

# A Superfície de Veronese

KALASAS VASCONCELOS DE ARAUJO

Orientador:

PROF. DR. ISRAEL VAINSENER

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.*

**UFPE - Maio de 2002**

*Aos meus pais*

*Edilberto de Araujo (in memorian) e Enozelita Vasconcelos de Araujo*

# Agradecimentos

Antes de expressar meus agradecimentos gostaria de salientar que não menos de 85% do material exposto nesta dissertação foi obtido a partir do curso de Introdução à Geometria Algébrica bem como de notas escritas pelo professor Francesco Russo. A este meus profundos agradecimentos pela sua generosidade e profissionalismo com que se colocou ao meu dispor nos momentos em que precisei.

Ao meu orientador, Israel Vaisencher, meus mais que profundos agradecimentos. Com sua competência, sabedoria e paciência soube dar-me tanto a segurança interior quanto o suporte técnico que precisei para transpor minhas dificuldades durante toda esta minha jornada.

À minha esposa que em meio as minhas ocupações soube tranquilizar minha mente com paciência, amor e compreensão.

Ao professor e amigo Valdenberg de Araújo pela confiança depositada na minha vida acadêmica.

Finalmente, a todos que indiretamente colaboraram na execução deste trabalho, meus sinceros agradecimentos.

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>9</b>
<b>2 A Superfície de Veronese</b>	<b>14</b>
2.1 Definição . . . . .	14
2.2 Anatomia da Superfície de Veronese . . . . .	17
2.2.1 Seções Hiperplanas . . . . .	17
2.2.2 A Variedade Secante da Superfície de Veronese . . . . .	19
2.2.3 O lugar secante em um ponto de $S(\mathcal{V}) \setminus \mathcal{V}$ . . . . .	21
<b>3 Superfícies em <math>\mathbb{P}^5</math> com variedade secante deficiente</b>	<b>23</b>
3.1 A Variedade Secante . . . . .	23
3.1.1 Definição . . . . .	23
3.1.2 Estimativa Dimensional . . . . .	23
3.1.3 Caracterização Geométrica . . . . .	27

3.1.4	O Lugar Secante e a Deficiência da Variedade Secante . . . . .	31
3.2	O Lema de Terracini . . . . .	32
3.3	O Lema da Trissecante . . . . .	35
<b>4</b>	<b>A Superfície de Veronese, bis</b>	<b>37</b>
	<b>Epílogo</b>	<b>48</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>51</b>

# Introdução

Uma variedade lisa não-degenerada  $r$ -dimensional  $\tilde{X} \subset \mathbb{P}^N (N > 2r + 1)$  pode ser projetada isomorficamente sobre uma variedade  $X \subset \mathbb{P}^{2r+1}$ . Assim, se  $\tilde{X}$  é uma curva, seu "lugar natural" é  $\mathbb{P}^3$ , para superfície é  $\mathbb{P}^5$  e assim por diante. Deste modo, se  $\tilde{X}$  puder ser projetada em um espaço projetivo de dimensão  $< 2r + 1$  então  $\tilde{X}$  é de algum modo especial. Tal peculiaridade, no caso em que  $r = 2$ , foi estudada por Severi no início do século XX. Em, 1901, Francesco Severi provou que a única superfície em  $\mathbb{P}^5$  que pode ser projetada isomorficamente em  $\mathbb{P}^4$  é a superfície de Veronese, ver epílogo. Este resultado é hoje conhecido como o teorema de Severi sobre a superfície de Veronese.

Seja  $X \subset \mathbb{P}^N$  uma variedade projetiva lisa  $r$ -dimensional sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. A projeção centrada em um ponto  $p$  é um isomorfismo de  $X$  sobre sua imagem se e somente se  $p$  não está em nenhuma reta secante ou tangente a  $X$ . A variedade secante de  $X$ ,  $S(X)$ , que é a união de todas as retas secantes ou tangentes a  $X$ , tem dimensão no máximo  $2r + 1$ . Deste modo, uma condição necessária e suficiente para que uma superfície em  $\mathbb{P}^5$  possa ser projetada isomorficamente em  $\mathbb{P}^4$  é que sua variedade secante tenha dimensão  $\leq 4$ .

Não é de se surpreender, então, que o principal objeto estudado por Severi para a caracterização da superfície de Veronese acima mencionada foi a variedade secante. Mas, o quê de tão especial tem a variedade de Veronese apenas pelo simples fato de sua variedade secante ser deficiente, isto é, ter dimensão menor que a esperada? Quais as propriedades geométricas intrínsecas da superfície de Veronese que Severi usou para caracterizá-la

através da análise de sua variedade secante?

Severi concluiu a caracterização mostrando que uma superfície  $X \subset \mathbb{P}^5$  irredutível não degenerada com variedade secante deficiente admite uma família 2-dimensional de cônicas lisas. Era um resultado conhecido na época que uma superfície  $X \subset \mathbb{P}^5$  nas condições acima com uma família 2-dimensional de cônicas lisas é projetivamente equivalente à superfície de Veronese. Sobre corpos de característica zero a condição  $\dim SX = 4$  é equivalente à condição de que quaisquer par de espaços tangentes se intersectam. Nesta forma o teorema foi conhecido por del Pezzo em 1887. O objetivo deste trabalho é estabelecer as três caracterizações acima da superfície de Veronese. Obteremos isto em 4 etapas que correspondem aos 4 capítulos deste trabalho.

No primeiro capítulo, enunciaremos os resultados que serão essenciais para uma boa compreensão do texto. A saber, o lema de Sard, o teorema da dimensão das fibras, o teorema principal de eliminação, o teorema da reflexividade para variedades duais e o teorema principal de Zariski.

No segundo, a superfície de Veronese é dissecada. Caracterizamos explicitamente suas seções hiperplanas, sua variedade secante bem como o lugar secante em um ponto geral de sua variedade secante. Mostraremos que, em um tal ponto geral, o cone secante é um plano e o lugar secante é uma cônica irredutível neste plano.

Embora no segundo capítulo já se tenha estabelecido contato com a variedade secante, é no terceiro que a estudaremos com maior detalhe. Obteremos aqui a estimativa dimensional acima mencionada além de sua caracterização geométrica como a união das retas secantes honestas e tangentes a variedade. Demonstraremos o lema de Terracini que é uma importante ferramenta no estudo da geometria das retas secantes e tangentes a uma variedade algébrica. Outro resultado não menos importante exposto neste capítulo é o lema da trissecante.

No capítulo 4, obteremos as caracterizações acima mencionada. Mostraremos inicialmente que uma superfície  $X \subset \mathbb{P}^5$  irredutível não degenerada, não cone, com variedade secante deficiente admite uma família 2-dimensional de cônicas lisas. Analisando a projeção de  $X$  com centro o plano tangente  $T_x X$  em um ponto geral de  $X$  concluiremos

que tais cônicas são divisores de Cartier linearmente equivalentes. Tal sistema linear é livre de ponto base e a aplicação regular associada a tal sistema linear realiza  $X$  como uma superfície projetivamente equivalente à superfície de Veronese.

# Capítulo 1

## Preliminares

Para dar maior comodidade ao leitor enunciaremos neste capítulo os resultados que serão essenciais para uma boa compreensão do texto. São resultados centrais de um primeiro curso de Geometria Algébrica.

**Lema 1** . *O gráfico de um morfismo  $f : X \longrightarrow Y$  é fechado em  $X \times Y$ .*

**Demonstração:** [11], pag. 57.  $\square$

**Teorema 1** . *Seja  $X$  uma variedade projetiva e  $Y$  um variedade arbitrária. Então, a segunda projeção  $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$  é um morfismo fechado.*

**Demonstração:** [11], pag. 58.  $\square$

**Teorema 2** . *A imagem de uma variedade projetiva sob um morfismo é fechada.*

**Demonstração:** [11], pag. 57-58.  $\square$

**Teorema 3** . Seja  $X$  uma variedade e  $g \in \Gamma(U)$  com  $U \subset X$  aberto. Se  $g \neq 0$  e não é uma unidade em  $\Gamma(U)$  então  $\mathcal{Z}(g)$  tem dimensão pura  $\dim X - 1$ .

**Demonstração:** [8], pag 57.  $\square$

**Teorema 4** . Sejam  $X \subset \mathbb{P}^n$  uma variedade projetiva irredutível e  $F(X_0, \dots, X_n) \in k[X_0, \dots, X_n]$  um polinômio homogêneo. Se  $F$  é não constante e  $F \notin I(X)$  então

$$\mathcal{Z}(f) = X \cap \mathcal{Z}(F) \neq \emptyset$$

e tem codimensão pura 1 em  $X$ , a menos que  $\dim X = 0$ .

**Demonstração:** [8], pag. 65.  $\square$

**Teorema 5** . Se  $f : X \rightarrow Y$  é um morfismo finito entre variedades arbitrárias, então:

- (i)  $f$  é um mapa fechado.
- (ii) Para todo  $y \in Y$ ,  $f^{-1}(y) = \emptyset$  ou  $f^{-1}(y)$  consiste em um conjunto finito de pontos.
- (iii) Se  $Z \subset X$  é um subconjunto fechado irredutível de  $X$  então  $\dim f(Z) = \dim Z$ .
- (iv)  $f$  é sobrejetiva  $\Leftrightarrow$  o co-homomorfismo  $f^*$  é injetivo  $\Leftrightarrow f$  é dominante.

**Demonstração:** [8], pag. 58.  $\square$

**Teorema 6** . Seja  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo dominante entre variedades arbitrárias e seja  $r = \dim X - \dim Y$ . Seja  $W \subset Y$  um subconjunto irredutível . Então:

- (i) Se  $Z$  é uma componente irredutível de  $f^{-1}(W)$  que domina  $W$  então,

$$\dim Z \geq \dim W + r$$

ou, equivalentemente

$$\text{codim}_X Z \leq \text{codim}_Y W$$

(ii) Existe um conjunto aberto não vazio  $U \subset Y$  tal que  $U \subset f(X)$  onde vale a igualdade em (i) sempre que  $W \cap U$  e  $Z \cap f^{-1}(U)$  sejam não vazios.

**Demonstração:** [8], pag. 68-69.  $\square$

**Teorema 7** (*Dimensão das fibras*). Seja  $f : X \rightarrow Y$  como no teorema anterior. Então:

- (i) Toda fibra tem dimensão pura  $\geq \dim X - \dim Y$ .
- (ii) Uma fibra geral tem dimensão pura  $\dim X - \dim Y$ .

**Demonstração:** [11], pag. 76.  $\square$

**Teorema 8** . Seja  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo sobrejetivo entre variedades arbitrárias. Suponha que  $Y$  é irredutível e que todas as fibras são irredutíveis e de mesma dimensão. Então  $X$  é irredutível e  $\dim X = \dim f^{-1}(y) + \dim Y$ .

**Demonstração:** [11], pag. 77.  $\square$

Se  $X \subset \mathbb{P}^N$  é uma variedade projetiva então a variedade dual  $\check{X} \subset \check{\mathbb{P}}^N$  é definida como o fecho do conjunto de pontos  $u \in \check{\mathbb{P}}$  tal que  $H_u \supset T_x X$ , onde estabelecemos as seguintes notações :

$H_u$  - é o hiperplano em  $\mathbb{P}^N$  correspondendo a  $u \in \check{\mathbb{P}}$

$S_m(X)$  - Conjunto aberto dos pontos não-singulares de  $X$ . Onde  $p \in X$  é não-singular se  $\dim T_p X = \dim X$ .

$T_x X$  - Espaço tangente mergulhado em  $\mathbb{P}^N$ .

**Teorema 9** (*Reflexividade*)

- (a) Para qualquer variedade irredutível  $X \subset \mathbb{P}^N$ , tem-se  $X^{**} = X$ .

(b) Mais precisamente, se  $z$  é um ponto liso de  $X$  e  $H$  é um ponto liso de  $\tilde{X}$ , então  $H$  é tangente a  $X$  em  $z$  se e somente se  $z$ , visto como um hiperplano em  $\mathbb{P}^N$ , é tangente a  $\tilde{X}$  em  $H$ .

**Demonstração:** [13], pag. 4.  $\square$

**Lema 2 (Sard).** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo dominante entre variedades definidas sobre um corpo de característica zero. Então, existe um aberto não-vazio  $U \subset Y$  tal que para todo ponto não-singular  $p \in f^{-1}(U) \cap (X - \text{Sing}(X))$  na imagem inversa de  $U$  a diferencial  $df_p$  é sobrejetiva.*

**Demonstração:** [5], pag. 176.  $\square$

**Definição 1 .** *Uma curva  $C \subset \mathbb{P}^n$  se diz estranha se existe um ponto  $p \in \mathbb{P}^n$  tal que*

$$p \in \bigcap_{q \in C - \text{Sing}(C)} T_q C$$

Pelo lema de Sard podemos concluir que não existem curvas lisas irredutíveis não-degeneradas estranhas definidas sobre corpos de característica zero. De fato, se  $C \subset \mathbb{P}^n$  é uma tal curva seja  $\pi_p : C \rightarrow H$  a projeção com centro em  $p \in \bigcap_{q \in C} T_q C$  sobre um hiperplano  $H \not\ni p$ . Desde que  $\pi_p$  é linear então  $d_q \pi_p : T_q C \rightarrow T_{\pi_p(q)}(\pi_p(C))$  é tal que  $d_q \pi_p = \pi_p|_{T_q C}$ . Como  $\pi_p(C) \subset H$  é irredutível e  $C$  não é uma reta então  $\pi(C)$  é uma curva (possivelmente singular). Logo, para todo  $q \in C$ ,  $d_q \pi_p(T_q C) = \{ \text{ponto} \} \subsetneq T_{\pi_p(q)}(\pi_p C)$  pois  $\dim T_{\pi_p(q)}(\pi_p C) \geq 1$ . Isto contradiz o Lema de Sard.

**Definição 2 -** *Uma variedade  $X \subset \mathbb{P}^n$  é dita fatorial se para todo  $x \in X$  o anel local  $\mathcal{O}_x(X)$  é UFD.*

**Teorema 10 (Principal de Zariski) -** *Seja  $X$  uma variedade fatorial  $n$ -dimensional e seja  $f : X' \rightarrow X$  um morfismo birracional. Então existe um aberto não vazio  $U \subset X$  tal que*

1)  $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \longrightarrow U$  é um isomorfismo,

2) se  $E_1, \dots, E_k$  são as componentes de  $X' \setminus f^{-1}(U)$ , então  $\dim E_i = n - 1$ , para todo  $i$ , enquanto que  $\dim \overline{f(E_i)} \leq n - 2$ .

Em particular, se  $x \in X \setminus U$ , todas as componentes de  $f^{-1}(x)$  têm dimensão ao menos 1.

**Demonstração:** [8], pag. 290-291.  $\square$

**Obs:** Ao longo de todo este trabalho estaremos sempre supondo as variedades definidas sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. Entretanto, o teorema de Severi sobre a superfície de Veronese também é válido sobre corpos de característica positiva. Para uma demonstração mais geral do Teorema de Severi ver [2] ou [3].

