UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PÓS-GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA

GRÁFICOS DE BARRAS E MATERIAIS MANIPULATIVOS: ANALISANDO DIFICULDADES E CONTRIBUIÇÕES DE DIFERENTES REPRESENTAÇÕES NO DESENVOLVIMENTO DA CONCEITUALIZAÇÃO MATEMÁTICA EM CRIANÇAS DE SEIS A OITO ANOS

Ana Coêlho Vieira Selva

TESE DE DOUTORADO
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: PSICOLOGIA COGNITIVA
RECIFE- 2003

Orientador:

Prof. Dr. Jorge Tarcísio da Rocha Falcão (Orientador Principal)

Prof^{a}Dra. Terezinha Nunes (orientador do estágio doutoral)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jorge Tarcísio da Rocha Falcão

(Presidente)

Prof^{a}. Dr^{a}. Sandra Maria Pinto Magina

(Examinador Externo)

Prof^{a}. Dr^{a}. Paula Moreira Baltar Bellemain

(Examinador Externo)

Prof^{a}. Dr^{a}. Alina Galvão Spinillo

(Examinador Interno)

Prof. Dr. Luciano Rogério de Lemos Meira

(Examinador Interno)

Coordenador do Doutorado:

Prof^{a} Dr^{a}. Maria da Conceição Diniz Pereira Lyra

Para minhas filhas,

Ana Teresa e Ana Carolina,

com todo meu amor.

RESUMO

O objetivo desse trabalho foi investigar o uso de gráficos de barras como suporte representacional na resolução de problemas aditivos e as dificuldades surgidas na interpretação e construção dessa representação. Também, estávamos interessados em avaliar se a combinação entre a representação gráfica e o uso de material manipulativo poderia auxiliar crianças a resolverem problemas aditivos envolvendo gráficos.

Dois estudos foram realizados. No primeiro estudo, 24 crianças pré-escolares com idades entre seis e sete anos resolveram problemas aditivos com blocos e depois com gráficos. Eles participaram de uma seqüência de atividades que tinha como objetivo ajudá-los a lidar com algumas dificuldades relacionadas à representação gráfica. As crianças trabalharam em pares. Os resultados obtidos confirmaram estudos anteriores que mostraram dificuldades por parte das crianças em lidar com alguns conceitos matemáticos relacionados à construção e interpretação de gráficos. Entretanto, nossos dados também mostraram que tais dificuldades podem ser superadas a partir de atividades que colocam em relevância o problema em questão.

Os participantes do segundo estudo foram 57 crianças da alfabetização e primeira série, com idades entre seis e oito anos. Comparamos duas metodologias para trabalhar com gráficos, combinados com problemas verbais e blocos ou não. As crianças foram distribuídas em tre grupos: bloco-gráfico, gráfico e controle. O grupo bloco-gráfico resolveu problemas apresentados através de gráficos de barras e de problemas verbais com blocos de encaixe. O grupo gráfico resolveu a mesma série de problemas, entretanto, todos os problemas foram apresentados através de gráficos. O grupo controle resolveu o mesmo número de questões que os outros grupos, mas somente foi apresentado a eles contas de adição e subtração. Os dados mostraram, após a intervenção, melhores desempenhos de ambos grupos experimentais em relação ao grupo controle. Entretanto, após oito semanas, apenas o grupo bloco-gráfico mostrou um desempenho significativamente superior em relação ao grupo controle. Refinando-se essa análise, constatamos que a queda observada no grupo gráfico ocorreu especificamente na série da alfabetização.

De modo geral, ambos estudos realizados mostraram que a combinação entre gráficos de barras e problemas verbais com blocos pode ser um caminho promissor para o trabalho com gráficos, especialmente com crianças pequenas. Esta combinação parece auxiliar as crianças a relacionarem a representação gráfica com estratégias mais familiares de resolução de problemas

ABSTRACT

The aim of this research was to investigate the use of bar graphs as representational support in the additives problems solutions and the difficulties in interpretation and construction of thist type of representation. In this research it was also analysed if combining bar graphs with manipulative material could help children to solve additive problems that envolve graphs.

Two studies were carried out. In the first study, 24 pre-schoolers, six to seven years old, solved additive reasoning problems with blocks and later with graphs. A sequence of activities was designed to help the children face the difficulties in graphic representation. The children worked in pairs. The result confirmed previous studies about children's difficulties in dealing with some mathematical concepts related to the construction and interpretation of graphs. It was also observed that children can overcome these difficulties when confronted with relevant issues of the problem solving activities.

The participants of the second study were 57 children from pre-school and first grade, six to eight years old. Two methodologies were compared to work with bar graphs: combining words problems with blocks or not. Children were distributed in three groups: the block-graph group, the graph group and the control group. The block-graph group solved problems with bar graphs and word problems with blocks. The graph group solved the same set of problems but all the problems were presented in bar graphs. The control group also solved the same number of questions of both previous groups, but simply addition and subtraction sum were presented. After the intervention, better performances were observed in both experimental groups in comparison with the control group. However, in the delayed post test (eight weeks after the post test), only the group block-graph showed a significant better performance in comparison to the control group. A refined analyze showed that decreasing in performance of the graphic group occurred amongst the pre-school children.

In general, both studies showed that the combination between bar graphs and word problems with blocks can be an effective way of working with graphs, especially with young children. This combination seems to help them to relate bar graphs with other strategies that are more familiar in problems solving.

SUMÁRIO

CAPITULO 1

INTRODUÇÃO

1. Introdução

O objetivo desse trabalho foi investigar a compreensão de gráficos e o desenvolvimento da conceptualização no âmbito das estruturas aditivas. Em particular, nosso interesse foi investigar o uso de gráficos de barras como suporte representacional na resolução de problemas aditivos e avaliar se a combinação entre a representação gráfica e o uso de material manipulativo poderia auxiliar crianças pequenas na resolução de problemas aditivos através de gráficos. A partir desses objetivos, dois estudos com enfoque didático-pedagógico foram realizados:

O primeiro estudo foi de natureza exploratória constituindo-se em um mapeamento de questões relevantes para o trabalho com gráficos. Esse estudo teve dois objetivo centrais: (1) investigar algumas dificuldades relatadas na literatura na compreensão de gráficos através de situações que estimulavam a reflexão das crianças; (2) combinar o uso de gráficos de barra à outra forma de representação, os materiais manipulativos, especificamente blocos de encaixe, verificando a contribuição de tal conexão para a resolução de problemas aditivos. Os resultados obtidos nesse estudo constituíram uma base empírica fundamental para o planejamento de um experimento de ensino, nosso segundo estudo.

O segundo estudo, como já mencionamos, foi um experimento de ensino que comparou duas metodologias para o trabalho com resolução de problemas aditivos através de gráficos de barras: a primeira combinou a representação em gráficos de barras ao uso de blocos de encaixe, alternando a resolução de problemas entre tais formas de representação de modo a favorecer que os contrastes e conexões entre ambos os suportes fossem analisados pelas crianças; a segunda tratou o trabalho com gráficos de forma isolada, sem contrastar com nenhum outro suporte de representação. Nessa última metodologia, as crianças resolveram problemas apenas a partir de gráficos.

Para facilitar a compreensão do desenvolvimento dessa tese, apresentaremos nesse primeiro capítulo uma discussão sobre questões básicas aos dois estudos. No segundo capítulo realizaremos uma revisão teórica de pesquisas relevantes às questões investigadas. Os dois capítulos seguintes serão para detalhamento dos estudos realizados (método, resultados e conclusões) e o último capítulo trará uma conclusão geral do trabalho desenvolvido.

2. Questões sobre representação

O trabalho desenvolvido por Vergnaud (1982) sobre a compreensão dos conceitos matemáticos trouxe profundas repercussões para o ensino de matemática. Um pressuposto básico desta teoria afirma que o conhecimento é organizado em "campos conceituais", ou seja, uma série de problemas e situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento interconectados. Em relação ao estudo do desenvolvimento dos conceitos matemáticos, Vergnaud (1997) considera a importância de se analisar o conceito a partir de suas três dimensões: invariantes (I), situações (S) e representações (R).

Invariantes referem-se, essencialmente, às propriedades abstraídas pelo sujeito para uma classe delimitada de situações, servindo para a organização das ações; as situações dão significado aos conceitos, e as representações consistem de todas as representações simbólicas, lingüísticas, gráficas ou gestuais que podem ser usadas para representar os invariantes, situações e procedimentos. A compreensão dessas três dimensões integradas parece favorecer uma maior preocupação didática em encontrar situações que sejam significativas para o estudo de cada conceito em questão, ampliar o leque de situações que mobilizam tal conceito e focalizar o desenvolvimento das representações utilizadas pela criança no percurso de seu desenvolvimento conceitual.

