Mestrado
Engenharia de Produção

Estudo Sobre A Edução Da Utilidade E Do Conhecimento *A Priori*

Aluna: Alessandra Berenguer de Moraes

Orientador: Fernando Menezes Campello de Souza, PhD

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção

Recife - Pernambuco

Janeiro/2003

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

Estudo Sobre a Edução da Utilidade e do Conhecimento *A Priori*

Elaborada por: Alessandra Berenguer de Moraes

Orientada por: Fernando Menezes Campello de Souza (PhD)

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Adiel Teixeira de Almeida, (PhD - UFPE)

Prof. Fernando Menezes Campello de Souza, (PhD - UFPE)

Prof. Alexandre Stamford da Silva, (Doutor - UFPE)

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

Recife - Pernambuco

Janeiro/2003

"Esta dissertação é dedicada ao meu adorado filho:

Matheus Milano de Moraes e ao meu amor Décio Milano de Souza Jr."

Agradecimentos

A Deus, que em todos os momentos de minha vida está presente, guiando-me com sua luz divina; por permitir que tudo isso pudesse ocorrer, por tudo que ele me proporciona, e pelo maior presente da minha vida, meu filho Matheus Milano de Moraes.

Agradeço também por me proporcionar conhecer pessoas tão maravilhosas neste período de grande importância e em todas as etapas da minha vida, pois indigno seria se atribuísse ao acaso ou apenas aos meus esforços todos os acontecimentos.

Agradeço à vida pela existência dos meus amigos, pessoas de extrema importância sem os quais a vida não teria o menor sentido. Em especial aos meus amigos: Alane Alves, pessoa de sorriso contagiante e cheia de vida, Diogo de Carvalho que com sua determinação mostrou-me que a todo momento é preciso ter força, é preciso ter garra, é preciso ter fé!, e a Joel de Jesus por toda boa vontade.

Agradeço a todos os professores, por assumirem a difícil tarefa de transmitir o conhecimento, em especial ao professor Fernando Menezes Campello de Souza, pessoa de grande brilho a quem muito estimo, por toda paciência e dedicação; sendo essas as únicas coisas que não puderam ser mensuradas neste trabalho.

Agradeço à toda minha família por todo amor dedicado a mim e a meu filho, em especial a Décio Milano de Souza Júnior e Matheus Milano de Moraes, por terem tentado de todas as maneiras superar a minha ausência.

Amo Vocês!

Resumo

O presente trabalho, traz o estudo feito sobre a edução das preferências e do conhecimento *a priori* do especialista, sendo estes aspectos fundamentais para o desenvolvimento da teoria da decisão. Usou-se vários métodos para a edução da função utilidade, tanto para o caso unidimencional como para o caso multiatributo, e foram feitas as comparações, com os resultados encontrados pelos diferentes métodos. Apresentou-se a formulação proposta por Fernando M. Campello de Souza , para edução da função utilidade e do conhecimento *a priori* do especialista. E o modelo proposto por Peter Walley (1996), fazendo uso do modelo impreciso de Dirichlet.

Abstract

The present work, brings the study made on the elicitation of the preferences and the *a priori* knowledge of the specialist, being these basic aspects for the development of the decision theory . One used some methods for the elicitation of the utility function, as much for the unidimencional case as for the case multiattribute, and had been made the comparisons, with the results found for the different methods. It was presented Fernando M. Campello de Souza's formularization proposal , for elicitation of the utility function and the *a priori* knowledge of the specialist and it was considered Peter Walley's model (1996), making use of the inexact model of Dirichlet

Lista de Figuras

2.1 Utilidade do Eduzido-1 28

2.2 Utilidade do Eduzido-2 29

2.3 Utilidade Estimada do Eduzido-1 29

2.4 Utilidade do Eduzido-1 e do Eduzido-2 33

2.5 Utilidade do Eduzido-1 e do Eduzido-2 39

2.6 Utilidade do Emprego. 48

Lista de Tabelas

2.1 Primeiro Questionário. 25

2.2 Sumário das Regressões. 29

2.3 Regressão não linear nos parâmetros. 30

2.4 Segundo Questionário. 31

2.5 Sumário da Regressão. 36

2.6 Segundo Questionário. 37

2.7 Utilidade dos Jogos. 39

2.8 Vetor dos Multiatributos. 45

2.9 Questionário de Edução Multiatributo. 46

2.10 Utilidade do Emprego 47

2.11 Sumário das Regressões. 48

3.1 Valores dos Parâmetros Estimados 60

3.2 Probabilidades Superiores e Inferiores 61

3.3 Questionário Para Edução do Conhecimento *a Priori* 66

Sumário

Agradecimentos **I**

Resumo **II**

Abstract **III**

Lista de Figuras **IV**

Tabelas **V**

1 INTRODUÇÃO **1**

1.1 Objetivos 1

1.1.1 Objetivos Gerais 1

1.1.2 Objetivos Específicos 1

1.2 Antecedentes Históricos 2

1.3 Teoria da Decisão 6

1.4 Risco 7

1.5 Incerteza 7

1.6 Chance 8

1.7 Referencial Teórico 8

1.8 Estruturação Matemática 10

1.9 A Edução das Preferências 13

1.10 A Edução do Conhecimento *A Priori* 14

1.11 Estruturação da Dissertação 15

2 A EDUÇÃO DA PREFERÊNCIA **17**
2.1 Introdução 17
2.2 A Psicologia do Risco 17
2.3 Teoria da Utilidade 19
2.4 A Função Utilidade 21
2.5 A Edução da Função Utilidade 22
2.5.1 Os Métodos de Edução 23
2.6 Método das faixas superpostas 24
2.6.1 Resultado da Edução da Função Utilidade pelo Método das Faixas Superpostas 27
2.7 Método da Programação Linear 30
2.7.1 Resultado da Aplicação do Protocolo de Edução 31
2.8 Modelos Probabilísticos de Escolha - Usando programação não linear 33
2.9 O Procedimento de Estimação 35
2.9.1 A Construção do Questionário 36
2.10 Modelos Markovianos de Preferência 37
2.11 O Problema de Valor Multiatributo 40
2.12 Edução de Utilidade Multiatributo 41
2.12.1 Qual o Melhor Emprego? 41
2.12.2 Um Conjunto de Atributos para a Escolha de Um Emprego 43
2.13 Resultado da Edução da Utilidade do Emprego 46
2.14 Imprecisão e Vagueza 49
2.15 Vantagens e Desvantagens 50
2.16 Conclusões 51

3 A EDUÇÃO DO CONHECIMENTO *A PRIORI* **52**
3.1 Introdução 52
3.2 O Estado da Arte 53
3.3 Edução do Conhecimento *a Priori* 54

3.3.1 O Experimento 54
3.3.2 Os Resultados do Experimento 56
3.3.3 O Modelo Impreciso de Walley 57
3.3.4 Obtenção da Distribuição $\pi(\theta|x)$ pelo Método de Campello de Souza (2002) 61
3.4 Conclusão 65

4 CONCLUSÕES, COMENTÁRIOS E SUGESTÕES 67

4.1 Conclusões 67
4.2 Sugestões Para Trabalhos Futuros 68
4.3 Comentário final 68

Referências Bibliográficas 69

1 INTRODUÇÃO

"Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre"[1]

P.S.Laplace, Traité des probabilités (1820).

Esta dissertação envolve aspectos práticos e teóricos relacionados ao estudo da edução da função utilidade e do conhecimento *a priori* do especialista com o objetivo de obter informações que auxiliem a tomada de decisões. Realizou-se a edução da função utilidade nos casos unidimensional e multidimensional, onde apresenta-se três métodos distintos de edução; para os estudos da educão do conhecimento *a priori* fez-se a comparação entre o método apresentado por Fernando M. Campello de Souza e o modelo impreciso de Dirichlet-IDM.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivos Gerais

- Estabelecer uma sistemática de edução das preferências;
- Estabelecer uma sistemática para eduzir o conhecimento *a priori* do especialista.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Aplicar o protocolo para edução da utilidade e do conhecimento *a priori*;
- Eduzir a função utilidade para o dinheiro;
- Fazer comparações com os resultados obtidos com o método proposto por Peter Walley (1996);
- Realizar a edução da função utilidade para o emprego, considerando multiatributos;

[1] "Devemos encarar o estado presente do universo como o efeito de seu estado antecedente e como a causa de seu estado posterior"

1.2 Antecedentes Históricos

A necessidade de se tomar decisões sobre situações de incerteza levou ao desenvolvimento da teoria das probabilidades; o raciocínio desenvolvido em torno desta teoria é um dos aspectos mais importantes e marcantes da ciência moderna; a sua utilidade é indiscutível e praticamente ilimitada.

A teoria oferece a capacidade de poder considerar situações nas quais não se tem informações suficientes completas, que permitam a aplicação do raciocínio lógico clássico; mesmo assim ela é capaz de indicar a melhor alternativa a ser tomada e que possa ser justificada pela evidência incompleta disponível. Por exemplo no lançamento de uma moeda pode ocorrer o resultado cara ou coroa. Neste caso a informação está completa; não se tem dúvidas sobre os possíveis resultados; no entanto o que se deseja é saber as causas que levaram ao resultado do lançamento. O resultado não é questionável, as causas é que o são. Um caso de informação não precisa é o sintoma da febre. Existem muitas patologias que podem estar associadas a este sintoma, porém não se tem dúvidas a respeito da febre, o dado a respeito da febre é completo e indiscutível, mas a febre é uma informação insuficiente e incompleta que não determina uma etiologia. É por isso que se diz que a febre é inespecífica.

> "O raciocínio probabilístico não substitui o raciocínio lógico clássico, ele o suplementa. Em muitos problemas práticos e sérios, o único tipo de pensamento realista é o pensamento probabilístico".Campello de Souza (2003).

Existe uma distância razoável entre dado e informação. Um dado puro não existe, porém pode-se dizer que o menor *input* sem nenhum tipo de manipulação é um "dado puro".

Muitas vezes, a única forma de tratar um problema de decisão com seriedade é aplicando a teoria das probabilidades, no mais, tem-se apenas um discurso superficial; sem resultados expressívos. Naturalmente, a utilização de pouca matemática, requer explicações puramente verbalizadas que buscam minimizar as inevitáveis imprecisões e dificuldades de compreensão. Estas explicações podem até dar uma boa visão do problema, no entanto, sem a matemática não se vai muito longe. É muito importante ressaltar que a teoria matemática desenvolvida para o problema, ou seja, os modelos desenvolvidos, não descrevem, na integra, o "mundo real". Eles buscam se ajustar da melhor maneira possível, uma vez que eles funcionam muito bem para as leis desenvolvidas, no entanto não existem leis que descrevam de forma completa um sistema do universo, porém muitos deles funcionam tão bem que sua utilização como forma de representação de fenômenos da natureza são incontestáveis. Em física, são muitos os exemplos: a lei de Hooke, a lei de Ohm, as leis de Newton, a lei de queda livre dos corpos (Galileo Galilei), etc. Uma maior explanação sobre modelos pode ser vista em Campello de Souza (2002)(p.104)

Em probabilidade, as situações são muito diferentes. Por exemplo, no lançamento de uma moeda, o resultado poderá ser cara ou coroa e nestes termos, pode-se dizer que um evento de chance é um evento "sem lei". Como pode, então, existir leis para a chance? A resposta está em que a atitude mental nos fenômenos envolvendo chance deve ser outra. Vários pensadores do passado e da atualidade desenvolveram estudos de grande relevância em probabilidade. Pode-se citar: Cardano, Tartaglia e Peverone, Galileo Galilei, Pascal e Fermat, Huygens, John Graunt, Leibniz, Montmort, Nicholas Bernoulli, James Bernoulli, Bayes, Gauss, Laplace, Maxwell, Boltzmann, Galton, Chebyshev, Liapunov, Markov, Kolmogorov, Fine, Walley, Campello de Souza, entre outros, que contribuiram em paralelo para o desenvolvimento das probabilidades.

Os tempos modernos e passados podem se dizer demarcados a partir do domínio do risco. Tendo a noção de que o futuro não é simplesmente um capricho dos deuses, que o destino não se encontra escrito nas estrelas e que o homem não é passivo diante da natureza, ele passou a procurar minimizar o risco. A partir de 1654 surgem as idéias revolucionárias (alvorecer do renascimento), neste ano, Antoine Gombaud, o Chevalier de Meré, nobre francês de talento, que gostava de jogos e matemática, colocou um problema para um outro francês, Blaise Pascal (1623-1662), conhecido, entre outras coisas, como excelente matemático. A questão era como dividir as apostas de um jogo de azar entre dois jogadores, que tivesse sido interrompido quando um deles estivesse ganhando. Na realidade o problema já havia sido proposto por Luca Paccioli em 1494 no seu livro *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalitá* (Veneza). Boas iniciativas de aplicar a nova álgebra aos problemas dos jogos de azar foram desenvolvidas na Itália do século XV.

Os problemas de chance apareceram nos primeiros trabalhos de aritmética voltados para os negócios que se desenvolvia na época. Porém nenhum desses livros resolveu algum problema de chance. O interessante é que após 1660 muita gente conseguiu resolve-los. A matemática das anuidades já existia porém não foi a partir desta que se desenvolveu a probabilidade.

O conceito de probabilidade teve origem nas "baixas ciências", isto é, teve suas origens na astrologia, na alquimia e na medicina que tinham mais a ver com questões da opinião, pois até 1654 não se tinha a necessidade de um conceito matemático de probabilidade já que esta tinha tudo a ver com opinião. A probabilidade apresenta uma natureza dual, por um lado ela é epistemológica, isto é, tem a ver com o suporte que uma evidência dá a uma hipotese. Por outro lado, ela é estatística, isto é, tem a ver com a estabilidade das freqüências relativas.

Pascal, tendo aceitado o desafio do Cavaleiro de Meré, estudou o problema da divisão da quantia em jogo, resolveu não só este problema mas outro que se seguiu. Pascal entrou em contato com Pierre de Fermat (1601-1665), de Toulouse, jurisconsulto *(magistrat; advogado)* e genial matemático, e é a partir daí que se dá inicio à famosa correspondência Pascal-Fermat, correspondência esta de fundamental importância para o início do desenvolvimento de estudos sobre as questões da incerteza (chance, probabilidade, risco, esperança, ganho, perda, etc.). A solução determina que cada jogador receba uma quantidade mínima correspondente a seus pontos; a soma restante deverá ser dividida igualmente com os dois jogadores. Fermat e Pascal chegaram ao mesmo resultado e o que é melhor, por caminhos diferentes. Fermat usa análise combinatória e Pascal um raciocínio por recorrência. Pascal nasceu em 1623 e a partir de 1635 seu pai costumava levá-lo à casa do Abade Mersenne (Marin Mersenne; filósofo e matemático), onde foi fundada a Academia de Ciências. Lá ele conheceu matemáticos como Roberval, Gassendi, Mydorne e Desargues (este último o incentivou para realização do seu primeiro trabalho: *Essai sur les coniques (1640))*. Surgiu então a teoria das probabilidades, e o desenvolvimento matemático do conceito de risco.

Quando Huygens (1657) publicou seu primeiro livro de probabilidade *(Christian Huygens, 1657, De Ratiociniis in ludo Aleae)*, ele introduziu o conceito de valor esperado (média estatística). Nesta mesma época Pascal fazia as primeiras aplicações de probabilidade a problemas que não os jogos de azar. Foi neste processo de aplicação do raciocínio probabilístico que surge a teoria da decisão. (vide Berger (1985), Ferguson (1967), Campello de Souza (2002)).,,

Aproximadamente cem anos depois de iniciada a correspondência Pascal-Fermat surgiu o importante trabalho: Thomas Bayes (1763), *An Essay Towards Solving in the Doctrine of Chances.* Neste trabalho Bayes combina dois corpos de evidência para obter um refinamento da informação. O mais interessante é o caso onde se combina um corpo de evidência epistêmico (probabilidade *a priori*); com um freqüentista (dados, freqüência relativa, chance, resultados de exames complementares, função de verossimilhança, etc.), para chegar a uma probabilidade *a posteriori*.

A idéia de usar a função utilidade para medir o valor que um indivíduo atribui a um bem, teve início em (1738) com um artigo de Daniel Bernoulli. Novas contribuições para o utilitarismo foram dadas por Jeremy Bentham em (1789) que deu contribuições também para a teoria do consumidor.

Após a publicação do artigo de Bernoulli, considerou-se o fato de que o valor atribuído a um bem poderia ser mensurável (e de fato o é), entenda-se aqui o valor no sentido individual que uma pessoa ou grupo de pessoas possam atribuir a um bem, não confundir com o valor atribuído pelo ponto de equilíbrio entre oferta e demanda, nem pelo agregado macro-econômico. Dessa forma surgiu o método de utilidade cardinal como uma abordagem à teoria do consumidor. A escolha de um bem decorre da satisfação que o mesmo traz ao consumidor ao adquiri-lo, ou seja, da utilidade de possuí-lo. No entanto a utilidade total não apresenta um crescimento linear, pois, a partir de uma determinada quantidade, a satisfação já não aumenta com a mesma proporção das primeiras quantidades adquiridas.

A partir de então foi conceituada a utilidade marginal decrescente, ou seja, a taxa de variação (a derivada) da função em relação a quantidade é uma função decrescente com relação à quantidade de bens adquiridos.

No trabalho desenvolvido por Pareto (1927), mostra-se que a teoria do consumidor poderia ser tratada com o uso de curvas de indiferença; tal procedimento é conhecido como o método da utilidade ordinal. Neste caso o conceito de intensidade de preferência por um bem em relação a outro é dispensável. Nesse modelo o consumidor é capaz de escolher entre alternativas que não envolvam riscos, ou seja, o consumidor não enfrenta situações de incerteza, e aplica-se simplesmente o critério de otimização. Uma contribuição fundamental foi dada por von Neumann e Morgenstern (1947). Surge um conceito de utilidade, às vezes chamada de cardinal fraca, que se baseia em determinados axiomas comportamentais aplicáveis a escolhas em situações de risco. Abraham Wald (1950) explorou a relação entre teoria dos jogos e teoria estatística. Desse estudo emergiu a teoria estatística da decisão. Nesta teoria os objetivos do decisor são expressos de forma quantitativa através de uma função utilidade, a que foi formulada por von Neumann e Morgenstern.