# Capítulo 2

## A Superfície de Veronese

### 2.1 Definição

Denotemos por  $\mathbf{k}[X_0, \dots, X_n]_d$  o espaço vetorial  $N$ -dimensional dos polinômios homogêneos de grau  $d$  em  $\mathbf{k}[\mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}_n]$ , onde  $N = \binom{n+d}{n}$ . Deste modo,

$$\mathbb{P}^{N-1} = \mathbb{P}(\mathbf{k}[X_0, \dots, X_n]_d)$$

Em particular,  $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbf{k}[\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]_1)$  e  $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(\mathbf{k}[\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]_2)$ . Daqui por diante veremos um ponto  $[a_0, a_1, a_2] \in \mathbb{P}^2$  como a reta

$$\ell : a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 = 0$$

e  $[a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22}] \in \mathbb{P}^5$  como a cônica

$$\sum a_{ii}X_i^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij}X_iX_j = 0.$$

Outra maneira de representar um ponto  $F = \sum a_{ii}X_i^2 + \sum_{\substack{i \neq j \\ i < j}} 2a_{ij}X_iX_j = 0$  em  $\mathbb{P}^5$  é na seguinte forma matricial:

$$S_F = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

a menos de um fator escalar não nulo.

Lembramos que a ação de  $\mathbf{PGL}(3, \mathbf{k})$  em  $\mathbb{P}^5$  determina três órbitas, segundo o posto da matriz. Tais órbitas são representadas respectivamente pelos seguintes conjuntos de pontos em  $\mathbb{P}^5$ :

$$\mathcal{V} = \{ F : F = \ell^2 \text{ para alguma reta } \ell \}$$

$$\Delta \setminus \mathcal{V} = \{ F : F \text{ consiste de um par de retas distintas} \}$$

$$\mathbb{P}^5 \setminus \Delta = \{ F : F \text{ é lisa} \}$$

onde  $\Delta$  é a hipersuperfície cúbica de equação

$$\det S_F = a_{00}a_{11}a_{22} + 2a_{01}a_{02}a_{12} - a_{02}^2a_{11} - a_{00}a_{12}^2 - a_{01}^2a_{22} = 0$$

e  $\mathcal{V} = \mathcal{Z}(\det(a_{i|j}))$  onde  $(a_{i|j})$  são os menores  $2 \times 2$  da matriz em que se suprime a  $i$ -ésima linha e a  $j$ -ésima coluna da matriz

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

representando as coordenadas homogêneas de  $\mathbb{P}^5$ . Ver [14]

Definamos a aplicação:

$$\begin{aligned} \nu : \mathbb{P}^2 &\longrightarrow \mathbb{P}^5 \\ \ell &\longmapsto \ell^2 \end{aligned}$$

que em coordenadas homogêneas significa:

$$[a_0 : a_1 : a_2] \longrightarrow [a_0^2 : a_0a_1 : a_0a_2 : a_1^2 : a_1a_2 : a_2^2]$$

Claramente  $\nu$  está bem definida e é injetiva. A superfície de Veronese é definida como sendo a imagem da aplicação  $\nu$ . Pela definição de  $\nu$  segue que  $\nu(\mathbb{P}^2) = \mathcal{V}$ , isto é, a superfície de Veronese é dada, conjuntivamente, pela seguinte interseção de quádricas:

$$\mathcal{V} = \begin{cases} a_{00}a_{11} - a_{01}^2 = 0 \\ a_{00}a_{12} - a_{01}a_{02} = 0 \\ a_{00}a_{22} - a_{02}^2 = 0 \\ a_{01}a_{12} - a_{11}a_{02} = 0 \\ a_{01}a_{22} - a_{02}a_{12} = 0 \\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 \end{cases}$$

Através do cálculo da matriz jacobiana de  $\Delta$  pode-se concluir que  $\mathcal{V} = \text{Sing}(\Delta)$ . O fato de  $\nu$  ser um isomorfismo será fundamental na compreensão da geometria de  $\mathcal{V}$ .

**Proposição 1** - *O morfismo  $\nu$  definido acima é um isomorfismo sobre sua imagem.*

**Demonstração:** Sejam  $U_i$  ( $0 \leq i \leq 2$ ) e  $U_{ij}$  ( $0 \leq i \leq 2$  e  $0 \leq j \leq 2$ ) os abertos básicos de  $\mathbb{P}^2$  e  $\mathbb{P}^5$  respectivamente. Note que  $p \in \mathcal{V} \implies p \in U_{00} \cup U_{11} \cup U_{22}$ . Logo,  $\mathcal{V} = \mathcal{V} \cap U_{00} \cup \mathcal{V} \cap U_{11} \cup \mathcal{V} \cap U_{22}$ . Além disso,  $\nu^{-1}(\mathcal{V} \cap U_{ii}) = U_i$ . Assim, basta mostrar que as restrições  $\nu_i = \nu|_{U_i} : U_i \longrightarrow \mathcal{V}_{ii}$  ( $0 \leq i \leq 2$ ) onde  $\mathcal{V}_{ii} = \mathcal{V} \cap U_{ii}$  são isomorfismos. Para isto, basta definir os morfismos:

$$\nu'_0 : \mathcal{V}_{00} \longrightarrow U_0 \quad \text{tal que} \quad [a_{00} : a_{01} : a_{02} : a_{11} : a_{12} : a_{22}] \longmapsto [a_{00} : a_{01} : a_{02}]$$

$$\nu'_1 : \mathcal{V}_{11} \longrightarrow U_1 \quad \text{tal que} \quad [a_{00} : a_{01} : a_{02} : a_{11} : a_{12} : a_{22}] \longmapsto [a_{01} : a_{11} : a_{12}]$$

$$\nu'_2 : \mathcal{V}_{22} \longrightarrow U_2 \quad \text{tal que} \quad [a_{00} : a_{01} : a_{02} : a_{11} : a_{12} : a_{22}] \longmapsto [a_{02} : a_{12} : a_{22}]$$

pois tem-se  $\nu'_i = \nu^{-1}|_{U_i}$  e para todo  $p \in \mathcal{V}_{ii} \cap \mathcal{V}_{jj}$ ,  $\nu'_i(p) = \nu'_j(p)$  visto que a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

tem posto 1 já que  $p \in \mathcal{V}$ .  $\square$

Mais geralmente, dados  $n, d > 0$ , sejam  $X_0, \dots, X_N$ ,  $N = \binom{n+d}{n} - 1$ , todos os monômios de grau  $d$  em  $n + 1$  variáveis  $x_0, \dots, x_n$ . A aplicação

$$\nu_{d,n} : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N \quad ; \quad p = [a_0, \dots, a_n] \longmapsto \nu_{d,n}(p) = [X_0(p), \dots, X_N(p)]$$

é chamada mergulho Veronese de grau  $d$ . Se  $n = 1$  e  $d = 2$ , por exemplo, a imagem de  $\nu_{2,1}$  é uma cônica lisa em  $\mathbb{P}^2$ .

## 2.2 Anatomia da Superfície de Veronese

### 2.2.1 Seções Hiperplanas

Se  $H : \Sigma \alpha_{ij} a_{ij} = 0$  é um hiperplano de  $\mathbb{P}^5$  então

$$\nu^{-1}(H \cap \mathcal{V}) = \{p \in \mathbb{P}^2 : \nu(p) \in H\} = \{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2 : \Sigma \alpha_{ij} a_i a_j = 0\}$$

é uma cônica de  $\mathbb{P}^2$ . Assim,  $\mathcal{V} \subset H \Leftrightarrow \mathbb{P}^2 \subset (\Sigma \alpha_{ij} a_i a_j = 0) \Leftrightarrow \alpha_{ij} = 0$  o que é uma contradição pois  $H$  é um hiperplano. Logo,  $\mathcal{V}$  é não degenerada. Desde que  $\nu^{-1}(H \cap \mathcal{V})$  é uma cônica e cônicas em  $\mathbb{P}^2$  são retas duplas, pares de retas ou cônicas lisas então para conhecermos todas as seções hiperplanas de  $\mathcal{V}$  basta conhecermos a imagem por  $\nu$  de uma reta e de uma cônica lisa em  $\mathbb{P}^2$ .

**Proposição 2** - (i) Se  $\ell \subset \mathbb{P}^2$  é uma reta então  $\nu(\ell) \subset \mathbb{P}^5$  é uma cônica de posto três em  $\mathbb{P}^5$ .

(ii) Se  $C \subset \mathbb{P}^2$  é uma cônica lisa então  $\nu(C) \subset \mathbb{P}^5$  é projetivamente equivalente a uma curva normal racional de grau 4 em  $\mathbb{P}^5$ .

**Demonstração.** (i) Seja  $\ell = \{[0 : \lambda : \mu] \mid [\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1\} \subset \mathbb{P}^2$  a reta de equação cartesiana  $a_0 = 0$ . Então,  $\nu(\ell) = \{[0 : 0 : 0 : \lambda^2 : \lambda\mu : \mu^2] \mid [\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1\} \subset Q \cap \pi$  onde  $Q$  é a quádrlica de posto três definida por  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$  e  $\pi$  é o plano de equações  $a_{00} = a_{01} = a_{02} = 0$ . Note que  $Q$  é um cone de vértice  $N(Q) = (a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0)$  sobre a cônica plana lisa  $Q \cap \pi$  definida por  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ . Por outro lado, para todo ponto  $[0 : 0 : 0 : \tilde{a}_{11} : \tilde{a}_{12} : \tilde{a}_{22}] \in \pi \cap Q$ , isto é, satisfazendo a equação  $\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} - \tilde{a}_{12}^2 = 0$  existe  $\lambda, \mu \in \mathbf{k}$  tal que  $\lambda^2 = \tilde{a}_{11}$  e  $\mu^2 = \tilde{a}_{22}$ . Então  $q = [0 : \lambda : \mu] \in \ell$  é tal que  $\nu(q) = [0 : 0 : 0 : \lambda^2 : \lambda\mu : \mu^2] = [0 : 0 : 0 : \tilde{a}_{11} : \tilde{a}_{12} : \tilde{a}_{22}]$ . Logo,  $\nu(\ell) = \pi \cap Q$ . Agora, para toda reta  $\ell' \subset \mathbb{P}^2$  existe uma projetividade  $\omega : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  tal que  $\omega(\ell') = \ell$  e  $\nu \circ \omega : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathcal{V}$  é uma isomorfismo. Isto conclui a demonstração do item (i).

(ii) Pelo raciocínio final do item anterior basta calcularmos  $\nu(C)$  com  $C \subset \mathbb{P}^2$  a cônica lisa  $a_1^2 - a_0a_2 = 0$ . A aplicação  $\Psi : \mathbb{P}^1 \rightarrow C \subset \mathbb{P}^2 ; [\lambda : \mu] \mapsto [\lambda^2 : \lambda\mu : \mu^2]$  é um isomorfismo (primeiro mergulho Veronese de grau 2) e portanto

$$\nu(C) = \nu \circ \Psi(\mathbb{P}^1) = \{[\lambda^4 : \lambda^3\mu : \lambda^2\mu^2 : \lambda\mu^3 : \mu^4] : [\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1\}.$$

Note que  $\nu(C) \subset H \subset \mathbb{P}^5$  onde  $H$  é o hiperplano de equação  $a_{02} - a_{11} = 0$ . Seja  $C' = \nu^{-1}(H \cap \mathcal{V})$  a cônica dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Então  $C' \subset \mathbb{P}^2$  é uma cônica irredutível. Mas,  $\nu(C) \subset H \cap \mathcal{V} \implies C \subset C'$  donde  $C = C'$ . Logo,

$$\nu(C) = \{[a_{ij}] \mid a_{00} = \lambda^4, a_{01} = \lambda^3\mu, a_{02} = \lambda^2\mu^2, a_{11} = \lambda^2\mu^2, a_{12} = \lambda\mu^3, a_{22} = \mu^4\}$$

que é projetivamente equivalente a uma curva normal racional de grau 4 em  $\mathbb{P}^5$ . Basta fazer a mudança de coordenadas:  $a'_{02} = a_{02} - a_{11}$  e  $a'_{ij} = a_{ij}$  para  $i \neq 0$  e  $j \neq 2$ .  $\square$

**Corolário 1** - (i) Se  $C \subset \mathcal{V}$  é uma cônica lisa então  $\nu^{-1}(C)$  é uma reta em  $\mathbb{P}^2$ .

(ii) Por dois pontos distintos de  $\mathcal{V}$  passa uma única cônica lisa  $C \subset \mathcal{V}$ .

**Demonstração.** (i) Seja  $H \subset \mathbb{P}^5$  um hiperplano tal que  $C \subset H$ . Então  $C \subset H \cap \mathcal{V}$  e  $\nu^{-1}(C) \subset C' = \nu^{-1}(H \cap \mathcal{V})$  onde  $C'$  é uma cônica. Assim,  $C \subset \nu(C') = H \cap \mathcal{V}$  e portanto  $\nu(C')$  não pode ser uma curva normal racional de grau 4. Logo  $C'$  é redutível e tem  $\nu^{-1}(C)$  como componente. Portanto,  $\nu^{-1}(C)$  é uma reta em  $\mathbb{P}^2$ .

(ii) Se  $p, q \in \mathbb{P}^5$  são os pontos dados com  $p \neq q$  então  $p' = \nu^{-1}(p) \neq \nu^{-1}(q) = q'$ . Seja  $\ell_{p',q'}$  a única reta em  $\mathbb{P}^2$  que passa por  $p'$  e  $q'$ . Pelo item(i) da proposição anterior  $C = \nu(\ell_{p',q'})$  é uma cônica passando por  $p$  e  $q$ . Pelo item anterior  $\nu^{-1}(C) = \ell'$  é uma reta em  $\mathbb{P}^2$  passando por  $p'$  e  $q'$  donde  $\ell' = \ell_{p',q'}$  donde  $C' = \nu(\ell') = \nu(\ell_{p',q'}) = C$ .  $\square$

## 2.2.2 A Variedade Secante da Superfície de Veronese

Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  uma variedade projetiva irredutível lisa e não-degenerada. Uma reta  $\ell \subset \mathbb{P}^n$  é dita tangente a  $X$  se existir  $p \in X$  tal que  $p \in \ell \subset T_p X$ . Uma secante honesta a  $X$  é uma reta  $\ell \subset \mathbb{P}^n$  com ao menos dois pontos distintos em comum com  $X$ , isto é,  $\ell = \ell_{p,q}$  com  $p, q \in X$  e  $p \neq q$ . Denotaremos  $S^h(X) =$  conjunto das secantes honestas a  $X$  e  $\text{Tan}(X) =$  conjunto das tangentes a  $X$  (como conjunto de pontos de  $\mathbb{P}^n$ ). A variedade secante de  $X$  é o fechado  $S(X) = \overline{S^h(X) \cup \text{Tan}(X)}$ . No próximo capítulo estudaremos com maior detalhe estes novos objetos. Mais precisamente, mostraremos, na seção 3.1.3, que  $S^h(X) \cup \text{Tan}(X) = \overline{S^h(X)}$ . Nesta seção estamos interessados somente em determinar  $S(\mathcal{V})$ . Desejamos provar que  $S(\mathcal{V})$  é a hipersuperfície cúbica  $\Delta \subset \mathbb{P}^5$  das cônicas de posto  $\leq 2$ . Lembramos que

- (i) Toda matriz de posto 2 é uma combinação linear de duas matrizes de posto 1.
- (ii) O posto de uma matriz que é combinação linear de duas matrizes de posto 1 não excede 2.