Outra idéia teórica básica proposta por Vergnaud para a teoria acerca da conceptualização refere-se aos esquemas. Esquemas são organizações invariantes da conduta para uma classe de situações, estando portanto na base dos conceitos, mas não somente destes. Envolvem um objetivo e expectativas, regras para gerar as ações necessárias, invariantes operacionais para compreender, selecionar e tratar a informação relevante, e inferências possíveis sobre as ações a realizar, os controles a executar. Estes esquemas podem estar na base funcional de conceitos explícitos, de teoremas-em-ação (ao resolver problemas, muitas vezes, as crianças não são capazes de expressar o conhecimento utilizado na atividade, mas que é interpretável pelo observador externo), de competências-em-ação (competências apresentadas no contexto de atividade cultural significativa, impossível de ser completamente explicitada em termos de discurso ou texto) e mesmo de gestos simbólicos (ver discussão sobre este tema em da Rocha Falcão (1999).

A partir dessa análise sobre o desenvolvimento conceitual, passamos a discutir uma terceira idéia central da teoria proposta por Vergnaud, a importância dos *sistemas de representação*. Neste sentido, Vergnaud admite que não se pode considerar como aspecto fundamental para a construção dos conceitos matemáticos apenas os invariantes lógicos. Os sistemas de representação utilizados por cada grupo específico também são determinantes para o desenvolvimento e utilização dos conceitos matemáticos. Símbolos auxiliam a criança a compreender relações, conceitos e situações. Também, o modo como as crianças abordam os problemas vai se revestindo de complexidade na medida em que dominam novos invariantes e ferramentas simbólicas. Um tipo de representação pode auxiliar a criança a verificar certas semelhanças e diferenças, enquanto um segundo tipo pode salientar outras semelhanças e diferenças.

A representação tem sido foco de investigação de diversos estudos, entretanto não é um conceito teórico que tenha uma definição de consenso. Encontramos na literatura algumas formas diferentes de abordar tal questão, que passamos a analisar a seguir.

Uma primeira forma observada refere-se aos estudos que procuram analisar como as construções mentais se desenvolvem e vão se tornando explícitas. Piaget (1977/1995) em sua teoria sobre o desenvolvimento cognitivo, foi um dos primeiros a analisar o processo de construção de novas estruturas cognitivas a partir das estruturas pré-existentes. Segundo ele o processo de abstrair propriedades de nossos processos de conhecimento ou da coordenação das ações acontece em duas fases. Na primeira fase ocorre a projeção de uma estrutura de um nível de desenvolvimento mais primitivo para um nível mais elaborado, onde a coordenação entre os diversos elementos constituintes da estrutura pode ser compreendida conscientemente e explicitada. A segunda fase, reflexiva, reorganiza a estrutura em um nível superior. Um exemplo interessante considerado por Piaget consiste na operação de multiplicação, que ainda que pareça uma adição repetida, traz maiores dificuldades para as crianças em relação à adição propriamente dita. A razão para essa diferença, segundo Piaget, está no fato de que para entender multiplicação a criança precisa realizar duas ações. A primeira consiste em saber quantos estão sendo adicionados cada vez. Todas as crianças testadas por Piaget faziam isso sem problemas. A outra ação consiste em saber o número de vezes que o montante deve ser adicionado. Fazer essas duas coisas ao mesmo tempo requer a abstração de uma propriedade de suas próprias ações coordenadas. Isto requer abstração reflexionante. Sem esse conhecimento as crianças não têm como reconhecer que adicionar dois, três vezes resulta no mesmo que adicionar três, duas vezes.

Mesmo depois de reconhecer que duas vezes três é igual a três vezes dois que é igual a seis, crianças apresentam dificuldades em predizer o que vai acontecer quando uns outros dois vezes três e três vezes dois são operados. Para serem capazes de predizer os resultados corretamente, crianças precisam ser capazes de construir a operação multiplicativa *n* vezes *x*, onde cada *x* é uma operação aditiva. Este passo requer uma segunda aplicação de abstração: abstração aplicada para o produto de uma abstração reflexionante de primeira ordem. Esse processo de segunda ordem caracteriza a abstração reflexiva, segundo Piaget. As tarefas de Piaget sobre abstração reflexiva de segunda ordem geralmente solicitavam a criança que fizessem uma comparação explícita entre duas tarefas relacionadas que ela tinha resolvido corretamente, em que cada uma já tinha requerido abstração reflexionante. Se as crianças podiam corretamente identificar as operações ou ações coordenadas que as diferentes tarefas tinham em comum, elas estavam engajadas em um processo de abstração reflexiva de segunda ordem.

O processo de abstração de terceira ordem é também possível. Piaget chama este processo de terceira ordem de meta-reflexão ou pensamento reflexivo.

Temos ainda como exemplos de reflexão teórica sobre os sistemas de representação, o modelo no campo do desenvolvimento metalinguístico proposto por Karmiloff-Smith (1998) e a contribuição de Bruner (1976).

O modelo proposto por Karmiloff-Smith (op. cit.) para o desenvolvimento metalinguístico parece se aproximar bastante do modelo discutido por Piaget. A base inicial parece comum, enfatizando que as representações vão sendo redescritas cada vez em níveis mais explícitos. Segundo Karmiloff-Smith, a mudança de um nível para outro ocorreria quando a criança apresentasse o controle das ferramentas cognitivas daquele nível, observado por uma alta taxa de sucesso no uso daquela representação. Assim, a estabilidade do sistema seria o fator determinante para a mudança representacional.

Bruner (1976) analisou três formas de representações no desenvolvimento humano: a ativa, que é através das ações; a icônica, a partir de desenhos e; a simbólica, através de símbolos, como a própria linguagem. Entretanto, a questão das relações entre esses processos não ficou bem esclarecida.

A abordagem de Bruner tem sido utilizada na escola a partir de uma leitura simplista de como e em que seqüência as representações se desenvolvem fortalecendo um trabalho em ensino de matemática que segue a seguinte ordem: objetos manipulativos – desenhos – símbolos. O modelo proposto por Karmiloff-Smith, por outro lado, ainda não tem sido apropriadamente discutido pelos educadores matemáticos. No que se refere a Piaget, suas idéias mais difundidas entre educadores têm sido aquelas relativas aos estágios de desenvolvimento cognitivo, como se caracteriza a criança em que cada um dos períodos do seu desenvolvimento deixando-se de lado, infelizmente, a análise do processo de desenvolvimento das estruturas cognitivas, ou seja, como as estruturas de conhecimento vão se tornando cada vez mais complexas.

Uma outra forma de tratar a questão da representação tem sido analisar diferentes formas de representar e manipular os dados de problemas matemáticos, se através de objetos manipulativos, de desenhos, da escrita, da linguagem oral, etc e sua relação com o desempenho. A maioria dos estudos nessa perpectiva não tem como objetivo analisar o processo pelo qual as representações internas vão se tornando explícitas. Tais estudos procuram responder questões sobre como tais suportes simbólicos são utilizadas pelas crianças, as influências deles sobre o desempenho, as estratégias que são observadas e o percentual de acerto na resolução dos problemas usando-se os diferentes suportes de representação. São exemplos dessa perspectiva os trabalhos desenvolvidos por Kouba (1989) e Selva (1993, 1998) no campo das estruturas multiplicativas e por Vasconcelos (1998), Selva e Brandão (1998) no campo das estruturas aditivas e Borba (2002) com números relativos.

Um terceiro grupo de estudos tem focalizado o papel da representação enquanto ferramenta simbólica e objeto de pensamento para o indivíduo. Vygotsky (1984) enfatizou o papel das ferramentas psicológicas no funcionamento mental do indivíduo na medida em que atuariam na transformação e reorganização das atividades. Meira (1995), analisando o papel das representações, salienta que a relação criança-representação não é unilateral, mas sim dialética, ou seja, as crianças não apenas elaboram representações que refletem o pensamento infantil, mas as próprias representações criadas influenciam o desenvolvimento de novas concepções e representações por parte da criança. Assim, a representação não é algo externo ao pensamento, mas constituinte dele.

Nunes (1997) analisa o papel dos sistemas simbólicos a partir do sentido que as ferramentas possuem para quem as usa. Ou seja, os mediadores devem ser compreendidos no contexto da prática cultural em que eles são usados. Assim, conhecer a ferramenta não implica em saber utilizá-la. Isto significa que uma abordagem para resolução de problemas matemáticos centrada apenas no uso de uma ferramenta simbólica, o algoritmo por exemplo, não conduziria necessariamente as crianças ao sucesso na escolha das situações pertinentes ao uso daquela ferramenta. Pois, ainda que soubessem resolver bem as operações por meio de seus algoritmos, a criança poderia não reconhecer as situações adequadas ao seu uso.

Representações são fundamentais para o pensamento e comunicação de idéias. Para comunicar é necessário que se externalizem idéias a partir de algum sistema simbólico (linguagem, símbolos escritos, desenhos, material manipulativo). É nesse sentido que representações serão tratadas nesse trabalho, num sentido restrito dos sistemas simbólicos que auxiliam a criança a pensar mas que são representados externamente e, portanto, observáveis, ainda que não se negue em nenhum momento que tais sistemas simbólicos só têm sentido inseridos em atividades que lhes dêem significado e que influenciam e são influenciados pelas representações mentais internas, constituindo o próprio pensamento. Fazemos ainda uma consideração que essa dicotomia, em termos de representação externa e interna, é artificial, ainda que didaticamente nos auxilie na compreensão das representações do sujeito.