A Teoria da decisão busca através da função utilidade no sentido de von Neumann Morgenstern, expressar quantitativamente os objetivos do decisor. Tal utilidade é também conhecida como utilidade cardinal fraca ou utilidade probabilística. Já a utilidade apresentada por Pareto é conhecida como utilidade ordinal, função valor, função preferência ou ainda utilidade marshalliana.

Quando deseja-se quantificar os objetivos, deve-se utilizar a utilidade cardinal.

1.3 Teoria da Decisão

A teoria da decisão estuda o problema de como decidir sobre o que se deve fazer quando é incerto o que pode acontecer. A partir dos possíveis estados da natureza, das observações realizadas ou dados experimentais, das possíveis ações a serem adotadas e dos ganhos ou perdas decorrentes das ações adotadas e do estado da natureza, busca-se determinar o melhor procedimento decisório. Isto é, a regra de decisão que estabeleça a melhor ação a adotar. É importante identificar os mecanismos probabilísticos (epistemológicos ou freqüentistas) que aparecem no contexto dos problemas.

Trata-se de um campo do conhecimento que com o desenvolvimento de técnicas de edução, através de jogos de alternativas, auxilia a tomada de decisão, à luz das possíveis conseqüências das respectivas ações. A teoria da decisão pode aplicar-se em condições de certeza, risco, ou incerteza.

Uma decisão sob certeza significa que cada alternativa conduz a uma e somente uma das conseqüências, e a escolha de uma alternativa está relacionada à uma escolha entre as conseqüências.

Para decisões sob risco, cada alternativa terá diversas conseqüências possíveis, e a probabilidade da ocorrência para cada conseqüência é conhecida. Conseqüentemente, cada alternativa é associada à uma distribuição de probabilidade, e uma escolha entre distribuições de probabilidade. Quando as distribuições de probabilidade não são conhecidas, trata-se da tomada de decisão sob incerteza.

A teoria da decisão busca através das técnicas e procedimentos reconhecer e revelar as preferências do decisor e introduzi-las em modelos de decisão que relacionam os objetivos, as alternativas e suas conseqüências. Dado o conjunto das alternativas, o conjunto das conseqüências e uma correspondência entre os dois conjuntos, a teoria da decisão oferece procedimentos conceituais simples para a escolha. Quando a decisão se dá sob certeza as preferências do decisor são simuladas por uma função utilidade monoatributo ou multiatributo que introduz ordem no conjunto das conseqüências e das alternativas. A teoria da decisão sob risco é baseada no conceito de utilidade.

Para o caso de incerteza, a teoria da decisão oferece dois meios de abordagen. O primeiro explora o critério de escolha no contexto de teoria dos jogos, como por exemplo as regras minimax, onde escolhe-se a alternativa que minimiza a máxima perda. A segunda abordagem reduz o caso da incerteza para um caso de risco pelo uso de probabilidade subjetivas. (Campello de Souza (2002))

1.4 Risco

Em teoria da decisão e em estatística, o risco é o valor esperado da perda, trata-se de um indicador que incorpora a incerteza sobre os resultados. Correspondentemente a análise de risco estuda uma maneira de determinar o resultado da decisão. De outra maneira o risco busca medir o impacto que a ação poderá determinar. Na tomada de decisão sob incerteza a análise de risco tem como objetivo minimizar o risco, para se conseguir o resultado o mais desejado possível, particularmente quando esse resultado é influenciado por fatores externos que não estão totalmente sob o controle do decisor. (ver teoria dos jogos).

1.5 Incerteza

"Esta é a marca indelével do universo".

Campello de Souza.

Na teoria da decisão, existe uma distinção precisa entre uma situação de risco e uma situação de incerteza. Existe o evento aleatório incontrolável inerente em ambas as situações. No entanto a distinção entre estas duas se dá porque na situação de risco o evento aleatório incontrolável vem de uma distribuição de probabilidade conhecida, já numa situação de incerta a distribuição de probabilidade é desconhecida.

1.6 Chance

"Tudo que existe no universo é fruto da Chance e da Necessidade".

Democritus, 460 A.C.

Para que fique claro a idéia de chance, será enunciado um exemplo: considerando uma moeda equilibrada sem nenhuma tendência preponderante, despresando-se possíveis resultados tais como a moeda cair em pé ou numa fenda, (as condições do experimento podem ser controladas), o grau de chance para os dois resultados é de 50%, isto é, a propensão de o resultado ser cara é o mesma de aparecer coroa.

1.7 Referencial Teórico

Na vida é normal encontrar-se diante de difíceis decisões a serem tomadas onde as conseqüências são muito importantes, e após tomá-las passa-se a aguardar ansiosamente por seus resultados. Tais situações ocorrem freqüentemente, quer seja na vida pessoal ou em situações profissionais; diariamente juízes, médicos, engenheiros, etc. tomam decisões de grande importância e relevantes resultados, e estas não devem ser tomadas arbitrariamente.

A teoria da decisão não surge como uma teoria que venha tentar descrever ou explicar o comportamento das pessoas (ou instituições) ou como elas tomam suas decisões; ela busca organizar de forma lógica parâmetros que possam ajudar na tomada de decisões, face as preferências do agente decisor e ao que se deseja obter.

Partindo da hipótese de que o agente decisor seja capaz de expressar suas preferências, foi desenvolvida uma metodologia que permitiu a resolução de problemas de decisão mais complexos, nos quais o agente decisor mantém suas preferências básicas, mas não tem capacidade de manipular apenas intuitivamente a complexidade da situação. Para tanto faz-se necessária uma descrição completa da situação para que se possa formular um problema de decisão, compreendendo as seguintes informações:

- as possíveis ações a serem tomadas: o espaço das ações;
- as possíveis conseqüências: o espaço das conseqüências;
- os possíveis estados da natureza; o espaço dos estados da natureza;
- os julgamentos probabilísticos a respeito da ocorrência dos possíveis eventos.

A teoria da decisão é um meio de se agir com lógica em situações incertas. E, segundo esta teoria, uma boa decisão deverá ser uma função lógica daquilo que se quer, daquilo que se sabe e daquilo que se pode fazer, segundo Campello de Souza (2002).

- **O que se quer** — diz respeito às preferências que se tem pelas possíveis conseqüências das decisões;
- **O que se sabe** — é a informação que é trazida ao processo de decisão, é o conhecimento dos fatores que estão envolvidos no processo;
- **O que se pode fazer** — são as possíveis alternativas de ações disponíveis ao processo de decisão (essa etapa requer muita criatividade).

De posse dessas informações e com um tratamento matemático adequado foi possível desenvolver a teoria da decisão. Suas aplicações abrangem as mais diversificadas áreas, como por exemplo:

- *reconhecimento de padrões*;
- *reconhecimento de voz, radar, sonar*;
- *engenharia de manutenção*;
- *confiabilidade*;
- *diagnose médica*;
- *políticas de risco*;
- *análise do comportamento do consumidor*;

- *marketing*; entre outros.

Com o uso da teoria da decisão busca-se escolher uma ação ou um curso de ações, de maneira que o retorno para o decisor seja o mais favorável possível.

1.8 Estruturação Matemática

O objetivo principal num problema de teoria da decisão é maximizar o valor esperado da utilidade do decisor, os quais são provenientes das ações adotadas pelo mesmo ou seja, são as conseqüências das suas ações. Para conseguir tal maximização, faz-se necessário levar em consideração as preferências que o decisor tem com relação aos possíveis resultados das ações adotadas por ele. Isto é, precisa-se saber a utilidade (ou desejabilidade) que cada conseqüência traz ao decisor. Por exemplo, na área médica pode ser citado, o que é mais preferível: viver menos porém com uma boa qualidade de vida, ou seja, sem nenhuma restrição física decorrente de algum problema de saúde ou viver por mais tempo porém com seqüelas decorrentes de algum problem de saúde.

Para a formulação de um problema de decisão são necessários alguns construtos matemáticos (Conjuntos, Funções e Mecanismos Probabilísticos).

Os Conjuntos:

1. O Conjuntos dos Bens: $\mathcal{P} = \{p\}$
2. O Conjuntos dos estados da natureza: contém todos os possíveis estados da natureza, θ, denotado por: $\Theta = \{\theta\}$. (θ pode ser escalar ou vetorial, discreto ou contínuo,etc., portanto capaz de representar, sistemas dos mais simples aos mais complexos);
3. O Conjunto das observações sobre os estados da Natureza:denotado por: $\mathcal{X} = \{x\}$; é denominado o espaço das observações;
4. O Conjunto das Ações, denotado por: $\mathcal{A} = \{a\}$ e contém as possíveis ações a serem adotadas.
5. O Conjunto das regras de decisões de uma ação, denotado por $\mathcal{D} = \{d\}$.

A pertinência de tais conjuntos a um problema de decisão, faz com que existam incertezas associadas aos mesmos, essas incertezas serão quantificadas através das respectivas distribuições de probabilidade sobre os conjuntos.

$\Theta^* = \{\pi\}$, é o conjunto de todas as distribuições de probabilidade em θ.

$\mathcal{P}^*=\{P\}$, é o conjunto de todas as distribuições de probabilidade P em $\mathcal{P}$.

$\mathcal{X}^*=\{F\}$, é o conjunto de todas as distribuições de probabilidade das observações.

$\mathcal{D}^*=\{\delta\}$, é o conjunto de todas as distribuições de probabilidade de escolha da decisão d em $\mathcal{D}$.

Para dar tratamento matemático a todos esses conceitos, foram desenvolvidas cinco funções, fortemente dependentes entre si; as quais fornecem ao problema o tratamento adequado das informações e trazem consigo o desenvolvimento da solução e da própria teoria. São elas:

- A Função Utilidade
- A Função Conseqüência
- A Função Perda
- A Função Risco
- A Função Decisão

Um mecanismo probabilístico que deve ser identificado é a função conseqüência. Dado que a natureza encontra-se no estado θ e o decisor adota a ação a, dá-se então a partida a um mecanismo probabilístico que vai determinar uma das possíveis conseqüências dessa ação. Esse mecanismo é representado pela probabilidade condicional $P(p|\theta, a)$ onde p é o ganho (ou perda) que vai-se ter como conseqüência da ação a. As conseqüências de uma ação são geralmente muito complexas e podem envolver várias variáveis distintas entre si ou ainda correlacionadas. Elas podem envolver perda ou ganho de dinheiro, de satisfação, de segurança, orgulho, etc. Algumas dessas conseqüências podem ser realmente avaliadas, outras porém, podem até nunca ser conhecidas pelo decisor, e portanto jamais serem avaliadas.

A combinação das circunstâncias presentes e das leis governantes pode ser referida como o estado da natureza θ. Dado que a natureza se encontra num estado θ, um mecanismo probabilístico deverá gerar as observações x. Este mecanismo é representado pela probabilidade condicional $P(x|\theta)$.

A maior parte das informações necessárias à formulação do problema são de natureza objetiva, mas algumas delas, tais como a preferência do decisor e seus julgamentos probabilísticos sobre os estados do mundo, são essencialmente subjetivos. Essas duas medidas subjetivas serão os principais objetos de estudo deste trabalho.

Uma outra medida subjetiva que deve ser tratada é a do conhecimento do especialista, a qual é expressa por uma distribuição de probabilidade *a priori* $\pi(\theta)$ sobre os estados da natureza $\Theta = \{\theta\}$. Essa medida está relacionada com a experiência de indivíduos em relação ao contexto em que se está trabalhando. Sua natureza é completamente diferente da dos mecanismos freqüentistas. Dessa forma, $\pi(\theta)$ representa o grau de crença que o indivíduo atribui ao estado do mundo (natureza).

A teoria da decisão trata do problema de decisão quando sua conseqüência é incerta. A partir dos possíveis estados da natureza, das observações ou de levantamentos experimentais pertinentes, juntamente com os possíveis recursos de ações a serem adotados, e os respectivos ganhos ou perdas. O melhor curso de ação deve ser adotado a partir das observações.

Entretanto para que fosse possível elaborar um arcabouço matemático, científico, através do qual se estude o problema de decisão, de forma a se construir uma base racional para se tomar decisões, é necessário assumir que as preferências pelas conseqüências possam ser medidas. Daí a utilidade será introduzida para quantificar as preferências entre as várias alternativas ao qual o decisor é apresentado. A teoria da utilidade proposta por von Neumann e Morgenstern (1947) estabelece um meio de quantificar a desejabilidade do decisor com relação aos bens (ou perdas) que poderá obter. A teoria busca garantir uma racionalidade no ordenamento das preferências onde, tal racionalidade, segundo Campello de Souza (2002), será atingida quando:

1. *os objetivos desejados devem ser consistentes, coerentes;*

2. *deve-se agir de forma a atingir os objetivos, respeitadas as restrições de éticas e morais.*

1.9 A Edução das Preferências

A edução das preferências tem muito a ver com a introspecção do indivíduo com relação aos objetos. Não deixa de ser um reflexo de sua crença a respeito das coisas e portanto esse aspecto não pode ser deixado de lado, quando se busca medir a preferência. Isto é um ponto que vem sendo estudado inclusive pela psicologia e é motivo de muitas pesquisas. Grande parte das críticas que são feitas à teoria da decisão se dá exatamente com respeito à essa medição das preferências. Se o processo de edução, porém, for sistematizado, muitas destas críticas perderão a razão de ser. Por isso, como respostas a essas críticas, tem-se um grande espaço para se desenvolver melhorias quanto aos processos de edução.

A edução das preferências pode se tornar bastante complexa e isto depende entre outras coisas, muito, do número de atributos a serem avaliados. Suponha-se por exemplo, a decisão de comprar um apartamento quando se dispõe de até $R\$100.000,00$. Vários aspectos podem ser levados em consideração: localização, número de quartos e/ou suites, área construída, acabamento, etc.; por isso existe a engenharia das avaliações. Alguns destes aspectos podem estar diretamente relacionados entre si, outros não. O que se deve fazer é aglomerar os atributos que estejam relacionados, com a finalidade de minimizar o número de atributos a serem considerados, para se otimizar o problema dos *tradeoffs*. Outras situações complexas tais como a decisão da compra de um automóvel, da construção de um aeroporto ou de uma usina nuclear, são coisas realmente de grande significância. Outros exemplos porém, podem ser bastante simples e tratar de escolha tais como, decidir os sabores de um sorvete, a cor de uma blusa, ou qualquer coisa corriqueira. No entanto quando se tem uma decisão mais importante necessita-se de uma elaboração que não seja superficial. No dia-a-dia tem-se usado muito o "bom senso", o "sentimento" de engenheiro, a "sensibilidade" do médico, a "experiência" do especialista, o "tino administrativo" do gerente, etc. Mas numa grande gama de situações, no entanto, esta informalidade tem-se mostrado inconveniente, ineficaz e ineficiente.

Muito embora exista uma certa literatura sobre a teoria da utilidade, que vai desde os livros de teoria da decisão de von Newmann-Morgenstern, Wald, Luce e Raiffa) até a literatura que trata das aplicações de teoria da decisão e em particular da teoria da utilidade: Berger, Keeney-Raiffa, Campello de Souza, a questão da edução foi pouco tratada, o que abriu espaço, naturalmente, ao grande número de críticas à esta teoria. A teoria econômica tem como elemento central a noção de utilidade. Leia o que escreve Morgenstern (1979),

> *"É um dos maiores prazeres da minha vida o fato de que aquelas poucas passagens que escrevemos acerca da teoria da utilidade tenham fornecido tanto estímulo para os outros se preocuparem de modo profundo e renovado com a noção de utilidade, a qual é, para todo o sempre, básica para qualquer teoria econômica."*

Não obstante, os economistas não vêm fazendo uso da teoria da utilidade, a não ser por estudos mais recentes, (ver Bezerra (2003)) . A edução das preferências é de fundamental importância para a teoria da decisão e a qualidade do processo de sua aplicação é função direta da qualidade da edução. Alguns exemplos podem ser visto no clássico livro de Keeney e Raiffa (Decisions whith Multiple Objectives: Preferences and value tradeoffs (1976)). À medida em que aparecem as críticas vão sendo incorporados novos construtos. A temática é ampla e têm surgido muitas contribuições.

1.10 A Edução do Conhecimento *A Priori*

É por meio do conhecimento *a priori* que se pode aportar ao processo decisório, informações sobre o estado da natureza θ. Estas informações podem vir tanto de um banco de dados como de um especialista ou ambos. Muitas vezes a obtenção do conhecimento *a priori* só é possível por meio de um especialista, dada a falta de dados sobre o estado da natureza ou mesmo a falta de recursos para a sua obtenção. Neste trabalho vai ser tratado o conhecimento *a priori* advindo do especialista, o qual é conseguido com a aplicação de protocolos de edução. Os resultados serão comparados ao resultado obtido pelo método proposto por Walley (1996).

O objetivo da edução do conhecimento *a priori* é obter uma família de distribuições de probabilidade do parâmetro desejado, a partir do conhecimento *a priori* do especialista. A preocupação quanto à edução do conhecimento é bastante relevante para a aplicação da teoria da decisão, no entanto. No último Simpósio de Probabilidades Imprecisas-(ISIPTA'01), só houve um artigo publicado, Nadler Lins e Campello de Souza-2001 , que tratava o assunto; embora o simpósio tenha contado com a presença de psicólogos tais como Smithson e Bernard e é por isso que se faz necessário o aprofundamento dos estudos referentes à edução do conhecimento a priori. Os mais recentes resultados podem ser vistos nas dissertaões de Alves Silva (2002), Chajewska Urzula (2002), Wolfson(1995), no *artigo* de James Royalty, Robert Holland, Judy Goldsmith, Alex Dekhtyar-(19), Köbberling e Wakker (2002) e no *site* http:ippserv.rug.ac.be). Sua aplicação mostra-se útil na prática, onde as evidências são de natureza parcial.

> Extrair uma distribuição de probabilidade do especialísta sobre determinado assunto tem sido tarefa para notáveis pós-Bayes (ou neobaysianos). Varias técnicas têm sido apresentadas.
>
> (Nadler Lins, 2001)

1.11 Estruturação da Dissertação

A dissertação propõe-se a fornecer contribuições ao estudo de teoria da decisão focalizando a questão dos métodos de edução da função utilidade e do conhecimento *a priori*, tendo quatro capítulos básicos.

