$ , isto é,  $G(p) \in P^{\frac{\eta^2}{8}} M$ ,

que se deforma em  $P^0M$  (veja observação 2.1.16). Logo  $F$  é homotópica a uma aplicação  $F^*$  com  $F^*(D^n) \subset P^0M$ , o que implica que  $F$  é homotópica a uma aplicação constante, pois  $D^n$  é contrátil. Portanto existe homotopia

$$F_t : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (PM, P^0M)$$

com  $F_0 = F$ ,  $F_1 = \text{constante}$ . Equivalentemente, existe caminho contínuo

$$t \mapsto F_t \in C^0((D^n, \partial D^n), (PM, P^0M)),$$

com  $F_0 = F$ ,  $F_1 = \text{constante}$  (esta equivalência segue do fato de  $D^n$  ser compacto, ver [14], página 287). Logo

$$t \mapsto f_t := \mathcal{G}(F_t)$$

é contínuo, onde  $\mathcal{G}$  é a aplicação definida no final do capítulo 1. Pela proposição 1.2.2, temos que  $f_0 = \mathcal{G}(F_0) = \mathcal{G}(F) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(f)) = f$  e  $f_1 = \mathcal{G}(\text{constante}) = \text{constante}$ . Assim,  $f$  é homotópica a uma aplicação constante, o que é uma contradição. Portanto  $k_0 > 0$ .

Para completar a prova, demonstramos a existência de uma geodésica fechada  $c_0$  com  $E(c_0) = k_0$ . Se não existisse uma tal geodésica, teríamos  $\mathcal{C}_{k_0} = \emptyset$ . Pelo lema 2.1.13 (veja observação 2.1.14), existiria um  $\epsilon > 0$  tal que

$$\mathcal{D}(P^{k_0+\epsilon}M) \subset P^{k_0-\epsilon}M.$$

Pela definição de  $k_0$ , para todo  $\delta > 0$ , existe  $G_\delta \simeq F$  tal que para todo  $p \in D^n$ ,  $k_0 < E(G_\delta(p)) < k_0 + \delta$ . Assim, tomando  $\delta < \epsilon$ , existe  $G_\delta$  tal que para todo  $p \in D^n$ ,  $G_\delta(p) \in P^{k_0+\epsilon}M$ . Logo para todo  $p \in D^n$ , temos que  $\mathcal{D}(G_\delta(p)) \in P^{k_0-\epsilon}M$ , o que implica que  $\sup_{p \in D^n} E(\mathcal{D}(G_\delta(D^n))) \leq k_0 - \epsilon < k_0$ . Isto é uma contradição, pois  $\mathcal{D}G_\delta \simeq G_\delta \simeq F$ .

Portanto  $M$  possui uma geodésica fechada.

Se  $M$  não for conexa, a conclusão acima garante que cada componente conexa de  $M$  possui uma geodésica fechada.  $\square$

## Capítulo 3

# O Teorema de Lyusternik e Fet para Espaços Geodésicos

Neste capítulo apresentaremos uma generalização do teorema de Lyusternik e Fet para espaços geodésicos. Provaremos o seguinte resultado.

**Teorema de Lyusternik e Fet para espaços geodésicos.** *Seja  $X$  um espaço geodésico compacto, não contrátil, com curvatura limitada superiormente. Então  $X$  possui uma geodésica fechada.*

Dividimos este capítulo em duas seções. Na primeira seção, apresentamos a linguagem básica da geometria dos espaços geodésicos e dos espaços  $CAT(k)$ , assim como alguns exemplos e resultados.

Na segunda seção, provamos o teorema de Lyusternik e Fet para espaços geodésicos, para isto, adaptamos as definições e os resultados dos capítulos 1 e 2, inclusive a prova do teorema de Lyusternik e Fet. As duas modificações mais importantes, são as seguintes. Primeiro substituímos o espaço  $PM$  pelo espaço  $\mathcal{P}X$  das curvas fechadas poligonais  $c : S \rightarrow X$ , onde  $X$  é um espaço geodésico. Em seguida, como precisamos garantir a existência e unicidade local de geodésicas minimizantes (que vale para variedades riemannianas), exigimos que nosso espaço geodésico  $X$  tenha curvatura limitada superiormente,

o que nos dá esta garantia (veja corolário 3.1.21).

O conceito de espaço geodésico generaliza o conceito de variedade riemanniana (completa). Neste contexto mais geral, podemos estudar a noção de curvatura, obtendo assim os espaços  $CAT(k)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , e os espaços com curvatura  $\leq k$ . Esta extensão da noção de curvatura a um espaço geodésico  $X$  é feita comparando triângulos em  $X$  com triângulos no espaço modelo  $M_k^2$ , onde  $M_k^2$  é a variedade completa simplesmente conexa, de dimensão 2, com curvatura de Gauss constante igual a  $k$ . A idéia de comparar triângulos foi inspirada nos teoremas clássicos de comparação da Geometria Riemanniana.

### 3.1 Espaços Geodésicos e Espaços CAT(k)

Nesta seção  $I \subset \mathbb{R}$  denotará um intervalo.

**3.1.1. Definição.** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Uma aplicação  $c : I \rightarrow X$  é uma geodésica minimizante se existe uma constante  $\lambda > 0$  tal que  $d_X(c(t), c(t')) = \lambda|t - t'|$ , para todo  $t, t' \in I$ . Dizemos que  $\lambda$  é a velocidade de  $c$ . Se  $\lambda = 1$ , dizemos que  $c$  está parametrizada pelo comprimento de arco (neste caso,  $c : I \rightarrow c(I)$  é uma isometria). Se  $I = [a, b]$ , dizemos que  $c$  é uma geodésica minimizante ligando  $c(a)$  a  $c(b)$ .