Lesh, Post & Behr (1987) consideram a importância de se refletir não apenas sobre os sistemas de representação mas também sobre os processos de mudança entre os diferentes sistemas de representação e transformação interna dos próprios sistemas. Nessa mesma direção, Hiebert & Carpenter (1992) consideram que as representações internas são influenciadas pelas atividades externas, assim, conexões entre representações internas podem ser estimuladas através da conexão entre representações externas. Essas conexões podem ser entre diferentes formas de representação de uma mesma idéia matemática ou entre idéias relacionadas dentro da mesma forma de representação. Vergnaud (1987) considera que é bastante frutífero utilizar diferentes sistemas simbólicos na compreensão dos conceitos porque "representações simbólicas podem ser transparentes de diferentes maneiras (também "opacas" para algumas propriedades do significado que não estão representadas - p.232)." Este mesmo autor acrescenta que sistemas simbólicos podem ser *amplificadores culturais*, na condição que não se esqueça que eles podem gerar idéias mais ou menos adequadas, que seus usos levantam dificuldades específicas e que os objetos da matemática não se limitam a tais sistemas simbólicos.

Diversos estudo têm sido conduzidos para abordar questões relativas ao uso de diferentes representações. No caso específico do trabalho de matemática com crianças pequenas tem sido bastante difundido o uso de material manipulativo em atividades de resolução de problemas matemáticos. Algumas idéias sobre o uso de manipulativos no ensino de matemática serão apresentadas a seguir.

3. Representação e o ensino de matemática

Piaget propôs que a origem do conhecimento operatório estaria na coordenação dos esquemas de ação (Piaget, 1966/1987). A partir de Piaget, diversos estudos têm enfatizado a importância dos esquemas de ação para que a criança realize operações mentais. Deve-se enfatizar que Piaget, ao falar de esquemas de ação e de desenvolvimento conceitual, focalizou a importância da reflexão das crianças sobre as ações realizadas e não apenas a ação mecânica sobre objetos. Entretanto, a ênfase na "ação pela ação", compreensão inadequada da teoria de Piaget, ainda é bastante difundida entre educadores.

Partindo desse mote sobre a importância das ações sobre os objetos para o desenvolvimento conceitual, vários tipos de material (Cuisenaire, Material Dourado, Dienes, etc) foram usados com o objetivo de modelar princípios matemáticos envolvidos nas operações de modo que a manipulação de tais objetos auxiliasse a compreensão dos conceitos matemáticos que se queria ensinar. Diversos estudos que analisaram o desempenho de crianças usando esses recursos têm demonstrado que essa transposição do concreto para o abstrato não é tão simples como poderia se pensar. Gravemeijer (1994) reflete que o grande problema são as diferenças entre as ações sobre o material e as ações mentais na resolução dos problemas. No caso, por exemplo, da adição 5 + 4, numa reta numérica a criança localiza o número cinco e conta quatro posições para frente lendo o valor resultante, nove. Resolvendo esse mesmo problema mentalmente, a criança teria que ao mesmo tempo contar seis, sete, oito, nove, guardando que seis era um, sete, dois, oito, três e nove, quatro. Assim, a dificuldade com uso de manipulativos consiste na expectativa do observador de que o material vai "mostrar" a estrutura matemática subjacente à atividade observada. O problema é que, embora possamos construir modelos concretos com os manipulativos, a matemática embebida nesses modelos não é explícita para as crianças.

Nunes (1997) aborda a questão das diversas representações comprimidas com que a criança tem que lidar na compreensão dos conceitos. Por exemplo, compreender a expressão "aqui tem cinco" implica em entender que as unidades foram contadas apenas uma vez, em uma ordem numérica padrão e que cinco se refere a uma propriedade do conjunto de elementos e não apenas de uma das unidades, a nomeada como "cinco". Cobb (1987) enfatiza que os princípios que estão claros do ponto de vista de quem já sabe, não estão necessariamente claros para os alunos, que ainda estão construindo aquele conceito. Torna-se então necessário ao professor se colocar do ponto de vista de quem ainda não sabe.

Podemos observar que o uso de materiais manipulativos tem sido proposto em sala de aula como se fosse um fim em si mesmo, sem uma preocupação maior sobre como trabalhar com o material, que princípios se pode trabalhar com ele, quais não se pode, que situações ele abarca, que situações ele não abarca. Ou seja, é necessária uma análise maior sobre a transparência do material, como citado por Meira (1998) e das ações psicológicas na resolução de problemas com e sem uso de manipulativos (Gravemeijer, 1994). Selva e Brandão (1998) também apontam para a importância de se estimular diversas formas de representação por parte das crianças no desenvolvimento da compreensão conceitual. Nesse tipo de abordagem é fundamental também analisar o papel/intervenção do professor na condução de situações significativas para a reflexão e para a aprendizagem.

Vimos acima que há um certo consenso sobre a importância da ação da criança (sobre objetos, mas principalmente a ação mental) para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos. Vários estudos (Carraher, Carraher & Schliemann, 1988, entre outros) ampliaram o olhar sobre o desenvolvimento conceitual, mostrando que os sujeitos desenvolvem estratégias matemática próprias para lidar com diversas situações fora da escola. Carraher, Carraher & Schliemann (1988) analisando a resolução de problemas matemáticos por crianças na escola e por vendedores de rua, observaram a presença de mesmos invariantes em estratégias usando o cálculo oral e no uso do algoritmo escolar, entretanto a representação simbólica e as situações a que tais invariantes estavam vinculados eram bastante diferentes. Esta análise repercutiu bastante no sentido de se valorizar os procedimentos informais que as crianças desenvolvem. Entretanto, encontrar pontes entre o saber informal e o saber formal não se tem mostrado uma tarefa fácil. Isto reforça a ressalva teórica segundo a qual não é suficiente analisar o conceito por seus invariantes, sendo necessário considerar os outros aspectos que o constituem.

Seguindo essa direção temos o trabalho desenvolvido pelo Instituto Freudenthal. Gravemeijer (1994) caracteriza a atividade matemática como uma atividade de resolver, procurar e organizar problemas. Situações de conflito seriam os meios para se ampliar o conhecimento. O instituto Freudenthal trabalha com o que chama de teoria da educação realística. Esta teoria tem como base a idéia da “reinvenção” conceitual baseada na história da matemática e o uso das estratégias e métodos espontaneamente inventados pelas crianças. Partindo de problemas (que podem vir da própria história da matemática), as crianças vão comparando estratégias e construindo modelos. O conhecimento formal é ensinado a partir desses modelos que vão sendo construídos pelas crianças em diversas situações.

Nessa linha de pensamento teórico, da Rocha Falcão, Brito Lima, Araújo, Lins Lessa & Osório (2000) propuseram uma seqüência didática para o ensino de álgebra com crianças da segunda série do ensino fundamental da rede pública da cidade do Recife, com 10 a 12 anos de idade. As crianças trabalharam individualmente, em pequenos grupos ou formando um grande grupo. A partir de módulos de atividades envolvendo o campo conceitual da álgebra foram trabalhados conceitos e princípios tais como identificação e modelagem de transformações, representação simbólica, manipulação de relações de diferença e de igualdade e manipulação de quantidades desconhecidas simbolicamente representadas. Os resultados obtidos indicam que nem todos os grupos de crianças alcançaram o mesmo nível de desenvolvimento ao final das atividades propostas, mas importantes avanços conceituais foram constatados em todos os grupos de crianças.

O interesse por representações parece então se constituir no centro de interesse de grande parcela de estudos. A influência das representações sobre o raciocínio pode então, resumidamente, ser considerada a partir de alguns aspectos.

O primeiro, já citado e enfatizado por Vergnaud (1987), consiste na possibilidade que os sistemas simbólicos têm em favorecer que determinados aspectos/princípios de um conceito fiquem mais salientes enquanto outros podem ficar mais obscurecidos. Por exemplo, quando se trabalha o sistema de numeração com material dourado onde as barras permitem que sejam visualizadas as unidades constituintes, o princípio da decomposição é salientado. O mesmo não ocorre se são utilizadas fichas coloridas para marcar as unidades, dezenas e centenas.

Outra importância da representação para o raciocínio consiste na possibilidade de diferentes organizações de uma mesma tarefa ao serem usadas diferentes representações. Um estudo que ilustra esse aspecto foi o realizado por Selva (1998) analisando as estratégias de crianças de alfabetização a segunda série resolvendo problemas de divisão com material concreto, lápis e papel e oralmente. Crianças com material concreto tendiam a usar geralmente estratégias de representação direta das quantidades e ações do problema, enquanto que as crianças de outros grupos apresentavam usos bem mais flexíveis de estratégias, que incluíam adições e subtrações repetidas, fato memorizado, por exemplo.

Um terceiro aspecto relativo à influência dos sistemas simbólicos sobre o raciocínio refere-se aos casos em que o próprio sistema de sinais usado torna-se objeto de pensamento para o sujeito (Borba, 2002).