No **primeiro capítulo**, denominado de **Introdução**, buscou-se esclarecer os objetivos principais a serem tratados com relação à teoria da decisão, fez-se uma breve apresentação da estruturação matemática envolvida no processo, e resaltou-se a fundamental importância das eduções, como um meio de se obter o conhecimento do especialista e medir as preferências dos decisores. Deixando claro o porque das críticas à teoria, e como elas abrem espaços para estudos mais aprofundados. Fez-se ainda um resumo histórico para que o leitor entenda o desenvolvimento da teoria desde o começo e como elas tiveram um andamento natural. Enfatiza-se aqui o panorama de pesquisas existentes e de interesse da UFPE, através do Departamento de Engenharia de Produção.

No **segundo capítulo**, denominado **A Edução da Preferência**, descreve-se em resumo a teoria da utilidade sua importância e seus níveis de complexidade, suas aplicações e os possíveis métodos de edução da função utilidade. Eduziu-se a função utilidade para dinheiro e para os empregos (edução multiatributo). Usou-se o modelo Markoviano de preferência, método de estimação das utilidades, detalhes ver Campello de Souza (1993). É preciso deixar bem claro que não é interesse principal resolver um problema específico, os exemplos foram escolhidos, de forma a tornar mais interessante a abordagem do assunto.

No **terceiro capítulo**, denominado **O Conhecimento *a Priori***, faz-se uma pequena introdução às questões envolvidas na edução do conhecimento *a priori*, descreve-se o método impreciso de Walley e o modelo impreciso de Dirichlet-(IDM). Obtém-se uma família de distribuição de probabilidade, por meio da edução do conhecimento do especialista, e faz-se a comparação dos resultados obtidos através do método de edução e do modelo proposto por Walley.

No **quarto capítulo**, denominado de **Conclusões**, estão resumidas as conclusões sobre a aplicação dos métodos de eduções e seus principais resultados bem como sugestões para futuros estudos.

As indicações bibliográficas, sobre as quais todo o presente trabalho está baseado, são encontradas em **Referências Bibliográficas** indicando o cabedal de conhecimento devido aos trabalhos científicos de notáveis estudiosos que antecederam ao tema aqui proposto, sem o qual não seria possível o desenvolvimento deste trabalho.

2 A EDUÇÃO DA PREFERÊNCIA

" Não podemos quantificar o futuro, por ser desconhecido, mas aprendemos a empregar os números para esquadrinhar o que aconteceu no passado."

Bernstein, P.L., Desafio aos Deuses - A Fascinante História do Risco (1996).

2.1 Introdução

Os indivíduos e as organizações estão continuamente fazendo escolhas e tomando decisões. É preciso ter em mente que o objeto da escolha é sempre um jogo; ou seja, tem sempre um caráter de incerteza. Esta incerteza pode estar associada ao tempo, no caso da conseqüência se manifestar ao longo do tempo futuro, ou simplesmente ao desconhecimento; neste caso só o futuro, para o decisor, vai dirimir a incerteza.

A necessidade de respostas rápidas, com o menor custo, descreve o panorama atual, devido aos níveis e quantidades de informações que devem ser gerenciadas pelos indivíduos. Um dos caminhos adotados para se obter respostas racionais para as incertezas torna-se cada vez mais direcionado para os ditos "especialistas", indivíduos que acumulam conhecimento em torno de um ou uma classe de problemas, os quais são de muita utilidade na consideração de informações apriorísticas a respeito do problema. O trabalho desenvolvido em torno das possibilidades do uso racional do conhecimento acumulado vem permitindo aos "não especialistas" encontrar possíveis respostas para seus problemas. Portanto se torna cada vez mais importante o desenvolvimento de métodos confiáveis que sejam capaz de eduzir a função utilidade de "especialista". Porém tal medida não é tão simples, ela apresenta sua própria coleção de problemas psicológicos, técnicos e práticos e por esta razão não deve ser realizada superficialmente.

2.2 A Psicologia do Risco

Desde os tempos de Daniel Bernoulli (1738), que apresentou um novo método de se "medir a sorte", que se escreve sobre a psicologia do risco. Mas foi com a teoria de von Neumann e Morgenstern (1944) e a teoria da decisão de Wald (1950) que houve uma unificação dos conceitos de utilidade, proveniente da economia, e os métodos estatísticos. A teoria da decisão, como diz Campello de Souza (2002),

> *"É uma disciplina que trata do problema prático de tomadas de decisão racionais. É um corpo de conhecimento e prática profissional utilizados na abordagem lógica de problemas de decisão. Preocupa-se com o problema de como ser lógico em situações incertas, e pode ser vista também como uma maneira de abordar o estudo da estatística; uma caracterização mais aprofundada do raciocínio estatístico."*

A utilidade é o conceito pelo qual o indivíduo pode diferenciar um bom e um mal negócio (decisão), e a edução da utilidade é o processo que incorpora os prós e os contras (na visão de quem decide) numa única dimensão e busca a melhor estratégia de ação.

A aplicação da intuição no processo de tomada de decisão representa um enfoque à edução da utilidade; e muitas vezes este enfoque é um *approach* razoável, (quando a melhor alternativa é facilmente identificada ou a decisão não justifica uma abordagem mais elaborada). No entanto existem casos em que vale apena a avaliação sistemática, esses casos são em geral mais complexos e envolvem muitas característica a serem avaliadas e apresentam um alto risco para o decisor.

A posse dos valores humanos correto permite a avaliação de várias alternativas de ação em termos das suas utilidades esperadas, no entanto não é nada fácil obtê-las. E por essa razão não deve ser realizada superficialmente. É usual supor em experimentos na área de psicologia, que estuda o conceito de preferência, que o comportamento nas escolhas pode ser modelado como um fenômeno probabilístico.

A literatura de psicologia destaca duas fontes principais para as flutuações no comportamento de escolha. Uma aponta para às dificuldades que o decisor tem em perceber diferenças de valor entre os objetos da escolha; tem-se aí o ruído de introspecção. A outra é que os indivíduos ficam em dúvida quanto aos aspectos das alternativas que eles pensam ser mais importantes. Isto é referido como a vacilação quanto aos aspectos.

2.3 Teoria da Utilidade

von Neumann e Morgenstern formularam o conceito de utilidade a partir dos axiomas das preferências que impõem restrições de racionalidade às preferências do decisor. Assim a função utilidade poderá ser construída quando o comportamento do decisor satisfizer este tipo de racionalidade. Antes de apresentar o conjunto de axiomas que garantem a racionalidade na tomada de decisão faz-se necessário definir as relações de preferência, as quais têm como relação básica de preferência $\succeq$ significando " pelo menos tão desejável quanto".

Definição 2.3.1 *$P \succ Q$ se $P \succeq Q$, é falso que $Q \succeq P$.*

Definição 2.3.2 *$P \sim Q$, se $P \succeq Q$ e $P \succeq Q$.*

Definição 2.3.3 *Dados $P, Q \in \mathcal{P}^*$ tem-se:*

- *Se $P \succeq Q$, P é pelo menos tão desejável quanto Q;*
- *Se $P \succ Q$, P é preferível à Q;*
- *Se $P \sim Q$, P é indiferente à Q.*

Com base nessas relações de preferência von Neumann e Morgenstern (1947) desenvolveram os axiomas de preferência.

Axioma 2.3.1 *Completeza: $P \succeq Q$ ou $Q \succeq P$; isto é equivalente a dizer-se que ou $P \succ Q$, ou $Q \sim P$, ou $Q \succ P$.*

É um axioma técnico que estabelece uma ordem entre as distribuições de probabilidades sobre os bens.

Axioma 2.3.2 *Transitividade:*

a) *$P \succ Q$ e $Q \succeq R \Rightarrow P \succ R$;*

b) *$P \sim Q$ e $Q \sim R \Rightarrow P \sim R$.*

É um axioma de racionalidade, pois estabelece coerência nas preferências, eliminando a irracionalidade nas escolhas.

Axioma 2.3.3 *Dominância:*

a) *Se* $P \succ Q$, $1 \geq \lambda > 0$, *então para todo* $R \in \mathcal{P}^*$ *tem-se* $\lambda P + (1-\lambda)R \succ \lambda Q + (1-\lambda)R$*;*

b) *Se* $P \sim Q$, $1 \geq \lambda > 0$, *então para todo* $R \in \mathcal{P}^*$ *tem-se* $\lambda P + (1-\lambda)R \succ \lambda Q + (1-\lambda)R$*;*

É um axioma de forte característica técnica e que garante a linearidade em probabilidade da função utilidade.

Axioma 2.3.4 *Arquimediano:*

Se $P \succ Q \succ R$, *então existem números* λ *e* μ *tais que* $1 > \lambda > \mu > 0$ *e tais que* $\lambda P + (1-\lambda)R \succ Q \succ \mu P + (1-\mu)R$.

É também um axioma técnico, este é equivalente à propriedade Arquimediana dos números reais.

Estes axiomas são fundamentais para o estabelecimento da função utilidade $u(.)$, a qual atribui um valor real às relações de preferência ($\succeq$). Para que $u(.)$ seja considerada uma função utilidade é necessário que:

a) $u : \mathcal{P}^* \rightarrow \mathbb{R}$, isto é, para toda distribuição $P \in \mathcal{P}^*$ há um número real correspondente u(p);

b) Estes números reais preservam a ordem no sentido de que se $P \succeq Q \Leftrightarrow u(P) \geq u(Q)$.

c) Existe linearidade; $u[\lambda P + (1-\lambda)Q] = \lambda u(P) + (1-\lambda)u(Q)$, funcionando como valor esperado.

Quando os quatro axiomas são satisfeito chega-se a um teorema que afirma a existência da função utilidade. Demonstra-se primeiro alguns lemas. A prova dos lemas e do teorema pode ser vista em , que são os seguintes:

- **Lema 2.3.1** *Monotonicidade: Se* $P \succ Q$, $\lambda \succ \mu$, *então* $\lambda P + (1-\lambda)Q \succ \mu P + (1-\mu)Q$.

- **Lema 2.3.2** *Unicidade: Se* $P \succ Q$ *e* $\lambda P + (1-\lambda)Q \sim \mu P + (1-\mu)Q$, *então* $\lambda = \mu$.

- **Lema 2.3.3** *Representação:* $P \succsim Q$ *se e somente se* $u_{\underline{P},\overline{P}}(P) \geq u_{\underline{P},\overline{P}}(Q)$.

  onde: $u_{\underline{P},\overline{P}}(P) = sup\{\lambda : P \succ \lambda\overline{P} + (1-\lambda)\underline{P}\}$, $\underline{P}$ é a distribuição menos desejável de um conjunto de conseqüências e $\overline{P}$ é a mais desejável.

- **Lema 2.3.4** *Linearidade:* $u[\lambda P + (1-\lambda)Q] = \lambda u(P) + (1-\lambda)u(Q)$.

- **Lema 2.3.5** *Extensão: Se u é uma função utilidade, então* $u^* = au + b$.

Como visto anteriormente, $\mathcal{P} = \{p\}$ representa o conjunto de todas as possíveis conseqüências. O conjunto de todas as possíveis distribuições de probabilidade sobre $\mathcal{P}$ é dado por $\mathcal{P}^* = \{P\}$, onde P é a probabilidade do decisor ganhar o bem p.

2.4 A Função Utilidade

A forma da função utilidade pode revelar o comportamento das organizações. Pennings e Smidts (2002) concluíram que embora a aversão ao risco, que é baseada na curvatura local da função utilidade, (vide Campello de Souza (2002)), seja importante na explicação do comportamento do decisor nas trocas, a forma global da função utilidade está associada à estrutura do comportamento organizacional.

Dado o conjunto $\mathcal{P}^*$ ordena-se seus elementos de forma que o o bem mais desejável, será denotado por $\overline{P}$ e o mais indesejável ou menos desejável por $\underline{P}$. Todos os outros elementos estão compreendidos entre esses dois:

$\overline{P} \succ P, Q, R, ... \succ \underline{P}$

A partir daí começa a construção da função utilidade. Começamos atribuindo valores as utilidades $u(\overline{P})$ e $u(\underline{P})$ que podem ser determinados arbitrariamente, de forma que satisfaça os axiomas anteriores. Na literatura é comum encontrarmos os valores $u(\overline{P}) = 1$ e $u(\underline{P}) = 0$, a vantagem desta escolha é que a utilidade poderá ser interpretada como probabilidade, o que também facilita a atribuição dos valores para os outros elementos conforme será mostrado a seguir. A utilidade de um bem P entre $\overline{P}$ e $\underline{P}$ será denotada por:

$$u_{\overline{P}\underline{P}}(P) = sup\{\lambda : P \succ \lambda\overline{P} + (1-\lambda)\underline{P}\}$$

Isto é, a utilidade atribuída ao bem P numa escala entre $\overline{P}$ e $\underline{P}$, é o supremo do conjunto de valores λ tal que P seja preferível à loteria: $\lambda\overline{P} + (1-\lambda)\underline{P}$. Em outras palavras, o decisor se sente indiferente entre receber o bem P com certeza, ou seja, com probabilidade 1 ou entrar num jogo onde ele ganha $\overline{P}$ com probabilidade λ e $\underline{P}$ com probabilidade $1-\lambda$. Então para cada jogo,

$\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2$, associa-se um outro bem P, ao qual o decisor se torne indiferente, P é chamado o equivalente certo da loteria, pois se está indiferente entre o jogo e o que é "certo". Assim, constrói-se a função utilidade, a partir da determinação do λ que torna o decisor indiferente entre, uma loteria com bens mais e menos desejáveis e o elemento cuja utilidade se deseja obter.

2.5 A Edução da Função Utilidade

Esse processo inclui a identificação, mensuração e combinação de todos os atributos buscando através deste criar uma estrutura de valores que possam formar uma base para a tomada de decisão. Também chamada de valor psicológico, a utilidade é fundamentalmente o critério através do qual seleciona-se as possíveis alternativas futuras e avalia-se as ações passadas. É o conceito pelo qual o decisor "mensura" os prós e os contras de uma estratégia de ação e os coloca numa mesma dimensão de avaliação. Freqüentemente o processo intuitivo é mencionado como "bom senso", "sentimento de engenheiro", "tino administrativo", "sensibilidade do médico", "experiência", etc. Muitas vezes o enfoque intuitivo é uma alternativa razoável, ou seja, em algumas situações não se justifica uma abordagem mais detalhada do problema. Pode-se citar por exemplo: uma situação onde a melhor alternativa seja facilmente identificada. No entanto, na maior parte das situações, vale a pena analisar sistematicamente as possíveis alternativas principalmente quando se trata de problemas complexos que envolve compensações, ou seja, *tradeoff*, entre os atributos. Por exemplo: a compra de um imóvel ou automóvel, a localização de um edifício ou obras em geral, análise de investimentos, decisão sobre projetos de produtos, *marketing*, entre outras milhares de aplicações.

Não é elementar eduzir a medida da função utilidade de um indivíduo ou grupo de indivíduos, uma vez que estes têm dificuldade em expressar valores que representem com fidelidade as suas preferências; normalmente estas não satisfazem aos axiomas da teoria da utilidade. Na maioria das vezes, quando eduzidas, elas não satisfazem ao axioma da transitividade, ou até mesmo quando apresentado várias vezes ao mesmo prospecto, o indivíduo pode responder inconsistentemente.

Na realidade, não se espera que os dados do problema se adequem ao modelo. O que se busca é determinar o melhor modelo que se ajusta ao problema. O que se mede é o quão bom é esse ajuste. Embora o decisor não apresente uma utilidade linear (em probabilidade) de von Newmann-Morgenstern, formula-se um modelo que considera o decisor como tendo uma função utilidade linear, mas que suas respostas podem apresentar pertubações aleatórias e erros. Não há na realidade necessidade de avaliar se existe ou não uma função utilidade "verdadeira".

Um problema de decisão complexo pode envolver dezenas de dados que devem ser adequadamente reunidos em atributos que sejam abrangentes e mensuráveis. Um atributo deve ser abrangente, isto é, ao se conhecer o seu nível numa situação específica o decisor deverá ser capaz de compreender até onde foi atingido o objetivo associado. Um atributo é dito mensurável se é possível obter uma distribuição de probabilidade para cada uma das alternativas sobre os possíveis níveis do atributo. Um conjunto de atributos deve possuir as seguintes propriedades:

- Completeza: deve abranger todos os aspectos importante;
- Operacionalidade: seu uso deve ter significado na análise;
- Decomposabilidade: os aspectos do processo de avaliação possam ser simplificados subdividindo o modelo;
- Não Redundância: não deve haver dupla contagem dos impactos;
- Minimalidade: deve ser mantida a menor possível,(lâmina de Ocam).

No processo da edução quantitativa da função utilidade, destaca-se a dificuldade com relação à confiabilidade dos métodos. Assim sendo, a importância da edução da função utilidade se justifica pela melhoria da qualidade da decisão propriamente dita.

2.5.1 Os Métodos de Edução

Serão estudados três métodos de edução da função utilidade:

- O Método das faixas superpostas;
- O Método de programação linear;
- O Método dos modelos probabilísticos de escolha (usando programação não linear).

2.6 Método das faixas superpostas

O processo de edução usa a noção de indiferença do decisor entre um valor certo e um jogo. Através de um protocolo de edução, no qual será realizada uma série de perguntas para que o indivíduo explicite o valor de λ para o qual ele se sente indiferente entre uma determinada quantia certa e um jogo, $(P \approx \lambda\overline{P} + (1-\lambda)\underline{P})$. Deve ficar bem claro para o leitor que não existe uma "resposta certa" para cada pergunta. Apenas deve-se ter cuidado para se fazer uma boa introspecção de modo a obter uma boa precisão. Ou seja, as instruções e a redação das perguntas devem ser as mais claras e objetivas possíveis, para se evitar os chamados " ruídos de introspecção" Campello de souza (1979). As perguntas devem ser apresentadas de forma que o grau de dificuldade em responde-las esteja em escala crescente. No entanto, as respostas são individuais; e devem ser adequadas à psicologia do risco do indivíduo. Não se terá nunca uma precisão infinita, pois é preciso não confundir racionalidade com perfeição.

Supõe-se, para o uso da função utilidade cardinal de von Neumann que existem dois bens, que possam ser colocados numa escala onde um bem é o mais desejável, $\overline{P}$, e o outro é o menos desejável, $\underline{P}$, ao qual foram atribuidas duas utilidades arbitrárias (as utilidades são expressas numa escala intervalar, e portanto a origem, isto é, o zero da escala, e a escala de medida, são arbitrários).