E isto se traduz na geometria de  $\mathbb{P}^5$  do seguinte modo:

- (i) Para todo  $q \in \Delta \setminus \mathcal{V}$  existem  $p_1, p_2 \in \mathcal{V}$  tais que  $q \in \ell_{p_1, p_2}$ .
- (ii) Se  $p, q \in \mathcal{V}$  e  $p \neq q$  então  $\ell_{p,q} \subset \Delta$ .

Isto mostra que  $\Delta \subset S(\mathcal{V})$  e  $S^h(\mathcal{V}) \subset \Delta$ . Resta então mostrar que  $\text{Tan}(\mathcal{V}) \subset \Delta$ . Das equações que definem  $\mathcal{V}$  obtemos sua matriz jacobiana:

$$\mathcal{J}(\mathcal{V}) = \begin{pmatrix} a_{11} & -2a_{01} & 0 & a_{00} & 0 & 0 \\ a_{12} & -a_{02} & -a_{01} & 0 & a_{00} & 0 \\ a_{22} & 0 & -2a_{02} & 0 & 0 & a_{00} \\ 0 & a_{12} & -a_{11} & -a_{02} & a_{01} & 0 \\ 0 & a_{22} & -a_{12} & 0 & -a_{02} & a_{01} \\ 0 & 0 & 0 & a_{22} & -2a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Em particular para  $p = [1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0] \in \mathcal{V}$  temos:

$$\mathcal{J}(\mathcal{V})(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$\mathbf{T}_p(\mathcal{V}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} - 1 \\ a_{01} \\ a_{02} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = 0$$

que é o plano de equação  $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$  (Note que este plano é o lugar das cônicas redutíveis tendo  $\ell$  como componente). Seja  $\ell \subset \mathbf{T}_p(\mathcal{V})$  uma reta que passa por  $p$ . Então, um ponto  $q \in \ell$  é da forma:

$$q = \lambda[a_{00} : a_{01} : a_{02} : 0 : 0 : 0] + \mu[1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0] = [\lambda a_{00} + \mu : \lambda a_{01} : \lambda a_{02} : 0 : 0 : 0]$$

( $a_{01} \neq 0$  ou  $a_{02} \neq 0$ ) que é uma cônica de posto  $\leq 2$  ( $= 1$  se e só se  $\lambda = 0$ , isto é,  $\mathbf{T}_p\mathcal{V} \cap \mathcal{V} = p$ ). Logo,  $q \in \Delta$ , isto é,  $\ell \subset \Delta$  donde  $\mathbf{T}_p\mathcal{V} \subset \Delta$ . Se  $q \in \mathcal{V}$  é um ponto qualquer de  $\mathcal{V}$  existe uma projetividade  $\omega : \mathbb{P}^5 \rightarrow \mathbb{P}^5$ , decorrente da ação induzida de  $\mathbf{PGL}(3, \mathbf{k})$  em  $\mathbb{P}^5$ , que leva  $p$  em  $q$  e preserva as três órbitas de  $\mathbb{P}^5$ . Além disso,  $\omega$  é um isomorfismo linear e portanto  $d_p\omega = \omega|_{\mathbf{T}_p(\omega)} : \mathbf{T}_p(\mathcal{V}) \rightarrow \mathbf{T}_q(\mathcal{V})$  é um isomorfismo. Logo,  $\mathbf{T}_q(\mathcal{V}) = \omega(\mathbf{T}_p(\mathcal{V})) \subset \Delta$  ( $\omega$  preserva órbitas e  $\mathbf{T}_p(\mathcal{V}) \subset \Delta$ ). Isto prova que  $\text{Tan}(\mathcal{V}) \subset \Delta$  como desejávamos.

### 2.2.3 O lugar secante em um ponto de $S(\mathcal{V}) \setminus \mathcal{V}$

Dado  $p \in \Delta \setminus \mathcal{V}$  sabemos que existe uma secante honesta a  $\mathcal{V}$  passando por  $p$ , isto é, existem  $p_1, p_2 \in \mathcal{V}$  com  $p_1 \neq p_2$  tais que  $p \in \ell_{p_1, p_2}$ . Sabemos também que para quaisquer dois pontos distintos  $p, q \in \mathcal{V}$  existe uma única cônica plana lisa  $C_{p, q} \subset \mathcal{V}$  passando por eles. Seja  $p \in \Delta \setminus \mathcal{V}$  e  $p_1, p_2 \in \mathcal{V}$  distintos tais que  $p \in \ell_{p_1, p_2}$ . Se  $\pi_p$  é o plano contendo  $C_{p_1, p_2}$  então  $p \in \pi_p$  pois  $p \in \ell_{p_1, p_2} \subset \pi_p$ . assim, para todo ponto  $p \in \Delta \setminus \mathcal{V}$  existe um plano  $\pi_p$  contendo  $p$  tal que  $\pi_p \cap \mathcal{V} =$  cônica. Logo, por  $p$  passam infinitas secantes a  $\mathcal{V}$ . Queremos mostrar que estas secantes geram um plano, isto é, que qualquer outra secante de  $\mathcal{V}$  passando por  $p$  está em  $\pi_p$ .

**Proposição 3** . *A união das retas secantes a  $\mathcal{V}$  passando por  $p \in \Delta \setminus \mathcal{V}$  é um plano  $\pi_p$  e  $\pi_p \cap \mathcal{V}$  é uma cônica lisa.*

**Demonstração:** Suponhamos que exista uma reta secante  $\ell$  passando por  $p$  não contida em  $\pi_p$ . Podemos supor  $\ell$  uma secante honesta, isto é,  $\ell = \ell_{q_1, q_2}$  com  $q_1, q_2 \in \mathcal{V}$  e  $q_1 \neq q_2$ . Seja  $C_{q_1, q_2}$  a única cônica contida em  $\mathcal{V}$  passando por  $q_1$  e  $q_2$  e  $\pi'_p$  o plano contendo  $p$  e  $C_{q_1, q_2}$ . Sabemos que  $C_{p_1, p_2}$  e  $C_{q_1, q_2}$  se intersectam em um único ponto ou coincidem. Por construção  $C_{q_1, q_2} \cap C_{p_1, p_2} = q$ . Logo,  $\ell_{p, q} \subset \pi'_p \cap \pi_p$  e portanto  $\langle \pi'_p, \pi_p \rangle = \mathbb{P}^3$ . Como  $\mathcal{V} \not\subset \mathbb{P}^3$ , existe  $r \in \mathcal{V}$  tal que  $r \notin \mathbb{P}^3 \subset H$ . Então,  $H = \mathbb{P}^4 = \langle r, \mathbb{P}^3 \rangle$  é tal que  $r \in H$  e  $r \notin \mathbb{P}^3 \subset H$ . Como  $\nu^{-1}(H \cap \mathcal{V})$  é uma cônica em  $\mathbb{P}^2$  e  $\nu^{-1}(C) =$  reta se  $C \subset \mathcal{V}$  é uma cônica temos:

$$\begin{aligned} \nu^{-1}(H \cap \mathcal{V}) &= \nu^{-1}((\mathbb{P}^3 \cap \mathcal{V}) \cup ((H \setminus \mathbb{P}^3) \cap \mathcal{V})) \\ &= \nu^{-1}(C_{p_1, p_2}) \cup \nu^{-1}(C_{q_1, q_2}) \cup \nu^{-1}((H \setminus \mathbb{P}^3) \cap \mathcal{V}) \\ &= \ell_1 \cup \ell_2 \cup \nu^{-1}((H \setminus \mathbb{P}^3) \cap \mathcal{V}) \end{aligned}$$

Mas,  $\ell_1 \cup \ell_2$  é uma cônica em  $\mathbb{P}^2$ . Logo,  $\nu^{-1}((H \setminus \mathbb{P}^3) \cap \mathcal{V}) \subset \ell_1 \cup \ell_2$  donde  $\nu^{-1}(r) \in \ell_1 \cup \ell_2$  donde  $r \in C_{p_1, p_2} \cup C_{q_1, q_2} \subset \mathbb{P}^3$  o que é uma contradição.  $\square$

Dado  $p \in \Delta \setminus \mathcal{V}$ , a cônica  $C = \pi_p \cap \mathcal{V}$  é chamada o lugar secante de  $\mathcal{V}$  em  $p$ . Na seção 3.1.4 abordaremos o conceito de lugar secante para uma variedade qualquer.

# Capítulo 3

## Superfícies em $\mathbb{P}^5$ com variedade secante deficiente

### 3.1 A Variedade Secante

#### 3.1.1 Definição

Seja  $X \subset \mathbb{P}^N$  uma variedade projetiva. A variedade secante de  $X$ , denotada por  $S(X)$  é o fecho da união de todas as retas com ao menos dois pontos distintos em comum com  $X$ . Em símbolos:

$$S(X) = \overline{\bigcup_{\substack{p,q \in X \\ p \neq q}} \ell_{p,q}}$$

#### 3.1.2 Estimativa Dimensional

A seguir daremos uma estimativa para  $\dim S(X)$  usando o teorema da dimensão das fibras. Daqui por diante  $X$  denotará uma variedade projetiva, não-degenerada e irredutível em  $\mathbb{P}^N$ .

**Proposição 4** -  $S(X)$  é irredutível e  $\dim S(X) \leq \min\{2\dim X + 1, N\}$ .

**Demonstração.** A demonstração é uma consequência da seguinte maneira de se construir  $S(X)$ .

Considere a diagonal  $\Delta_{\mathbb{P}^n} = \{(x, y) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n : x = y\}$ . O conjunto  $\Delta_{\mathbb{P}^n} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$  é o fechado definido pelas relações polinomiais  $x_i y_j - x_j y_i$ . Estas decorrem da caracterização da condição de dependência linear entre dois vetores de  $K^{N+1}$ . Deste modo,  $\Delta_X = X \times X \cap \Delta_{\mathbb{P}^n}$  é fechado em  $X \times X$ . Assim,  $X \times X \setminus \Delta_X$  é um subconjunto aberto da variedade irredutível  $X \times X$ . Logo,  $X \times X \setminus \Delta_X$  é irredutível e denso (exceto se  $X = \{\text{ponto}\}$ ). Considere as projeções

$$\begin{array}{ccc} & (X \times X \setminus \Delta_X) \times \mathbb{P}^N & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ (X \times X \setminus \Delta_X) & & \mathbb{P}^N \end{array}$$

Segue do teorema 1 (pag.9) que  $p_1$  é um morfismo fechado. Seja

$$S_0(X) = \{(x, y, z) : (x, y) \in X \times X \setminus \Delta_X \text{ e } z \in \ell_{x,y}\} \subset (X \times X \setminus \Delta_X) \times \mathbb{P}^N.$$

Este é um subconjunto fechado de  $(X \times X \setminus \Delta_X) \times \mathbb{P}^N$ . Com efeito, as equações expressando a condição de três vetores  $x = (x_0, \dots, x_N)$ ,  $y = (y_0, \dots, y_N)$  e  $z = (z_0, \dots, z_N)$  serem linearmente dependentes são dadas pelos polinômios tri-homogêneos determinados pelos menores  $3 \times 3$  da matriz

$$\begin{pmatrix} x_0 & \cdots & x_N \\ y_0 & \cdots & y_N \\ z_0 & \cdots & z_N \end{pmatrix}$$

Estes menores  $3 \times 3$  definem um fechado  $W \subset \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^N$  tal que

$$W \cap ((X \times X \setminus \Delta_X) \times \mathbb{P}^N) = S_0(X).$$

A restrição  $p_{1|_{S_0(X)}} : S_0(X) \longrightarrow X \times X \setminus \Delta_X$  é um morfismo fechado e sobrejetivo. Como para qualquer par  $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta_X$  a fibra  $p_{1|_{S_0(X)}}^{-1}(x, y) = \ell_{x,y} = \mathbb{P}^1$  é irredutível e unidimensional segue do teorema 8 (pag.11) que  $S_0(X)$  é irredutível e

$$\dim S_0(X) = 2\dim X + 1$$

Então,  $\overline{S_0(X)} \subset (X \times X) \times \mathbb{P}^N$  é irredutível, fechado em  $(X \times X) \times \mathbb{P}^N$  e

$$\dim \overline{S_0(X)} = \dim S_0(X) = 2\dim X + 1$$

Pela terceira projeção  $\alpha_3 : X \times X \times \mathbb{P}^N \longrightarrow \mathbb{P}^N$ , temos que  $\alpha_3(S_0(X)) = \bigcup_{p,q \in X, p \neq q} \ell_{p,q}$  donde  $\overline{\alpha_3(S_0(X))} = S(X)$ . Pela continuidade de  $\alpha_3$ ,

$$\alpha_3(\overline{S_0(X)}) \subset \overline{\alpha_3(S_0(X))} = S(X).$$

Além disso,  $S(X)$  é irredutível visto que  $\alpha_3(S_0(X))$  é irredutível. Deste modo,  $\alpha_3$  é um morfismo dominante de  $\overline{S_0(X)}$  em  $S(X)$ . Então, existe um aberto  $U \subset S(X)$  tal que  $U \subset \alpha_3(\overline{S_0(X)})$ . Pela irredutibilidade de  $S(X)$  obtemos

$$S(X) = \overline{U} \subset \overline{\alpha_3(\overline{S_0(X)})} = \alpha_3(\overline{S_0(X)}).$$

Assim,  $S(X) = \alpha_3(\overline{S_0(X)})$  e portanto a restrição  $\alpha_3|_{\overline{S_0(X)}} : \overline{S_0(X)} \longrightarrow S(X)$  é um morfismo sobrejetivo. Logo,  $\dim S(X) \leq \dim \overline{S_0(X)} = 2\dim X + 1$ .  $\square$

**Obs:** A variedade secante pode também ser construída do seguinte modo. Considere a aplicação das retas secantes de  $X$

$$s : X \times X \setminus \Delta_X \longrightarrow \text{Gr}(2, N+1), \quad (p, q) \longmapsto \ell_{p,q}$$

Denotaremos  $\text{Im } s = \text{Sec}^h X$  como sendo conjunto das secantes honestas. O fechado  $\overline{\text{Sec}^h X}$  é chamado a variedade das retas secantes de  $X$  e denotado por  $\text{Sec } X$ . Considerando a relação de incidência

$$\tilde{I} = \{(x, \ell) \in \mathbb{P}^N \times \text{Gr}(2, N+1) \mid x \in \ell\}$$

segue pelas projeções

$$\begin{array}{ccc}
& \tilde{I} & \\
p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\
\mathbb{P}^N & & \text{Gr}(2, N+1)
\end{array}$$

que  $SX = p_1(p_2^{-1}(\overline{\text{Sec}^h X}))$ . Com esta construção, uma secante a  $X$  é simplesmente um ponto no fecho da imagem de  $s$ .