Nunes (1994) analisou algumas conseqüências do uso de diferentes formas de representação para o raciocínio em resolução de problemas: 1.a possibilidade de controle que o sujeito exerce sobre o processo de computação; 2. o significado atribuído às representações em função de práticas culturais anteriores e; 3. a construção de esquemas e invariantes na análise das situações. O primeiro tipo de influência pode ser exemplificado a partir do uso do cálculo oral e escrito. Enquanto os procedimentos na resolução de problemas oralmente possibilitam maior controle dos resultados obtidos pelas crianças, os procedimentos necessários ao cálculo escrito distanciam a criança da compreensão das quantidades representadas (trabalham com dígitos!) enfraquecendo o controle dos resultados obtidos. O segundo tipo de influência, o significado atribuído às representações em função de práticas culturais anteriores, mostra que práticas culturais influenciam a produção e uso das representações por parte dos sujeitos. Finalmente, o terceiro tipo "a construção de esquemas e invariantes na análise das situações" mostra que a própria representação de uma variável já exerce um papel estruturante sobre a compreensão e que representações distintas podem gerar compreensões também distintas de uma mesma situação.

Os dados apresentados acima sugerem que o estudo das representações é extremamente importante para a compreensão do próprio raciocínio do sujeito. No próximo tópico serão discutidas brevemente algumas questões relativas ao trabalho com um tipo de suporte representacional, os gráficos, objetivo de nosso estudo.

4. Por que trabalhar com gráficos?

Gráficos consistem em representações bastante usadas na sociedade. Diversas informações têm sido veiculadas através de gráficos pela mídia impressa, de modo que crianças e adultos estão expostos freqüentemente a este tipo de informação. Friel, Curcio & Brijht (2001) afirmam que para alguém ser funcionalmente letrado no contexto sócio-cultural ocidental contemporâneo, também necessita da habilidade de ler e compreender gráficos estatísticos e tabelas.

De modo geral, gráficos possibilitam a apresentação da informação numérica em um modo visual. Esse tipo de representação organiza diversas informações em um espaço bidimensional cartesiano. Gráficos têm sido utilizados basicamente na área do tratamento de informações possibilitando a comparação de diversas informações a partir de um esquema visual que auxilia o leitor a tirar algumas conclusões imediatas sobre o que apresenta maior freqüência, menor freqüência, tendências, por exemplo.

Do ponto de vista educacional, observamos que os próprios Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino de Matemática (Brasil, 1997) recomendam que o trabalho com tratamento de informação e noções de estatística deve fazer parte do currículo desde as séries iniciais do ensino fundamental. Entretanto, a reflexão sobre como e porque trabalhar com gráficos aparece ainda como uma lacuna, favorecendo que gráficos sejam tratados como um conteúdo desconectado dos demais conteúdos, como algo isolado.

O nosso interesse específico em relação ao uso do gráfico enquanto suporte de representação na resolução de problemas se justifica a partir de três aspectos básicos, que são:

- O gráfico é uma ferramenta simbólica bastante rica do ponto de vista dos conceitos matemáticos que permite abordar;
- A construção/interpretação de gráficos implica na transformação de informações de um sistema simbólico (por exemplo, linguagem natural, banco de dados) para um outro sistema simbólico (o gráfico). Assim, o gráfico é uma ferramenta que permite a organização e análise de informações complexas de uma forma clara e coerente, permitindo ao usuário lançar mão de conceitos-em-ação (Vergnaud, 1990), noções percepto-relacionais do tipo maior ➔ mais (Lakoff & Núñes, 2000);
- O trabalho com tratamento de informação, incluindo-se o uso de gráfico na

organização/análise das informações, permite a integração da matemática com outras disciplinas escolares e com o conhecimento cotidiano da criança. Assim, parece bastante pertinente investigar a introdução deste suporte na atividade de resolução de problemas, possibilitando às crianças pequenas a discussão de propriedades matemáticas representadas no próprio gráfico, bem como uma ampliação de seus repertórios no que se refere ao uso de recursos simbólicos para a resolução de problemas e organização/interpretação de informações.

Após essa breve reflexão sobre representação e mais especificamente, sobre o uso de gráficos, torna-se necessário analisar questões relativas ao processo de ensino-aprendizagem. Em estudos com enfoque didático-pedagógico devemos também considerar aspectos relativos à situação didática de sala de aula: o contrato didático estabelecido, a relação professor-aluno, a organização do trabalho (individual X grupo). A seguir iremos abordar mais detalhadamente alguns desses fatores, de modo a ampliar nossa compreensão sobre o ambiente de sala de aula à luz do processo de ensino-aprendizagem.

5. Didática da matemática e contextos de aprendizagem

Vários estudos têm contribuído para proporcionar uma melhor compreensão sobre os contextos de aprendizagem. Os trabalhos desenvolvidos por Brousseau (1996) e Schubauer-Leoni & Perret-Clemont (1997) são exemplos que seguem nesse sentido. Estes autores vêm analisando entre outros aspectos, questões relativas à relação professor-aluno em sala de aula e a importância de se considerar toda uma série de *contratos didáticos* que se estabelecem implícita e explicitamente no meio escolar, e que são fundamentais para se entender cada contexto específico de aprendizagem.

Brousseau (1982) define situação didática como um conjunto de relações estabelecidas explícita e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um determinado meio (que abrange eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (representado pelo professor) com a finalidade de conseguir que estes alunos apropriem-se de um saber constituído ou em vias de constituição. Estas relações são estabelecidas a partir de negociações entre os alunos e o professor, envolvendo um sistema recíproco de expectativas que tem sido denominado como contrato didático. Este contrato é que vai reger o funcionamento de cada situação didática. Brousseau classifica as situações didáticas em quatro tipos:

- Situações de ação – os alunos são colocados frente a uma situação problema em que a melhor solução é o conhecimento que se deseja ensinar. Durante o processo de resolução tais situações geram uma interação do aluno com o mundo físico, envolvendo a tomada de decisões por parte dos alunos para a organização da atividade proposta.
- Situações de formulação – há a troca de informações entre os alunos, ocorrendo a modificação da linguagem utilizada habitualmente de acordo com as informações que precisam comunicar.
- Situações de validação – o aluno deve mostrar a validade do modelo criado. O aluno argumenta, realiza demonstrações de modo a convencer os colegas.
- Situações de institucionalização – objetivam estabelecer convenções sociais. Consistem no compartilhamento social de uma conclusão acerca do saber elaborado pelo grupo.

A análise de tais situações parece proporcionar ao professor/pesquisador maior conhecimento sobre o funcionamento de cada situação de aprendizagem, ou seja, sobre as características específicas das situações que foram determinantes para a evolução do conhecimento dos alunos, dando condições ao professor de organizar e planejar melhor o seu trabalho escolar. Nesse sentido a teoria das situações didáticas proposta por Brousseau (op. cit.) presta uma valiosa contribuição para a didática da matemática.

Outro aspecto que vem sendo bastante estudado refere-se aos ganhos obtidos ao se realizarem trabalhos em grupo. Piaget (1945/1965) relatou que o trabalho cooperativo era o que trazia os maiores ganhos na aprendizagem, entretanto a ênfase no papel central da interação social para os processos de aprendizagem é observada primordialmente nos trabalhos de Vygotsky (1984). A partir do conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal este autor mostrou o papel da ajuda oferecida à criança por alguém mais experiente na construção de seu conhecimento, trazendo uma séria contribuição ao ensino escolar. Schubauer-Leoni e Perret-Clemont (1997) relatam, nesta mesma direção, um estudo realizado com crianças suiças da escola primária. Havia quatro condições experimentais: 1. Duas crianças interagiam para elaborar uma mensagem sobre um problema que, então, era decodificada por um outro par de crianças; 2. Duas crianças interagiam para elaborar uma mensagem sobre um problema para um par decodificador, mas não tinham retorno; 3. Uma criança formulava sua própria mensagem para um par decodificador que, então, decodificava a mensagem; 4. Uma criança formulava uma mensagem para um par decodificador, sem, no entanto, receber o retorno deste par. Os resultados indicaram que as crianças que trabalharam sob a condição coletiva e com retorno (condição 1) foram as que fizeram maior progresso, havendo uma tendência a mencionar todas as quantidades envolvidas e as operações realizadas. Entretanto, foi surpreendente encontrar que mesmo as crianças que trabalharam sozinhas e sem retorno também apresentaram progresso. Os autores analisaram tais dados como indicativos da influência da interação entre o experimentador adulto e a criança na emergência de respostas.

Resultados como esses nos levam, cada vez mais, a estimular atividades de grupo em sala de aula, o que, infelizmente, ainda não é freqüente em nossas escolas. Mesmo em salas de Educação Infantil, onde encontramos em muitos momentos as crianças sentadas em grupos, o que observamos é a realização de atividades individuais na maioria do tempo. Atividades em grupos ficam restritas aos jogos de equipe ou a trabalhos específicos.