Na situação onde os valores extremos $\overline{P}$ e $\underline{P}$, encontram-se muito distantes um do outro fica muito difícil atribuir-se um valor a λ de forma que o decisor fique indiferente entre P e um jogo envolvendo os extremos dos intervalos, sendo $\underline{P} \prec P \prec \overline{P}$. Desta forma, se pergunta qual o valor de λ que torna P indiferente a uma loteria entre $\underline{P}$ e $\overline{P}$ nas diferentes faixas, para que depois, usando o Lema 2.3 (extensão) transforme-se os valores de λ para uma mesma faixa.

Eduzir-se-á a função utilidade para o dinheiro num intervalo de - R$ 95.000,00 (noventa e cinco mil reais negativos, referentes às perdas) a R$ 95.000,00 (noventa e cinco mil reais positivos, referentes aos ganhos). Este intervalo foi subdividido em outros sete intervalos superpostos:

1. $[-95; -40]$;

2. $[-80; -25]$;

3. $[-35; 20]$;
4. $[-20; 35]$;
5. $[25; 80]$;
6. $[40; 90]$ e
7. $[-40; 40]$.

Os intervalos foram distribuídos uniformemente entre $[-95; 95]$. E no questionário as perguntas são feitas com relação às utilidades dos valores extremos de cada intervalo. Apresenta-se a seguir o questionário:

Tabela 2.1: Primeiro Questionário.

				MAIOR			**MENOR**
			λ	**GANHO**	$1-\lambda$		**GANHO**
	p	P	u	R$ 1.000	$1-P$	$1-u$	R$ 1.000
	-95	P	0	95	$1-P$	1	-95
1	-80	P		-40	$1-P$		-95
2	-40	P		-25	$1-P$		-80
3	-60	P		-35	$1-P$		-80
4	-30	P		-20	$1-P$		-60
5	-35	P		-25	$1-P$		-80
6	-25	P		20	$1-P$		-35
7	-15	P		20	$1-P$		-30
8	0	P		25	$1-P$		-15
9	-20	P		20	$1-P$		-35
10	20	P		35	$1-P$		-20
11	10	P		35	$1-P$		0
12	15	P		40	$1-P$		10

continua na próxima página

Tabela 2.1: Primeiro Questionário. (continuação)

				MAIOR			MENOR
			λ	GANHO	$1-\lambda$		GANHO
	p	P	u	R$ 1.000	$1-P$	$1-u$	R$ 1.000
13	25	P		35	$1-P$		-20
14	35	P		80	$1-P$		25
15	30	P		40	$1-P$		15
16	50	P		80	$1-P$		30
17	40	P		80	$1-P$		25
18	80	P		95	$1-P$		40
19	55	P		95	$1-P$		50
20	90	P		95	$1-P$		55
21	-35	P		40	$1-P$		-40
22	20	P		40	$1-P$		-40
23	-33	P		-15	$1-P$		-60
24	-22	P		0	$1-P$		-30
25	-20	P		40	$1-P$		-40
26	35	P		40	$1-P$		-40
27	-2	P		10	$1-P$		-22
28	17	P		35	$1-P$		-2
29	33	P		55	$1-P$		17
30	64	P		90	$1-P$		50
31	93	P		95	$1-P$		64
32	-67	P		-33	$1-P$		-80
33	-90	P		-67	$1-P$		-95
34	-52	P		2	$1-P$		-95
35	-43	P		0	$1-P$		-52

continua na próxima página

Tabela 2.1: Primeiro Questionário. (continuação)

				MAIOR			**MENOR**
			λ	**GANHO**	$1-\lambda$		**GANHO**
	p	P	u	R$ 1.000	$1-P$	$1-u$	R$ 1.000
36	-12	P		17	$1-P$		-52
37	-3	P		10	$1-P$		-12
38	4	P		17	$1-P$		-3
39	12	P		20	$1-P$		4
40	19	P		33	$1-P$		2
41	28	P		64	$1-P$		-3
42	45	P		50	$1-P$		19
43	77	P		93	$1-P$		64
44	88	P		93	$1-P$		77

Neste método usar-se-á ferramentas estatísticas para inferir sobre o erro do decisor ao responder às perguntas do questionário. A análise de regressão (linear e não linear) será usada para estimar os parâmetros da função utilidade. Em Campello de Souza-(2002) apresenta-se as formas mais clássicas de funções utilidades.

2.6.1 Resultado da Edução da Função Utilidade pelo Método das Faixas Superpostas

Apresentou-se o questionário para duas pessoas que serão denominadas de eduzido-1 e eduzido-2. Os gráficos das figuras 2.1 e 2.2 apresentam o resultado da edução da função utilidade dos dois eduzidos respectivamente. É interessante notar que o primeiro eduzido apresenta uma curva com aspecto do s típico da teoria da utilidade e que o segundo eduzido apresenta um gráfico com a forma de uma parábola, tipicamente a função utilidade tratada na economia e em finanças. Para cada um dos eduzidos utilizou-se de duas formas diferentes de estimação dos parâmetros da função utilidade de cada um. No primeiro indivíduo usou-se da expressão da função utilidade logística generalizada apresentada em Campello de Souza-(2002), que é expressa da seguinte forma:

$$u(p) = -a + \frac{b}{1 + \exp[-c(p - d)]}$$

A obtenção dos parâmetros dá-se pelo método de estimação não linear e o mesmo pode ser visto na Tabela 2.3. O coeficiente de determinação apresentou-se superior a 96%. No gráfico da figura 2.3 tem-se a utilidade estimada do indivíduo para os pontos apresentados no questionário. Para o eduzido 2 a obtenção dos parâmetros dá-se pelo método dos mínimos quadrados ordinários a suposição básica para uso do método é que os erros da estimação se comporte como uma distribuição normal, foi realizado o teste de Kolmokorov-Smirnov, o qual apresentou-se não significativo, e dessa forma, pode-se aceitar a hipótese alternativa de que a distribuição é uma normal. O resultado da regressão apresenta-se na Tabela 2.2.

Figura 2.1: Utilidade do Eduzido-1

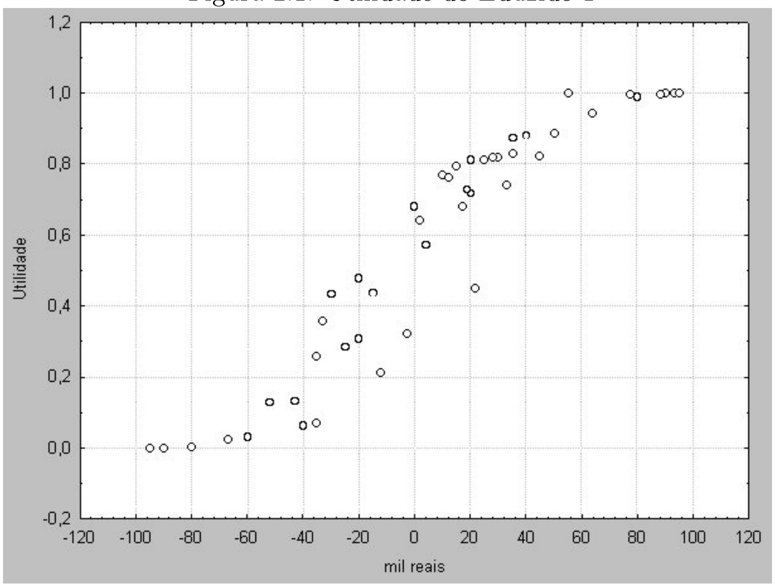


Figura 2.2: Utilidade do Eduzido-2

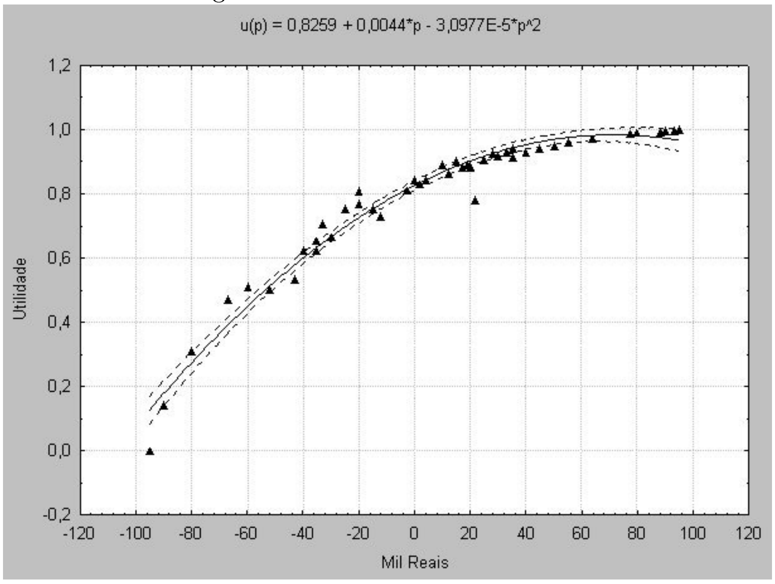


Figura 2.3: Utilidade Estimada do Eduzido-1

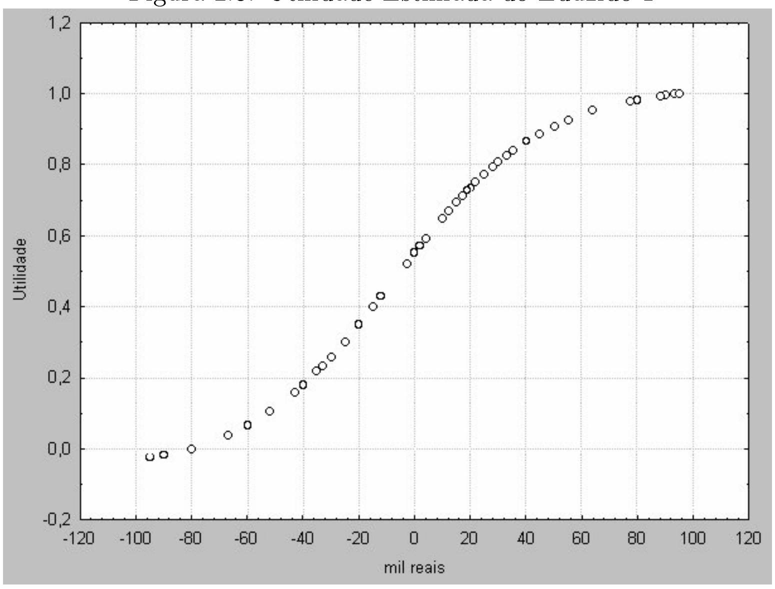


Tabela 2.2: Sumário das Regressões.

	Regressão do eduzido-2					
Utilidade Investidor - 1	$R = 0,98225267$, $R^2 = 0,96482031$ $F(2,43) = 589,65$, $p < 0,0000$					
Coeficientes	B	Erro Padrão de B	Beta	Erro Padrão de Beta	$t(43)$	$p - valor$
Intercepto			0,702501	0,008623	81,47169	0,000000
p	0,994304	0,028999	0,004700	0,000137	34,28745	0,000000
p^2	-0,218542	0,028999	-0,000018	0,000002	-7,53619	0,000000

Tabela 2.3: Regressão não linear nos parâmetros.

	Coeficientes Estimados	Desvio Padrão	Valor t	Valor p	Limite Inferior	Limite Superior
a	0,06161	0,072349	0,85157	0,399280	-0,0844	0,207617
b	1,08310	0,102754	10,54068	0,000000	0,8757	1,290467
c	0,03792	0,006432	5,89588	0,000001	0,0249	0,050905
d	-7,15359	4,839520	-1,47816	0,146825	-16,9201	2,612953

2.7 Método da Programação Linear

Através deste método pode-se obter a edução da utilidade de um decisor com um menor número de perguntas. O protocolo de edução traz perguntas envolvendo duas distribuições de probabilidade, e o decisor terá que responder apenas qual das duas distribuições ele prefere; não sendo necessária a determinação de um valor para λ. Na Tabela 2.4 apresenta-se o questionário de edução. Além da vantagem de se poder fazer um menor número de questões, pode-se incorporar novos construtos para o tratamento da vagueza do decisor. O método pode também ser usado para se tomar decisões em grupo.

As respostas do questionário tornam-se restrições num problema de programação linear. Cuja formulação matemática é apresentada a seguir.

O problema de programação linear a ser resolvido é o seguinte:

$$\underset{\{u_j\}}{\text{Max}}(\text{Min}) \sum_{j=1}^{n} (n-j+1)u_j$$

sujeito a

$u(G_i) - u(G_l) \leq 0$ (ou ≥ 0, dependendo das respostas do decisor).

$u(\underline{p}) = 0, u(\overline{p}) = 100$

$\frac{1}{2}u_{i-1} - u_i + \frac{1}{2}u_{i+1} \leq 0, i = 2, \ldots n-1.$

(Esta restrição garante a concavidade da função utilidade).

$u_{n-1} - u_n \leq 0$

(Esta restrição garante a monotonicidade da função utilidade).

.

onde: $u(G_i) = u[\lambda_i p_j + (1-\lambda_i)p_k] = \lambda_i u(p_j) + (1-\lambda_i)u(p_k)$

e u_i é a utilidade do bem p_i, $u_i = u(p_i)$.

Ao resolver-se o problema de maximização está obtendo-se a utilidade com maior valor médio e quando se resolve o problema de minimização obtém-se a utilidade com menor valor médio.

A vagueza do decisor é dado pela seguinte equação:

$$V_d = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[u_{max}(p_j) - u_{min}(p_j)]$$

Aplicou-se o questionário apresentado na Tabela 2.4

Tabela 2.4: Segundo Questionário.

	JOGO 1					**JOGO 2**			
	p_1	p	p_2	$1-p$	Opção	p_3	p	p_4	$1-p$
	1	1	1	1	1 ou 0	0	0	0	0
1	-40	24%	-95	76%		-50	22%	-85	78%
2	-55	53%	-85	47%		-40	41%	-90	59%
3	-50	71%	-90	29%		-25	26%	-70	74%
4	-25	39%	-80	61%		-45	47%	-75	53%
5	-35	51%	-80	49%		-20	11%	-65	89%
6	-30	41%	-65	59%		-15	27%	-60	73%
7	-10	86%	-60	14%		0	7%	-35	93%
8	10	33%	-10	67%		5	67%	-15	33%
9	10	79%	-5	21%		20	23%	0	77%
10	30	91%	-5	9%		15	86%	5	14%
11	35	25%	0	75%		60	10%	15	90%
12	65	89%	35	11%		70	39%	45	61%
13	65	28%	20	72%		80	18%	30	82%
14	75	12%	45	88%		80	64%	25	36%
15	70	93%	25	7%		90	30%	50	70%
16	90	61%	40	39%		85	28%	55	72%
17	85	37%	50	63%		95	52%	40	48%
18	95	85%	-95	15%		-20	48%	-30	52%
19	95	62%	-95	38%		-55	39%	-75	61%
20	95	99%	-95	1%		75	1%	55	99%

2.7.1 Resultado da Aplicação do Protocolo de Edução

O resultado da edução pelo método de programação linear é apresentado no gráfico da Figura 2.4. O eduzido-1, tem a vagueza de $0,1234$, enquanto que a vagueza do eduzido-2 é de $0,0966$. Numa comparação entre os métodos, pode-se dizer que o entrevistado-2 tem a utilidade estimada pelo método das **faixas superpostas** entre a mínima e a máxima faixa de utilidade.

O método também permite a decisão em grupo. E estabelece alguns construtos, que são:

- vagueza preferencial global: relação entre a área da união das faixas e a área em baixo da reta $u(p) = u(\overline{p})$. No exemplo a vagueza preferencial global é de $Vag_pg = 0,2079$;

- precisão preferencial: $Prec_p = 1 - Vag_pg = 0,7921$;

- concordância do grupo: relação entre a área de interseção das faixas e a área da união das faixas, $Conc_pg = 0,0888$;

- discordância do grupo: $Disc_pg = 1 - Conc_pg = 0,9112$;

- conflito de atitude em relação ao risco: é a área do vácuo que é formada pela região onde as faixas mínimas e máximas dos eduzidos não se interceptam,

$$Conf_pg = \frac{\sum_{j=1}^{n}[|u_{max1}(p_j) - u_{max2}(p_j)| + |u_{min1}(p_j) - u_{min2}(p_j)|]}{n} = 0,1957;$$

- harmonia do grupo:$Harm_pg = \frac{Conc_pg}{Conc_pg + Conf_pg} = 0,3120$;

- dissonância do grupo:$Diss_pg = 1 - Harm_pg = 0,6880$;

- qualidade do padrão global de preferência: O resultado final da preferência global será dado pela função utilidade média. A qualidade será dada por

$$Qualid = \frac{Conc_pg}{Conc_pg + Conf_pg + Vag_pg} = 0,1803;$$

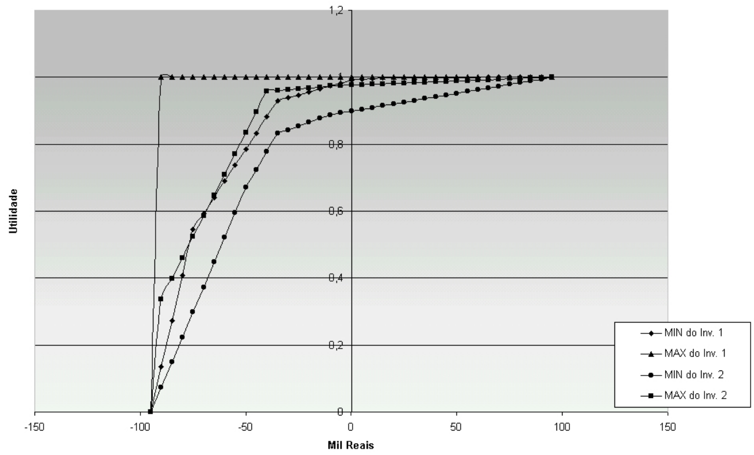
- hesitação: quando o conflito é muito grande fica difícil aceitar a função utilidade média. Essa dificuldade pode ser medida através da hesitação, a qual é definida por

$$Hesit = \frac{\text{aréa das regiões de vácuo}}{\text{área das regiões de vácuo} + \text{área da união das faixas}} = 0,4849;$$

- resolução: $Reso = 1 - Hest = 0,5151$.

Segundo Campello de Souza-(2002), pode-se seguir o seguinte princípio: aceita-se a função utilidade média se e somente se a $Reso \geq 0,5$, dessa forma pode-se adotar a utilidade média para uma decisão do grupo.

Figura 2.4: Utilidade do Eduzido-1 e do Eduzido-2



2.8 Modelos Probabilísticos de Escolha - Usando programação não linear

Resume-se aqui o exposto em Campello de Souza (1979, 1981, 1983, 1986, 2000).