Note que se  $c : I \rightarrow X$  é uma geodésica minimizante, então  $c|_J$  também é uma geodésica minimizante, para todo sub-intervalo  $J$  de  $I$ .

**3.1.2. Definição.** Uma aplicação  $c : I \rightarrow X$  é uma geodésica se ela é localmente uma geodésica minimizante, isto é, para todo  $t \in I$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $c|_{I \cap (t-\delta, t+\delta)}$  é uma geodésica minimizante. Se  $I = [a, b]$ , dizemos que  $c$  é uma geodésica ligando  $c(a)$  a  $c(b)$ .

**3.1.3. Definição.**  $(X, d)$  chama-se espaço geodésico (ou espaço métrico geodésico) se, para quaisquer dois pontos  $x, y \in X$ , existe uma geodésica minimizante  $c$  ligando  $x$  a  $y$ . As vezes, dizemos simplesmente que  $X$  é um espaço geodésico.

Em geral, uma geodésica minimizante  $c$ , ligando  $x$  a  $y$ , não é única. Se não causar confusão, denotaremos  $c$  por  $[x, y]$  (apesar de não ser única). Mais ainda, usamos também  $[x, y]$  para denotar a imagem de  $c$  em  $X$ . Assim, por exemplo, se escrevermos  $[x, y] \subset X$ , certamente neste caso,  $[x, y]$  estará denotando a imagem da geodésica em  $X$ .

### 3.1.4. Exemplos.

#### (i) Variedades riemannianas completas.

Lembre que para qualquer variedade riemanniana  $M$ , podemos definir a seguinte métrica:

$$d_M(p, q) = \inf_{c \in \Omega_{p,q}} L(c),$$

$p, q \in M$ , onde  $\Omega_{p,q}$  denota o conjunto dos caminhos diferenciáveis por partes  $c : [0, 1] \rightarrow M$  tais que  $c(0) = p$  e  $c(1) = q$  (ver [3], página 146).

Se  $M$  é completa, o teorema de Hopf-Rinow implica que, para todo  $p, q \in M$ , existe uma geodésica minimizante ligando  $p$  a  $q$ . Assim, o espaço métrico  $(M, d_M)$  é um espaço geodésico.

Note que a recíproca não vale: Considere  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < 1\} \subset \mathbb{R}^n$  (ou qualquer aberto convexo em  $\mathbb{R}^n$ ) com métrica plana canônica.  $D^n$  é espaço geodésico, mas não é completo.

Também pode-se mostrar que se  $M$  é compacta com bordo, então  $(M, d_M)$  é espaço geodésico (ver [2]).

**(ii) Espaços localmente planos.**

Seja  $K$  um complexo simplicial. Suponhamos que cada simplexo  $\sigma$  possua uma métrica plana  $d_\sigma$ , isto é,  $(\sigma, d_\sigma)$  é isométrico a um simplexo linear de algum  $\mathbb{R}^{n_\sigma}$ . Suponhamos ainda que  $d_\sigma|_\tau = d_{\sigma'}|_\tau$ , para todo  $\tau$  sub-simplexo comum de  $\sigma, \sigma' \in K$ .

Seja  $c : [a, b] \rightarrow K$ . Dizemos que  $c$  é diferenciável por partes se existe partição de  $[a, b]$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = b$  e existem  $\sigma_0, \dots, \sigma_k \in K$  tais que  $c([t_i, t_{i+1}]) \subset \sigma_i$  e  $c|_{[t_i, t_{i+1}]} : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \sigma_i \subset \mathbb{R}^{n_{\sigma_i}}$  é diferenciável.

Para uma curva  $c$  diferenciável por partes, definimos:

$$L(c) = \sum_i L(c|_{[t_i, t_{i+1}]}).$$

$L(c)$  está bem definido, isto é, não depende da partição  $t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1}$  e nem dos  $\sigma'_i$ s. Ver [2].

Para  $p, q \in K$ , definimos a métrica intrínseca  $d_K$  de  $K$  por

$$d_K(p, q) = \inf_{c \in \Omega_{p,q}} L(c),$$

onde  $\Omega_{p,q}$  denota o conjunto dos caminhos diferenciáveis por partes  $c : [a, b] \rightarrow K$  tais que  $c(a) = p$  e  $c(b) = q$ .

Verifica-se que se  $K$  é finito,  $(K, d_K)$  é espaço geodésico, ver [2], página 123.

**Observação.** Podemos definir também espaços localmente esféricos ou localmente hiperbólicos usando simplexos esféricos ou hiperbólicos, respectivamente.



**(iii) Subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ .**

Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  com a propriedade que, para todo  $p, q \in X$ , existe uma curva  $c$  retificável em  $X$  ligando  $p$  a  $q$ .

Definimos a métrica intrínseca  $d_X$  de  $X$ , induzida de  $\mathbb{R}^n$ , da seguinte forma:

$$d_X(p, q) = \inf_{c \in \Omega_{pq}} L(c),$$

onde  $\Omega_{pq} = \{c \text{ retificável ligando } p \text{ a } q\}$ .

Mostra-se que  $(X, d_X)$  é espaço métrico e se  $X$  é compacto, então  $(X, d_X)$  é um espaço geodésico (ver [2], página 35). Mais ainda, no caso em que  $X$  é uma subvariedade de  $\mathbb{R}^n$ ,  $d_X$  coincide com a métrica do primeiro exemplo, onde a métrica riemanniana usada é a métrica riemanniana induzida de  $\mathbb{R}^n$  (este é um resultado de geometria riemanniana, ver [3], página 146).

Para estender o conceito de curvatura (de variedades riemannianas) a espaços geodésicos quaisquer, vamos comparar triângulos do espaço geodésico com triângulos em “espaços Modelo”. Os espaços Modelo são as variedades riemannianas simplesmente conexas com curvatura seccional constante. Lembremos algumas das propriedades destas variedades.