Considerando os trabalhos relativos à interação de crianças (Santos, 1997; Pessoa, 2000, entre outros), observamos dois tipos de análises: um relativo ao papel de variáveis externas sobre o desempenho das duplas (gênero, nível de habilidade, idade, etc) e outro relativo aos estudo dos processos interativos internos à dupla (relações de dominação/subordinação, cooperação, competição, etc.).

Especificamente em relação aos estudos que analisaram as variáveis externas, observamos alguns (Pessoa, 2000; Martí, 1994, entre outros) que demonstram a importância de ser considerado o nível de habilidade inicial das crianças que fazem parte das duplas na análise do desenvolvimento do trabalho realizado. Outros estudos têm apresentado dados que mostram que em duplas heterogêneas quanto ao gênero, questões relativas a características culturais dos sexos podem interferir na interação social (Santos, 1997; Pessoa, 2000, entre outros). Entretanto, temos encontrado resultados controversos na análise dessa variável. Enquanto no estudo de Swann (1992, citado por Pessoa, 2000) são apresentados dados que mostram melhores resultados quando a menina se submete às decisões do parceiro do sexo masculino, Pessoa (2000) observou que essa variável não foi determinante para o desempenho, sendo preponderante o nível de habilidade prévio das crianças.

Os dados apresentados acima parecem sugerir que no estudo dos conceitos, incluindo-se os conceitos matemáticos, não se pode mais considerar os processos de aprendizagem isoladamente, devendo-se realizar uma análise que inclua o sujeito que aprende, os conceitos envolvidos, as relações entre os atores do processo ensino-aprendizagem (professor-aluno, aluno-aluno), o contrato didático estabelecido, o contexto sócio-cultural da aprendizagem.

No próximo capítulo focalizaremos, inicialmente, alguns aspectos relativos à representação gráfica (tipos de gráficos e dificuldades observadas em seu uso). Em seguida, apresentaremos uma análise sobre o uso de materiais manipulativos e gráficos no ensino de matemática, a partir de resultados de estudos empíricos que envolveram um desses dois suportes representacionais. O capítulo finalizará com a apresentação dos objetivos dessa tese.

CAPÍTULO 2

REFLEXÕES SOBRE O USO DE MANIPULATIVOS E DE GRÁFICOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

1.Introdução

No capítulo anterior analisamos alguns aspectos relevantes para a compreensão geral dos estudos realizados nessa tese. Este capítulo dará prosseguimento à análise da literatura, enfocando mais detalhadamente o trabalho com gráficos. Também serão discutidos estudos que enfocaram o uso de materiais manipulativos no ensino de matemática, especialmente com crianças pequenas.

Assim, após essa breve introdução, no segundo tópico desse capítulo serão abordados conceitos relativos aos gráficos para, em seguida, discutirmos algumas dificuldades comuns relacionadas ao uso do sistema cartesiano, com base em dados fornecidos pela literatura da área (terceiro tópico). O quarto tópico apresentará estudos empíricos enfocando o uso de manipulativos e o uso de gráficos no ensino de matemática. Por fim, no quinto tópico, apresentaremos os objetivos de cada um dos estudos que fizeram parte dessa tese e que serão analisados nos capítulos seguintes.

2. Explorando alguns conceitos caracterizadores dos gráficos

Entre os aspectos que são comuns aos diversos tipos de gráficos, temos: a estrutura do gráfico (ex. eixos, escala, etc) que fornece informações sobre os tipos de medidas que estão sendo usadas e os dados que estão sendo medidos, dimensões visuais que representam os valores dos dados (no gráfico de barras são as barras, no de linhas são as linhas, etc), rótulos que explicitam as medidas que estão sendo feitas ou o dado para o qual a medida se aplica, ilustrações e cores que são fundo para o gráfico e podem salientar determinados aspectos do mesmo. Entretanto, apesar de se constituírem por fatores comuns, cada tipo de gráfico tem sua própria especificidade que é associada aos seus componentes estruturais. São essas especificidades que tentaremos agora explicitar em relação ao gráfico de barras, ao de linhas e ao de setor.

2.1 Gráfico de barras

Este tipo de gráfico, geralmente, é usado para representar freqüências e categorias. Sendo as variáveis representadas qualitativas, as situações de análise dos dados referem-se ao campo das estruturas aditivas.

A evolução de um fenômeno em função do tempo e relações funcionais entre variáveis também podem ser representadas nesse tipo de gráfico, ainda que, muitas vezes, um gráfico de linhas fosse mais informativo, possibilitando uma visualização mais fácil de relações e tendências dos dados representados.

Na construção desse tipo de gráfico, os valores das barras devem ser proporcionais às freqüências que representam, sendo necessário a utilização de uma mesma unidade de representação em todo gráfico. A linha de base deve corresponder ao ponto zero (origem) no cruzamento dos eixos.

Em relação aos valores representados na escala, os mesmos devem guardar uma proporcionalidade entre si, relacionada à linha numérica. Também, no caso da representação de dados em função do tempo, os intervalos medidos devem manter a proporcionalidade em relação à diferença real entre eles.

2.2 Gráfico de linhas

Inicialmente, podemos verificar que a relação entre as variáveis é realçada pela representação em linhas. Assim, gráficos de linhas tipicamente refletem relações funcionais ou a evolução de uma variável ao longo de um período.

Do ponto de vista dos tipos de problemas relacionados ao gráfico de linhas, verificamos que, nesse tipo de gráfico, também as estruturas multiplicativas são claramente contempladas. Diferentemente do gráfico de barras, questões sobre tendência podem ser favorecidas pela representação em linhas, já que a inclinação das linhas dá indicativos da direção das variações ocorridas (incremento, decréscimo).

O cruzamento e, principalmente, a superposição de linhas pode ser um fator de dificuldade a mais para as crianças que podem interpretá-la como se referindo a um único evento. A forma das linhas e suas curvas também podem ter um efeito de distrair o leitor, confundindo-o, como documentado por Bell e Janvier (1981).

2.3 Gráfico de Setores

Este tipo de gráfico é mais indicado para representar variáveis qualitativas com poucos elementos. Ele ilustra dados que podem ser subdivididos em categorias. O ponto forte desse tipo de representação consiste na fácil visualização da comparação entre as variáveis envolvidas em termos de área ocupada.

A construção desse tipo de gráfico implica em dividir o círculo em partes que correspondam às freqüências de cada categoria que vai ser representada. Os setores do círculo somam 100%. Envolve, portanto, um conhecimento geométrico e um conhecimento sobre proporcionalidade.

De modo geral, a análise acima mostra diferenças e semelhanças existentes entre diferentes tipos de gráficos. Em nosso estudo iremos trabalhar apenas com gráficos de barras, com dados relativos a categorias e freqüências na maior parte das atividades. Apenas três gráficos, incluídos no primeiro estudo referem-se à evolução de uma variável ao longo de um período.

Dando continuidade a essa análise, passamos a refletir sobre algumas dificuldades comuns ao uso do sistema cartesiano como suporte representacional relatadas pela literatura da área.

3. Dificuldades relativas ao uso do sistema cartesiano

Goldenberg (1988), Clement (1985) e Gomes Ferreira (1997) sugerem que as dificuldades em interpretar e construir gráficos estão relacionadas com a complexidade dos sistemas de representação em que os gráficos se baseiam.

As coordenadas cartesianas são um sistema onde a posição de um ponto em um gráfico ou mapa é dada pela sua distância em relação a duas linhas ou eixos, usualmente nomeados eixo "x' (horizontal) e eixo "y" (vertical). Esses eixos são perpendiculares sendo sua intersecção denominada origem. Esse sistema de coordenadas foi introduzido pelo filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650).

O uso do sistema cartesiano promoveu grandes avanços no conhecimento geográfico e matemático da humanidade, entretanto algumas dificuldades relacionadas à sua compreensão têm sido relatadas pela literatura. Dentre as fontes possíveis de dificuldade para as crianças pequenas na utilização do espaço cartesiano para modelização de fenômenos como suporte representacional, analisaremos especificamente quatro:

- As unidades representadas no gráfico devem, consistentemente, representar as unidades de medida,
- Linha de base deve ser comum a todas as barras, conforme ilustrado a seguir:

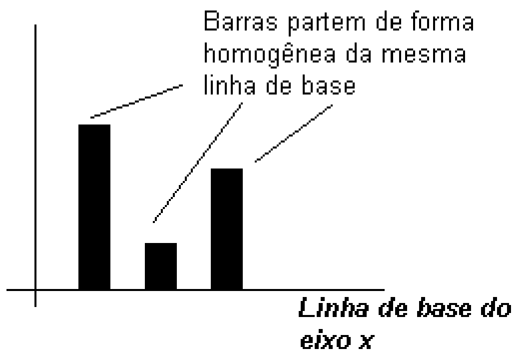

Figura 1: Linha de base comum às barras.

- Uma unidade representada no gráfico pode representar várias unidades de medida,
- Cada eixo representa um tipo de medida.

