

# Derivações e a Conjectura de Zariski–Lipman

CLETO BRASILEIRO MIRANDA NETO

Dissertação para obtenção do título de Mestre  
pelo Departamento de Matemática da UFPe.  
Orientador: ARON SIMIS

# Agradecimentos

Gostaria de registrar minha gratidão a todos que me ajudaram no decorrer do mestrado. No ambiente acadêmico, não poderia deixar de agradecer:

- Ao meu orientador, prof. Aron Simis, por tantos ensinamentos (principalmente sobre dedicação e profissionalismo);
- Aos professores Israel Vainsencher (orgulho-me por conhecê-lo desde 97.2, quando fiz minha primeira disciplina na Matemática) e Paulo Brumatti (UNICAMP), por terem aceito fazer parte da Banca Examinadora;
- Aos professores Francisco Brito e Paulo Santiago, pelas dicas de Latex e outros socorros...
- A todos os meus amigos e colegas do departamento (e são muitos!), pelo companheirismo e por tantos momentos alegres;
- Aos funcionários do DMAT, em especial Tânia e Oscar, pela eficiência e boa-vontade com que dissolveram certos empecilhos burocráticos e técnicos (respectivamente) que surgiram no meu caminho;
- Ao CNPq, pelo indispensável suporte financeiro.

◇ Sou extremamente grato à minha família, pelo carinho e apoio constantes (e por tantas coisas mais...). Devo muito aos meus pais queridos Fernando e Rejane (a eles dedico este trabalho, com todo orgulho do mundo) e aos irmãos Nando e João, avós Lygia e Lúcia, tios, primos e amigos, sem os quais minha vida, certamente, não seria a mesma.

## RESUMO

A conjectura de Zariski-Lipman diz que se uma álgebra reduzida e finitamente gerada (sobre um corpo de característica zero) possui módulo de derivações localmente livre, então ela é localmente regular. Este enunciado foi demonstrado positivamente em muitos casos, exceto em alguns casos bidimensionais, onde a conjectura ainda resiste. Na parte principal deste trabalho o caso graduado é abordado, isto é, a álgebra citada acima é graduada e seu módulo de derivações é localmente livre no ideal maximal irrelevante. Antes de alcançar a conjectura nesta situação, três capítulos de ferramentas preliminares são dados tratando de derivações (que são a contrapartida algébrica para os vetores tangentes), diferenciais de Kahler e as correspondentes sequências exatas fundamentais, bem como duas versões do útil e conhecido Critério Jacobiano, que estabelece regularidade sob certas condições concretas. Finalmente o quarto (e último) capítulo da tese é dedicado ao detalhamento de cada argumento usado na prova da conjectura de Zariski-Lipman no caso graduado, cujos passos em algumas situações requerem conhecimento básico de Geometria Algébrica e sua linguagem. A referência fundamental é o artigo original do influente algebrista M.Hochster, com título *The Zariski-Lipman conjecture in the graded case* (Journal of Algebra 47 (1977), 411-424).

## ABSTRACT

The Zariski-Lipman conjecture says that if a reduced and finitely generated algebra (over a field of characteristic zero) has locally free module of derivations, then it is locally regular. This statement has been positively demonstrated in many cases, except in some bidimensional cases, where the conjecture still resists. In the main part of this work the graded case is aborded, that is, the algebra quoted above is graded and its module of derivations is locally free at the irrelevant maximal ideal. Before reaching the conjecture in this situation, three chapters of preliminary tools are given concerning derivations (which are the algebraic counterpart for the tangent vectors), Kahler differentials and the corresponding fundamental exact sequences, as well as two versions of the useful and well-known Jacobian Criterion, which stablishes regularity under certain concrete conditions. Finally the fourth (and last) chapter of the thesis is devoted to the detailment of each argument used in the proof of the Zariski-Lipman conjecture in the graded case, whose steps in some situations require basic knowledge of Algebraic Geometry and its language. The fundamental reference is the original paper of the influent algebrist M.Hochster, with title *The Zariski-Lipman conjecture in the graded case* (Journal of Algebra 47 (1977), 411-424).

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Derivações e Diferenciais de Kähler</b>	<b>5</b>
1.1	Derivações . . . . .	5
1.2	O Módulo das Diferenciais de Kähler . . . . .	7
<b>2</b>	<b>As Seqüências Exatas Fundamentais</b>	<b>12</b>
2.1	A Primeira Seqüência Exata Fundamental . . . . .	12
2.2	A Segunda Seqüência Exata Fundamental . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Critério Jacobiano e Regularidade</b>	<b>17</b>
3.1	Critério Jacobiano: Primeira Versão . . . . .	17
3.2	Critério Jacobiano: Segunda Versão . . . . .	20
<b>4</b>	<b>A Conjectura de Zariski-Lipman no Caso Graduado</b>	<b>25</b>