**Definição 3** (*Variedade Bandeira*) - Para toda seqüência crescente de inteiros  $a_1 < a_2 < \dots < a_K < n$  podemos formar a variedade bandeira

$$\mathbf{F}(a_1, a_2, \dots, a_K; n) = \{(\Lambda_1, \dots, \Lambda_K) : \Lambda_1 \subset \dots \subset \Lambda_K\} \subset \text{Gr}(a_1+1, n+1) \times \dots \times \text{Gr}(a_K+1, n+1)$$

onde  $\text{Gr}(a_i + 1, n + 1)$  é a grassmanniana dos  $a_i$ -subespaços lineares de  $\mathbb{P}^n$ .

**Obs:**  $\mathbf{F}(a_1, a_2, \dots, a_K; n)$  é um fechado de  $\mathbb{P}^n$  (ver [5] pag. 95).

Definiremos a seguir uma outra variedade construída a partir de uma variedade irreduzível  $X$  dada, a saber a envoltória tangente de  $X$  denotada por  $\text{Tan } X$ .

Seja  $X \subset \mathbb{P}^N$  uma variedade  $n$ -dimensional, lisa e irreduzível. Lembramos que uma reta  $\ell$  é tangente a  $X$  se existir  $p \in X$  tal que  $p \in \ell$  e  $\ell \subset T_p X$ . A imagem de uma variedade projetiva por uma transformação regular é um fechado. Assim, pelo fato de  $X$  ser lisa, considerando a transformação de Gauss

$$\mathcal{G} : X \longrightarrow \text{Gr}(n+1, N+1) \quad , \quad x \longmapsto T_x X$$

temos que sua imagem  $\mathcal{G}(X)$  é fechado em  $\text{Gr}(n+1, N+1)$ . Considere, agora, a variedade bandeira

$$\mathbf{F}(1, 2, n+1; N+1) = \{(x, \ell, \Lambda) \mid x \in \ell \subset \Lambda\}$$

e a projeção  $p_{13} : \mathbf{F}(1, 2, n+1; N+1) \longrightarrow \mathbb{P}^N \times \text{Gr}(n+1, N+1)$ . Desde que o gráfico  $\text{gr } \mathcal{G}$  é fechado em  $\mathbb{P}^N \times \text{Gr}(n+1, N+1)$  segue que o conjunto

$$p_{13}^{-1}(\text{gr } \mathcal{G}) = \{(x, \ell, \Lambda) \in X \times \text{Gr}(2, N+1) \times \text{Gr}(\mathcal{G}) \mid x \in \ell \subset \Lambda = \mathcal{G}(x)\}$$

é fechado em  $\mathbb{P}^N \times \text{Gr}(2, N + 1) \times \text{Gr}(n + 1, N + 1)$ . Portanto,  $p_2(p_{13}^{-1}(\text{Gr}(\mathcal{G}))) = T^0X$  é fechado em  $\text{Gr}(2, N + 1)$ . A variedade

$$T^0X = \{\ell \in \text{Gr}(2, N + 1) \mid \text{existe } x \in X \text{ tal que } x \in \ell \subset T_xX\}$$

é chamada variedade das retas tangentes a  $X$ .

Das projeções

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{P}^N \times \text{Gr}(2, N + 1) \times \text{Gr}(n + 1, N + 1) & \\ & \swarrow p_1 & \searrow p_2 \\ \mathbb{P}^N & & \text{Gr}(2, N + 1) \end{array}$$

temos que o conjunto  $\text{Tan } X = p_1(p_2^{-1}(T^0X)) \subset \mathbb{P}^N$  é fechado em  $\mathbb{P}^N$ . É chamado envoltória tangente de  $X$ .

### 3.1.3 Caracterização Geométrica

Na seção 1.3 definimos  $S(X) = \overline{S^h(X) \cup \text{Tan}(X)}$ . Por outro lado, em 2.1.1 definimos  $S(X) = \overline{S^h(X)}$ . Nesta seção queremos mostrar a compatibilidade destas definições. Para isto, basta mostrarmos a seguinte proposição.

**Proposição 5** - (i)  $S^h(X) \cup \text{Tan}(X)$  é fechado em  $\mathbb{P}^N$ .

(ii)  $\text{Tan}(X) \subset \overline{S^h(X)}$ .

**Demonstração:** (i) Seja  $G = \text{Gr}(2, N + 1)$  a Grassmanniana de retas em  $\mathbb{P}^N$  e seja  $Q = \{(x, \ell) \mid x \in \ell\} \subset \mathbb{P}^N \times G$ . Considere as projeções  $p_1 : Q \rightarrow \mathbb{P}^N$  e  $p_2 : Q \rightarrow G$ . Em relação a primeira projeção  $p_1 : Q \rightarrow \mathbb{P}^N$ , a fibra  $p_2^{-1}(\ell)$  é mapeada isomorficamente na reta  $\ell \subset \mathbb{P}^N$ . Seja  $J(X)$  o conjunto das retas secantes honestas ou tangentes a  $X$ . Suponha provado que  $J(X)$  é fechado em  $G$ . Então a pré-imagem  $p_2^{-1}(J(X))$  é fechada e

assim também será  $p_1(p_2^{-1}(J(X))) = S^h(X) \cup \text{Tan}(X)$ . Logo, basta provarmos que  $J(X)$  é fechado em  $G$ .

Seja  $I(X) = \langle F_1, \dots, F_k \rangle \subset k[X_0, \dots, X_N]$ . Podemos supor todos os  $F_i$ 's de mesmo grau  $d$  (ver [5] pag. 24). As retas  $\ell \subset \mathbb{P}^N$  no aberto básico  $U_{11} \subset G$  dos elementos cuja primeira coordenada de Plücker é não-nula são representadas de maneira única pelas matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_2 & a_3 & \dots & a_N \\ 0 & 1 & b_2 & b_3 & \dots & b_N \end{pmatrix}$$

e parametricamente na forma

$$[S : T] \mapsto [S : T : a_2S + b_2T : \dots : a_NS + b_NT]$$

Restringindo um polinômio homogêneo  $F_\alpha \in k[X_0, \dots, X_N]$  de grau  $d$  à reta  $\ell_{a,b}$  ou seja, substituindo  $S, T$  e  $a_iS + b_iT$  em  $X_0, X_1$  e  $X_i$ , respectivamente, obtemos

$$F_{\alpha|_{\ell_{a,b}}} = p_{\alpha,d}(a,b)S^d + p_{\alpha,d-1}(a,b)S^{d-1}T + \dots + p_{\alpha,0}(a,b)T^d$$

onde os coeficientes  $p_{\alpha,i}$  são polinômios em  $a$  e  $b$ . Então, para qualquer  $m \geq d$  podemos considerar a transformação linear

$$\phi_{a,b,m} : k[X_0, \dots, X_N]_{m-d}^k \mapsto k[T, S]_m ; (G_1, \dots, G_k) \mapsto \left( \sum_1^r G_i F_i \right)_{|\ell}$$

As entradas da matriz de  $\phi_{a,b,m}$  são polinômios nas coordenadas  $a$  e  $b$  em  $U_{11} \subset G$ . Além disso, para uma reta  $\ell_{a,b} \in J(X)$  os polinômios  $F_i$ 's têm ao menos dois pontos distintos em comum com  $\ell$  ou têm uma raiz múltipla em um ponto de  $\ell \cap X$ . Assim, a imagem de  $\phi_{\ell,m}$  para uma reta  $\ell \in J(X)$  está contida no subespaço de  $k[T,S]_m (\forall m > d)$  dos polinômios homogêneos de grau  $m$  com ao menos duas raízes fixas contadas com multiplicidades.

Logo,  $\text{codim Im}\phi_{\ell,m} \geq 2$  para toda reta  $\ell \subset J(X)$ .

Para cada inteiro  $m \geq d$  definamos o seguinte subconjunto de  $U_{11}$ :

$$\mathcal{L}_m = \{ \ell \in U_{11} \mid \text{codim Im}\phi_{\ell,m} \geq 2, \}$$

Tais subconjuntos de  $U_{11}$  são todos fechados pois a matriz de  $\phi_{\ell,m}$  são polinômios nas coordenadas  $a$  e  $b$  em  $U_{11}$  e  $\mathcal{L}_m$  são os zeros dos determinantes de ordem  $m \times m$  desta matriz.

Desde que  $\text{codim Im } \Phi_{\ell,m} \geq 2$  para toda  $\ell \in J(X)$  temos que  $J(X) \subset \bigcap \mathcal{L}_m := \mathcal{L}$ . Seja  $\ell_0 \in \mathcal{L}$ . Temos  $\text{codim Im } \Phi_{\ell_0,m} \geq 2$ , para todo  $m \geq d$ . Se  $\ell_0$  é tangente a  $X$  (incluindo  $\ell \subset X$ ) então  $\ell_0 \in J(X)$ . Caso contrário,  $\ell_0 \cap X$  é um conjunto finito de pontos. Neste caso, desde que  $\text{codim Im } \Phi_{\ell,m}$  é o valor do polinômio de Hilbert  $h_{\ell \cap X}(m)$  da variedade  $\mathcal{Z}(\ell \cap X) \subset \ell = \mathbb{P}^1$ , segue que  $h_{\ell \cap X}(m) \geq 2$ . Assim,  $h_{\ell \cap X}(m)$  é constante e  $\geq 2$ . Agora, se  $Y \subset \mathbb{P}^1$  é um conjunto finito de  $d$  pontos então  $h_Y(m) = d$ , para todo  $m \gg 0$ . Portanto,  $\#\mathcal{Z}(X \cap \ell) \geq 2$ , isto é,  $\ell_0$  intersecta  $X$  em dois ou mais pontos. Logo,  $\ell_0$  é secante a  $X$  donde  $\ell_0 \in J(X)$ . Assim,  $J(X) = \mathcal{L} = \bigcap \mathcal{L}_m$  com  $\mathcal{L}_m$  fechado em  $U_{11}$ . Daí,  $J(X)$  é fechado em  $U_{11}$ . Desde que a condição de ser fechado é local e este raciocínio pode ser repetido para qualquer aberto básico  $U_{ij}$  de  $\text{Gr}(2, N + 1)$  concluímos que  $J(X)$  é fechado em  $\text{Gr}(2, N + 1)$ .

(ii) A explosão de  $\mathbb{A}^n$  no ponto  $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{A}^n$  consiste na subvariedade fechada  $\text{Bl}_0 \mathbb{A}^n \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$  definida como o fecho do gráfico da aplicação

$$s : \mathbb{A}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1} ; x \longmapsto [x]$$

Nossa variedade secante é definida como o fecho da imagem de  $X \times X$  pela aplicação racional

$$\phi : X \times X \cdots \longrightarrow \text{Gr}(2, n+1) ; (x, y) \longmapsto \ell_{x,y}$$

Queremos mostrar que retas tangentes são limites de retas secantes, isto é, uma tangente  $\ell_x$  a  $X$  no ponto  $x$  é limite de retas secantes a  $X$  que passam por  $x$ . Podemos supor  $x = (1 : 0 : \dots : 0) \in X$ . Seja  $\ell_{x,y}$  uma secante honesta de  $X$  passando pelo ponto  $x$ . Desde que queremos saber a posição limite de  $\ell_{x,y}$  quando  $y$  tende para  $x$  podemos supor  $y \in \mathbb{A}_0^n = U_0 = \mathbb{P}^n \setminus \{x_0 = 0\}$ . Além disso, o espaço tangente projetivo  $T_x X \subset \mathbb{P}^n$  é o fecho do espaço tangente afim de  $X \cap U_i$  qualquer que seja  $i = 0, \dots, n$ . Assim, é equivalente provarmos que retas tangentes a variedade afim  $X_0 = U_0 \subset \mathbb{A}_0^n$  são limites de secantes honestas afins  $\ell_{0,y} \subset \mathbb{A}_0^n$ . Faz sentido então o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
0 \times X_0 & \cdots \xrightarrow{\phi} & \text{Gr}(2, n+1) \\
(0, y) & \longmapsto & \ell_{x,y} \\
\downarrow & & \uparrow \\
X_0 \subset \mathbb{A}^n & \cdots \xrightarrow{s'} & \mathbb{P}^{n-1} \\
y & \longmapsto & [y] = \overline{0y}
\end{array}$$

onde  $s'$  é a restrição de  $s$  a  $X \subset \mathbf{A}^n$ . Deste modo, podemos focalizar nossa atenção no diagrama

$$\begin{array}{ccc}
& \text{Bl}_0 X_0 \subset X_0 \times \mathbb{P}^{n-1} & \\
& \swarrow \tilde{s}' & \searrow \psi \\
X_0 \subset \mathbf{A}^n & \xrightarrow{s'} & \mathbb{P}^{n-1}
\end{array}$$

Note que  $\overline{\text{Im } s'}$  é o fecho das secantes a  $X_0$  que passam por 0. Além disso, sendo  $E = \tilde{s}'^{-1}(0) = (0 \times \mathbb{P}^{n-1}) \cap \text{Bl}_0 X_0$  podemos fazer a identificação  $\text{Bl}_0 X_0 \setminus E = X_0 \setminus \{0\}$

Vamos mostrar que para todo ponto  $0 \neq v \in T_0 X$ ,  $[v] = \ell_{0v}$ , está no fecho da imagem de  $s'$ . Isto conclui a demonstração. Lembramos que o espaço tangente em um ponto  $p$  de uma variedade analítica  $Y$  é caracterizado pelo conjunto de vetores tangentes em  $p$  a arcos de curvas analíticas contidas em  $Y$  que passam por  $p$ . Assim, dado  $0 \neq v \in T_0 X$  existe um arco analítico  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$  tal que  $\alpha(0) = 0$ ,  $\alpha(t) \neq 0$  para  $t \neq 0$  e  $\alpha'(0) = v$ . Deste modo, podemos supor  $\alpha(t) = t\beta(t)$  com  $\beta(t) \neq 0$  e considerar a aplicação

$$\tilde{\alpha}(t) = (\alpha(t), [\alpha(t)]) = (\alpha(t), [\beta(t)])$$

definida pela composta  $s \circ \alpha$ . Deste modo, para  $t \neq 0$  temos  $\tilde{\alpha}(t) \in \text{Bl}_0 X \setminus E = X \setminus \{0\}$ . Pela continuidade de  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  obtemos que  $\tilde{\alpha}(0) = (0, [v]) \in E$  donde  $\Psi(\tilde{\alpha}(0)) = [v] \in \overline{\text{Im } s'}$ .

□

### 3.1.4 O Lugar Secante e a Deficiência da Variedade Secante

Para  $p \in S(X) \setminus X$  vamos considerar o seguinte subconjunto de  $S(X)$ :

$$\Sigma_p(X) = \overline{\{x \in X : \text{existe } y \in X, y \neq x, \text{ com } p \in \ell_{x,y}\}}$$

Tal conjunto é chamado o lugar secante de  $X$  em  $p$ . Para um ponto geral  $p \in S(X)$  a seguinte proposição mostra que a dimensão de  $\Sigma_p(X)$  não depende de  $p$ .