Seja  $k \in \mathbb{R}$ . Denotamos por  $M_k^n$  a variedade riemanniana completa, simplesmente conexa, de dimensão  $n$ , com curvatura seccional constante igual a  $k$ . Lembremos que  $M_k^n$  é única, salvo isometrias (ver [5], página 41).

(i) Se  $k \leq 0$ ,  $M_k^n$  é difeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  (Teorema de Hadamard).

(ii) Se  $k > 0$ ,  $M_k^n$  é difeomorfo a  $\mathbb{S}^n$ .

Lembremos também que:

(iii) Se  $k = 0$ , então  $M_k^n$  é isométrico a  $\mathbb{R}^n$ , com a métrica canônica.

(iv) Se  $k > 0$ , então  $M_k^n$  é isométrico a  $\mathbb{S}_k^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=0}^n x_i^2 = \frac{1}{k}\}$ , com a métrica induzida de  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $\mathbb{R}^{n+1}$  com a métrica canônica).

Observe que, neste caso,  $\text{diam}(M_k^n) = \pi/\sqrt{k}$ .

(v) Se  $k < 0$ , então  $M_k^n$  é isométrico a  $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_0, \dots, x_n); x_n > 0\}$ , com a métrica  $g(x) = (\frac{1}{-k})\frac{1}{x_n^2}I$  ( $I$  denota a matriz identidade).

**3.1.5. Observação.** Para  $k \leq 0$ , as geodésicas são únicas, isto é, para todo  $p, q \in M_k^n$ , existe uma única geodésica ligando  $p$  a  $q$ . Mais ainda, toda geodésica é geodésica minimizante (ver [2], página 23).

**Notação.** Escreveremos  $D_k$  para denotar o diâmetro de  $M_k^n$ . Mais precisamente,  $D_k := \pi/\sqrt{k}$  para  $k > 0$  e  $D_k := \infty$  para  $k \leq 0$ .

Definiremos agora triângulos em espaços geodésicos e seus triângulos de comparação em  $M_k^2$ .

**3.1.6. Definição.** Seja  $X$  um espaço geodésico e sejam  $p, q, r \in X$ . Um triângulo geodésico  $\Delta(p, q, r)$  é um conjunto de três geodésicas minimizantes  $[p, q], [q, r], [r, p]$ .

**3.1.7. Definição.** Seja  $X$  um espaço geodésico e sejam  $p, q, r \in X$ . O perímetro do triângulo  $\Delta(p, q, r)$  é o número real  $d(p, q) + d(q, r) + d(r, p)$ .

**Notação.** As vezes usamos o mesmo símbolo  $\Delta(p, q, r)$  para denotar  $[p, q] \cup [q, r] \cup [r, p] \subset X$ .

**3.1.8. Definição.** Fixe  $k \in \mathbb{R}$  e sejam  $p, q, r \in X$ . Considere o triângulo  $\Delta(p, q, r)$ . Um triângulo  $\bar{\Delta}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ ,  $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r} \in M_k^2$ , chama-se um triângulo de comparação (em  $M_k^2$ ) de  $\Delta(p, q, r)$  se  $d_X(p, q) = d_{M_k^2}(\bar{p}, \bar{q})$ ,  $d_X(q, r) = d_{M_k^2}(\bar{q}, \bar{r})$  e  $d_X(r, p) = d_{M_k^2}(\bar{r}, \bar{p})$ .

Note que o triângulo de comparação é único, salvo isometrias de  $M_k^2$ .

**Notação.** Dado  $p, q \in X$ ,  $[\bar{p}, \bar{q}]$  denotará sempre um segmento geodésico em  $M_k^2$  ligando  $\bar{p}$  a  $\bar{q}$ , onde  $d(p, q) = d(\bar{p}, \bar{q})$ .

**3.1.9. Definição.** Seja  $x \in [p, q] \subset X$ . Um ponto  $\bar{x} \in [\bar{p}, \bar{q}] \subset M_k^2$  é chamado um ponto de comparação de  $x \in [p, q]$ , se  $d(p, x) = d(\bar{p}, \bar{x})$  (equivalentemente,  $d(q, x) = d(\bar{q}, \bar{x})$ ).

Se  $\Delta = \Delta(p, q, r)$  é um triângulo geodésico e  $x \in [p, q] \subset \Delta \subset X$ , o ponto  $\bar{x} \in [\bar{p}, \bar{q}]$  também é chamado ponto de comparação para  $x \in \Delta \subset X$ .

A seguinte proposição garante que, sob certas condições, o triângulo de comparação sempre existe.

**3.1.10. Proposição.** *Sejam  $k \in \mathbb{R}$ ,  $p, q, r \in X$ , onde  $X$  é um espaço geodésico. Suponha que o perímetro de  $\Delta(p, q, r)$  é menor do que  $2D_k$ . Então, existem pontos  $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r} \in M_k^2$ , tais que  $d_X(p, q) = d_{M_k^2}(\bar{p}, \bar{q})$ ,  $d_X(q, r) = d_{M_k^2}(\bar{q}, \bar{r})$  e  $d_X(r, p) = d_{M_k^2}(\bar{r}, \bar{p})$ .*

**Prova.** Ver [2], página 25.

**3.1.11. Observação.**

- (i) A condição sobre  $D_k$  é certamente necessária.
- (ii) A proposição vale para qualquer espaço métrico.
- (iii) Se  $k \leq 0$ , a condição perímetro de  $\Delta < 2D_k$  não impõe nenhuma restrição, pois  $D_k = \infty$ .

Estenderemos agora o conceito de curvatura. A motivação para a definição seguinte são os teoremas de comparação de geometria riemanniana, como, por exemplo, os teoremas de Topogonov e Alexandrov (ver [5]). De fato, a sigla *CAT* abaixo foi escolhida por M. Gromov e provém das iniciais dos matemáticos Cartan, Alexandrov e Topogonov.