3.1 Consistência nas unidades representadas no gráfico

Um primeiro aspecto consiste na necessidade de que as unidades utilizadas no gráfico representem consistentemente as unidades de medida. Quando a criança não reflete sobre a importância dessa uniformidade na representação das unidades no gráfico, pode encontrar dificuldades na construção de gráficos. Por exemplo, ao construir um gráfico de barras, as unidades de representação utilizadas no desenho das barras (ícones em coluna ou mesmo uma barra uniforme) devem ser constantes (quanto ao tamanho dos ícones, por exemplo), ou podem gerar dificuldades na própria visualização e compreensão das informações veiculadas no gráfico. Assim, no caso de comparar categorias, a visualização de barras com diferentes unidades de representação pode confundir o leitor quanto ao valor da barra e quanto a diferença na freqüência de barras que estão sendo comparadas.

Quando a evolução de uma variável em função do tempo estiver sendo representada, ou seja, relações funcionais entre variáveis, o não uso de unidades consistentes de representação também pode levar a interpretações inadequadas da visualização de um padrão que não é verdadeiro (inclinações maiores ou menores do que deveriam ser, por exemplo). Na análise da relação de um preço de um produto em função do tempo, por exemplo, o leitor pode ser levado a dizer que houve um grande aumento nos preços entre dois meses, quando na verdade, o aumento foi bastante suave, ou vice-versa.

O uso de diferentes unidades de representação também pode ser observado na construção de escalas. Encontramos vários estudos mostrando que as crianças representam medidas nos eixos vertical e horizontal sem considerar consistentemente os intervalos entre tais medidas (Goldenberg, 1988; Tierney & Nemirovsky, 1991; Tierney, Weinberg & Nemirovsky (1992)).

Goldenberg (1988) analisou os erros de 130 alunos do sexto ano ao 12º ano de uma escola americana na interpretação e construção de gráficos de fenômenos familiares, tal como a velocidade de uma bicicleta subindo um morro. Os erros observados exibiam um padrão específico relacionado à questões da escala: o eixo horizontal foi construído como uma escala ordinal no tempo, seqüencial mas sem os mesmos espaços intervalares. O eixo vertical era muitas vezes puramente nominal, listando os eventos que tinham acontecido, não os tratando nem mesmo como uma escala ordinal.

Tierney & Nemirovsky (1991) analisaram gráficos produzidos por crianças americanas de quarta série em seu esforço de representação gráfica de mudanças na movimentação de carros e no número de pessoas em um lugar. Observaram a criação de sistemas de representação idiossincráticos para representarem os dados coletados, bem como as informações julgadas relevantes pelas crianças. As crianças trabalharam sozinhas ou em pares, depois discutiram as representações em pequenos grupos e testaram o que tinham compreendido das representações elaboradas pelos outros.

Os resultados indicaram que geralmente as crianças limitaram suas representações ao que era percebido como estado final, como também apresentavam dificuldades em representar um contínuo (como no caso da velocidade de um carro). Em geral, as crianças criaram categorias separadas, que não englobavam todos os dados. Também observaram que freqüentemente não era mantido um espaço constante entre os valores marcados na escala ocorrendo a omissão de categorias que não apareceram, ou seja, no caso de não haver nenhum momento com apenas uma pessoa em determinado local (na escola, por exemplo), este valor deixava de existir no gráfico. Assim foi comum encontrar gráficos construídos pelos alunos em que a escala (eixo “y”) não era construída a partir de uma unidade de representação consistente. Os valores medidos eram representados na escala consecutivamente, sem considerar os espaços intermediários existentes entre algumas dessas medidas. Ou seja, as crianças pareciam considerar a escala importante para representar as ocorrências, mas não refletiam sobre a relação entre as medidas representadas. Um aspecto interessante observado foi o grande uso de dados ilustrativos externos ao sistema gráfico, como que para facilitar a compreensão do mesmo.

Em outro estudo Tierney, Weinberg & Nemirovsky (1992) analisaram como vinte crianças americanas de quarta série construíam e interpretavam gráficos sobre o crescimento de uma plantinha. Foram duas semanas de intervenção, sendo dez aulas com aproximadamente uma hora cada. As crianças fizeram a mensuração do crescimento de uma planta e organizaram os dados em forma de uma planilha e também em gráfico. Os autores observaram que: a) o primeiro valor na escala vertical de todos os pares de sujeitos correspondia a primeira medida feita em suas plantas; b) os alunos não discriminavam em suas escalas verticais as medidas inteiras de centímetros e as medidas decimais (meio centímetro), não uniformizando suas escalas de comprimento; c) os finais de semana em que não havia medidas para as plantas, eram excluídos da escala horizontal, assim depois de sexta-feira imediatamente (sem espaço diferenciado) vinha escrito segunda-feira, gerando uma não uniformização da escala horizontal. Esta omissão dos finais de semana gerava uma aparência visual indicativa de alto grau de crescimento de sexta-feira para segunda-feira. Entretanto, apesar de não construírem gráficos com uma consistente escala de mensuração, em suas interpretações dos gráficos construídos, tais crianças demonstravam utilizar-se de uma escala cujo parâmetros de medidas eram consistentes.

Ainley (2000) também apresentou dados que ilustram a dificuldade de crianças na construção de gráficos relacionadas ao uso da escala de medidas. A tarefa solicitada às crianças de onze anos foi comparar a qualidade de vida entre várias cidades a partir de diversos materiais fornecidos a eles. As crianças deveriam identificar a cidade com pior qualidade de vida e foram estimuladas a construírem gráficos que justificassem suas escolhas para serem apresentados ao resto do grupo. Os materiais informativos fornecidos apresentavam cada categoria de dados com diferentes medidas (ex. população em milhões, mortalidade infantil como percentagem dos nascidos vivos). A autora relatou que o gráfico construído por um dos grupos para justificar a escolha por uma das cidades, usava escalas diferentes para cada uma das categorias representadas no mesmo. Segundo a autora, questões relativas às proporções entre as barras (a barra dos óbitos era três vezes o tamanho da barra da população) geraram uma discussão interessante, entretanto as crianças tentaram encontrar explicações para a aparência do gráfico, ao invés de realizar uma leitura acurada do mesmo.

Esses dados mostram a importância de uma reflexão sobre a unidade de representação no gráfico que deve ser consistente para todas as categorias representadas e mostram também que esse aspecto nem sempre é claro para as crianças.

3.2 Linha de base

A compreensão da importância de uma linha de base para as barras também deve ser apontada como possível fonte de dificuldade para as crianças. Se a criança não percebe que esse alinhamento é necessário, cometerá erros em sua leitura do valor das barras. Podemos notar que esse aspecto poderá ser mais facilmente verificado em atividades de construção de gráficos, quando a criança terá liberdade para representar as quantidades no seu desenho, do que em atividades de interpretação em que os gráficos já são apresentados prontos.

O estudo de Nunes, Light & Mason (1995, citado por Nunes & Bryant, 1997) ilustra algumas dificuldades que as crianças apresentam ao lidar com a questão da origem na linha numérica e com o próprio conceito de unidade. Esses autores realizaram um estudo com 92 crianças de cinco e seis anos de uma escola estadual de Oxford, em que apresentavam duas tarefas em uma ordem fixa. A primeira tarefa solicitava às crianças que colocassem os números em uma figura de uma régua em que apenas os tracinhos relativos aos centímetros e meio centímetros estavam marcados. Os autores analisaram, entre outros aspectos, se as crianças usavam ou não espaços iguais na colocação dos números e se o zero era ou não representado na régua.

Os resultados indicaram que 60% das crianças estabeleceram sistematicamente uma correspondência termo a termo entre as unidades na régua e os números e 40% não estabeleceram. Em relação à representação do zero na escala, apenas 11% das crianças colocaram o zero como ponto de partida. A grande maioria (89%) colocou o número um em correspondência com a primeira marca sobre a régua. Foi questionado, então, pelos autores o que exatamente essas crianças estavam contando: se eram as linhas, elas estariam corretas em começar de um, mas isso indicaria que elas não estavam fazendo apelo à concepção de medida mais usual. Assim, parece que crianças de cinco e seis anos ainda não possuem uma compreensão plena do conceito de unidade, ainda que estejam expostas na escola a dispositivos auxiliares que parecem auxiliar tal compreensão, como é o caso das réguas.

A segunda tarefa consistiu na apresentação de algumas réguas sendo solicitado às crianças que julgassem se elas haviam sido desenhadas adequadamente. Entre as réguas, duas eram com sistema métrico decimal (centímetros) e duas com sistema imperial britânico (polegadas), entretanto, uma régua do sistema métrico e uma do sistema imperial partiam do um e não do zero. O desempenho das crianças nessa tarefa mostrou uma preferência pelas réguas de mesmo sistema de medida das usadas na escola (sistema métrico), entretanto a presença ou ausência do zero na origem não afetou significativamente o julgamento das crianças (71% de escolhas para réguas métricas com o zero e 76% de escolhas para réguas métricas sem o zero).