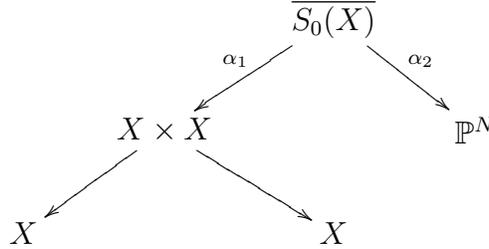
**Proposição 6** - Se  $p \in S(X)$  é um ponto geral então:

$$\dim \Sigma_p(X) = 2\dim X + 1 - \dim S(X).$$

**Demonstração:** Na demonstração da proposição 4 foi definido o conjunto

$$S_0(X) = \{(x, y, z) : (x, y) \in X \times X \setminus \Delta_X \text{ e } z \in \ell_{x,y}\}$$

bem como seu fecho  $\overline{S_0(X)} \subset X \times X \times \mathbb{P}^N$ . Consideremos as projeções :



Fazendo uso da hipótese de generalidade do ponto  $p$  podemos supor que o mesmo está no aberto  $U \subset S(X)$  do teorema (1;7). Assim,

$$\dim \alpha_2^{-1}(p) = \dim \overline{S_0(X)} - \dim S(X)$$

Entretanto, cada fibra do morfismo

$$\alpha_{1|_{\alpha_2^{-1}(p)}} : \alpha_2^{-1}(p) \longrightarrow X \times X$$

é finita já que  $p \notin X$ . O mesmo vale para a fibra da aplicação

$$p_i \circ \alpha_1 : \alpha_2^{-1}(p) \longrightarrow p_i \circ \alpha_1(\alpha_2^{-1}(p))$$

para um ponto  $p \in S(X) \setminus X$  onde  $p_i : X \times X \longrightarrow X$  são as  $i$ -ésimas projeções ( $i = 1, 2$ ). Para  $p \in S(X) \setminus X$  tem-se  $\Sigma_p(X) = p_i \circ \alpha_1(\alpha_2^{-1}(p))$ . Logo, pelo teorema(1;5 (iii)),  $\dim \Sigma_p(X) = \dim \alpha_2^{-1}(p)$ .  $\square$

**Definição 4** - O inteiro não negativo  $\delta(X) = \dim \Sigma_p(X)$  é chamado *deficiência da variedade secante de  $X$* . No caso em que  $\delta(X)$  é positivo dizemos que  $X$  tem *variedade secante deficiente*.

## 3.2 O Lema de Terracini

Uma importante ferramenta no estudo da geometria das retas secantes e tangentes a uma variedade algébrica é o seguinte resultado conhecido como Lema de Terracini.

**Lema 3 (Terracini)** - Seja  $X \subset \mathbb{P}^N$  uma variedade projetiva irredutível sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. Então:

(i) Se  $z \in S(X)$  está em uma secante honesta  $\ell_{x,y}$  de  $X$  com  $z \neq x, y$  então

$$\langle T_x X, T_y X \rangle \subset T_z S(X).$$

(ii) Existe um aberto  $U \subset S(X)$  não vazio tal que para qualquer  $z \in U$  e qualquer  $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta_X$  para o qual  $z \in \ell_{x,y}$  tem-se:

$$\langle T_x X, T_y X \rangle = T_z S(X)$$

**Demonstração:** Considere o conjunto

$$S_0(X) = \{(x, y, z) : (x, y) \in X \times X \setminus \Delta_X \text{ e } z \in \ell_{x,y}\} \subset (X \times X \setminus \Delta_X) \times \mathbb{P}^N$$

Vimos que  $S_0(X)$  é irredutível e  $\dim S_0(X) = 2\dim X + 1$ . Além disso, a projeção  $p_3 : \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^N \longrightarrow \mathbb{P}^N$  induz um morfismo dominante:

$$\bar{p}_3 = p_3|_{S_0(X)} : S_0(X) \longrightarrow S(X) \subset \mathbb{P}^N$$

que por sua vez induz uma transformação linear

$$d_q \bar{p}_3 = p_3|_{T_q S_0(X)} : T_q S_0(X) \longrightarrow T_{p_3(q)} S(X) \quad \forall q \in S_0(X)$$

donde  $p_3(T_q S_0(X)) \subset T_{p_3(q)} S(X)$ . Seja  $q = (x, y, z) \in S(X)$  qualquer ponto com  $z \neq x, y$ . Vamos provar que

$$p_3(T_q S_0(X)) = \langle T_x X, T_y X \rangle \quad (*)$$

Isto conclui a demonstração do item (i). Desde que  $\text{car } k = 0$  segue, pelo lema de Sard, que existe um subconjunto aberto  $U \subset S(X) \setminus X$  tal que a diferencial  $d_q \bar{p}_3$ , para todo  $q \in \bar{p}_3^{-1}(U)$ , é sobrejetiva sobre  $U$ . Contudo, se  $(x, y, z) \in (X \times X \setminus \Delta_X) \times U$  é tal que  $z \in \ell_{x,y}$  então  $(x, y, z) \in \bar{p}_3^{-1}(U)$ . Deste modo, (\*) demonstra também o item (ii). Para provar (\*) fixemos um ponto  $q = (a, b, c) \in S_0(X)$  com  $c \neq a, b$ . Desde que isomorfismo entre variedades acarreta um isomorfismo entre espaços tangentes em pontos correspondentes podemos escolher um sistema de coordenadas homogêneas  $x_0, \dots, x_N$  em  $\mathbb{P}^N$  tal que  $a, b, c \in U_0 = \mathbb{P}^N \setminus (x_0 = 0)$  e  $a_1 \neq b_1$  onde temos denotado  $x_i = \frac{x_i}{x_0}$ ,  $x_i(a) = a_i$ ,  $x_i(b) = b_i$  e  $x_i(c) = c_i$  para  $i = 1, \dots, N$ . Com isto, podemos trocar nossas variedades e espaços tangentes projetivos por suas restrições ao aberto afim  $U_0 = \mathbb{A}^N$ . Podemos, então, assumir que  $X \subset \mathbb{A}^N$  e  $S_0(X) \subset (\mathbb{A}^N)^3$ . As funções coordenadas induzidas em  $(\mathbb{A}^N)^3$  denotaremos por  $x_i, y_i$  e  $z_i$  onde  $i = 1, \dots, N$ . Agora considere o morfismo

$$\Psi : X \times X \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow S_0(X) \subset (\mathbb{A}^N)^3$$

induzido pelo morfismo  $x_i = x_i, y_i = y_i, z_i = T x_i + (1 - T) y_i : (\mathbb{A}^N)^2 \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^3$  onde  $i = 1, \dots, N$ .  $\Psi$  é dominante pois contém o aberto  $V \subset S_0(X)$  dado por  $V = \{(a, b, c) \in S_0(X) : a_1 \neq b_1\}$ . Então  $\Psi$  induz um isomorfismo  $\bar{\Psi} : \Psi^{-1}(V) \longrightarrow V$  com inversa  $\bar{\Psi}^{-1}$  dada por  $x_i = x_i, y_i = y_i, T = \frac{(z_1 - y_1)}{x_1 - y_1} : V \longrightarrow \Psi^{-1}(V)$ .

Considere a composição  $\bar{\sigma} = p_3 \circ \bar{\Psi} : \Psi^{-1}(V) \longrightarrow \mathbb{A}^N$ . Se  $p \in \Psi^{-1}(q) = (a, b, t) \in X \times X \times \mathbb{A}^1$  para algum  $t \neq 0, 1$ , temos  $d_p \bar{\sigma} = d_p(p_3 \circ \bar{\Psi}) = d_{\bar{\Psi}(p)} p_3 \circ d_p \bar{\Psi}$  onde  $d_p \bar{\Psi} : T_p \Psi^{-1}(V) \longrightarrow T_q \Psi^{-1}(V)$  e  $d_q p_3 = p_3 : T_q V \longrightarrow T_{p_3(q)} S(X)$ . Desde que  $d_p \bar{\Psi}$  é um isomorfismo então (\*) é equivalente a:

$$\text{im } d_p \bar{\sigma} = \langle T_a X, T_b X \rangle$$

pois

$$\text{im } d_p \bar{\sigma} = p_3(d_p \bar{\Psi}(T_p \Psi^{-1}(V))) = p_3(T_q V) = p_3(T_q S(X))$$

Agora,  $\bar{\sigma}$  é induzida pelo morfismo

$$\sigma : (\mathbb{A}^N)^2 \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^N; \quad z_i = T x_i + (1 - T) y$$

para  $i = 1, \dots, N$ , cuja matriz jacobiana  $J_\sigma$  é a  $N \times (2N + 1)$  matriz formada pelos blocos:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = TE \quad ; \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} = (1 - T)E \quad ; \quad \frac{\partial \sigma}{\partial T} = (x - y) = (x_1 - y_1, \dots, x_N - y_N)$$

onde  $E$  é a matriz identidade  $N \times N$ . Denotaremos por  $(\ )_0$  a translação à origem em  $\mathbb{A}^N$ . Então, desde que  $(T_p \Psi^{-1}(V))_0 = (T_a X)_0 \times (T_b X)_0 \times \mathbb{A}^1$  obtemos através de  $J_\sigma(p)$  que:

$$\begin{aligned} (\text{Im } d_{\bar{\sigma}, p})_0 &= \{J_\sigma(p)(\alpha, \beta, \lambda) : \alpha \in (T_a X)_0, \quad \beta \in (T_b X)_0, \quad \lambda \in \mathbb{A}^1\} \\ &= \{T\alpha + (1 - T)\beta + \lambda(a - b) : \alpha \in (T_a X)_0, \quad \beta \in (T_b X)_0, \quad \lambda \in \mathbb{A}^1\} \\ &= \langle T_a X, T_b X \rangle_0 \quad \square \end{aligned}$$

**Obs:** Existe uma generalização quando temos duas variedades  $X, Y \subset \mathbb{P}^N$  e consideramos o fechado formado pelo fecho da união das retas geradas por dois pontos distintos  $p \in X$  e  $q \in Y$ . Esta variedade é chamada junção de  $X$  e  $Y$  e é denotada por  $S(X, Y)$ . Tanto a estimativa dimensional quanto o lema de Terracini obtidos neste capítulo para a variedade secante são válidos para  $S(X, Y)$ . Basta trocar nas respectivas demonstrações  $X \times X$  por  $X \times Y$ . Deste modo,  $S(X, Y)$  é irredutível e  $\dim S(X, Y) \leq \dim X + \dim Y + 1$ . A versão lema de Terracini para  $S(X, Y)$  é que existe um aberto  $U \subset S(X, Y)$  tal que se  $p \in U$  com  $p \in \ell_{x,y}$  e  $p \neq x, y$  então  $T_p S(X, Y) = \langle T_x X, T_y Y \rangle$ .

### 3.3 O Lema da Trissecante

Nesta seção demonstraremos que a propriedade geométrica de uma subvariedade projetiva em  $\mathbb{P}^n$  não degenerada irreduzível ter uma secante geral trissecante é inerente à uma hipersuperfície. Tal fato é universalmente conhecido como lema da trissecante e será de muita utilidade no próximo capítulo.

**Proposição 7** - *Seja  $X \subset \mathbb{P}^N$  uma variedade irreduzível não-degenerada. Então,  $\dim S(X) = \dim X + 1$  se e só se  $X$  é uma hipersuperfície.*

**Demonstração:** Seja  $x \in \text{Sm}(X) = X \setminus \text{Sing}(X)$ . Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}(0, 1; N) & \xrightarrow{p_1} & \mathbb{P}^N \\ p_2 \downarrow & & \\ \text{Gr}(2, N + 1) & \xleftarrow{\phi} & X \setminus \{x\} \end{array}$$

onde  $\mathbf{F}(0,1;N)$  denota a variedade bandeira

$$\{(w, \ell) \in \mathbb{P}^N \times \text{Gr}(2, N + 1) \mid w \in \ell\} \subset \mathbb{P}^N \times \text{Gr}(2, N + 1)$$

e  $\phi$  leva um ponto  $y \in X \setminus \{x\}$  na reta  $\ell_{x,y}$ .

Se  $\ell_{q,x} \subset X$  para todo  $q \in X \setminus \{x\}$  então  $X \subset T_x X$ . Pela não-singularidade de  $X$  em  $x$  tem-se  $\dim X = \dim T_x X$  donde  $X = T_x X$  e isto é uma contradição visto que  $X$  é não degenerada. Assim, existe uma reta  $\ell_{q,x}$  com  $q \in X \setminus \{x\}$  não contida em  $X$ . Isto implica que a fibra geral de  $\phi$  é finita. Como  $X$  é irreduzível, ambos  $X \setminus \{x\}$  e  $\text{Im } \phi$  são irreduzíveis. Assim,  $\dim \text{Im } \phi = \dim X$ . Agora, cada fibra de  $p_2$  é uma reta. Logo,  $p_2^{-1}(\text{Im } \phi)$  é irreduzível e  $\dim p_2^{-1}(\text{Im } \phi) = \dim X + 1$ . Deste modo  $p_1(p_2^{-1}(\text{Im } \phi)) = C_x(X)$  é irreduzível. Como  $p_1|_{p_2^{-1}(\text{Im } \phi)}$  é finita segue que  $\dim C_x(X) = \dim X + 1$ . Assim, para todo  $x \in \text{Sm}(X)$ , o cone  $C_x(X) \subset SX$  é irreduzível e

$$\dim C_x(X) = \dim X + 1 = \dim S(X).$$

Logo,  $C_x(X) = S(X)$  para todo  $x \in \text{Sm}(X)$ . Assim,  $\text{Sm}(X)$  está contido no vértice do cone  $S(X)$  donde  $S(X) \supset \langle X \rangle = \mathbb{P}^N$  donde  $S(X) = \mathbb{P}^N$ , isto é,  $N = n + 1$  e  $\dim X = n$ .  $\square$

**Corolário 2** - *Seja  $X \subset \mathbb{P}^5$  uma superfície não-degenerada e irredutível. Se  $S(X)$  é deficiente então  $\dim S(X) = 4$ .*

**Demonstração:** É uma consequência direta da proposição anterior.  $\square$

**Corolário 3 (Lema da Trissecante)** - *Seja  $X \subset \mathbb{P}^N$  uma variedade projetiva  $n$ -dimensional irredutível, não-degenerada e não linear. Se a secante genérica é multissecante então  $N = \dim(X) + 1$ , isto é,  $X$  é uma hipersuperfície em  $\mathbb{P}^N$ .*

**Demonstração:** Seja  $z \in S(X)$  geral, isto é,  $z \in \ell_{x_1, x_2} \subset S^h(X)$  e  $z \in U$  onde  $U \subset S(X)$  é o aberto do lema de Terracini. Por hipótese, existe  $x_3 \in \ell_{x_1, x_2} \cap X$  com  $x_3 \neq x_i$ ,  $i = 1, 2$ . Seja  $C_{x_1}(X)$  o cone de vértice  $x_1$  e base  $X$ . Como  $x_2$  e  $x_3$  são pontos gerais de  $X$  podemos supô-los em  $\text{Sm}(C_{x_1})$ . Pela colineariedade de  $x_2$  e  $x_3$  com o vértice do cone  $C_{x_1}(X)$  temos  $T_{x_2}(C_{x_1}(X)) = T_{x_3}(C_{x_1}(X)) = \mathbb{P}^{n+1}$ . Assim, como  $X$  não é linear,  $T_{x_j}(X) \subseteq T_{x_j}(C_{x_1}(X)) = \mathbb{P}^{n+1}$  são hiperplanos distintos ( $j = 1, 2$ ) em  $\mathbb{P}^{n+1}$  donde  $\dim(T_{x_2}X \cap T_{x_3}X) = n - 1$ . Pelo lema de Terracini,

$$T_z(S(X)) = \langle T_{x_1}X, T_{x_2}X \rangle = \langle T_{x_2}X, T_{x_3}X \rangle = \mathbb{P}^{n+1}$$