**3.1.12. Definição.** Seja  $X$  um espaço geodésico e  $k \in \mathbb{R}$ . Seja  $\Delta = \Delta(p, q, r)$  um triângulo geodésico em  $X$ . Suponha que o perímetro de  $\Delta$  é menor do que  $2D_k$ . Seja  $\bar{\Delta} \subset M_k^2$  o triângulo de comparação de  $\Delta$  em  $M_k^2$ . Então  $\Delta$  é dito satisfazer a desigualdade *CAT*( $k$ ) se, para todo  $x, y \in \Delta \subset X$ ,

$$d(x, y) \leq d(\bar{x}, \bar{y}),$$

onde  $\bar{x}, \bar{y} \in M_k^2$  são os pontos de comparação de  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Veja a figura 3.1, onde  $\Delta$  satisfaz *CAT*( $k$ ) e a figura 3.2 onde  $\Delta$  não satisfaz *CAT*( $k$ ).

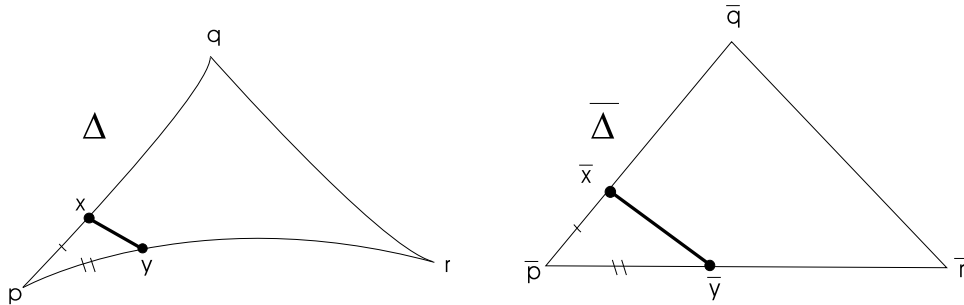


Figura 3.1: O triângulo  $\Delta$  satisfaz *CAT*( $k$ ):  $\Delta$  é mais “fino” do que o triângulo de comparação  $\bar{\Delta} \subset M_k^2$ .

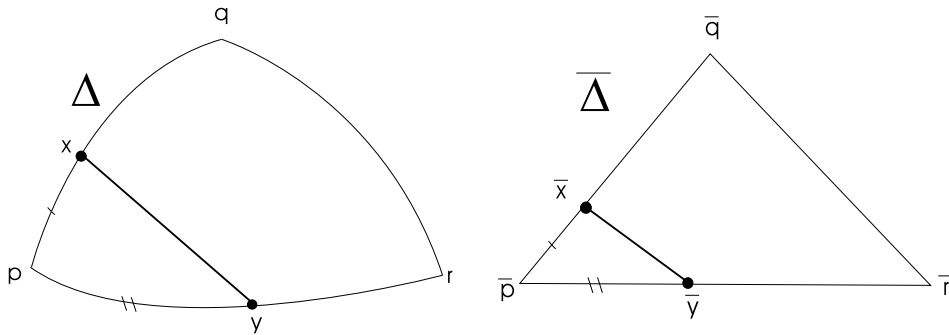


Figura 3.2: O triângulo  $\Delta$  não satisfaz  $CAT(k)$ :  $\Delta$  é mais “grosso” do que o triângulo de comparação  $\bar{\Delta} \subset M_k^2$ .

**3.1.13. Definição.** Seja  $X$  um espaço geodésico. Dizemos que  $X$  é um espaço  $CAT(k)$  se todo triângulo geodésico  $\Delta$  em  $X$ , com perímetro  $\Delta < 2D_k$ , satisfaz a desigualdade  $CAT(k)$ .

Observe que se  $X$  é  $CAT(k)$ , então  $X$  é  $CAT(k')$ , para todo  $k' > k$ , pois os triângulos em  $M_k^2$  “são mais finos” que em  $M_{k'}^2$  (ver [2], página 165).

**3.1.14. Definição.** Um espaço geodésico  $X$  tem *curvatura*  $\leq k$  se ele é localmente um espaço  $CAT(k)$ , isto é, para todo  $x \in X$ , existe  $r_x > 0$  tal que a bola  $B(x, r_x)$ , com a métrica induzida, é um espaço  $CAT(k)$ . Equivalentemente, para todo  $x \in X$ , existe  $r_x > 0$ , tal que todo triângulo em  $B(x, r_x)$  satisfaz a desigualdade  $CAT(k)$ . Escrevemos  $K(X) \leq k$ .

Dizemos que  $X$  tem curvatura limitada superiormente se existe  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $K(X) \leq k$  e escrevemos  $K(X) < \infty$ .

**3.1.15. Exemplo.** Seja  $M$  uma variedade riemanniana completa. Mostra-se que  $K(M) \leq k$  se, e somente se, todas as curvaturas seccionais de  $M$  são  $\leq k$ . Mostra-se ainda que  $M$  é espaço  $CAT(k)$  se, e somente se, todas as curvaturas seccionais de  $M$  são  $\leq k$  e  $M$  é

simplesmente conexa. (Ver [2], página 173).

**3.1.16. Observação.** Se  $\tilde{X}$  é o recobrimento universal de um espaço geodésico  $X$ , com  $K(X) \leq k$ , é um espaço  $CAT(k)$ . Mais precisamente,  $\tilde{X}$  admite uma métrica com a qual  $\tilde{X}$  é um espaço geodésico  $CAT(k)$  e a projeção  $\tilde{X} \rightarrow X$  é isometria local.

Logo, se  $X$  é espaço geodésico, com  $K(X) \leq k$ , então  $X$  é  $CAT(k)$  se, e somente se,  $X$  é simplesmente conexo (ver [2]).