A representação do zero também parece se constituir em fonte de dificuldade na construção de gráficos. No estudo conduzido por Tierney & Nemirovsky (1991) uma das atividades solicitou que crianças de 4a. série construíssem um gráfico para representar a quantidade de pessoas numa sala de aula durante 24 horas. Os resultados indicaram que quando a quantidade em determinado momento era zero, a maioria das crianças fazia símbolos no gráfico diferentes dos utilizados na marcação das outras quantidades. Os autores dão como exemplo o desenho de um bloco em cima do eixo "x" (que termina por equivaler a outro valor na escala). Também, tal como o estudo conduzido por Nunes et al. (1995), as crianças geralmente não representaram o zero na escala, deixando em branco o vértice entre os eixos "x" e "y".

Esses dados sugerem que questões relacionadas à origem constituem-se em fontes de dificuldades para as crianças, podendo-se encontrar tais dificuldades também no trabalho com gráficos.

3.3 Unidade no gráfico representa várias unidades de medida

Podemos ter situações em que na escala não estejam representados todos os valores, encontrando-se alguns implícitos, havendo uma representação do tipo um para muitos. Tais situações, possivelmente, representariam maior dificuldade para a criança.

Para investigar o uso do esquema de correspondência um para muitos, Frydman & Bryant (1988) solicitaram que crianças inglesas de quatro e cinco anos distribuíssem igualmente doces de faz de conta entre duas bonecas. Os doces podiam estar apresentados em unidades simples ou duplas. As crianças não apresentaram dificuldades em usar o esquema de correspondência quando os doces estavam separados por unidades, entretanto quando elas foram informadas que uma das bonecas gostava de receber os doces duplos enquanto que a outra gostava dos dela separados, apresentaram muitos erros. Nessa situação, as crianças tinham que ao dar um doce duplo para uma das bonecas, dar dois doces simples para a outra. Os resultados mostraram grande dificuldade entre as crianças de quatro anos que apresentaram 4% de respostas corretas, enquanto que crianças de cinco anos tiveram 70% de acertos. Os erros, em geral, consistiram em realizar correspondências um-a-um, independente dos valores de doces nas unidades. Em outro experimento, os mesmo autores apresentaram para crianças de quatro anos uma tarefa experimental, entre pré e pós-teste, que introduziu duas cores nos doces duplos (azul e amarelo), sendo os doces individuais ou azuis ou amarelos. Com isso, foi enfatizado que os doces duplos consistiam de dois doces individuais. Os efeitos da tarefa experimental foram claros, tendo as crianças apresentado desempenho superior no pós-teste, em que todos os doces eram da mesma cor.

O estudo de Frydman & Bryant (1988) sugere que o esquema de correspondência pode ser usado com êxito pela maioria das crianças de cinco anos e mesmo por crianças de quatro anos, dadas as condições adequadas. O uso desse esquema de correspondência parece ser valioso também para crianças mais velhas. Steffe (1994) observou crianças de oito anos resolvendo problemas em que foi apresentada uma fila de blocos e solicitado que calculassem o total de blocos, considerando-se a existência de seis filas iguais à fila que elas podiam ver. As crianças, frequentemente, recorreram ao esquema da correspondência um para muitos, contando cada bloco visualizado seis vezes.

Devemos ainda mencionar que o estudo de Frydman e Bryant (1988) permitiu que as crianças pudessem ver e comparar, durante todas as atividades, as unidades duplas com as unidades simples. Também as unidades duplas apresentavam separações que permitiam visualizar sua composição a partir de duas unidades simples. Isso se constituiu em um fatores facilitadores para a atividade. No caso dos gráficos, dificuldades relacionadas a compreensão da correspondência um para muitos deverá gerar erros na compreensão da escala que está sendo utilizada no gráfico, influenciando a compreensão das informações veiculadas. O estudo de Guimarães (2002) ilustra esse aspecto.

Guimarães (op. cit.) analisou a interpretação e construção de gráficos de barras entre crianças de terceira série de uma escola particular de Jaboatão dos Guararapes. Um dos gráficos usados no estudo referia-se a audiência de uma rede de TV fictícia durante alguns meses. Cada unidade da escala usada no gráfico representava 20 pessoas. Na tarefa em que se solicitou a localização da freqüência de uma categoria ("Quantas pessoas assistiram a TV Boglo durante o mês de setembro?"), obteve-se apenas 18,7% de respostas corretas. Esses resultados contrastam com o percentual de acerto dos mesmos sujeitos (85% de acerto) diante de uma pergunta semelhante, em outro gráfico que apresentava os valores da barra explícitos na escala.

3.4 Cada eixo representa uma medida

No sistema cartesiano temos o desenho de dois eixos que devem representar as medidas que estão sendo consideradas. Um aspecto importante consiste que ao definir que medida cada eixo representa, esta definição não pode ser modificada arbitrariamente. Assim, para representar os dados em um gráfico é importante uma definição consistente da medida que será representada em cada eixo. Uma dificuldade nesse aspecto geraria gráficos completamente inconsistentes, ou seja, a criança ora representaria a frequência no eixo "y", ora no eixo "x", impossibilitando a leitura do gráfico.

Não encontramos na literatura investigada nenhum estudo que relatasse esse tipo de dificuldade. Entretanto, como tais estudos geralmente envolveram crianças mais velhas dos que as investigadas no presente estudo, consideramos importante aqui nos referirmos a essa possível fonte de dificuldade.

A partir dos dados apresentados pudemos observar várias dificuldades que podem surgir na construção e interpretação de gráficos, relacionadas à compreensão do sistema cartesiano e que serão investigadas em nosso primeiro estudo a partir de tarefas criadas com esse fim. Outra questão de nosso interesse consiste em investigar se o trabalho com gráficos pode se beneficiar do uso combinado com outras formas de representação, tal como os materiais manipulativos. Nessa linha de raciocínio, no próximo tópico faremos uma análise de estudos que envolvem o uso de manipulativos e estudos que trabalham com gráficos, de modo a permitir ao leitor uma visão mais ampla da literatura da área em que nos baseamos para conduzir a nossa pesquisa.

4. Analisando o uso de materiais manipulativos e gráficos

Neste estudo optamos por trabalhar apenas com gráficos de barras. Uma justificativa para essa opção refere-se ao fato dos mesmos serem adequados à representação de dados nominais e de contemplarem a área de resolução de problemas aditivos, conforme será discutido mais adiante.

Consideramos que um caminho didático para o trabalho com gráficos com crianças pequenas poderia ser combiná-los a outros tipos de representações mais familiares no campo de resolução de problemas de estrutura aditiva, tal como os materiais manipulativos. Isto não implica em dizer que esse seja o melhor e/ou único caminho didático. Outros estudos, tal como o trabalho de diSessa, Hammer, Sherin, e Kolpakowski (1991) mostraram resultados interessantes e promissores a partir do uso de situações informais de representação de dados por parte da criança para o desenvolvimento da compreensão sobre gráficos.

Os manipulativos utilizados nesse estudo foram blocos de encaixe, formando barras. A escolha por esse material deveu-se à sua similaridade com as barras de um gráfico. Além do que, enquanto as barras não apresentam as unidades delimitadas, os blocos de encaixe permitem essa visualização, favorecendo a compreensão da constituição das barras a partir de suas unidades. Também o fato de blocos de encaixe serem familiares e passíveis de manipulação por parte das crianças poderiam ser fatores que auxiliassem a atividade de resolução de problemas. Essas condições de visualização das unidades e de possibilidade de manipulação poderiam ser fatores importantes para compreensão de gráficos de barras por crianças pequenas pois possibilitaria que alguns aspectos desse tipo de representação fossem "descomprimidos", usando a terminologia de Nunes (1997). Embora nosso ponto de partida para o uso de blocos de encaixe tenha sido o critério da similaridade física entre os blocos encaixados em barras e as barras de um gráfico, não consideramos esse o único e preponderante fator que possa favorecer o desempenho das crianças nas atividades combinadas entre estas duas representações. As reflexões a partir do uso de blocos e da resolução de problemas com blocos e com gráficos nos parecem fatores fundamentais para que as crianças compreendam e estabeleçam conexões entre estes dois tipos de representação.

Além disso, o uso de blocos de encaixe em forma de barras visou possibilitar que alguns aspectos que são fonte de dificuldades no trabalho com gráficos (por exemplo: linha de base, consistência na unidade de representação do gráfico, etc) fossem objeto de reflexão por parte das crianças em situações designadas especificamente com esse propósito.

Em relação à resolução de problemas no campo das estruturas aditivas, esperávamos favorecer conexões entre estratégias já usadas com sucesso com manipulativos e a resolução de problemas através de gráficos de barras. Por exemplo, no caso dos problemas de combinação, enquanto alguns estudos mostraram que crianças pré-escolares já resolvem com sucesso esse tipo de problema (por exemplo, Carpenter & Moser, 1982), estudos envolvendo gráficos têm encontrado dificuldades ainda entre crianças de terceira série (por exemplo, Guimarães, 2002). Nesse tipo de problema, além de estratégias de somar as duas partes ou contar a partir do maior, a presença de material manipulativo permite a contagem um-a-um das unidades apoiando a resolução dos problemas por crianças menores que precisam de um suporte representacional auxiliar para sua contagem. Por outro lado, o trabalho com gráficos de barras poderia se beneficiar não apenas da compreensão desse tipo de problema que as crianças pequenas já apresentam ao resolver com manipulativos, mas também favorecer o uso de novas estratégias, em função da natureza uniforme e impossibilidade de manipulação concreta das barras. Em suma, nos parece que a conexão entre essas duas formas de representação pode ajudar a ampliar a compreensão conceitual das crianças.