E o lema segue da proposição 7.  $\square$

# Capítulo 4

## A Superfície de Veronese, bis

Seja  $X \subset \mathbb{P}^N$ ,  $N \geq 2\dim X + 1$ , uma variedade projetiva não degenerada e irredutível. A projeção de  $X$  centrada em um ponto  $p \in \mathbb{P}^N$  sobre um hiperplano  $H \not\ni p$  é um isomorfismo se e só se  $p \notin S(X)$  (ver [11], capítulo II, pag 136). Com isto, a superfície de Veronese  $\mathcal{V} = v_2(\mathbb{P}^2)$  pode ser mapeada isomorficamente em  $\mathbb{P}^4$  visto que  $S(\mathcal{V}) \subset \mathbb{P}^5$  é uma hipersuperfície. Nosso objetivo neste capítulo é provar que, a menos de projetividade,  $\mathcal{V}$  é o único exemplo bidimensional (excluindo cones) deste fenômeno. Equivalentemente,  $\mathcal{V}$  é a única superfície não degenerada (não cone) em  $\mathbb{P}^5$  cuja variedade secante é uma subvariedade própria de  $\mathbb{P}^5$ . Este resultado foi provado por Severi em 1901 (ver epílogo). Seguiremos aqui o mesmo roteiro usado por Severi. Inicialmente, mostraremos que toda superfície não degenerada irredutível  $X \subset \mathbb{P}^5$ , não cone, admite uma família 2-dimensional de cônicas lisas. Em seguida, mostraremos que tais cônicas são divisores de Cartier que fazem parte de um mesmo sistema linearmente equivalente sem ponto base. Finalmente, concluiremos que a aplicação regular  $X \rightarrow \mathbb{P}^2$  associada a este sistema linear realiza  $X$  como uma superfície projetivamente equivalente à superfície de Veronese. <sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Para um tratamento detalhado de mergulhos a espaços projetivos associados a fibrados lineares ver [4], pag. 176. Lembramos aqui somente o seguinte resultado geral: o morfismo  $\Phi_{|E|} : X \rightarrow \mathbb{P}^N$  associado ao sistema linear  $|E| = \{(s)\}_{s \in E} \subset \text{Div}(X)$  -  $E \subset H^0(X, \mathcal{O}(L))$  é um subespaço vetorial das seções globais do fibrado linear  $L \rightarrow X$  - determina ambos o fibrado linear  $L$  e o subespaço  $E \subset H^0(X, \mathcal{O}(L))$ . Tem-se então o seguinte dicionário

**Exemplo** - Considere o fibrado linear universal  $\mathcal{O}(-1) \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}^n$ ,  $\mathcal{O}(-1) \subset \mathbf{C}^{n+1} \times \mathbb{P}^n$  - cuja fibra  $\phi^{-1}(x)$  é simplesmente a reta  $\{\lambda x\} \subset \mathbf{C}^{n+1}$ . O fibrado hiperplano  $H \rightarrow \mathbb{P}^n$  é o dual de  $\mathcal{O}(-1)$ , isto é, é o fibrado cuja fibra sobre  $x \in \mathbb{P}^n$  corresponde ao espaço dos funcionais lineares na reta  $\{\lambda x\}$ . O importante aqui é o fato das seções globais de  $H$  serem dadas pelas seções  $\sigma_L$  de  $H$  induzidas pela restrição  $L|_{\{\lambda x\}}$  de qualquer funcional linear  $L$  em  $\mathbf{C}^{n+1}$ . Mais geralmente, pode-se mostrar que as seções globais do fibrado linear  $dH \rightarrow \mathbb{P}^n$  - cuja fibra sobre  $x \in \mathbb{P}^n$  corresponde ao espaço dos funcionais  $d$ -lineares na reta  $\{\lambda x\}$  - são dadas pelas seções  $\sigma_F$  de  $dH$  induzidas pela restrição  $F|_{\{\lambda x\}}$  dos polinômios homogêneos de grau  $d$  em  $n+1$  indeterminadas. Assim,  $h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(dH)) = N$  onde  $N = \binom{n+d}{n}$ . Nesta linguagem o  $n$ -ésimo mergulho Veronese de grau  $d$  é o morfismo (isomorfismo!) associado ao fibrado linear  $dH$ . Mais precisamente, considera-se uma base  $F_0, \dots, F_{N-1}$ ,  $F_i$  homogêneo de grau  $d$  em  $n+1$  indeterminadas, de  $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(dH))$  e constrói-se o isomorfismo  $v_{n,d} : \mathbb{P}^n \rightarrow v_{n,d}(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{N-1}$ . Em particular, a superfície de Veronese é a imagem do isomorfismo  $v_{2,2} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{P}^5$  associado ao fibrado linear  $2H \rightarrow \mathbb{P}^2$  cuja base para  $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(2H))$  é dada por qualquer base  $F_0, \dots, F_5$  do espaço dos polinômios homogêneos de grau 2 em 3 indeterminadas. (Para ver detalhes do que foi afirmado aqui ver [4] pag. 176).

**Definição 5** - Uma variedade  $X \subset \mathbb{P}^n$  é dita ser um cone se existe uma subvariedade  $Y \subset X$ , chamada vértice e denotada por  $\text{Vert}(X)$ , tal que para quaisquer  $x \in X$  e  $y \in Y$  com  $x \neq y$  tem-se  $\ell_{x,y} \subset X$ .

**Proposição 8** -  $p \in \text{Vert}(X) \Leftrightarrow p \in \bigcap_{x \in X} T_x X$

**Demonstração:** A condição necessária é imediata desde que para todo  $x \in X$ ,  $x \neq p$ , por definição de cone temos  $\ell_{x,p} \subset X$ , isto é,  $\ell_{x,p}$  é tangente a  $X$  em  $x$ . Basta então mostrarmos que para termos  $p \in \text{Vert}(X)$  é suficiente que  $p \in \bigcap_{x \in X} T_x X$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{morfismos regulares} \\ f : X \rightarrow \mathbb{P}^N, \text{ módulo} \\ \text{transformações} \\ \text{projetivas} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{fibrados lineares } L \rightarrow X \\ \text{com } E \subset H^0(X, \mathcal{O}(L)) \\ \text{tal que } |E| \text{ não tem ponto base} \end{array} \right\}$$

onde a escolha das coordenadas homogêneas em  $\mathbb{P}^N$  corresponde a escolha da base  $s_0, \dots, s_N$  para  $E$ .

Seja  $I(X) = (F_1, \dots, F_r) \subset \mathbf{k}[X_0, \dots, X_n]$ . Podemos supor  $p = [0 : \dots : 1]$ . Dado  $q \in X$  considere a reta  $\ell_{p,q} = sq + tp$ . Queremos mostrar que para todo  $F \in I(X)$  temos  $F|_{\ell_{p,q}} = 0$  sabendo que

$$\mathcal{J}(X)(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_0}(x) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_r}{\partial X_0}(x) & \cdots & \frac{\partial F_r}{\partial X_n}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

isto é,  $\frac{\partial F_i}{\partial X_n}(x) = 0$  para todo  $x \in X$  ( $1 \leq i \leq r$ ). Mais precisamente, usando a regra da cadeia queremos mostrar que para todo  $F \in I(X)$  temos  $F|_{\ell_{p,q}} = 0$  sabendo que  $\frac{\partial F}{\partial X_n}(x) = 0$ , para todo  $x \in X$ . Por série de Taylor obtemos

$$F(sq + tp) = F(sq) + F'(sq)tp + \frac{1}{2}F''(sq).(tp)^2 + \dots + \frac{1}{p!}F^{(k)}(sq).(tp)^k + \dots$$

onde

$$\begin{aligned} F^{(k)}(sq).(tp)^k &= \sum_{i_1=\dots=i_k=0}^n \frac{\partial^k F}{\partial X_{i_1} \dots \partial X_{i_k}}(sq).(tp)_{i_1} \dots (tp)_{i_k} \\ &= \frac{\partial^k F}{\partial X_n \dots \partial X_n}(sq).t^k = st^k \frac{\partial^k F}{\partial X_n \dots \partial X_n}(q) \end{aligned}$$

em que denotamos  $(tp)_{i_j}$  a  $i_j$ -ésima coordenada do ponto  $tp$ . Como  $F(sq) = s^{deg F} F(q) = 0$  e  $\frac{\partial^k F}{\partial X_n \dots \partial X_n}(q) = 0$  desde que  $\frac{\partial F}{\partial X_n}|_X = 0$  então  $F(sq + tp) = 0 \forall [s : t] \in \mathbb{P}^1, \forall q \in X \setminus \{p\}$   $\therefore \ell_{p,q} \subset X \forall q \in X \setminus \{p\}$ .  $\square$

**Lema 4** - *Seja  $X \subset \mathbb{P}^N$ ,  $N \geq \dim X + 3$ , uma variedade  $n$ -dimensional irredutível e não degenerada com  $\dim S(X) = n + 2$ . Se  $X$  é regradada então  $X$  é um cone.*

**Demonstração:** Seja  $L \subset X$  uma reta geral. A variedade irredutível  $S(L, X)$  é um cone com vértice contendo  $L$ . Temos  $S(L, X) \supset X$ . Podemos supor tal inclusão própria pois a igualdade nos leva trivialmente à tese (Entretanto, leitor, pode-se verificar que a igualdade não acontece!). Assim, temos  $X \subsetneq S(L, X) \subset S(X)$ . Daí,

$$n + 1 \leq \dim S(L, X) \leq n + 2$$

Se  $\dim S(L, X) = n + 2$  então  $S(L, X) = S(X)$ . Deste modo,  $L$  estaria contida no vértice de  $S(X)$ ,  $\text{Vert } S(X)$ . Pela generalidade de  $L$ ,  $X \subset \text{Vert } S(X)$  donde  $X$  seria degenerada. Deste modo, para uma reta geral  $L$  temos  $\dim S(L, X) = n + 1$ . Pelo lema de Terracini aplicado à junção  $S(T_x X, L)$ , dado um ponto geral  $x \in X$  temos  $n + 1 = \dim \langle T_x X, L \rangle$ , isto é,  $T_x X \cap L = p_x$ . Vamos mostrar que variando  $x$  o ponto  $p_x$  não varia. Disto seguirá que  $p = p_x \in \bigcap_{x \in X} T_x X$ , isto é,  $X$  é cone.

Consideremos o cone de vértice  $L$ , com  $L$  uma reta geral,  $S(L, SX) \supset S(X)$ . Sejam  $x \in L$  e  $p \in S(X)$  gerais. Temos  $p \in \ell_{x_1, x_2}$  com  $x_1, x_2 \in X$  gerais. Por Terracini,  $T_p SX = \langle T_{x_1} X, T_{x_2} X \rangle$ . Contudo, pelo parágrafo anterior  $L \cap T_{x_1} X \neq \emptyset$  e  $L \cap T_{x_2} X \neq \emptyset$ . Daí,  $L \cap T_p S(X) \neq \emptyset$ . Segue então por Terracini aplicado à junção  $S(L, SX)$  que

$$\dim S(L, S(X)) < \dim L + \dim S(X) + 1 = n + 4$$

Desde que  $S(X) \subset S(L, SX)$  e  $\dim S(X) = n + 2$  temos

$$n + 2 \leq \dim S(L, S(X)) \leq n + 3$$

Se  $\dim S(L, S(X)) = n + 2$  então  $S(L, S(X)) = S(X)$  e daí  $L \subset \text{Vert } S(X)$ . Assim, dado  $x \in X$  geral existe uma reta geral  $L \subset X$ . Pelo que foi visto anteriormente  $x \in L \subset \text{Vert } S(X)$  e, portanto,  $X \subset \text{Vert } S(X)$ . Logo,  $X$  seria degenerada e isto contradiz a hipótese. Por Terracini, concluímos então que para  $x, y \in X$  gerais temos

$$\langle \langle T_x X, T_y X \rangle, L \rangle = \mathbb{P}^{n+3}$$

donde a interseção  $L \cap \langle T_x X, T_y X \rangle$  consiste em um ponto  $p_{x,y}$ . Por outro lado, temos  $p_x = L \cap T_x X$  e  $p_y = L \cap T_y X$ . Logo,  $p_x = p_{x,y} = p_y$ . Isto conclui a demonstração.  $\square$

**Definição 6** - Seja  $X \subset \mathbb{P}^N$  uma variedade. Para todo hiperplano  $H \subset \mathbb{P}^N$  o conjunto

$$X_H = \{x \in \text{Sm}(X) \mid T_x X \subset H\}$$

é chamado o lugar de contato de  $H$  com respeito a  $X$ .

Para  $p \in S(X)$  geral considere o fecho do lugar de contato do hiperplano  $H = T_p S(X)$  com respeito a  $S(X)$ . Por definição temos o conjunto:

$$C_H S(X) = \overline{\{q \in \text{Sm}(S(X)) \mid T_q S(X) = H\}}$$

Note que  $C_H S(X) = \overline{\mathcal{G}^{-1}(\mathcal{G}(p))}$  onde  $\mathcal{G} : S(X) \cdots \rightarrow \mathbb{P}^5$  é o mapa de Gauss.

**Lema 5** -  $C_H S(X) = (T_{\mathcal{G}(p)}(S(X))^*)^*$ , isto é,  $C_H S(X)$  é um subespaço linear.

**Demonstração:** Pelo teorema da reflexividade (T.R.), dados  $z \in \text{Sm}(S(X))$  e  $H \in \text{Sm}(S(X))^*$  temos

$$H = T_q S(X) \iff q^* \supset T_H(S(X))^*$$

Assim,

$$q \in C_H S(X) \iff T_q S(X) = T_p S(X) = H \iff H = \mathcal{G}(p) \text{ é tangente a } S(X) \text{ em } q \\ \xrightarrow{\text{T.R.}} q^* \supset T_{\mathcal{G}(p)}(S(X))^* \iff q \in (T_{\mathcal{G}(p)}(S(X))^*)^* \quad \square$$

Daqui por diante estaremos supondo sempre que  $X$  é uma superfície em  $\mathbb{P}^5$  irredutível, não degenerada e com  $\dim S(X) = 4$ .