**3.1.17. Definição.** Sejam  $X$  um espaço geodésico e  $p \in X$ . Dizemos que  $X$  tem curvatura  $\leq k$  em  $p$ , se existe  $\epsilon > 0$  tal que a bola  $B(p, \epsilon)$  é  $CAT(k)$ . Escreveremos  $K_p(X) \leq k$ . Note que  $K(X) \leq k$  se, e somente se,  $K_p(X) \leq k$ , para todo  $p \in X$ .

### 3.1.18. Exemplos.

(i) Seja  $M$  uma variedade riemanniana e  $p \in M$ . Temos que  $K_p(M) \leq k$  se, e somente se, todas as curvaturas seccionais de  $M$  em  $p$  são  $\leq k$  (ver [2], página 173).

(ii) Seja  $X$  o cone  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ . Seja  $p_0 = (0, 0, 0)$  o vértice de  $X$ . Considere  $X$  com a métrica intrínseca  $d_X$  induzida de  $\mathbb{R}^3$  (ver (iii) de 3.1.4). Observe que  $X - \{p_0\}$  é localmente isométrico a uma região de  $\mathbb{R}^2$  (ver [4]). Para “ver” isto, escolha  $q \in X - \{p_0\}$  e faça um corte ao longo da geratriz  $g$  oposta a  $q$ . Obtemos uma região plana, veja figura 3.3.

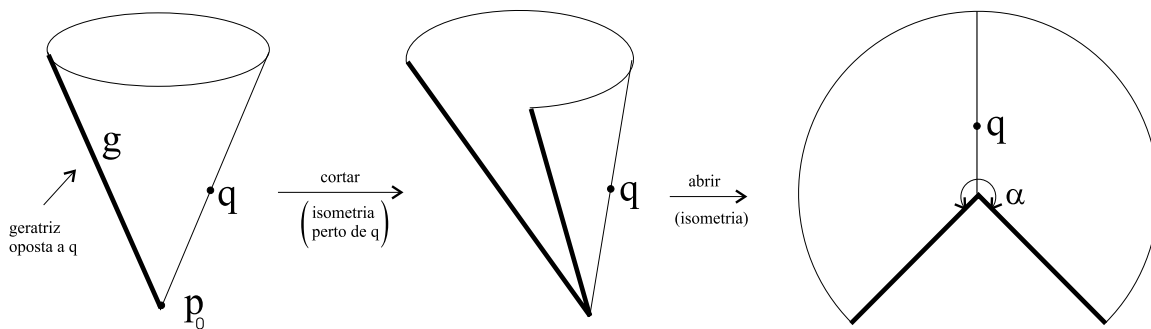


Figura 3.3: Ilustração da isometria de  $X - \{g\}$  com uma região de  $\mathbb{R}^2$ .

Observe que na figura 3.3 as setas indicam operações (cortar e abrir) que são isometrias perto de  $q$ , pois as distâncias de pontos perto de  $q$  não mudam.

Considere um ponto  $q' \neq p_0$  na geratriz oposta a  $q$ . Note que existem duas geodésicas minimizantes ligando  $q$  a  $q'$ , veja figura 3.4 (na segunda figura  $q'$  tem duas representações).

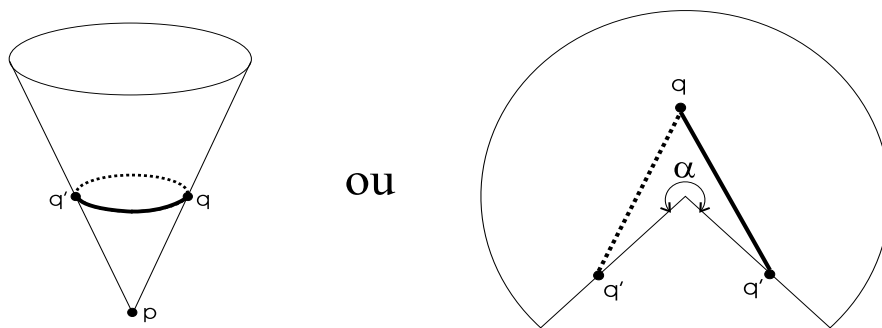


Figura 3.4: Ilustração de geodésicas perto de  $p$ .

Como  $q$  e  $q'$  podem ser escolhidos arbitrariamente perto de  $p_0$ , temos que  $p_0$  não possui vizinhanças convexas, isto é, vizinhanças onde, para quaisquer dois pontos, existe uma única geodésica minimizante ligando estes pontos. Segue do corolário 3.1.21 adiante que  $K_{p_0}(X) = \infty$  (i.e.,  $K_{p_0}(X) \leq k$  não vale para nenhum  $k \in \mathbb{R}$ ).

Assim,  $X$  não é espaço  $CAT(k)$ , para nenhum  $k \in \mathbb{R}$ .

Note também que, para todo  $q \in X - \{p_0\}$ ,  $K_q(X) \leq 0$ , pois  $q$  tem vizinhança isométrica a um disco do plano.

(iii)  $X = \partial\sigma^3$ , onde  $\sigma^3$  é o 3-simplexo em  $\mathbb{R}^3$ , como na figura 3.5, com a métrica localmente plana induzida de  $\mathbb{R}^3$ . Temos que  $X \simeq_{TOP} \mathbb{S}^2$ .

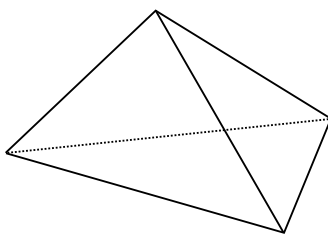


Figura 3.5:  $X = \partial\sigma^3$ .