Refere-se por modelo probabilístico o seguinte: Tem-se um conjunto bem definido $\mathcal{P}$ de alternativas, que assume-se ter n elementos, tipicamente indexado pelos inteiros $1, 2, 3, \ldots, n$. Para certos subconjuntos $\{A_i\}$ de $\mathcal{P}$, $A_i \subset \mathcal{P}$, define-se funções de massa probabilística $\{P_{A_i}(p)\}$, onde

$$(\forall p)\ P_{A_i}(p) \geq 0, \quad \sum_{p \in A_i} P_{A_i}(p) = 1, \quad P_{A_i}(p) = 0 \quad \text{se} \quad p \notin A_i.$$

$P_{A_i}(p)$ é para ser pensado como a probabilidade de que o indivíduo ou grupo sendo modelado escolherá a alternativa quando solicitado a optar por uma qualquer dentro do conjunto de alternativas. Quando se restringe A_i a ter exatamente dois elementos então escreve-se p_{jk} para a probabilidade de se escolher a alternativa p_j do conjunto $A_i = \{p_j, p_k\}$. A coleção $\{p_{ij}; p_i, p_j \in \mathcal{P}\}$ é chamada um modelo de escolha probabilística binária.

Empates não são permitidos, ou seja, deve-se ter $p_{ij} + p_{ji} = 1$. Como exposto em Campello de Souza (2000):

> "*Se* $||\mathcal{P}|| = n$, *existirão* $2\binom{n}{2}$ *dessas probabilidades de escolha binária, mas apenas* $\binom{n}{2}$ *delas serão independentes, pois,* $\forall i, j$, $p_{ij} + p_{ji} = 1$. *Referir-se-á então* $\underline{p}$ *como um*

vetor cujas coordenadas são as $\binom{n}{2}$ *probabilidades binárias independentes arranjadas como se segue. Seja* $\underline{p} = (p_k)$. *A k-ésima coordenada de* $\underline{p}$ *é* p_{lr}, *onde*

$$\sum_{j=1}^{l-1}(n-j) < k \leq \sum_{j=1}^{l}(n-j), \qquad r = l + k - \sum_{j=1}^{l-1}(n-j).$$

Esta será uma ordenação lexicográfica dos pares (i, j), $i < j$.

A idéia por trás da introdução destas probabilidades de escolha é captar as oscilações observadas no comportamento nas escolhas, estendendo-se a noção determinística usual de preferência para uma noção probabilística. Diz-se que p_i *é preferível a* p_j *se e somente se* $p_{ij} > 1/2$, *e que* p_i *é pelo menos tão desejável quanto* p_j *se e somente se* $p_{ij} \geq 1/2$. *Considerar-se-á que* $p_{ij} \in [0, 1]$.*"*

Com este enfoque probabilístico, a noção usual de transitividade é substituída por noções de transitividade estocástica (vide Campello de Souza (2000)).

Um conceito importante de racionalidade estocástica é dado pela chamada **desigualdade triangular**, conforme Campello de Souza (2000)):

Definição 2.8.1 *"Um conjunto* $\{p_{ij}\}$ *de probabilidades de preferência binária satisfaz à desigualdade triangular (T) se*

$$(\forall i, j, k) \;\; p_{ij} + p_{jk} \geq p_{ik}.$$

Como $(\forall i, j) \;\; p_{ji} = 1 - p_{ij}$, *pode-se escrever a condição da desigualdade triangular como*

$$(\forall i, j, k) \;\; 0 \leq p_{ij} + p_{jk} - p_{ik} \leq 1.$$

Diz-se então que $\underline{p} \in T$.*"*

2.9 O Procedimento de Estimação

No questionário da programação não linear as perguntas são do tipo: Qual do dois jogos, G_i ou G_j, respectivamente, você prefere:

$$\lambda_i p_k + (1-\lambda_i)p_l \quad \text{ou} \quad \mu_j p_m + (1-\mu_j)p_r?$$

Esta pergunta é a pergunta ij e a resposta do decisor será a realização de uma variável aleatória de Bernoulli, X_{ij} tal que

$$p_{ij} = P(X_{ij}=1) = 1 - P(X_{ij}=0).$$

Busca-se então resolver o problema de programação quadrática:

$$\underset{p_{ij}}{Min} \sum_{i,j} (X_{ij} - p_{ij})^2$$

s.a

$$0 \leq p_{ij} + p_{jk} - p_{ik} \leq 1; \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1.$$

De acordo com as respostas do decisor procura-se minimizar o erro (forma quadrática) e estimar os p_{ij}.

Uma vez estimados os p_{ij}'s, pode-se usar a relação

$$p_{ij} = \int_{-\infty}^{u(G_i)-u(G_j)} f_\epsilon(\epsilon)d\epsilon = F_\epsilon[u(G_i) - u(G_j)]$$

para se estimar F_ϵ, o que pode ser feito por uma regressão (linear nos parâmetros). Note-se que vai ser necessário o uso dos valores $u(G_i)$ e $u(G_j)$ estimados pelo método da programação linear (e/ou o de intervalos concatenados).

De posse de F, e conseqüentemente de f, tem-se o mecanismo probabilístico subjacente, que poderá ser cotejado com a banda obtida pelo método da programação linear e com o erro da regressão usada no método dos intervalos concatenados.

Em seguida pode-se explorar uma expressão da utilidade em função da média e da variância do jogo e as semelhanças entre a teoria da decisão e o método de Markowitz.

Tabela 2.5: Sumário da Regressão.

	Regressão do Homem de Quételet					
Homem de Quételet	$R = 0,67911669$, $R^2 = 0,46119948$ $F(2,17) = 7,2758$, $p < 0,00521$					
Coeficientes	B	Erro Padrão de B	Beta	Erro Padrão de Beta	$t(17)$	$p - valor$
Intercepeto			0,452370	0,052257	8,65671	0,000000
$\mathrm{E}(G_i) - \mathrm{E}(G_j)$	1,130400	0,406999	0,010773	0,003879	2,77740	0,012904
$\sigma_{G_i} - \sigma_{G_j}$	-0,550998	0,406999	-0,000073	0,000054	-1,35381	0,193523

2.9.1 A Construção do Questionário

O objetivo é construir um questionário no qual os jogos envolvidos tenham seus p_{ij} em torno de 0,5. Para tal, estimou-se os p_{ij} do homem de Quételet[1]. Com uma amostra de 30 pessoas que responderam ao questionário 2.4, obteve-se a média dos X_{ij}, que torna-se uma estimativa dos p_{ij}. Cada um dos jogos tem uma média, $\mathrm{E}(G_i)$, e um desvio padrão, σ_{G_i}, imediatamente calculáveis; pois os p_i's são valores monetários e os λ_i's e os μ_j's são probabilidades. Ter-se-á então, para cada pergunta uma $\mathrm{E}(G_i)$, σ_{G_i}, $\mathrm{E}(G_j)$ e σ_{G_j}, calcula-se então: $(\mathrm{E}(G_i) - \mathrm{E}(G_j))$ e $(\sigma_{G_i} - \sigma_{G_j})$. Em seguida considera-se

$$p_{ij} = \beta_0 + \beta_1(\mathrm{E}(G_i) - \mathrm{E}(G_j)) + \beta_2(\sigma_i - \sigma_j)$$

Substituí-se a média dos X_{ij} no lugar de p_{ij}. Dessa forma, pode-se estimar os βt's da equação acima. São 3 parâmetros a ser estimados com 20 perguntas, são em média 8 observações por parâmetro a ser estimado, o que é razoável. O questionário foi elaborado usando-se 7 jogos que apresentam-se no mesmo nível de valoração, ou seja, o p_{ij} estimado do jogo está compreendido entre 0.35 e 0.60, isto foi realizado ajustando-se os valores monetários às probabilidades, de forma simétrica. O resultado obtido encontra-se na tabela 2.5.

Usando a equação estimada de p_{ij} construiu-se um novo questionário para 7 jogos. O questionário vai ter 21 questões, correspondente a combinação de 7 jogos 2 a 2, cada uma correspondendo a um p_{ij}.

O questionario encontra-se na tabela 2.6.

[1]"Adolphe Quételet (1796-1874) estudando estatisticamente o homem como unidade de um grupo social, contribuiu para a criação de um modelo que tornou-se conhecido como o "homem médio" (l'Homme Moyen de Quételet, ou homem de Quételet). Este é um indivíduo que representa uma média estatística"

Tabela 2.6: Segundo Questionário.

JOGO 1					JOGO 2			
p1	λ	p2	$1-\lambda$	OPÇÃO	p3	λ	p4	$1-\lambda$
1	1	1	1	1 OU 0	0	0	0	0
-85	0,5	15	0,5		-80	0,52	5	0,48
-85	0,5	15	0,5		-65	0,65	20	0,35
-85	0,5	15	0,5		-55	0,82	50	0,18
-85	0,5	15	0,5		-45	0,95	55	0,05
-85	0,5	15	0,5		-65	0,65	65	0,35
-85	0,5	15	0,5		-60	0,75	10	0,25
-80	0,52	5	0,48		-65	0,65	20	0,35
-80	0,52	5	0,48		-55	0,82	50	0,18
-80	0,52	5	0,48		-45	0,95	55	0,05
-80	0,52	5	0,48		-65	0,65	65	0,35
-80	0,52	5	0,48		-60	0,75	10	0,25
-65	0,65	20	0,35		-55	0,82	50	0,18
-65	0,65	20	0,35		-45	0,95	55	0,05
-65	0,65	20	0,35		-65	0,65	65	0,35
-65	0,65	20	0,35		-60	0,75	10	0,25
-55	0,82	50	0,18		-45	0,95	55	0,05
-55	0,82	50	0,18		-65	0,65	65	0,35
-55	0,82	50	0,18		-60	0,75	10	0,25
-45	0,95	55	0,05		-65	0,65	65	0,35
-45	0,95	55	0,05		-60	0,75	10	0,25
-65	0,65	65	0,35		-60	0,75	10	0,25

2.10 Modelos Markovianos de Preferência

A probabilidade de escolha binária p_{ij} pode ser interpretada de duas maneiras básicas. Em problemas complexos, sem nenhum caráter repetitivo, esta probabilidade pode ser interpretada como uma propensão a agir, baseada numa estrutura de preferência subjacente. Em problemas repetitivos, p_{ij} pode ter uma interpretação freqüentista. Um indivíduo pode preferir sorvete de creme a sorvete de chocolate. Mas ele não odeia sorvete de chocolate e de vez em quando, sendo exposto aos dois, pode escolher o de chocolate. Pode-se pensar então num modelo dinâmico baseado em cadeias de Markov, onde cada estado corresponde a um objeto no conjunto de escolha.

As probabilidades de transição da cadeia de Markov serão definidas por:

$$P_{ij} = \frac{p_{ji}}{\sum\limits_{j} p_{ji}} = \text{probabilidade de transição numa cadeia de Markov.}$$

Como $p_{ij} + p_{ji} = 1$, tem-se:

$$\left(\sum_j p_{ji}\right) P_{ij} + \left(\sum_i p_{ij}\right) P_{ji} = 1.$$

Logo

$$\frac{P_{ij}}{\sum_i p_{ij}} + \frac{P_{ji}}{\sum_j p_{ji}} = \frac{1}{\left(\sum_j p_{ji}\right)\left(\sum_i p_{ij}\right)}.$$

Sejam

$$A_i = \sum_j p_{ji} = \text{indesejabilidade prévia de } i;$$

$$B_i = \sum_j p_{ij} = \text{desejabilidade prévia de } i.$$

Note-se que $A_i + B_i = 1$.

Admita-se que a desigualdade triangular seja válida, que é o último reduto da racionalidade estocástica. Em termos das probabilidades de transição a desigualdade triangular pode ser expressa por:

$$0 \leq A_i P_{ij} + A_j P_{jk} - A_i P_{ik} \leq 1.$$

A desigualdade triangular define pois uma classe de cadeias de Markov que representam a preferência dinâmica do decisor.

A idéia do processo de estimação é primeiro estimar as probabilidades de escolha binária p_{ij} e depois, uma vez estabelecida a cadeia de Markov, considerar as suas probabilidades de regime permanente como sendo a função utilidade do decisor.

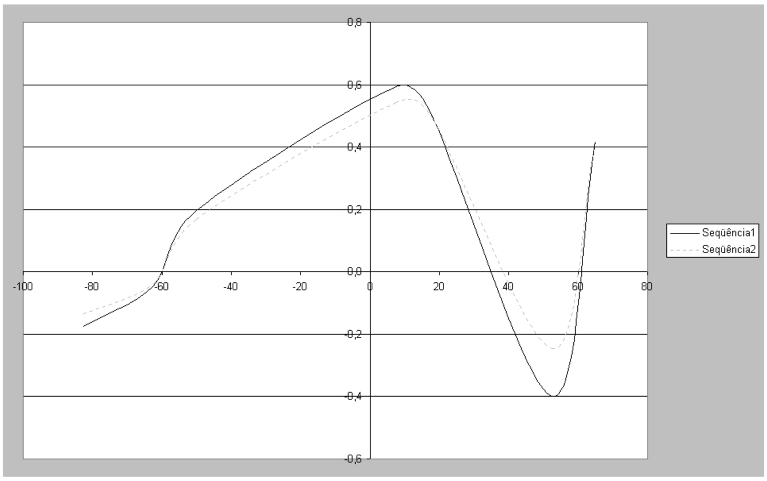
Resolvendo o problema de programação não linear obteve-se os p_{ij}. A Partir destes estimou-se os P_{ij}, e construiu-se a matriz de transição da cadeia de markov, considerando a condição inicial, onde todos os jogos tivessem a mesma probabilidade de escolha, ou seja $\frac{1}{7}$, resolvendo a cadeia de Markov, obteve-se as probabilidade de regime permanente, consideradas como sendo as utilidades de cada jogo. Veja os resultados na tabela 2.7.

Tabela 2.7: Utilidade dos Jogos.

g_i	Eduzido-1	Eduzido-2
g_1	0,167093	0,183905
g_2	0,194567	0,191409
g_3	0,148684	0,150829
g_4	0,090254	0,094669
g_5	0,167719	0,148888
g_6	0,116976	0,122871
g_7	0,114707	0,107429

Os resultados encontrados para os dois indivíduos que responderam ao questionário, apresentam uma inversão das utilidades quando se passou a consideração dos valores positivos, pois estas, não apresentaram a característica de monotonicidade. Entretanto após esta inversão manteve-se a tendência de crescimento monotônico. De acordo com o gráfico da figura 2.5. Na figura a seqüência 1 representa a função utilidade do eduzido-1 e a sequência 2 representa a função utilidade do eduzido-2.

Figura 2.5: Utilidade do Eduzido-1 e do Eduzido-2



Isto deve ter se dado, por ter sido necessário reduzir o número de questões de 45 para 20, devido a limitação dos *software* disponíveis para resolver o problema de programação não linear, o que levou à aglutinação das perguntas. As perguntas foram selecionadas de forma que o novo questionário fosse o mais simétrico possível com relação aos $p_i's$ envolvendo o maior número deles.

2.11 O Problema de Valor Multiatributo

Um problema complexo de decisão é aquele que envolve conflitos entre múltiplos objetivos, isto é, a decisão deve ser tomada sobre um objeto que envolve mais de um atributo, que não necessariamente estão relacionados e, onde é possível que um desses atributos seja dominante sobre os demais, ou seja pode-se ter um atributo mais desejável ou de maior importância que os demais, mas de forma geral o problema envolve todos os possíveis atributos. Pode-se ainda querer maximizar um dos atributos e minimizar outro, por exemplo, maximizar lucros e minimizar os riscos de um investimento. Este problema é dito um problema de *tradeoffs*. Em essência, a decisão é feita com a realização de um objetivo contra outro objetivo. O problema de *tradeoff* vem a ser uma questão de valor particular e, em outros casos, é requerido um julgamento subjetivo da decisão.

Estrutura do Problema

Seja a uma possível alternativa e denote por $\mathcal{A}$ o conjunto das possíveis alternativas. Para cada ação $a \in \mathcal{A}$ pode-se associar n funções $\mathcal{X}_1(a), \mathcal{X}_2(a), ..., \mathcal{X}_n(a)$ onde pode-se pensar nesses n valores como sendo um ponto num espaço n-dimensional.

Esses n atributos, na prática, descrevem as conseqüências das ações. Observe que se

$$(\mathcal{X}_1(a), \mathcal{X}_2(a), ..., \mathcal{X}_n(a))$$

é um ponto no espaço das conseqüências, as magnitudes de $\mathcal{X}_i$e $\mathcal{X}_j$ poderão até nunca serem comparadas, quando $i \neq j$, pois os atributos $\mathcal{X}_i$ e $\mathcal{X}_j$ podem ter medidas totalmente distintas.

A decisão mais próxima é escolher uma ação a em A de tal forma que o $payoff$ das funções $\mathcal{X}_1(a), \mathcal{X}_2(a), ..., \mathcal{X}_n(a)$ seja o melhor possível. Então faz-se necessário um índice que combine $\mathcal{X}_1(a), \mathcal{X}_2(a), ..., \mathcal{X}_n(a)$ e os disponha numa escala de valores.

É adequado definir uma função escalar sobre o espaço das conseqüências com a seguinte propriedade

$$v(\mathcal{X}_1(a), \mathcal{X}_2(a), ..., \mathcal{X}_n(a)) \geq v(\mathcal{X}'_1(a), \mathcal{X}'_2(a), ..., \mathcal{X}'_n(a)) \Leftrightarrow$$

$$(\mathcal{X}_1(a), \mathcal{X}_2(a), ..., \mathcal{X}_n(a)) \succeq v(\mathcal{X}'_1(a), \mathcal{X}'_2(a), ..., \mathcal{X}'_n(a))$$

2.12 Edução de Utilidade Multiatributo

Mostrar-se-á com uma aplicação em um caso específico a edução da utilidade para um caso de utilidade multiatributo. Neste caso trata-se de um problema envolvendo três atributos, para que fique bem claro a metodologia de edução, pois nada impede que o mesmo processo se estenda para mais atributos, embora venha a requerer um pouco mais de esforço mental na organização dos atributos.

2.12.1 Qual o Melhor Emprego?

Na escolha de um emprego, um lugar ou instituição para trabalhar, uma série de aspectos são levados em conta. Seguindo-se o exposto em Keeney e Raiffa (1976) pode-se ter uma idéia das diversas dimensões do problema.