**Proposição 9** - *Seja  $H = T_p S(X)$  com  $p \in S(X)$  um ponto geral. Se  $X$  não é um cone então*

i)  $C_H S(X) = \mathbb{P}^2$

ii) *A parte unidimensional de  $C_H S(X) \cap X$ , a qual denotaremos por  $D$ , é uma cônica irredutível.*

**Demonstração:** Seja  $\ell_{x,y}$  uma secante geral que passa por  $p$ . Pelo lema de Terracini temos  $T_p S(X) = \langle T_x X, T_y X \rangle$ . Portanto, para um ponto geral  $q \in \ell_{x,y}$  temos

$$T_q S(X) = \langle T_x X, T_y X \rangle = T_p S(X)$$

donde  $\ell_{x,y} \subset C_H S(X)$ . Lembramos que para  $p \in S(X)$  geral o lugar secante  $\Sigma_p(X)$  tem dimensão pura 1, isto é, por um ponto geral de  $S(X)$  passam infinitas secantes (proposição 6). Como  $x \in \Sigma_p(X)$  então está em alguma componente irredutível de  $\Sigma_p(X)$ . Daí, por um ponto geral  $x'$  nesta componente apóia-se uma secante honesta  $\ell_{x',y'}$  passando por  $p$ . Pelo argumento acima  $\ell_{x',y'} \subset C_H S(X)$  donde  $x' \in D$ . Daí,  $D$  contém tal componente. Como tal componente é unidimensional então  $\dim D \geq 1$ . Desde que  $D \subset X$  então  $\dim D = 1$  ou  $2$ . Se  $\dim D = 2$ , pela irredutibilidade de  $X$ , teríamos  $D = X$  donde  $X \subset C_H S(X)$ . Disto seguiria que  $X$  é degenerada o que é uma contradição. Seja  $q \in C_H S(X)$  geral. Podemos supô-lo no aberto do lema de Terracini. Como anteriormente, usando Terracini podemos concluir que a secante  $\ell_{x_q, y_q} \ni q$  está contida em  $C_H S(X)$ . Logo,  $x_q, y_q \in D$ . Assim, por um ponto geral de  $C_H S(X)$  passa uma reta secante a  $D$  donde  $C_H S(X) \subset S(D)$ . Por outro lado,  $D \subset C_H S(X)$  e  $C_H S(X)$  é linear donde  $SD = C_H S(X)$ . Para  $q \in C_H S(X)$  geral passam infinitas retas secantes honestas (basta supor  $q$  no aberto da proposição 6). Como podemos supor também  $q$  no aberto do lema de Terracini tais secantes estariam todas contidas em  $C_H S(X)$  e, portanto, são secantes a  $D$ . Deste modo  $D$  é plana e conseqüentemente  $C_H S(X)$  é um plano. Se  $D = D_1 \cup \dots \cup D_k \subset \mathbb{P}^2$  então a secante geral  $\ell_{x,y} \ni p$  seria trissecante o que é uma contradição. Assim,  $D$  tem uma única componente irredutível. Se tal componente 1-dimensional de  $D$  tivesse grau  $\geq 3$  sendo  $D$  plana uma secante geral  $\ell_{x,y} \ni p$  seria trissecante. Pelo corolário 3,  $X$  seria uma hipersuperfície o que é uma contradição. Se a mesma tivesse grau 1 teríamos  $p \in \ell_{x,y} \subset X$ . Logo,  $D$  é uma cônica. Suponhamos que para  $p \in S(X)$  geral  $D$  fosse redutível. Dado  $x \in X$  geral, consideremos um ponto geral  $p$  da secante geral  $\ell_{x,y}$ . Então,  $x$  estaria em  $D$  e, pela redutibilidade de  $D$ , por  $x$  passaria uma reta contida em  $X$ . Logo,  $X$  seria regradada e pelo lema anterior seria um cone.  $\square$

**Proposição 10** - *Seja  $X \subset \mathbb{P}^N$  uma variedade  $n$ -dimensional irredutível não degenerada e  $x \in X$  um ponto geral. Seja  $\pi_x : X \dashrightarrow Y = \overline{\pi_x(X)} \subset \mathbb{P}^{N-n-1}$  a projeção de  $X$  com centro o espaço tangente  $T_x X$ . Tem-se*

$$\dim Y = \dim S(X) - n - 1$$

**Demonstração:** Desde que  $X \subset \pi_x^{-1}(Y) = S(Y, T_x X)$  e  $S(Y, T_x X)$  é um cone de vértice  $T_x X$  temos  $S(X, T_x X) \subset S(Y, T_x X)$ . Por outro lado, pela definição de  $\pi_x$ ,  $S(X, T_x X) \cap \mathbb{P}^{N-n-1} = Y$  donde  $S(Y, T_x X) \subset S(X, T_x X)$ . Daí,  $S(Y, T_x X) = S(X, T_x X)$ . Sendo  $Y \subset \mathbb{P}^{N-n-1}$  temos  $Y$  e  $T_x X$  disjuntos. Aplicando o lema de Terracini para as junções  $S(Y, T_x X)$  e  $S(X, T_x X)$  obtemos

$$\begin{aligned} 1 + \dim Y + \dim T_x X &= \dim S(Y, T_x X) = \dim S(X, T_x X) \\ &= \dim \langle T_y X, T_x X \rangle \\ &= \dim S(X) \end{aligned}$$

onde na última igualdade foi aplicado o lema de Terracini para  $S(X)$ .  $\square$

**Corolário 4** - *O fecho da imagem da projeção  $\pi_x : X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  com centro um plano tangente em um ponto geral  $x \in X$  é uma cônica lisa.*

**Demonstração:** Pela proposição anterior,  $\dim Y = 4 - 2 - 1 = 1$ . Se  $Y = L$  fosse uma reta então  $X \subset \langle L, T_x X \rangle = H$  seria degenerada. Deste modo, uma cônica não contida em uma fibra se projeta isomorficamente em  $Y$  que não sendo uma reta nem um ponto é uma cônica lisa.  $\square$

**Obs:** Note que no corolário anterior o plano da cônica não contida na fibra é disjunto de  $T_x X$ .

**Lema 6** -  $(T_x X \cap X)_{red} = x$ .

**Demonstração:** Suponhamos que por um ponto geral  $x \in X$  temos  $q_x \in T_x X \cap X$  com  $q_x \neq x$ . Então, tomando um outro ponto geral  $x' \in X$  e considerando a projeção  $\pi_{x'}$  de  $X$  com centro  $T_{x'} X$  obtemos que

$$\pi_{x'}(L_x) \subset \pi_{x'}(T_x X \cap X) \subset T_{\pi_{x'}(x)} Y' \cap Y' = \pi_{x'}(x)$$

onde  $L_x = \ell_{x, q_x}$  e  $Y'$  é a cônica imagem de  $\pi_{x'}$ . Assim  $L_x \cap T_{x'} X = p_{x'}$  pois  $\pi_{x'}(L_x)$  é uma reta ou um ponto conforme  $L_x \cap T_{x'} X$  seja vazia ou um ponto. Desde que  $\bigcap_{x \in X} T_x X = \emptyset$  ( $X$  não é um cone) podemos tomar  $x' \in X$  tal que  $q_x \notin T_{x'} X \cap T_x X$ . Daí, podemos supor  $\pi_{x'}$  definida em  $q_x$ , isto é,  $q_x \neq p_{x'}$ . Desde que  $X$  não é um cone o ponto  $p_{x'}$  varia com  $x' \in X$  geral. Então, considerando o cone  $S(L_x, S(X))$  obtemos

$$\dim S(L_x, S(X)) = \dim \langle L_x, \langle T_{x_1 X}, T_{x_2 X} \rangle \rangle$$

com  $x_1, x_2 \in X$  gerais. Pela observação anterior,  $L_x \cap T_{x_1 X} = p_{x_1}$  e  $L_x \cap T_{x_2 X} = p_{x_2}$  com  $p_{x_1} \neq p_{x_2}$ . Daí,  $L_x = \langle T_{x_1 X}, T_{x_2 X} \rangle \cap L_x$ . Portanto,  $\dim S(L_x, S(X)) = n + 2$ . Assim,  $S(L_x, S(X)) = S(X)$  e desde que  $S(L_x, S(X))$  contém  $L_x$  então contém o ponto geral  $x \in X$ . Logo,  $X \subset \text{Vert } S(L_x, S(X))$  e isto contradiz a não degenerescência de  $X$ .  $\square$

**Lema 7** - *O fecho da fibra geral da projeção  $\pi_x$  para  $x \in X$  geral é uma cônica lisa.*

**Demonstração:** Considere o morfismo dominante  $\pi_x : U_x \longrightarrow Y$ , onde  $Y = \overline{\text{Im } \pi_x}$  e  $U_x = X \setminus T_x X \cap X$ . Pelo lema de Sard, existe um aberto  $V \subset Y$  tal que para todo ponto não singular  $y \in \pi_x^{-1}(V) \cap (X \setminus \text{Sing}(X))$  a diferencial

$$d_y \pi_x = \pi_{x|_{T_y X}} : T_y X \longrightarrow T_{\pi_x(y)} Y = \ell$$

é sobrejetiva. Daí,  $T_y X \subset \langle T_x X, \ell \rangle = H$ . Fazendo a interseção do aberto do lema de Terracini e o aberto  $\pi_x^{-1}(V) \cap (X \setminus \text{Sing}(X))$  obtemos que  $H_{x,y} = \langle T_x X, T_y X \rangle = T_p S(X)$  para  $p \in \ell_{x,y}$  geral. Pela proposição 9,  $C_{H_{x,y}} S(X) = \mathbb{P}^2$  é tal que  $C_{H_{x,y}}(S(X)) \cap X = D$  tem como parte unidimensional uma cônica lisa  $C_{x,y}$ . Para  $y \in X$  geral o hiperplano  $H_{x,y}$  é tangente ao longo da fibra  $\pi_x^{-1}(\pi_x(y))$ . De fato, o espaço tangente  $T_{y'} X$  (projetivo) em qualquer ponto  $y'$  da fibra  $\pi_x^{-1}(\pi_x(y))$  se mapeia no espaço tangente (projetivo)  $\ell$  de  $Y$  em  $\pi_x(y)$ . Deste modo,  $T_{y'} X \subset \langle \ell, T_x X \rangle = H_{x,y}$ . Em outras palavras,  $\pi_x^{-1}(\pi_x(y)) \subset \text{Sing}(H_{x,y} \cap X)$ . Temos  $C_{x,y} \setminus \{x\} \subset \pi_x^{-1}(\pi_x(y))$  pois o plano suporte  $C_{H_{x,y}} S(X)$  de  $C_{x,y}$  intersecta  $T_x X$  na reta tangente de  $C_{x,y}$  em  $x$ . Pelo lema de Sard,  $\pi_x^{-1}(\pi_x(y))$  é uma curva lisa (não necessariamente conexa) em  $U_x$ . Seja  $\pi_x^{-1}(\pi_x(y)) = C_{x,y} \setminus \{x\} \cup \bigcup_{i=1}^m D_i$  onde  $D_i$  são curvas lisas em  $U_x$ . Pela condição de  $\pi_x^{-1}(\pi_x(y))$  ser lisa temos que  $D_i \cap D_j = \emptyset$  e  $D_i \cap (C_{x,y} \setminus \{x\}) = \emptyset$ . Seja  $\overline{D}_i$  o fecho de  $D_i$  em  $X$ . Temos  $\pi_x(\overline{D}_i) = \pi_x(y)$ . Assim,  $\overline{D}_i$  passa por  $x$  desde que  $\overline{D}_i \cap T_x X \neq \emptyset$  (se  $\overline{D}_i \cap T_x X = \emptyset$  então  $\overline{D}_i$  seria mapeada isomorficamente por  $\pi_x$ ),  $\overline{D}_i \subset X$  e  $X \cap T_x X = \{x\}$ . Deste modo cada  $\overline{D}_i$  é componente conexa de  $\text{Sing}(H_{x,y} \cap X)$ . Vamos mostrar que  $C_{x,y}$  é a única componente irredutível de  $\text{Sing}(H_{x,y} \cap X)$  passando por  $x$ . Desde que para um ponto geral  $p \in \ell_{x,y}$  vale o lema de Terracini então o mesmo vale para um ponto  $x'$  numa vizinhança de  $x$ , isto é,

$T_{p'}S(X) = \langle T_{x'}X, T_yX \rangle$  para  $p' \in \ell_{x',y}$  geral. Então, sendo  $x' \in X$  numa vizinhança de  $x$  um ponto no qual  $H_{x,y}$  é tangente a  $X$  em  $x'$  temos  $T_{p'}S(X) = \langle T_{x'}X, T_yX \rangle \subset H_{x,y}$ , pois  $T_yX \subset H_{x,y}$ . Daí,  $T_{p'}SX = H_{x,y}$  donde  $p' \in C_{H_{x,y}}S(X)$ . Usando Terracini ao longo de um aberto da reta  $\ell_{x',y}$ , obtemos que  $\ell_{x',y} \subset C_{H_{x,y}}S(X)$  donde  $x' \in C_{H_{x,y}}SX \cap X = D$  e, portanto,  $x' \in C_{x,y}$ . Logo,  $C_{x,y} = \pi_x^{-1}(\pi_x(y))$ .  $\square$

**Lema 8** - *Se uma superfície  $X \subset \mathbb{P}^n$  contém uma dupla infinidade de retas então ela é um plano.*

**Demonstração:** Considere a projeção  $\pi_x : X \cdots \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$  com centro um ponto geral de  $X$ . Se  $y \neq x$  é um ponto geral, existe uma reta  $\overline{xy} \subset X$ . Esta é contraída por  $\pi_x$ . Logo a imagem de  $\pi_x$  é no máximo de dimensão um. Tomando outra reta geral  $\overline{yy'} \subset X$ , vemos que a imagem é uma reta  $\ell$ . Daí, segue que  $X$  está contido na junção  $S(x, \ell) = \mathbb{P}^2$ .  $\square$

**Lema 9** - *Nenhuma superfície  $X \subset \mathbb{P}^n$  (não-degenerada) contém uma família tri-dimensional de cônicas lisas.*

**Demonstração:** Por hipótese, por um ponto geral passam  $\infty^2$  cônicas. Assim, a imagem da projeção  $\pi_x : X \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{P}^4$  é uma superfície com  $\infty^2$  retas (a projeção de uma cônica lisa por um de seus pontos é uma reta). Daí, pelo lema anterior,  $\pi_x(X)$  é um plano donde  $X \subset \mathbb{P}^3 = \pi_x^{-1}(\pi_x(X))$  e  $X$  seria degenerada.  $\square$

**Teorema 11** - *Seja  $X \subset \mathbb{P}^5$  uma superfície não degenerada que não é um cone e suponha que  $\dim S(X) = 4$ . Então,  $X$  contém uma família 2-dimensional de cônicas lisas que são linearmente equivalentes e formam um sistema linear completo de divisores de Cartier de dimensão 2. Se  $C$  é uma tal cônica então  $C^2 = 1$ . O sistema linear associado  $|C|$  define um isomorfismo de  $X$  com  $\mathbb{P}^2$  cuja inversa realiza  $X$  como uma superfície projetivamente equivalente a superfície de Veronese  $v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$ .*

**Demonstração:** Pela proposição 9,  $C_H S(X) = (T_H(SX))^* = \mathbb{P}^2$  e, portanto,  $\dim S(X)^* = 2$ . Logo, a família de cônicas lisas construída na proposição 9 é pelo menos de dimensão 2. Entretanto, pelo lema anterior, é exatamente 2-dimensional.