Se  $p$  não é um vértice de  $X$  então, para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno,  $B(p, \epsilon)$  é isométrica a uma bola em  $\mathbb{R}^2$ . Isto é claro se  $p$  está no interior de um 2-simplexo de  $X$  (i.e., em uma face de  $X$ ), mas se  $p$  está no interior de um 1-simplexo de  $X$  (i.e., em uma aresta de  $X$ ) temos que, “desdobrando” as duas faces que contêm este 1-simplexo, obtemos um espaço “plano”, veja figura 3.6.

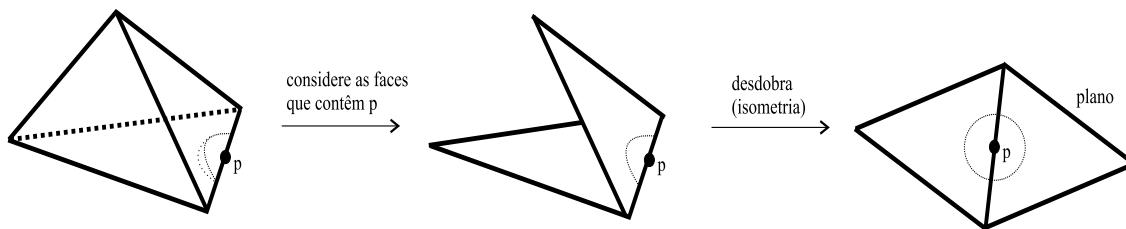


Figura 3.6: Ilustração da isometria de  $B(p, \epsilon)$  com uma bola de  $\mathbb{R}^2$  se  $p$  é uma aresta de  $X$ .

Logo,  $K_p(X) \leq 0$ , se  $p$  não é um vértice.



Finalmente, se  $p$  é um vértice, temos que  $p$  tem uma vizinhança isométrica à vizinhança do vértice de um cone, como no exemplo anterior (talvez com ângulo diferente). Segue que  $K_p(X) = +\infty$ .

**Observação.** Existe uma caracterização de espaços  $CAT(0)$  localmente planos, devido a M.Gromov: Um espaço localmente plano é  $CAT(0)$  se, e somente se, os “links” dos vértices são “grandes” (ver [6]).

A proposição a seguir nos mostra que curvatura limitada superiormente implica a unicidade local de geodésicas.

**3.1.19. Proposição.** *Seja  $X$  um espaço  $CAT(k)$ . Sejam  $x, y \in X$  com  $d(x, y) < D_k$ . Então existe um único segmento geodésico ligando  $x$  a  $y$ . Este segmento geodésico varia continuamente com  $x$  e  $y$ .*

**Prova.** Ver [2], página 160.

**3.1.20. Observação.** Segue da proposição que as bolas em  $X$ , de raio menor do que  $D_k$ , são contráteis.

**3.1.21. Corolário.** *Seja  $(X, d)$  um espaço geodésico compacto com  $K(X) < \infty$ . Então, existe  $\eta(X) > 0$  tal que  $d(x, y) < \eta(X)$  implica que existe uma geodésica minimizante  $c_{xy}$  ligando  $x$  a  $y$ . Mais ainda,  $c_{xy}$  é contínua em  $x$  e  $y$ .*

## 3.2 O Teorema de Lyusternik e Fet para Espaços Geodésicos

Como dissemos na introdução deste capítulo, nesta seção apresentaremos as modificações e adaptações dos conceitos usados nos capítulos 1 e 2, para o caso de espaços geodésicos. A maioria dos resultados dos capítulos anteriores valem neste contexto mais geral e as provas são inteiramente análogas, salvo algumas excessões.

**3.2.1. Definição.** Seja  $X$  um espaço geodésico. Uma curva poligonal em  $X$  é uma aplicação contínua  $c : [a, b] \rightarrow X$  para a qual existe uma partição  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = b$  do intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , tal que  $c|_{[t_i, t_{i+1}]}$  é uma geodésica,  $i = 0, \dots, k$ .

Definiremos a seguir, o espaço que fará o papel do espaço  $PM$  usado nos capítulos 1 e 2.

**3.2.2. Definição.** Seja  $X$  um espaço geodésico. Denotaremos por  $\mathcal{P}X$  o subespaço de  $C^0(S, X)$  formado pelas curvas fechadas poligonais.

Como antes, estamos considerando  $C^0(S, X)$  com a métrica da convergência uniforme (ver capítulo 1, página 6).

O comprimento  $L$  e a energia  $E$ , para uma curva poligonal  $c : [a, b] \rightarrow X$  (não necessariamente fechada) são dados por:

$$L(c) = \sum_{i=0}^k \lambda_i(t_{i+1} - t_i) \quad e \quad E(c) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^k \lambda_i^2(t_{i+1} - t_i),$$

onde  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = b$  é uma partição do intervalo  $[a, b]$  e  $\lambda_i$  é a velocidade da geodésica  $c|_{[t_i, t_{i+1}]}$ .

No intervalo  $[0, 1]$  vale a seguinte desigualdade:  $L(c) \leq \sqrt{2E(c)}$ , com igualdade se,

e somente se,  $c$  está parametrizada proporcionalmente ao comprimento de arco, isto é,  $L(c|_{[0,t]}) = t L(c)$ . De fato,

$$\begin{aligned}
(L(c))^2 &= \langle (\lambda_0 \sqrt{t_1 - t_0}, \dots, \lambda_k \sqrt{t_{k+1} - t_k}), (\sqrt{t_1 - t_0}, \dots, \sqrt{t_{k+1} - t_k}) \rangle^2 \\
&\leq |(\lambda_0 \sqrt{t_1 - t_0}, \dots, \lambda_k \sqrt{t_{k+1} - t_k})|^2 |(\sqrt{t_1 - t_0}, \dots, \sqrt{t_{k+1} - t_k})|^2 \\
&= \left( \sum_{i=0}^k \lambda_i^2 (t_{i+1} - t_i) \right) \left( \sum_{i=0}^k (t_{i+1} - t_i) \right) \\
&= \left( \sum_{i=0}^k \lambda_i^2 (t_{i+1} - t_i) \right) \\
&= 2E(c).
\end{aligned}$$

O caso da igualdade, verifica-se de modo análogo ao caso riemanniano (ver página 7).