Para que se possa escolher um "melhor emprego" deve-se levar em conta, pelo menos, as seguintes considerações:

1. **Natureza do Trabalho**
   (a) Educação Continuada
      i. Treinamento Gerencial
      ii. Variedade
      iii. Interesse Técnico
   (b) Treinamento Imediato
2. **Exigências Quanto a Viagens**
   (a) Viagens Longas
      i. Distância
      ii. % do Tempo fora

   (b) Deslocamentos Diários

3. **Localização Geográfica**
   (a) Clima
   (b) Grau de Urbanidade
   (c) Proximidade dos Parentes

4. **Compensação Monetária**
   (a) Futura
      i. Salário em 5 anos
      ii. Salário em 3 anos
   (b) Imediata
      i. *Fringe*
         A. Aposentadoria
         B. Seguro
      ii. Salário Inicial

Um outro conjunto de aspectos, que diz respeito à escolha de um emprego mas também à escolha da profissão, ou à avaliação das profissões, é o seguinte:

1. **Satisfação no Emprego** – Prazer derivado de se fazer o tipo de trabalho que se escolheu. Benefícios diretos de um emprego tais como a oportunidade de viajar, encontrar pessoas interessantes, e meios de auto-expressão, estão incluídos neste fator.

2. **Riqueza** – A remuneração financeira que se pode esperar por trabalhar e a acumulação de capital que pode ser ganha a partir do investimento dos fundos excedentes. Como dinheiro é, num certo sentido, um meio de se obter outros bens e serviços, a utilidade destes produtos pode substituir riqueza na determinação do seu valor.

3. **Segurança** – (Estabilidade) - Uma condição de relativa segurança que resulta de se estar apto a continuar no emprego se assim se deseja. Também incluído neste fator está o risco da própria saúde associado com uma ocupação particularmente perigosa.

4. **Considerações Familiares** – Este fator é um amálgama das possíveis influências que uma carreira particular possa ter nos outros membros da família. A atitude de um cônjuge, o sentimento da mãe, o futuro dos filhos, ou outras considerações podem ser levadas em conta no planejamento da carreira.

5. **Independência** – A condição que se tem de poder ser o próprio patrão e agendar suas próprias atividades. Independência refere-se também à flexibilidade de curto prazo que se tem para se fazer o que é mais importante para si próprio numa determinada situação.

6. **Auto-estima** – A auto-estima que se ganha a partir das próprias realizações. A auto-estima que se antecipa de um emprego é muito dependente da habilidade em ter sucesso no emprego.

7. **Prestígio** – A reputação que se adquire dentro de um grupo como resultado da competência, caráter, poder, riqueza, e coisas assim. O respeito profissional dos colegas pode ser um fator importante para alguns indivíduos.

Considerar-se-á aqui um número menor de atributos, pode-s pensar nestes com sendo o agregado de outros atributos, para a escolha de um emprego. O intuito é apresentar o problema de escolha de um emprego para o maior número possível de indivíduos, de forma mais sucinta e que seja independente da profissão ou do *status* social.

2.12.2 Um Conjunto de Atributos para a Escolha de Um Emprego

Os atributos são:

1. Ambiente;

2. Carreira;

3. Crescimento Pessoal.

O Ambiente (p_1)

Este atributo diz respeito essencialmente às relações humanas no ambiente de trabalho. Os aspectos positivos envolvem a facilidade de comunicação social, a boa relação entre os chefes e subordinados, a camaradagem, a confiança mútua, a perfeita integração e o sentimento de pertencer a um time e a perspectiva de construção de amizades fortes e duradouras. Isto significa que existe toda uma maneira de trabalhar, toda uma cultura, na organização ou empresa, que valoriza o ser humano nas suas relações com o próximo, tanto dentro,e principalmente, quanto aos clientes da empresa.

Os aspectos negativos incluem os antônimos do que foi dito, como a desconfiança, a falta de entrosamento entre chefes e subordinados, a dificuldade de relacionamento com os colegas, a inveja, a competição "selvagem", a politicagem, etc.

O atributo p_1 mede portanto o quanto o ambiente de trabalho é estimulante, aconchegante e agradável, sob o ponto de vista do entrosamento e relação construtiva entre todos os componentes da organização.

O atributo p_1 é medido subjetivamente numa escala que vai de 0 (pior caso) a 10 (melhor caso).

A Carreira (p_2)

O objetivo deste atributo é medir mais de perto a relação de emprego propriamente dita. As características envolvidas aqui dizem respeito à questão salarial (valor da remuneração comparativamente ao que se paga no mercado de trabalho) e à evolução do valor dessa remuneração ao longo do tempo. Quanto melhor for a estrutura do plano de carreira, maior será o valor de p_2. Isto significa que as regras do jogo são bem definidas e que haverá condições de trilhar uma carreira dentro da instituição. São claras as possibilidades do fluxo de benefícios que se terá ao longo da permanência na instituição. Isto inclui a ascensão funcional e respectivos aumentos de salário, as vantagens indiretas como seguros, assistência médica, transporte, estabilidade, aposentadoria, prêmios, etc.

O atributo p_2 é medido subjetivamente numa escala que vai de 0 (pior caso) a 10 (melhor caso).

O Crescimento Pessoal (p_3)

Trata-se de aferir a evolução do indivíduo como pessoa; um crescimento individual. Tem-se em mente aqui um processo de aprendizagem proporcionado pela organização e o trabalho que nela se realiza. Em algumas organizações, como em universidades, por exemplo, o contínuo aprender é inerente ao trabalho. Outras organizações proporcionam treinamentos e cursos, não apenas para melhorar o desempenho dos seus funcionários, mas para fazê-lo crescer como indivíduo. Enfim, o ambiente agrega valor ao empregado, de forma explícita, como parte do seu *modus operandi* da organização. Isto inclui também oportunidades de estabelecimentos de relacionamentos tanto dentro, mas, principalmente, fora da empresa. Inclui também o prestígio de trabalhar numa empresa de reconhecida qualidade e presença no mercado no setor.

O atributo p_3 é medido subjetivamente numa escala que vai de 0 (pior caso) a 10 (melhor caso).

Em seguida apresentaremos duas tabelas; a primeira delas traz os vetores que representam os empregos, ver Tabela 2.8 uma combinação dos atributos, e as notas que são atribuidas a cada um dos atributos. A segunda representa o questionário de Edução propriamente dito, ver Tabela 2.9.

Tabela 2.8: Vetor dos Multiatributos.

v	p_1	p_2	p_3		v	p_1	p_2	p_3		v	p_1	p_2	p_3
v_1	1	1	1		v_{14}	4	1	8		v_{27}	3	4	9
v_2	6	1	1		v_{15}	7	1	9		v_{28}	5	3	8
v_3	1	6	1		v_{16}	7	1	7		v_{29}	2	7	8
v_4	1	10	1		v_{17}	7	7	1		v_{30}	7	4	5
v_5	4	5	1		v_{19}	6	1	10		v_{31}	9	3	6
v_6	1	3	4		v_{19}	6	1	10		v_{32}	7	7	5
v_7	3	6	1		v_{20}	3	4	9		v_{33}	7	6	7
v_8	3	8	1		v_{21}	4	7	3		v_{34}	9	4	9
v_9	4	2	3		v_{22}	10	9	1		v_{35}	5	10	6
v_{10}	9	1	3		v_{23}	3	7	5		v_{36}	4	10	8
v_{11}	7	5	1		v_{24}	5	6	3		v_{37}	8	7	9
v_{12}	5	1	6		v_{25}	7	8	2		v_{38}	10	8	8
v_{13}	1	4	9		v_{26}	4	5	5		v_{39}	10	10	10

Tabela 2.9: Questionário de Edução Multiatributo.

JOGO 1					JOGO 2			
p_1	λ	p_2	$1-\lambda$	1 ou 0	p_3	λ	p_4	$1-\lambda$
1	1	1	1		0	0	0	0
v_{12}	24%	v_1	76%		v_{10}	22%	v_3	78%
v_9	53%	v_3	47%		v_{12}	41%	v_2	59%
v_{10}	71%	v_2	29%		v_{15}	26%	v_6	74%
v_{15}	39%	v_4	61%		v_{11}	47%	v_5	53%
v_{13}	51%	v_4	49%		v_{16}	11%	v_7	89%
v_{14}	41%	v_7	59%		v_{17}	27%	v_8	73%
v_{18}	86%	v_8	14%		v_{20}	7%	v_{13}	93%
v_{22}	33%	v_{18}	67%		v_{21}	67%	v_{17}	33%
v_{22}	79%	v_{19}	21%		v_{24}	23%	v_{20}	77%
v_{26}	91%	v_{19}	9%		v_{23}	86%	v_{21}	14%
v_{27}	25%	v_{20}	75%		v_{32}	10%	v_{23}	90%
v_{33}	89%	v_{27}	11%		v_{34}	39%	v_{29}	61%
v_{33}	28%	v_{24}	72%		v_{36}	18%	v_{26}	82%
v_{35}	12%	v_{29}	88%		v_{36}	64%	v_{25}	36%
v_{34}	93%	v_{25}	7%		v_{38}	30%	v_{30}	70%
v_{38}	61%	v_{28}	39%		v_{37}	28%	v_{31}	72%
v_{37}	37%	v_{30}	63%		v_{39}	52%	v_{28}	48%
v_{39}	85%	v_1	15%		v_{16}	48%	v_{14}	52%
v_{39}	62%	v_1	38%		v_9	39%	v_5	61%
v_{39}	99%	v_1	1%		v_{35}	1%	v_{31}	99%

2.13 Resultado da Edução da Utilidade do Emprego

Entrevistou-se uma pessoa, pelo questionário apresentado na Tabela 2.9. A tabela é elaborada de forma que se consiga obter uma utilidade para cada emprego. Ao se construir os jogos foi colocado em conflito a relevância dos atributos considerados em cada emprego, isto se dá por meio das probabilidades que determinam os jogos e dos valores que foram dados a cada atributo na construção dos "empregos" (vetores multiatributos). Trabalhos mais elaborados podem ser desenvolvidos para a construção de questionários multiatributos, incorporando aspectos de psicologia cognitiva. Na Figura2.6 apresenta-se o resultado da edução das preferências do emprego, pelo método da programação linear. Os valores da utilidade para cada tipo de emprego encontram-se na Tabela 2.10.

Ao responder o questionário o entrevistado deve levar em conta os atributos de cada um dos empregos. Para saber qual o atributo que influenciou na decisão do entrevistado, entre os jogos, deve-se realizar uma análise de regressão entre os valores da utilidade e os atributos de cada emprego. Para que se possa estabilizar o erro entre a utilidade máxima e mínima usou-se

Tabela 2.10: Utilidade do Emprego

Emprego	Utilidade Mínima	Utilidade Média	Utilidade Máxima
v_1	0,00	0,00	0,00
v_2	0,07	0,20	0,33
v_3	0,15	0,27	0,39
v_4	0,22	0,34	0,46
v_5	0,30	0,41	0,52
v_6	0,37	0,48	0,58
v_7	0,45	0,55	0,65
v_8	0,52	0,62	0,71
v_9	0,60	0,69	0,78
v_{10}	0,67	0,76	0,84
v_{11}	0,71	0,81	0,91
v_{12}	0,74	0,84	0,94
v_{13}	0,78	0,87	0,96
v_{14}	0,82	0,90	0,98
v_{15}	0,85	0,93	1,00
v_{16}	0,89	0,95	1,00
v_{17}	0,93	0,96	1,00
v_{18}	0,96	0,98	1,00
v_{19}	1,00	1,00	1,00
v_{20}	1,00	1,00	1,00
v_{21}	1,00	1,00	1,00
v_{22}	1,00	1,00	1,00
v_{23}	1,00	1,00	1,00
v_{24}	1,00	1,00	1,00
v_{25}	1,00	1,00	1,00
v_{26}	1,00	1,00	1,00
v_{27}	1,00	1,00	1,00
v_{28}	1,00	1,00	1,00
v_{29}	1,00	1,00	1,00
v_{30}	1,00	1,00	1,00
v_{31}	1,00	1,00	1,00
v_{32}	1,00	1,00	1,00
v_{33}	1,00	1,00	1,00
v_{34}	1,00	1,00	1,00
v_{35}	1,00	1,00	1,00
v_{36}	1,00	1,00	1,00
v_{37}	1,00	1,00	1,00
v_{38}	1,00	1,00	1,00
v_{39}	1,00	1,00	1,00

Figura 2.6: Utilidade do Emprego.

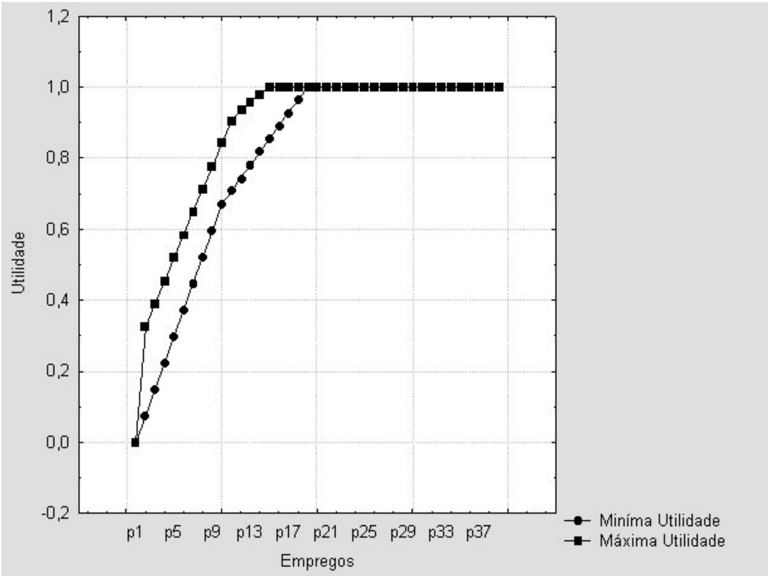


Tabela 2.11: Sumário das Regressões.

	Sumário da Regressão					
Utilidade do emprego	$R =,77919098$, $R^2 =,60713859$ $F(3,35) = 18,030$, $p < 0,0000$					
Coeficientes	B	Erro Padrão	Beta	Erro Padrão	$t(35)$	$p - valor$
Intercepto			0,2664	0,0885	3,0116	0,0048
Atributo - p_1	0,3487	0,1079	0,0355	0,0110	3,2310	0,0027
Atributo - p_2	0,2637	0,1072	0,0244	0,0099	2,4602	0,0190
Atributo - p_3	0,6076	0,1083	0,0507	0,0090	5,6092	0,0000

a média das duas utilidades. O resultado da regressão pode ser visto na Tabela 2.11. O método usado para obtenção dos parâmetros foi o dos mínimos quadrados ordinários. No sumário da regressão o B mede o impacto de cada atributo na utilidade do emprego. Dessa forma, a pessoa entrevistada levou em consideração primeiro o atributo p_3, em seguida o atributo p_1 e por último o atributo p_2. Os coeficientes β's da Tabela 2.11 são usados para estimar a utilidade de um dos v's através dos seus atributos, ou seja são coeficientes num modelo simples de regressão linear múltipla. A utilidade estimada encontra-se na escala cardinal. A escala dos atributos pode ser tanto ordinal como de razão, no caso em estudo os atributos encontra-se na mesma escala. Os resíduos da regressão apresentaram-se não significativos pelo teste de normalidade de Kolmogorov-Smirnov. Dessa forma, pode-se aceitar a hipótese de que os mesmos se comportam como uma normal.

2.14 Imprecisão e Vagueza

Com a intenção de abranger aspectos descritivos psicológicos e os aspectos normativos de racionalidade dos padrões de preferência dos decisores, vários modelos probabilísticos têm sido sugeridos. O que se busca é definir padrões de preferência que se baseiem nestes modelos probabilísticos, que levem em consideração as dificuldades que o decisor tem em perceber as diferenças de valor entre as alternativas, e as instabilidade sobre que aspectos das alternativas ele julga mais importantes. Mais detalhes podem ser encontrados em Campello de Souza 2002.

As probabilidades de escolha são algumas vezes consideradas como se tivessem sido geradas por modelos de utilidade. A noção de utilidade é a forma mais tradicional de representação de padrões de preferência. A relação entre esses dois conceitos, comportamento probabilístico de escolha e utilidade, se baseia na existência postulada de aleatoriedade na determinação dos valores subjetivos ou na regra da decisão.

A noção de preferência não é clara. A vagueza está intrínseca a este conceito. Entretanto as escolhas são efetivamente realizadas.

A resolução de problemas de decisão requer a iniciativa humana. Mas voltando-se ao aspecto científico para fins de modelagem a tomada de decisão é essencialmente um processo de três estágios que são:

1) identificação das alternativas disponíveis;

2) estimação das conseqüências de cada alternativa;

3) a escolha da conseqüência que o decisor considera ser preferível.

Em outras palavras, uma decisão é a adoção de um curso de ação baseada na avaliação das conseqüências das ações disponíveis.

Um problema de decisão apresenta duas importantes variáveis. Uma é o limite dentro do qual um indivíduo controla as conseqüências das ações e a outra é o grau sobre as conseqüências das ações que o indivíduo possui. Supõe-se que para cada ação disponível o decisor tenha um certo conhecimento de qual será a conseqüência da ação.

Quando o decisor tem pleno conhecimento sobre as possíveis conseqüências para cada curso de ação então ele é capaz de estabelecer uma ordem completa de preferência e a decisão resume-se apenas na escolha da ação que traga a melhor conseqüência.

Assim sendo, quando se conhece as preferências do decisor, as ações disponíveis e a relação existente entre elas, a decisão se estabelece naturalmente. A outra única opção que resta ao decisor é ser inconsistente.

Porém os problemas mais interessantes são os que envolvem incertezas, onde o que se deseja é obter uma decisão que seja uma conseqüência lógica daquilo que quer, que sabe e do que se pode fazer. Por conta das incertezas de algumas conseqüências provenientes das possíveis ações, existe a presença de riscos envolvidos no problema. Mais detalhes podem ser encontrados em Campello de Souza-(2002), Berger-(1985) , Nadler Lins- (2002).

É importante observar que a teoria de von Neumann e Morgenstern já envolve elementos de incerteza.

2.15 Vantagens e Desvantagens

No método das faixas superpostas existe um grande inconveniente de entendimento por parte do decisor, desde o entendimento do assunto observado e principalmente do método de edução propriamente dito. A própria definição da função utilidade é de certa forma um fator de complicação.