Pelo corolário 4 e lema 7, a aplicação  $\pi_x : X \setminus \{x\} \longrightarrow Y$  é uma aplicação regular sobre a cônica lisa  $Y \simeq \mathbb{P}^1$  tal que o fecho de uma fibra geral é uma cônica da família. Portanto, as cônicas são divisores de Cartier em  $X$  que fazem parte de um mesmo sistema linearmente equivalente.

Seja  $C$  uma tal cônica que passa por um ponto geral de  $x \in X$ . Vamos mostrar que a auto-interseção  $C^2 = 1$ . Sendo  $C_1$  uma outra cônica que passa por  $x$  temos, pela equivalência linear de  $C$  e  $C_1$ , que  $C^2 = C.C_1 \geq 1$ . Considere um hiperplano  $H$  contendo  $C$  e  $C_1$ . Então  $H \cap X = \tilde{H} = C + C_1 + E$  com  $E$  um divisor efetivo. Desde que uma seção hiperplana a  $X$  é conexa segue que se  $E \neq 0$  então  $E.C = E.C_1 \geq 1$ . Como equivalência linear preserva interseção de ciclos podemos supor  $\tilde{H}$  em posição geral com relação a  $C$ . Daí,  $2 = \tilde{H}.C = C^2 + C.C_1 + E.C_1 \geq 3$ , o que é uma contradição. Logo,  $\tilde{H} = C + C_1$ , donde  $C^2 = C.C_1 = 1$  e  $\tilde{H}^2 = 4$ . Se  $|C|$  tivesse um ponto base, projetando  $X$  do ponto base obteríamos uma superfície contendo infinito a 2 retas donde esta seria um plano e  $X$  seria degenerada em  $\mathbb{P}^5$ .

Pelo dicionário

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{morfismos regulares} \\ f : X \longrightarrow \mathbb{P}^N, \text{ módulo} \\ \text{transformações} \\ \text{projetivas} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{fibrados lineares } L \longrightarrow X \\ \text{com } E \subset H^0(X, \mathcal{O}(L)) \\ \text{tal que } |E| \text{ não tem ponto base} \end{array} \right\}$$

podemos considerar o morfismo regular

$$\Phi_{|C|} : X \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

associado ao sistema linear de cônicas  $|C|$  em  $X$ . Mostremos que tal morfismo é, na verdade, um isomorfismo. Mostramos acima que para uma seção hiperplana  $H$  de  $X$  temos  $H = C_1 + C_2$  e daí  $H = 2C$ . Disto deduzimos que se  $F \subset X$  é uma curva irredutível qualquer então  $0 < H.F = 2C.F$ , isto é, para uma curva irredutível  $F$  contida em  $X$  temos  $C.F > 0$ . Mostremos que toda fibra tem dimensão zero. Suponhamos que para algum  $y \in \mathbb{P}^2$ , a fibra  $\Phi^{-1}(y)$  contenha uma curva irredutível  $F$ . Seja  $\ell$  uma reta geral do plano que não passa por  $y$ . Então, por definição de  $\Phi$ ,  $\Phi^{-1}(\ell) = C'$  é um divisor linearmente equivalente a  $C$  que não tem interseção com a curva  $F$  e, portanto,  $0 = C'.F = C.F$  que

temos visto ser impossível. Logo, as fibras são todas finitas. Mostremos que as mesmas consistem de um só ponto. Sejam  $\ell'$  e  $\ell''$  duas retas que passam por um ponto qualquer  $\Phi(x) = y \in \mathbb{P}^2$ . Então,  $\{x\} \subset \Phi^{-1}(\Phi(x)) \subset \Phi^{-1}(\ell') \cap \Phi^{-1}(\ell'')$  e de  $\Phi^{-1}(\ell') \cdot \Phi^{-1}(\ell'') = 1$  segue que a fibra coincide como esquema com  $x$ . Desde que estamos considerando  $\text{char}(\mathbf{k}) = 0$  isto mostra também que  $\Phi$  é birracional. Como  $\mathbb{P}^2$  é fatorial segue do teorema 10 que existe um aberto não vazio  $U \subset \mathbb{P}^2$  tal que  $\Phi|_{\Phi^{-1}(U)} : \Phi^{-1}(U) \rightarrow U$  é um isomorfismo. Além disso, se  $x \in \mathbb{P}^2 \setminus U$  então  $\dim \Phi^{-1}(x) \geq 1$ . Pelo que foi mostrado acima segue então que  $U = \mathbb{P}^2$ . Assim,  $X \xrightarrow{\Phi} \mathbb{P}^2$  com  $\Phi^{-1}$  dada por polinômios  $F_i$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , homogêneos de grau  $d$ . Como  $\Phi^{-1}$  leva reta em cônica então  $d = 2$ . Pela não degenerescência de  $X$  concluimos que  $F_0, \dots, F_6$  constituem 6 cônicas de  $\mathbb{P}^2$  linearmente independentes, isto é,  $\Phi^{-1}$  é o isomorfismo associado ao fibrado linear  $2H$  em  $\mathbb{P}^2$ . Logo,  $X$  é projetivamente equivalente à superfície de Veronese.  $\square$

**Corolário 5** - *Seja  $X \subset \mathbb{P}^N$ ,  $N \geq 5$ , uma superfície, que não é um cone, não degenerada e irredutível. Se  $X$  contém uma família 2-dimensional de cônicas lisas então  $X$  é projetivamente equivalente à superfície de Veronese.*

**Demonstração:** Por dois pontos gerais  $x, y \in X$  passa ao menos uma cônica lisa  $C_{x,y}$ . Seja  $\pi \supset C_{x,y}$  o plano suporte de  $C_{x,y}$ . Então,  $\pi \cap T_x X \supseteq \ell_x$  e  $\pi \cap T_y X \supseteq \ell_y$ . Daí,  $T_x X \cap T_y X \neq \emptyset$ . Não sendo  $X$  uma hipersuperfície segue que

$$\dim S(X) = \dim \langle T_x X, T_y X \rangle = 4$$

e o corolário segue do teorema anterior.  $\square$

Estamos finalmente prontos para enunciar as várias caracterizações da superfície de Veronese como a única superfície em  $\mathbb{P}^5$ , não cone, tendo alguma propriedade geométrica notável. Lembramos que, pelo lema de Terracini e pelo corolário 2, para uma superfície irredutível não degenerada  $X \subset \mathbb{P}^N$ ,  $N \geq 5$ , dizer que  $\dim SX = 4$  é equivalente dizer que dados dois pontos  $x, y \in X$  tem-se  $T_x X \cap T_y X \neq \emptyset$ . Claramente um cone com vértice um ponto goza da última propriedade e tem sempre variedade secante 4-dimensional. Temos então demonstrado o seguinte teorema clássico.

**Teorema 12** - Seja  $X \subset \mathbb{P}^N$ ,  $N \geq 5$ , uma superfície não degenerada que não é um cone. Então,  $X$  é projetivamente equivalente à superfície de Veronese,  $\nu_2(\mathbb{P}^2)$ , se e somente se uma das seguintes condições é satisfeita:

- i) dados dois pontos gerais  $x, y \in X$ ,  $T_x X \cap T_y X \neq \emptyset$  [del Pezzo 1887];
- ii)  $\dim S(X) = 4$  [Severi 1901];
- iii)  $X$  contém uma família 2-dimensional de cônicas irredutíveis.  $\square$

# Epílogo

Francesco Severi (1879-1961) nasceu em Arezzo, Itália, no dia 13 de abril. Estudou na universidade de Turim. Período em que teve de dar aulas particulares para sobreviver. Suas idéias de tornar-se um engenheiro foram deixadas de lado assim que estudou com Corrado Segre em Turim. Severi ficou fascinado pela geometria e sob a supervisão de Segre obteve seu doutorado em 1900. Sua tese de doutorado foi em geometria enumerativa. Após seu doutorado foi assistente de D'Ovidio, ainda em Turim; de Enriques, em Bolonha e de Bertini em Pisa. Trabalhou ainda em Parma (1904) e em Pádua (1905).

A 1ª Guerra Mundial interrompeu seus trabalhos em Pádua e durante a mesma ele serviu com distinção na artilharia.

Em 1922 Severi trabalhou na universidade de Roma. Suas contribuições mais importantes foram em geometria algébrica. Severi atacou somente questões importantes de caráter geral e de grande dificuldade. Após trabalhar em geometria enumerativa, Severi voltou sua atenção para a geometria birracional de superfícies. Introduziu muitos conceitos em geometria, como por exemplo a noção de equivalência algébrica. Deu condições necessárias e suficientes para a equivalência linear de duas curvas em uma superfície em 1905. Alguns consideram a descoberta de Severi de uma base de curvas algebricamente independentes em qualquer superfície como sua mais importante contribuição. Este trabalho foi publicado em 1906 e Max Noether escreveu para Severi referindo-se a este resultado dizendo: "você tem sido uma grande luz na geometria".

Abaixo segue a transcrição da demonstração de Severi da caracterização da superfície de Veronese em  $\mathbb{P}^5$  ([12]).

”Se la superficie  $F$  è proiezione di una superficie  $\Phi$  dello stesso ordine, appartenente allo  $S_5$ , si può dire che il numero  $d$  dei punti doppi impropri de  $F$  esprime il numero dei *punti doppi apparenti di  $\Phi$* .

Nello  $S_5$  esiste qualche superficie  $\Phi$  che è priva di punti doppi apparenti: p. e. la superficie del Veronese. Per un punto dello spazio non passa nessuna sua corda, perchè le corde di essa superficie sono distribuite sopra gli  $\infty^2$  piani delle sue coniche. Questo fatto non ha riscontro con un fatto analogo per le curve dello  $S_3$ , giacchè ivi non può immaginarsi un sistema  $\infty^2$  di rette, che non stiano tutte in un piano, senza che i punti di quelle rette riempiano lo spazio.

Oltre alla superficie del Veronese, nello  $S_5$ , esistono altre superficie che siano prive di punti doppi apparenti?

Sia  $\Phi$  una tal superficie: denotiamo con  $V$  la varietà delle sue  $\infty^4$  corde, la quale, come luogo di punti, sarà almeno una  $M_3$ , e se vogliamo che per un punto generico dello  $S_5$  non passi nessuna corda di  $\Phi$  occorrerà e basterà che la  $V$  sia, come luogo di punti, al più una  $M_4$ .

Se la  $V$  è una  $M_3$ , siccome per un punto di  $V$  giacere sopra una corda data di  $\Phi$  è in tal caso condizione doppia, sarà pure condizione doppia per una corda di  $\Phi$  passare per un punto dato di  $V$ , dimodochè per un tal punto passeranno  $\infty^2$  corda di  $\Phi$ . Sia  $\varphi$  la curva sezione di  $\Phi$  con un  $S_4$  generico: per un punto di una corda di  $\varphi$  passeranno  $\infty^1$  altre corde della  $\varphi$  stessa, e quindi  $\varphi$  sarà una curva piana. Ciò è assurdo, giacchè si è supposto la  $\Phi$  immersa nello  $S_5$ . Onde la  $V$  non può essere una  $M_3$ .

Se la  $V$  è una  $M_4$ , per un ponto di  $V$  giacere sopra una corda data di  $\Phi$  è condizione tripla, e quindi è anche condizione tripla per una corda di  $\Phi$  passare per un punto dato di  $V$ . Dunque per un punto di  $V$  passano  $\infty^1$  corde della  $\Phi$ , e costituiscono un cono  $\Gamma$ . Seghiamo questo cono e  $\Phi$  con un  $S_4$  passante per una generatrice di  $\Gamma$ ; la sezione  $\varphi$  di  $\Phi$  dovendo essere immersa in quello  $S_4$  (perchè altrimenti la  $\Phi$  medesima non sarebbe

immersa nello  $S_5$ ), ad una sua corda generica, in un punto dato, non si potranno appoggiare altre corde. Quindi quello  $S_4$  con cui si è secato non conterrà altre generatrici del cono  $\Gamma$ , il quale sarà perciò un fascio di raggi. È allora evidente che il piano di  $\Gamma$  conterrà tutta una curva di  $\Phi$ , la quale curva sarà almeno del 2° ordine; e dunque ogni retta del piano di  $\Gamma$  sarà corda de  $\Phi$ . La  $V$  si ottiene perciò facendo variare un piano rigato in una certa  $\infty^2$ . Ma risulta di più che le curve comuni ai piani di questa  $\infty^2$  e alla  $\Phi$ , non potranno essere che coniche, poichè altrimenti ogni corda di  $\Phi$  sarebbe plurisecante.

E di più per una corda di  $\Phi$  non potrà passare che un piano della  $\infty^2$ , perchè se così non fosse per un punto generico di quella corda, che è un punto generico di  $V$ , passerebbero almeno due fasci di corde della  $\Phi$ , il che abbiamo veduto non può accadere.

Dunque la  $\Phi$  contiene un sistema doppiamente infinito di coniche e per due punti della superficie passa una sola conica del sistema: ciò basta per farci concludere che la  $\Phi$  è la superficie del 4° ordine del Veronese, normale nello  $S_5$ .

*La sola superficie immersa nello spazio a cinque dimensioni, priva di punti doppi apparenti, è la superficie del Veronese.”*

# Bibliografia

- [1] Dale, M., *Severi's Theorem On the Veronese Surface*, J. London Math. Soc. (2), 32 (1985), 419-425.
- [2] Dale, M., *Terracini's Lemma and the Secant Variety of a Curve*, Proc. London Math. Soc. (3), 49 (1984), 329-339.
- [3] Fujita, T. e Roberts, J., *Varieties With Small Secant Varieties: The Extremal Case*
- [4] Griffiths, Phillip e Harris, Joseph, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, 1978.
- [5] Harris, Joe, *Algebraic Geometry: A First Course*, New York: Springer-Verlag, 1992.
- [6] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, New York: Springer-Verlag, 1977.
- [7] Mezzetti, E., *On Classification of Projective Varieties of Small Codimension*, Proc. of the 7<sup>th</sup> EWM Meeting, Madrid, 1995.
- [8] Mumford, D., *The Red Book of Varieties and Schemes*, Lectures Notes in Mathematics, V. 1358, Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 1988.
- [9] Pedoe, D., *A Geometric Introduction to Linear Algebra*, New York: John Wiley & Sons, 1963.
- [10] Russo, Francesco, *Caratterizzazioni della Superficie di Veronese*, appendice a On Varieties with one apparent double point, Notas para o Encontro Geometria delle Secanti, Firenze 18-21 aprile 2002.

- [11] Shafarevich, I., *Basic Algebraic Geometry*, New York: Springer-Verlag, 1994.
- [12] Severi, F., *Intorno di punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni e ai suoi punti tripli apparenti*, Rend. Circ. Mat. Palermo 15 (1901), 33-51.
- [13] Tevelev, Evgueni, *Projectively Dual Varieties*, arXiv: math. AG/0112028 V.1, Dezembro 2001.
- [14] Vainsencher, I., *Cônicas Projetivas*, 5<sup>a</sup> Escola de Álgebra, IMPA. Julho 1978.
- [15] Zak, F. L., *Projections of Algebraic Varieties*, American Mathematical Society (1983), 535-544.