**3.2.3. Observação.** As funções  $L$  e  $E$  assim definidas, ainda satisfazem a observação 1.1.2.

**3.2.4. Definição.**  $\mathcal{P}^k X := \{c \in \mathcal{P}X; E(c) \leq k\}$ . Observe que  $\mathcal{P}^0 X \simeq_{TOP} X$  (mesmo argumento do capítulo 1, página 8).

O corolário 3.1.21 nos fornece um número positivo  $\eta(X)$  que faz o papel de  $\eta_M$ , para uma variedade riemanniana  $M$ , como nos capítulos 1 e 2. O mesmo corolário ainda substitui a observação 1.1.6.

**Notação.** Como nos capítulos anteriores, denotaremos por  $c_{xy}$  a geodésica minimizante  $c_{xy} : [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $c_{xy}(0) = x$  e  $c_{xy}(1) = y$ , e  $c_{xy}|_{[a,b]}$  a geodésica minimizante de  $x$  a  $y$  definida em  $[a, b]$ .

Ainda temos  $L(c_{xy}) \leq L(c)$  e  $E(c_{xy}) \leq E(c)$ , com igualdade se, e somente se,  $c_{xy} = c$ , onde  $c : [0, 1] \rightarrow X$  é tal que  $c(0) = x$  e  $c(1) = y$ .

Seguem de maneira inteiramente análoga as observações 1.1.7 e 1.1.8, o lema 1.1.9 e a proposição 1.1.10 para um espaço geodésico compacto com  $K(X) < \infty$ , visto que usamos essencialmente a observação 1.1.6 (que aqui segue da condição  $K(X) < \infty$ ), topologia geral e a compacidade de  $M$ .

Apresentaremos agora a versão para espaços geodésicos da proposição 1.2.1.

**3.2.5. Proposição.** *Seja  $X$  um espaço geodésico compacto, conexo, não contrátil e com  $K(X) < \infty$ . Então existe  $n \geq 1$ , tal que  $\pi_n(X) \neq 0$ .*

**Observação 1.** Se  $K(X) < \infty$  então,  $X$  é conexo se, e somente se,  $X$  é conexo por caminhos. A prova é análoga ao caso de variedades. Assim, se  $X$  é conexo,  $\pi_n(X)$  está bem definido, salvo isomorfismo (i.e., a classe de isomorfismo de  $\pi_n(X, x_0)$  não depende de  $x_0 \in X$ ).

**Observação 2.** Se  $X$  não for conexo, a conclusão da proposição ainda vale, mas o inteiro  $n$  depende da componente conexa.

**Prova.** (da proposição 3.2.5.) Como  $X$  é compacto e  $K(X) < \infty$ , temos que  $X$  é homotopicamente equivalente a um complexo  $CW$  finito (ver [2], página 209). Logo, se  $\pi_n(X) = 0$ , para todo  $n \geq 1$ , o teorema de Whitehead implica que  $X$  é contrátil (ver [8], página 346).  $\square$

A construção após a proposição 1.2.1 é exatamente a mesma com  $X$  ao invés de  $M$ . Com excessão de (iii), a proposição 1.2.2 também vale.

Na prova do teorema de Lyusternik e Fet, usamos (iii) de 1.2.2 para garantir que dada uma aplicação diferenciável  $f$ , vale que  $\mathcal{F}(f)(D^n) \subset PM$ . Para o caso de um espaço

geodésico  $X$ , queremos garantir que  $\mathcal{F}(f)(D^n) \subset \mathcal{P}X$ , o que nem sempre vale.

Enunciemos e provemos agora um lema que contorna este problema.

**3.2.6. Lema.** *Seja  $X$  um espaço geodésico com  $K(X) < \infty$ . Sejam  $Y$  um espaço métrico compacto,  $A \subset Y$  e  $F : (Y, A) \rightarrow (C^0(S, X), X)$  uma aplicação contínua. Então existe homotopia  $F_t : (Y, A) \rightarrow (C^0(S, X), X)$  tal que  $F_0 = F$ ,  $F_1 : (Y, A) \rightarrow (\mathcal{P}X, X)$ .*

**Prova.** Associamos a  $F$  uma aplicação contínua

$$\begin{aligned} \hat{F} : Y \times S &\rightarrow X \\ (y, t) &\mapsto F(y)(t). \end{aligned}$$

Como  $F$  é contínua,  $\hat{F}$  é contínua (ver [11], página 218) e, como  $Y$  e  $S$  são compactos,  $Y \times S$  é compacto, logo  $\hat{F}$  é uniformemente contínua, donde para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $d_{Y \times S}((y, t), (y', t')) < \delta$ , implica  $d_X(\hat{F}(y, t), \hat{F}(y', t')) < \epsilon$ .

Tomando  $y = y'$  e  $\epsilon = \frac{\eta(X)}{2}$ , temos que existe  $\delta > 0$  ( $\delta$  não depende de  $y$ ) tal que  $|t - t'| < \delta$  implica

$$d_X\left(F(y)(t), F(y)(t')\right) < \frac{\eta(X)}{2}.$$

Logo, para cada curva  $F(y)$  existe uma única geodésica minimizante ligando  $F(y)(t)$  a  $F(y)(t')$ ,  $|t - t'| < \delta$ . Subdividimos o intervalo  $[0, 1]$  em sub-intervalos  $[t_i, t_{i+1}]$  de comprimento menor que  $\delta$ . Em seguida, aplicamos a  $c$  uma deformação análoga à deformação  $\mathcal{D}_\sigma$  do capítulo 2, página 22,  $\sigma \in [0, 1]$ . Observe que  $\mathcal{D}_1(F(y)) \in \mathcal{P}X$ , para todo  $y \in Y$ .