Determinarλ tal que:

$$u(P) = \mathrm{Sup}\{\lambda \in [0,1] : P \succ \lambda\overline{P} + (1-\lambda)\underline{P}\}$$

é uma tarefa não muito simples, para um indivíduo comum.

Outro fator complicador é o de determinar o melhor bem, ou seja o mais desejado que, é denotado por $\overline{P}$, e o menos desejado $\underline{P}$ e os valores intermediários, numa escala com uma idéia de ordem. Esta ordem é natural quando se trata de dinheiro, no entanto outros bens tais como: casa, automóveis, emprego, saúde,etc. não podem, por sua própria natureza ser colocados numa ordem escalar e portanto devem receber outro tipo de tratamento.

2.16 Conclusões

Foram feitas as comparações das preferências, eduzidas pelos três métodos anteriormente citados. A edução pelo método das faixas superpostas não trouxe maiores dificuldades, a não ser, pelo ponto de vista da mediação cognitiva, por não ser da natureza humana atribuir probabilidades as suas escolhas, assim sendo, faz-se necessária uma apresentação detalhada do questionário, um "treinamento", com os indivíduos que serão eduzidos.

A edução pelo método da programação linear por comparação abre espaço para usar métodos com relação de desigualdades; este método apresenta algumas vantagens:

- Ganha-se com relação à mediação cognitiva, por não ter que determinar um λ com o qual o decisor fique indiferente entre as escolhas, fator complicante do método das faixas superpostas;
- Mantendo as comparações par-a-par, encorpora-se as escolhas probabilísticas.

O modelo probabilístico de escolha, que usa o método de programação não linear, não apresenta problema na execução da solução, caso o eduzido não seja consistente em suas respostas; o que possibilita um grande ganho operacional, no entanto há uma limitação quanto aos *software* disponíveis, foi preciso reduzir o número de questões do questionário, o que provocou uma inversão nos resultados das utilidades na faixa positiva, utilizou-se a cadeia de Markov para se resolver o problema encontrando as probabilidades de regime permanente.

Passando para edução multiatributo, tratou-se a questão do emprego como um exemplo. Pela própria definição de von Neumann e Morgstern, tem-se que especificar o bem mais desejado, ("o melhor"), e o menos desejado, ("o pior"), no entanto pela própria natureza das coisas, não é nada fácil, colocar numa escala de preferência os objetos desejados, pois existe um *tradeoff* entre os atributos que caracterizam o bem. Mais detalhes podem ser encontrado em Keeney e Raiffa (1976) . Foi criado um questionário, onde considerou-se que os atributos tivessem a mesma importância, e procurou-se estabelecer questões que envolvessem os empregos nos mesmos níveis de valoração. É importante ressaltar que as coisas do mundo "real" são na sua maioria complexas, e que, seria ainda necessário abordar a questão da mediação cognitiva, que estão envolvidas nos *tradeoffs*, para uma melhor elaboração do questionário.

3 A EDUÇÃO DO CONHECIMENTO A PRIORI

"The magnitue of the probability of an argument ...depends upon a balance between what may be termed the favourable end the unfavourable evidence" [1]

John Maynard KEYNES(1883-1946).

3.1 Introdução

A incerteza está sempre presente em todas as coisas, uma vez que a certeza a respeito de algum evento é meramente ilusória. Sempre existirá algo que poderá ser interpretado como incerteza, portanto no universo todas as formas de vida deveriam estar preparadas para lidar com a incerteza.

Quando se deseja tomar uma decisão, a ação a ser adotada precisa ser tomada antes de resolvida a incerteza, deve-se portanto tentar atingir um equilíbrio, buscando o curso de ação que traga uma conseqüência que seja a melhor possível.

Na maioria das vezes as decisões que são tomadas estão baseadas em crenças que estão relacionadas à verossimilhança de eventos incertos. Essas crenças são na maioria das vezes expressas de forma qualitativa, normalmente diz-se "Eu acho que...", "Parece que...", "É provável que...", "Não é possível que...", etc. e outras vezes usa-se expressões de proporção ou de probabilidades: "As chances são de 5 para 1", "A probabilidade do evento é de 0,35 ou 35%" , ou ainda "O evento A é 35 vezes mais provável do que B".

A diferença que se faz entre julgamento e a tomada de decisão nem sempre é clara. De forma tradicional a psicologia concentra seus estudos na questão do julgamento mais do que no problema de tomada de decisão, porém na área da psicologia cognitiva o assunto tem recebido uma atenção especial e vem sendo estudado de forma mais abrangente Fischhoff(1977). Já a Teoria da Decisão estuda os dois aspectos, o julgamento (conhecimento *a priori*) e a preferência

[1]"A magnitude da probabilidade de um argumento...depende de um equilíbrio entre o que pode ser denominado de evidência favoráveis e desfavorável"

(função utilidade), separadamente, e depois os reúne num só paradgima.

O ser humano, tendo uma capacidade limitada de processar informações, apreende apenas uma parte do seu ambiente, por vezes antecipando mentalmente o que vai querer, e com isso insere a incerteza na sua percepção. O ser humano também não é capaz de "otimizar" procedimentos internamente, e portanto necessita de mecanismos simplificados de conhecimento e/ou heurísticas, o que também dá origem a novos níveis de incerteza. Por fim, é habilitado naturalmente para processar informações de forma seqüencial, não agregando uma quantidade simultânea de informações.

As reflexões sobre a teoria da decisão geram importantes contribuições no campo do conhecimento matemático e psicológico.

3.2 O Estado da Arte

É sabido que todo ser humano precisa lidar com a incerteza do amanhã, porém sob condições limitadas, enquanto ser humano, ele usufrui da condição de "livre-arbítrio" e é confirmadamente o único ser vivente sob a terra capaz de determinar que estilo de vida gostaria de ter nos instantes futuros do tempo. Porém como uma forma de compensação foi-lhe dada a capacidade de manter em sua mente os registros da sua vida no passado, usando uma base de dados armazenada na memória, que funciona como suporte na escolha de decisões no presente, e isto só é possível pelo uso da razão.

O uso do conhecimento *a priori* desenvolvido pela inferência Bayesiana tem como aspecto fundamental o tratamento para todo o conhecimento que se tem acumulado sobre uma característica, buscando determinar uma família de distribuições de probabilidade, conforme será visto posteriormente na seção de edução.

As medidas da probabilidade são feitas colocando o individuo (especialísta) em uma situação onde ele deve fazer escolhas envolvendo incertezas sobre o estado da natureza, através de jogos envolvendo as probabilidades. A pergunta feita ao especialista diz respeito ao que ele acha mais provável de ocorrer entre dois eventos.

Os julgamentos do decisor em relação aos eventos incertos são equacionados como **probabilidades subjetivas**. O processo de inferência se inicia pela atribuição de uma distribuição de probabilidades subjetivas sobre o parâmetro que será estimado. A distribução deverá espelhar da melhor maneira possível o conhecimento prévio do especialista a respeito do parâmetro em questão. Procedida a amostragem, obtém-se uma distribuição posterior (ao experimento).

Há algumas vantagens e desvantagens que são atribuídas para a teoria bayesiana, dentre estas a imprecisão.

Esta probabilidade *a priori*, também chamada de probabilidade subjetiva, traduz o "grau de crença" que o especialista tem sobre as chances de ocorrência dos eventos, ver Raiffa & Howard.(1970) e Almeida (1986) .

A idéia básica é obter uma faixa de indeterminação para o(s) parâmetro(s) da distribuição *a priori*, onde se admite que este(s) pode(m) assumir qualquer valor nesta faixa. Neste caso ter-se-á uma família de curvas caracterizando esta faixa de indeterminação. Isto porque é necessário permitir ao especialista que expresse a sua vagueza através de indeterminação na especificação das distribuições de probabilidade *a priori*. O que se obtém então é uma família de funções.

3.3 Edução do Conhecimento *a Priori*

3.3.1 O Experimento

O experimento foi realizado com os alunos da disciplina de sistemas probabilísticos, da seguinte maneira: duas urnas distintas, contendo bolinhas pretas e brancas em quantidades diferentes, foram apresentadas aos alunos. O experimento consistiu de duas fases e quatro etapas. E ao fim de cada etapa, aplicou-se o questionário de edução, buscando medir o percentual de bolas pretas dentro de cada urna; ou melhor, as distribuições de probabilidade na percepção dos alunos, sobre a fração de bolas pretas na urna.

Na primeira fase as urnas estavam dentro de um envoltório opaco, o qual não permitia a visualização das bolinhas; as urnas foram apresentadas aos alunos seguindo os seguintes procedimentos:

- 1^a**Etapa**: Uma das urnas é escolhida ao acaso; realizou-se uma amostra com a extração de 10 bolinhas e os alunos responderam ao questionário de edução. Uma segunda amostra foi realizada e retirou-se mais 40 bolinhas da mesma urna, totalizando 50 extrações, e novamente os alunos responderam ao questionário de edução. Os resultados das extrações aleatórias foram:

	Evento1	Evento2	total
bolas-pretas	3	20	23
bolas-brancas	7	20	27
Total de bolas extraídas	10	40	50

- 2^a **Etapa:** Tomando a outra urna, foram extraídas 10 bolinhas e os alunos responderam ao questionário de edução para medir o percentual de bolas pretas desta urna; ainda desta mesma urna extraiu-se mais 40 bolinhas, totalizando 50 extrações e novamente os alunos responderam ao questionário. Os resultados obtidos foram:

	Evento1	Evento2	total
bolas-pretas	9	20	29
bolas-brancas	1	20	21
Total de bolas extraídas	10	40	50

Na segunda fase do experimento as urnas foram apresentadas fora do envoltório e apenas a partir da visualização externa das urnas (que são de material transparente) os alunos tiveram de responder ao questionário de edução sobre o percentual das bolas pretas nas duas urnas.

- 3^a **Etapa:** Uma urna é escolhida aleatoriamente e através apenas da observação visual das bolinhas os estudantes tiveram que responder ao questionário de edução. Esta urna será denominada de URNA1.

- 4^a **Etapa:** A outra urna foi mostrada aos alunos, e eles, apenas através da visualização das bolinhas dentro da urna, novamente tiveram que responder ao questionário de edução. Esta urna será denominada de URNA2.

O experimento busca eduzir o conhecimento do especialista em etapas, começando com uma pequena informação com 10 amostras aleatórias e depois aumentando esse número para

50, $(10+40)$; além disso buscou-se perceber que diferença o aumento da amostra teve sobre as respostas dos especialistas, para maiores detalhes, (ver Campello de Souza (2003)), e finalmente a partir de nenhuma informação de extração, que corresponde a 3^a e 4^a etapa do experimento, apenas visualmente medir a capacidade de inferência do indivíduo.

O indivíduo deve escolher dentre os intervalos apresentados no questionário, o que ele acha mais provável se encontrar o percentual de bolas pretas, se sua indicação for pelo intervalo da esquerda ele deverá assinalar 1 na coluna central, caso sua percepção seja pelo intervalo da direita ele deverá assinalá-la com um 0.

3.3.2 Os Resultados do Experimento

Utilizando-se o método desenvolvido por Campello de Souza (2002), para edução do conhecimento *a priori*, foram obtidas duas distribuições de probabilidade para cada questionário respondido. Estas distribuições de probabilidades representam os valores de probabilidades máximos ($\pi_{max}(\theta)$) e os mínimos ($\pi_{min}(\theta)$) atribuídos pelo aluno ao percentual de bolas pretas na urna, que é o θ do experimento.

Com os resultados dessas distribuições podem ser obtidos alguns construtos propostos por Campello de Souza (2002), como por exemplo:

- **Vagueza**
- **Precisão**
- **Concordância**

O evento θ, como dito anteriormente, é o percentual de bolas pretas em cada urna. Está-se procurando obter, por meio de um especialista, uma distribuição de probabilidade que represente a sua opinião com relação à ocorrência de θ.

De acordo com o experimento realizado, a distribuição de probabilidade que representa o fenômeno é a distribuição Beta, dada pela seguinte expressão:

$$\pi(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$$

onde $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, e Γ é a função gama, que apresenta as seguintes propriedades:

$$1 - \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty X^{\alpha-1} e^{-x}$$

$$2 - \Gamma(n+1) = n!, \forall n \in Z$$

A distribuição beta apresenta as seguintes características:

$E(\theta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$; $\quad var(\theta) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

A partir do questionário de edução foram obtidos valores estimados para a distribuição $\pi(\theta)$. Na verdade, cada questionário fornece 40 valores de $\pi(\theta)$, sendo 20 da distribuição de máximo valor médio e 20 da distribuição de menor valor médio, com os quais foi calculada uma distribuição média que foi utilizada para realizar regressões do tipo não-linear nos parâmetros da distribuição beta; para estimá-los

$$\hat{\pi}(\theta) = \beta_0 \theta^{\hat{\alpha}-1}(1-\theta)^{\hat{\beta}-1}$$

onde β_0 é uma constante.

3.3.3 O Modelo Impreciso de Walley

Em 1996, Walley , no seu artigo *"Inferences from Multinomial Data: Learning a Bag of Marbles"* apresenta um método para fazer inferências sobre os estados da natureza, θ, quando há pouca ou nenhuma informação sobre os parâmetros da distribuição *a priori*. Toda a análise é feita sem levar em consideração a opinião do especialista, fazendo uso do modelo impreciso de Dirichlet apresentado no mesmo artigo, que fornece uma probabilidade *a posteriori* superior e inferior sobre θ.

As razões para o uso da distribuição de Dirichlet, segundo Walley são as seguintes:

a) As distribuições *a priori* de Dirichlet são matematicamente tratáveis porque geram as distribuições *a posteriori* de Dirichlet;

b) As distribuições de Dirichlet são muito comuns em modelos Bayesianos quando há ignorância a priori sobre θ;

c) Quando as categorias são combinadas, distribuições de Dirichlet transformam-se em outra distribuição de Dirichlet;

O Modelo Impreciso de Dirichlet - (IDM)

Walley(1996) , define o IDM como o conjunto de todas as distribuições de Dirichlet D(s,t), que têm com função de densidade de probabilidade

$$\pi(\theta) \propto \prod_{j=1}^{k} \theta_j^{st_j - 1}$$

tal que $\alpha_j = st_j$, $0 < t_j < 1$ para $j = 1, 2, \ldots, k$ e $\sum_{j=1}^{k} t_j = 1$, onde s é uma constante positiva que não depende do espaço amostral e t_j é média de θ_j.

Há um conjunto de distribuições *a posteriori*, ou seja, depois de realizado o experimento. Tal experimento consiste em realizar N retiradas e observar os resultados ω_j, assumindo que $P(\omega_j) = \theta_j$ para $j = 1, 2, \ldots, K$, onde cada $\theta_j \geq 0$ e $\sum_{j=1}^{K} \theta_j = 1$. Além disso, tem-se que n_j é o número de ocorrência do resultado ω_j em N retiradas e $\sum_{j=1}^{K} n_j = N$.

O conjunto de distribuições *a posteriori* é formado por todas as distribuições de Dirichlet $D(N + s, t^*)$ da forma

$$\pi(\theta|x) \propto \prod_{j=1}^{k} \theta_j^{n_j + st_j - 1}$$

onde $t^* = \frac{n_j + st_j}{N+s}$ e $0 < t_j < 1$ para $j = 1, 2, \ldots, k$ e $\sum_{j=1}^{k} t_j = 1$.

Neste conjunto de distribuições *a posteriori* de Dirichlet, são obtidas probabilidade superiores e inferiores do evento.

Segundo Walley (1996) o modelo impreciso beta é um caso especial do modelo impreciso de Dirichlet onde tem-se apenas duas categorias, ou seja $k = 2$. A distribuição beta é dada por

$$\pi(\theta) \propto \theta^{\alpha - 1}(1 - \theta)^{\beta - 1}$$

Desta forma, pode-se reescrever o IDM da seguinte forma

$$\pi(\theta) \propto \theta^{st_1 - 1}(1 - \theta)^{st_2 - 1}$$

onde $\alpha = st_1$, $\beta = st_2$ e $t_1 + t_2 = 1$.

Além disso, da distribuição beta, tem-se $E(\theta) = t_1$ e $Var(\theta) = (t_1 t_2)/(s+1)$.

No experimento realizado, θ é o percentual de bolas pretas na urna, n_1 é o número de bolas pretas observadas, n_2 o número de bolas brancas e $n_1 + n_2 = N$, onde N é o total de retiradas.

A correspondente distribuição *a posteriori* levará em consideração o resultado do experimento assumindo para tanto $t_j^* = (n_j + st_j)/(N+s)$.

Obtenção do Parâmetro s do Modelo Impreciso de Walley

No artigo de Walley (1996), os valores do parâmetro s do modelo impreciso não são estabelecidos; há apenas algumas considerações para alguns valores pré-estabelecidos de s. No entanto, com a introdução do conhecimento *a priori* do especialista no problema, pode-se estimar o parâmetro s do modelo beta impreciso, além de poder-se especificar os valores máximos e mínimos da variável t_j.

Utilizou-se as respostas dos questionários de edução dos dois últimos experimentos para realizar as regressões do tipo não lineares para a obtenção dos parâmetros da distribuição abaixo

$$\pi(\theta) = \beta_0 \theta^{\beta_1 - 1}(1-\theta)^{\beta_2 - 1}.$$

O resultado das estimações encontram-se na tabela 3.1 e, nestas estimações, todos os parâmetros apresentaram significância.