Agora definimos, para  $\sigma \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} F_\sigma : (Y, A) &\rightarrow (C^0(S, X), X) \\ y &\mapsto \mathcal{D}_\sigma(F(y)). \end{aligned}$$

Observe que  $\mathcal{D}_\sigma(A) \subset X$ , para todo  $\sigma \in [0, 1]$ .

Temos que  $F_1(Y) = \mathcal{D}_1 F(y) \in \mathcal{P}X$  e  $F_0(Y) = \mathcal{D}_0 F(y) = F(y)$ . A prova da continuidade de  $(y, \sigma) \mapsto F_\sigma(y) = \mathcal{D}_\sigma(F(y))$  é análoga à prova da proposição 1.2.5.

Portanto  $F \simeq F_1$  e  $F_1 : (Y, A) \rightarrow (\mathcal{P}X, X)$ .  $\square$

**3.2.7. Observação.** A condição  $K(X) < \infty$  é usada na prova de forma essencial para a construção da deformação  $\mathcal{D}_\sigma$  e para a prova da continuidade de  $(y, \sigma) \mapsto \mathcal{D}_\sigma(F(y))$ .

O lema 2.1.1 é reformulado da seguinte forma.

**3.2.8. Lema.** *Seja  $X$  um espaço geodésico compacto, com  $K(X) < \infty$ , e seja  $\eta(X) > 0$  como no corolário 3.1.21. Fixe  $k > 0$  e escolha um inteiro par  $x > 0$  com  $4k/x \leq \eta(X)^2/4$ . Para todo  $c \in \mathcal{P}^k X$  e todo  $t, t' \in [0, 1]$ , com  $|t - t'| \leq 2/x$ , temos  $d(c(t), c(t')) \leq \eta(X)/2$ .*

**Prova.** Inteiramente análoga à prova do lema 2.1.1.  $\square$

A construção da deformação  $\mathcal{D}$  e suas propriedades estendem-se naturalmente (com os respectivos ajustes) para o caso de espaços geodésicos. Observe que  $\mathcal{D}(\mathcal{P}^{\parallel} X) \subset \mathcal{P}^{\parallel} X$ .

Finalmente estamos prontos para provar o teorema de Lyusternik e Fet para espaços geodésicos.

**3.2.9. Teorema (Lyusternik e Fet para espaços geodésicos).** *Seja  $X$  um espaço geodésico compacto, não contrátil, com curvatura limitada superiormente. Então  $X$  possui uma geodésica fechada.*

**Prova.** Suponha que  $X$  é conexo. Pela proposição 3.2.5 existe um inteiro  $n \geq 0$  e uma aplicação contínua  $f : \mathbb{S}^{n+1} \rightarrow X$  que não é homotópica a uma aplicação constante. Considere a aplicação

$$F := \mathcal{F}(f) : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (C^0(S, X), X),$$

onde  $\mathcal{F}$  é a aplicação definida no final do capítulo 1. Pelo lema 3.2.6 (fazendo  $Y = D^n$ ,  $A = \partial D^n$ ) temos que existe homotopia

$$F_t : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (C^0(S, X), X)$$

tal que  $F_0 = F$ ,  $F_1 = F' : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (\mathcal{P}X, X)$ .

Definimos

$$k_0 = \inf_{G \simeq F'} \{ \sup_{p \in D^n} E(G(p)) \},$$

onde o ínfimo é tomado no conjunto das aplicações  $G : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (\mathcal{P}X, X)$ , com  $G \simeq F'$ .

Usando um argumento análogo ao da prova no caso riemanniano (quando supomos  $k_0 = 0$ ) obtemos que existe homotopia

$$\overline{F}_t : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (\mathcal{P}X, X),$$

com  $\overline{F}_0 = F'$ ,  $\overline{F}_1 = \text{constante}$ . Composto as homotopias  $F_t$  e  $\overline{F}_t$  obtemos outra homotopia

$$\widetilde{F}_t : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (C^0(S, X), X)$$

com  $\widetilde{F}_0 = F$ ,  $\widetilde{F}_1 = \text{constante}$ .

O resto da prova é inteiramente análoga à prova do teorema de Lyusternik e Fet no capítulo 2.  $\square$

# Bibliografia

- [1] Ballmann, W., *Lectures on Spaces of Nonpositive Curvature*, Birkhäuser Verlag, Germany (1995).
- [2] Bridson, M.R. e Haefliger, A., *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Springer, Geneva (1999).
- [3] Carmo, M. do , *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro (1988).
- [4] Carmo, M. do , *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, New Jersey (1976).
- [5] Cheeger, J. e Ebin, D., *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1975).
- [6] Gromov, M., *Hyperbolic Groups, Essays in Group Theory*, Springer Verlag, MSRI Publ. 8 (1987).
- [7] Hatcher, A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002).
- [8] Kirby, R. e Siebenmann, L., *Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothings and Triangulations* Annals of Math. Studies, n.88, Princeton University Press, New Jersey (1977).
- [9] Klingenberg, W., *Lectures on Closed Geodesics* , Springer-Verlag, New York (1978).
- [10] Klingenberg, W., *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, New York (1982).



- [11] Lima, E.L., *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro (1993).
- [12] Lyusternik, L., *The Topology of the Calculus of Variations in the Large*, American Mathematical Society, Vol. 16, Providence, Rhode Island (1966).
- [13] Lyusternik, L. e Schnirelmann, L., *Sur le Problème de Trois Géodésiques Fermées sur les Surfaces de Genre 0*, C.R. Acad. Sci. Paris 189,269-271 (1929).
- [14] Munkres, J.R., *Topology A First Course*, Prentice Hall, New Jersey (1975).