Tabela 3.1: Valores dos Parâmetros Estimados

	URNA1				URNA2			
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	s	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	s
1	0,020147	0,443686	0,712246	1,156	1,157089	3,123976	2,670685	5,7947
2	3,555635	3,954992	3,357556	7,313	1861,286	8,628	7,141	15,7682
3	0,250143	2,053985	1,734674	3,789	0,162202	1,781904	1,494522	3,2764
4	0,304134	2,181149	1,840343	4,021	0,309924	2,190828	1,878867	4,0697
5	241,2038	7,2025	5,9990	13,202	0,051505	0,900727	1,135796	2,0365
6	16,31158	5,10662	4,31841	9,425	0,020951	0,454830	0,735577	1,1904
7	0,094201	1,301745	1,361603	2,663	1103,344	8,285	6,846	15,1310
8	4,037116	3,969926	3,301299	7,271	0,027882	0,590343	0,862932	1,4533
9	0,065686	1,266264	1,029935	2,296	6,313834	4,369151	3,652586	8,0217
10	6,313834	4,369151	3,652586	8,022	158,3689	6,6789	5,5315	12,2104
11	0,245106	2,003694	1,799337	3,803	0,036943	0,808364	0,903113	1,7115
12	0,087426	1,421230	1,176185	2,597	0,035683	0,689329	1,006772	1,6961
13	22,20400	5,21245	4,32255	9,535	0,075916	1,216789	1,209968	2,4268
14	9,020615	4,590702	3,837611	8,428	0,075916	1,216789	1,209968	2,4268
15	0,071286	1,208905	1,153351	2,362	0,075916	1,216789	1,209968	2,4268
16	0,051505	0,900727	1,135796	2,037	0,075916	1,216789	1,209968	2,4268
17	0,374506	2,316114	1,982339	4,298	0,170993	1,753615	1,611119	3,3647

Com os valores do parâmetro s que foram encontrados para cada especialista calculou-se as probabilidades superiores ($\overline{P}(\theta|x)$) e inferiores ($\underline{P}(\theta|x)$) onde, para obter-se tais probabilidades, tomou-se o limite da equação

$$\overline{P}(\theta|x) = \frac{n_1 + st_1}{N + s}$$

conseguindo-se a probabilidade inferior ao fazer-se o limite quando t_1 tende ao menor valor médio esperado de θ e a probabilidade superior quando t_1 dente ao maior valor médio esperado de θ. Com isso, conseguiu-se os seguintes resultados:

Tabela 3.2: Probabilidades Superiores e Inferiores

	URNA1		URNA2	
	$\underline{\mathbf{P}}(\theta\|\mathbf{x})$	$\overline{\mathbf{P}}(\theta\|\mathbf{x})$	$\underline{\mathbf{P}}(\theta\|\mathbf{x})$	$\overline{\mathbf{P}}(\theta\|\mathbf{x})$
1	0,455	0,464	0,551	0,565
2	0,456	0,459	0,543	0,585
3	0,447	0,468	0,561	0,574
4	0,452	0,461	0,562	0,576
5	0,428	0,482	0,569	0,577
6	0,441	0,469	0,575	0,579
7	0,452	0,463	0,517	0,556
8	0,443	0,462	0,572	0,578
9	0,458	0,461	0,541	0,569
10	0,438	0,466	0,550	0,559
11	0,456	0,465	0,575	0,579
12	0,453	0,461	0,572	0,580
13	0,454	0,466	0,571	0,578
14	0,460	0,477	0,571	0,578
15	0,458	0,463	0,571	0,578
16	0,454	0,462	0,571	0,578
17	0,449	0,464	0,564	0,576

Para calcular as probabilidades, superiores e inferiores, de acordo com os critérios de Walley (1996), considerando $s = 1$ obteve-se os seguintes valores:

URNA1		URNA2	
$\underline{\mathbf{P}}(\theta\|\mathbf{x})$	$\overline{\mathbf{P}}(\theta\|\mathbf{x})$	$\underline{\mathbf{P}}(\theta\|\mathbf{x})$	$\overline{\mathbf{P}}(\theta\|\mathbf{x})$
0,45098	0,470588	0,5686	0,5882

Estas probabilidades superiores e inferiores são encontradas sem levar em conta a opinião do especialista.

3.3.4 Obtenção da Distribuição $\pi(\theta|x)$ pelo Método de Campello de Souza (2002)

Busca-se a partir dos dados, fazer afirmações sobre a probabilidade das causas e este é o famoso problema da probabilidade inversa. O método desenvolvido por Campello de Souza (2002) busca:

$$\underset{\{\pi_j\}}{\text{Max}}(\text{Min})\sum_{j=1}^{2n}(2n - j + 1)\pi_j \tag{3.3.1}$$

sujeito a:

$$a_{ik}\sum_{j=i}^{k}\pi_j \ - \ a_{lm}\sum_{j=l}^{m}\pi_j \ \leq b_s \tag{3.3.2}$$

(ou $\quad \geq b_s,\quad$ dependendo da resposta do especialista)

onde $k < l$, $a_{ik} > 0$, $a_{lm} > 0$, $s = 1, 2, \ldots, q$, sendo q o número de questões ao especialista;

$$\alpha_j\pi_j \leq \pi_{j+1},\ j = 1, 2, ..., 2n-1,\ \alpha_j > 0 \tag{3.3.3}$$

$$\beta_j\pi_{j+1} \leq \pi_j,\ j = 1, 2, ..., 2n-1,\ \beta_j > 0 \tag{3.3.4}$$

$$\pi_j \geq 0, j = 1, 2, ..., 2n \tag{3.3.5}$$

$$\sum_{j=1}^{2n}\pi_j = 1 \tag{3.3.6}$$

O problema de programação linear resolvido com estas restrições diz respeito ao caso epistêmico ou com experimentação direta sobre os θ's. No caso de dados indiretos, isto é, os dados são sobre X, o problema de programação linear a ser resolvido tem apenas as duas últimas restrições e, há que se incorporar a função de verossimilhança, $P(x|\theta)$, no processo. Cuja expressão é dada por:

$$\sum_{j=1}^{20}P(x \mid \theta_j)\pi(\theta_j) = P(x)$$

vem do conceito de probabilidade condicional e a idéia é substituir $P(x)$ pela sua estimativa $\hat{P}(x)$ obtida a partir da freqüência relativa $\frac{x}{n}$. Veja a estimativa para o caso da Urna1.

$$\hat{P}(x) = \binom{50}{23}\left(\frac{23}{50}\right)^{23}\left[1 - \left(\frac{23}{50}\right)\right]^{50-23},$$

ou seja

$$\sum_{j=1}^{20} P(23 \,|\, \theta_j)\pi(\theta_j) = \hat{P}(23)$$

que entretanto só vai ser válida se os θ's forem adequados, isto é, de 0 até 1, em intervalos de 1/50 (50 foi o tamanho da amostra). Seriam 50 θ's.

Nota-se que

$$\hat{\theta} = \frac{23}{50},$$

e é esta estimativa (freqüência relativa) de θ que tem que ser levada em conta para o cálculo de $\hat{P}(23)$; lembrando-se que x representa qualquer *string* que tenha 50 dígitos binários, dos quais 23 sejam 1's e 27 sejam 0's. A freqüência relativa maximiza a função de verossimilhança e portanto quando ela é usada no cálculo de $P(x)$ esta probabilidade é maximizada. Seria preciso que entre os θ's do primeiro membro existisse um igual a 23/50. O $\pi_j = \pi(\theta_j)$ correspondente seria igual a um e o programa rodaria.

O raciocínio de verossimilhança diz que a maior massa probabilística no espaço dos θ's deve estar situada ao redor da freqüência relativa (23/50 no caso do experimento). O modelo de programação linear (PL) tem uma lógica que se choca com esse raciocínio da verossimilhança, quando se usa uma restrição de desigualdade do tipo:

$$\sum_{j=1}^{20} P(23 \,|\, \theta_j)\pi(\theta_j) \leq \hat{P}(23) \approx 0.112631$$

Para se manter a lógica da verossimilhança, ao mesmo tempo casando-a com a do modelo de PL, as restrições deveriam ser as seguintes:

$$\frac{1}{P(x|\theta_j)}\,\pi(\theta_j) \leq \frac{1}{\hat{P}(x)}, \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, 20.$$

São portanto 20 restrições.

A desigualdade anterior é equivalente a dizer que

$$\pi(\theta_j)\hat{P}(x) \leq P(x|\theta_j), \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, 20;$$

ou seja

$$\pi(\theta_j)\,\underset{\theta_j}{\mathrm{Max}} P(x|\theta_j) \leq P(x|\theta_j), \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, 20;$$

isto é,

$$\pi(\theta_j)\,\underset{\theta_j}{\mathrm{Max}} \binom{50}{23} \theta_j^{23}(1-\theta_j)^{50-23} \leq P(x|\theta_j), \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, 20;$$

A igualdade só ocorrerá quando

$$\pi(\theta_j) = \pi\left(\frac{23}{50}\right) = 1.$$

No caso do experimento não existe $\theta_j = 23/50$, é claro, mas o modelo de PL não deixará de "rodar" por isso. Dessa forma, as probabilidades superiores e inferiores *a posteriori* são obtidas pelo seguinte problema de programação linear:

$$\underset{\pi_j}{\mathrm{Max}}(\mathrm{Min}) \sum_{j=1}^{2n} (2n - j + 1)\pi_j \tag{3.3.7}$$

sujeito a

$$\frac{1}{P(x|\theta_j)}\,\pi(\theta_j) \leq \frac{1}{\hat{P}(x)}, \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, 20.$$

$$\pi_j \geq 0, j = 1, 2, ..., 2n \tag{3.3.8}$$

$$\sum_{j=1}^{2n} \pi_j = 1 \tag{3.3.9}$$

A solução do problema para o experimento de 23 bolas pretas em 50 amostragens, e para o caso de 29 bolas pretas em 50 amostragens encontram-se na tabela abaixo. Walley, define o grau de imprecisão das distribuições *a posteriori* pela diferença entre a distribuição superior e inferior. No caso da distribuição *a posteriori* calculada pelo IDM o grau de imprecisão foi de 0,0196 tanto para o experimento de 23 bolas como para o experimento de 29 bolas. No resultado obtido pelo método apresentado nesta dissertação o grau de imprecisão foi de 0,0176 para o experimento de 23 bolas e 0,0193 para o experimento de 29 bolas.

URNA1		URNA2	
$\underline{\mathbf{P}}(\theta\|\mathbf{x})$	$\overline{\mathbf{P}}(\theta\|\mathbf{x})$	$\underline{\mathbf{P}}(\theta\|\mathbf{x})$	$\overline{\mathbf{P}}(\theta\|\mathbf{x})$
0,5062	0,5238	0,5807	0,6000

3.4 Conclusão

Os resultados apresentados neste capítulo, mostram que a opinião dos especialistas devem ser levadas em consideração em um problema de decisão. Outro resultado importante é o desenvolvimento de métodos que usam o instrumento da programação linear para obtenção de distribuições *a posteriori*, o que torna o mais aplicável possível um problema de decisão.

A proposta apresentada para obtenção do s do modelo IDM mostra que a opinião do especialista tanto pode, como deve ser incorporada para obtenção da informação sobre um determinado estado da natureza.

Tabela 3.3: Questionário Para Edução do Conhecimento *a Priori*

I_A	1 ou 0	I_B
[0;50]		[50;100]
[0;40]		[40;100]
[0;60]		[60;100]
[0;65]		[65;100]
[0;35]		[35;100]
[0;70]		[70;100]
[0;30]		[30;100]
[0;45]		[55;100]
[10;50]		[50;100]
[0;50]		[50;90]
[0;25]		[25;100]
[0;75]		[75;100]
[5;45]		[55;100]
[0;45]		[55;95]
[0;40]		[60;100]
[10;45]		[55;95]
[5;45]		[55;90]
[25;75]		[75;100]
[0;50]		[50;75]
[25;50]		[50;100]
[0;25]		[50;100]
[0;50]		[75;100]
[0;25]		[25;75]
[0;45]		[50;75]
[25;50]		[55;100]
[0;40]		[50;75]
[25;50]		[60;100]
[0;40]		[40;60]
[40;60]		[60;100]
[40;80]		[80;100]
[0;20]		[40;80]
[25;50]		[75;100]
[0;25]		[25;50]
[25;50]		[50;75]
[0;25]		[50;75]
[0;25]		[75;100]
[50;75]		[75;100]
[30;50]		[50;70]
[0;10]		[70;100]
[0;30]		[90;100]
[20;30]		[70;80]
[0;10]		[90;100]

4 CONCLUSÕES, COMENTÁRIOS E SUGESTÕES

4.1 Conclusões

A teoria da decisão pode ser aplicada nas mais diversas áreas e nos mais diversos contextos. A melhoria da qualidade da decisão fortalece a importância dos estudos desenvolvidos em torno dos procedimentos de edução, inclusive no aspecto que trata das mediações cognitivas.

1. **A edução da função utilidade**.

   A função utilidade pode ser medida para uma só pessoa ou para um grupo de indivíduos, tomadores de decisão. Ela pode apresentar uma abordagem unidimensional, como é o caso do dinheiro ou tratar de um bem que envolva vários atributos, ou seja, multidimensional, como, por exemplo, um automóvel, uma casa, um apartamento, ou mesmo a escolha de um emprego.

   Foi eduzida a utilidade do dinheiro para dois indivíduos pelos três métodos apresentados, sendo eles:

   - método das faixas superpostas;
   - método da programação linear;
   - o modelo probabilístico de escolha.

   Foram feitas as comparações entre os resultados obtidos.

2. **A edução do conhecimento *a priori***

   Os estudos mostram que a opinião do especialista é de fundamental relevância e que deve ser levada em consideração quando se tem um problema de decisão. Destaca-se ainda a importância no desenvolvimento, pelas áreas afins, dos protocolos de edução do conhecimento *a priori*. A proposta para a obtenção do parâmetro **s** do modelo IDM apresentado, mostra que a opinião do especialista deve ser levada em consideração e incorporada ao processo para a obtenção da informação sobre um determinado estado da natureza.

4.2 Sugestões Para Trabalhos Futuros

Os resultados obtidos recomendam a continuidade dos estudos sobre o tema, em particular:

1. Uma melhor elaboração do questionário para a edução da função utilidade, por comparação dos jogos;

2. Desenvolvimento dos aspectos da mediação cognitiva para a construção do questionário;

3. Criação de indicadores no sentido de analisar a dificuldade das perguntas envolvidas no questionário de edução das preferências;

4. Elaboração de software para apoio à edução das preferências e do conhecimento *a priori*.

4.3 Comentário final

Mostra-se assim que o assunto estudado não se esgota com o que foi exposto. O campo para novas contribuições em teoria da decisão com relação à edução das preferências e do conhecimento *a priori* é deveras vasto e sugere a continuidade das pesquisas. Em vários lugares do mundo muitas outras pessoas estão estudando o conteúdo aqui apresentado.

Referências Bibliográficas

ALMEIDA, ADIEL TEIXEIRA DE. 1986. *Avaliação de Desempenho de Sistemas*. M.Phil. thesis, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

ALVES SILVA, ALANE. 2002. *A teoria da Decisão em Cardiologia*. Tese de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco. PPGEP, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção.

BERGER, JAMES O. 1985. *Statistical Decision Theory and Baysian Analysis*. 2 edn. Springer Series is Statistics. New York: Springer- Velag New York, Inc.

BEZERRA, D. DE C. 2003. *Carteira de Investimento Usando Teoria da Decisão*. Tese de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco. PPGEP, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção.

CAMPELLO DE SOUZA, BRUNO. 2003a. Cognitive Apects of Elicitation Procedures. July. Submitted for Presentation at the International Symposium on Imprecise Probabities and their Applications.

CAMPELLO DE SOUZA, F. MENEZES. 2002. *Decisões Racionáis em Situação de Incerteza*.

CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDO MENEZES. 1979. *Probabilistic Models for Binary Choice Behavior*. Ph.D. thesis, Cornell Universiy, Ithaca, New York.

CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDO MENEZES. 1981. On the Structure of Probabililistic Models for Binary Choice Behavior. *Pergamon Press, Applied Systems and Cybernetics*, **II**(December), 746–759. Internacional Congress on Applied System Research and Cybernetics.

CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDO MENEZES. 1983. Mixed models, random utilities and the triangle inequality. *Journal of Mathematical Psychology*, **27**(2), 183–200.

CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDO MENEZES. 1986. Two Component Random Utilities, Theory and Decision. **21**, 129–153.

CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDO MENEZES. 2000. *Produção e Competitividade: Aplicações e Inovações*. Editora da Univercidade Federal de Pernambuco. Adiel Teixeira de Almeida e Fernando Menezes Campello de Souza (Organizadores). Chap. Modelos Probabilísticos de preferências e Escolhas, pages 175–214.

CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDO MENEZES. 2003b. *Probabilidade*. Em fase de preparação.

CHAJEWSKA, URSZULA. 2002. *Acting Rationally with Incomplete Utility Information*. M.Phil. thesis, Stanford University.

FERGUSON, THOMAS S. 1967. *Mathematical Statistics: A Decision Theoretic Approach*. New York and London: Academic Press.

JAMES ROYALTY, ROBERT HOLLAND, JUDY GOLDSMITH ALEX DEKHTYAR. 2002. *POET: The Online Preference Elicitation Tool**. Tech. rept. NSF grant CCR-0100040. Department of Computer Science, University of Kentucky, www.cs.unm.edu.

KEENEY, RALPH L & RAIFFA, HOWARD. 1976. *Decisions with multiple objectives: Preferences and Value Tradeoffs*. Jonh Wiley & Sons, Inc.

LICHTENSTEIN, S., FISCHHOFF B. & PHILLIPS L. D. 1977. Calibration of probabilities: the state of the art. In. *Decision Making and Change in Human Affairs*, 275–324. eds. H. Jungerman and G. de Zeeuw. Reidel, Dordrecht.

NADLER LINS, GERTRUDES COELHO & CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDO MENEZES. 2001. A Protocolo for the Elicitation of Prior Distribuitions. *ISPITA'01*, june 26-29, 265–273. Publicao na integra nos Proceedings of the Second International Symposium on Imprecise Probabilities and their Applications.

Nadler Lins, Guertrudes Coelho. 2000. *Contribuições A Um Protocolo de Edução do Conhecimento A Priori.* Tese de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco. PPGEP, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção.

Pennings, Joost M. E., & Smidts, Ale. 2002 (February). *The Shape of Utility Functions and Organizational Behavior.* Report ERS-2002-18-MKT. Erasmus Research Institute of Management, Rotterdam. 15 pages.

Raiffa, Howard. 1970. *Decision Analisys.* Addison-Wesley Publishing Company.

Veronika Köbberling & Peter, P. Wakker. 2002. A Tool for Qualitatively Testing, Quantitatively Measuring, and Normatively Justifying Expected Utility. August.

von Neumann, John, & , Oskar. 1947. *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton.

Wald, Abraham. 1950. *Statistical Decision Functions.* Wiley.

Walley, P. 1996. Inferences from Multinomial Data: Learning about a Bag of Marbles. *J. R. Statist. Soc., B*, 3–57.

Wolfson, Lara Jill. 1995 (June). *Elicitation of Priors and Utilities for Bayesian Analysis.* Ph.D. thesis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh Pennsylvania.