No caso dos problemas de comparação, em que diversos estudos têm observado dificuldades de resolução por crianças pequenas (Carpenter & Moser, 1982; Nesher, 1982; entre outros), o trabalho com blocos de encaixe nos pareceu bastante pertinente por favorecer a visualização da correspondência entre as quantidades tornando saliente quanto as mesmas tem igual e quanto uma tem mais do que a outra. A importância de se evidenciar a igualdade inicial entre as quantidades no tratamento desse tipo de problema foi analisada por Nunes & Bryant (1991). Esse estudo será descrito em detalhes no próximo tópico.

Dando seqüência a essa reflexão, a seguir apresentaremos estudos empíricos que focalizaram o uso de materiais manipulativos no ensino de matemática e ampliaremos a análise sobre gráficos, já iniciada no capítulo anterior.

4.1 Refletindo sobre o uso de manipulativos

Material manipulativo tem feito parte do trabalho de matemática desde a Educação Infantil. O princípio básico referente ao uso desses objetos consiste em manipular objetos e "extrair" princípios matemáticos de tal manipulação. Os materiais manipulativos devem, então, representar explicitamente e concretamente idéias matemáticas que são abstratas. Cobb (1987) argumenta que as relações concreto-abstrato são claras apenas para quem já possui uma representação mental dos conceitos e pode então "vê-los" no material concreto. Nessa mesma direção, Gravemeijer (1994) analisa o uso de manipulativos em função de que ainda que eles sejam concretos, a matemática embebida nos modelos que eles representam não é concreta para os estudantes. Esta autora considera que o uso de manipulativos está atado a uma perspectiva tradicional de apresentar esse material como um modelo já estruturado, sem qualquer contexto para as crianças.

O estudo realizado por Hart (1987) e Hart & Sinkinson (1988) com crianças inglesas entre oito e treze anos é bastante ilustrativo. Em entrevistas com as crianças, estes autores observaram que os alunos não percebiam qualquer relação entre as atividades concretas e a formalização matemática ("soma é soma e blocos são blocos", 1988, p. 381). As ações das crianças nem sempre correspondiam isomorficamente às transformações escritas que deviam ser feitas na resolução do algoritmo da subtração e, os professores não davam uma atenção explícita para que as relações entre os procedimentos no material concreto e a formalização matemática fossem estabelecidas.

Resnick e Omanson (1987) realizaram um estudo com o objetivo de avaliar dois tipos de metodologias para trabalhar os princípios da subtração e evitar os erros já conhecidos relacionados ao algoritmo escrito dessa operação. Uma das metodologias, denominada pelos autores de "mapping instruction", enfatizava a subtração com blocos e por escrito, mantendo uma correspondência passo a passo entre essas duas representações. Isto poderia permitir a transferência da compreensão desenvolvida com blocos para a representação escrita. Também poderia dar uma oportunidade às crianças de refazer a rotina correta sem tantos erros a partir dessa correspondência entre o concreto e o escrito. A segunda metodologia "prohibition instruction" não usava blocos e consistia na prática do algoritmo escrito sob condições que não aceitavam qualquer erro. A hipótese dos autores era que a instrução por correspondência fosse efetiva quanto à superação dos erros observados comumente no algoritmo da subtração. Não se esperava efeitos na compreensão dos princípios a partir da segunda metodologia utilizada ainda que alguns erros pudessem ser corrigidos. Participaram do estudo 18 crianças americanas de quarta, quinta e sexta séries, diagnosticadas como apresentando erros no algoritmo da subtração. O modelo do experimento foi pré-teste, instrução, pós-teste imediato e um segundo pós-teste, quatro semanas após o pós-teste imediato. Todos os encontros foram individuais. Os resultados indicaram que nenhuma das metodologias foi totalmente efetiva em corrigir os erros no algoritmo escrito. Crianças que receberam a instrução por correspondência entre blocos e algoritmo apresentaram desempenhos significativamente melhores que as crianças da segunda metodologia no que refere à compreensão do valor dos dígitos na recomposição do minuendo. Também avaliando-se a compreensão do princípio da compensação, observaram-se melhores desempenhos no grupo que trabalhou a correspondência entre blocos e algoritmo, ainda que a diferença não fosse significativa em relação ao grupo que apenas praticou o algoritmo escrito. Os autores concluem que a instrução por correspondência foi mais efetiva na compreensão das crianças, entretanto não atingiu a extensão esperada.

Em um segundo estudo envolvendo a instrução por correspondência com oito crianças da quarta série, os autores trabalharam apenas com a instrução por correspondência, enfatizando a verbalização das crianças sobre os seus procedimentos tanto com blocos como por escrito e enfatizou as trocas com blocos, por ex. dezenas por unidades. O método foi o mesmo do estudo anterior consistindo de pré-teste, instrução, pós-teste imediato e pós-teste posterior. Os resultados observados foram semelhantes aos do estudo anterior, havendo melhoras no conhecimento dos valores das trocas e do princípio da decomposição. Entretanto, erros no algoritmo escrito ainda foram observados. Os autores concluíram que ainda que as crianças apresentassem uma compreensão dos princípios necessários para a resolução do algoritmo, elas nem sempre os aplicavam em sua resolução.

A análise dos autores sobre o ensino por correspondência ressaltou que o fator que pareceu predizer os melhores resultados nesse tipo de metodologia não foi o uso de blocos ou o domínio da rotina da correspondência, mas sim o uso do tempo para realizar maior número de verbalizações corretas das quantidades envolvidas nos empréstimos, enfatizando-se o papel das intervenções do experimentador durante a intervenção.

Em nossa análise, talvez um importante papel dos blocos tenha sido, justamente, de suporte auxiliar para a compreensão das quantidades envolvidas e de suas relações, como observado pelos autores. Assim, não é a simples manipulação de objetos que pode garantir aprendizagem, mas a representação concreta pode facilitar a reflexão e compreensão das crianças sobre alguns aspectos importantes para o conhecimento que se quer trabalhar.

Meira (1998) comparou duas formas diferentes de analisar a *transparência* dos materiais: a partir da fidelidade epistêmica e a partir de uma visão sócio-histórica baseada na noção de Vygotsky de *ferramenta de mediação*. Do ponto de vista da fidelidade epistêmica, o conceito de transparência é algo objetivo, inerente ao material, que é medido a partir da qualidade das relações entre o material e o domínio do conhecimento que se deseja ensinar. Numa visão sócio-histórica, a transparência de um material é algo construído no processo de uso, mediada por seus participantes, dentro de práticas sócio-culturais específicas. Assim, mais importante do que a análise da fidelidade epistêmica dos materiais seria o estudo sobre como os artefatos são transformados por estudantes no contexto das práticas ao darem sentido às idéias matemáticas.

Moyer (2001) argumenta que a manipulação ativa dos materiais permite que crianças desenvolvam um repertório de imagens que podem ser utilizadas na manipulação mental dos conceitos abstratos. Ainda reconhecendo que manipulativos não podem carregar significados neles próprios, esta autora chama atenção para a importância de considerar os manipulativos como potenciais ferramentas e os seus significados como função da tarefa para a qual o professor concebeu seu uso. Tomando o conceito de transparência de Meira (1998), essa autora afirma que "é a mediação pelos alunos e professores inseridas em práticas significativas que determina a utilidade dos manipulativos" (p.176). Desta forma, manipulativos não são necessariamente transparentes, devendo-se analisar o seu uso pelos alunos para se poder julgar se a transparência emerge ou não. Alunos devem refletir sobre suas ações com manipulativos para construirem significados.

O estudo realizado por Stacey, Helme, Archer & Condon (2001) comparou o uso de dois materiais manipulativos a partir da realização de dois pequenos experimentos de ensino envolvendo 11 crianças do quinto ano e 18 crianças do sétimo ano. O estudo testou nestas duas séries, o uso de dois materiais para ensinar números decimais: blocos aritméticos multi-base (MAB) e os blocos aritméticos lineares (LAB). A hipótese do estudo foi que o LAB poderia ser um modelo mais adequado para a compreensão de decimais, principalmente quando envolvendo quantidades contínuas. Os resultados indicaram melhores desempenhos no pós-teste das crianças que usaram LAB. A diferença entre os grupos que usaram MAB e LAB foi significativa apenas na sétima série. Os autores concluíram analisando as vantagens no uso do LAB e considerando que o fato do MAB ter sido utilizado anteriormente relacionado aos números inteiros pode ter gerado confusão entre os estudantes, evidenciada pelas dificuldades que os mesmos apresentaram em lembrar os novos nomes e valores de seus componentes. Assim, ao analisar os tipos de manipulativos os autores sugeriram que deve ser considerada também a acessibilidade do material, que inclui como tal material já foi utilizado em sala de aula e com que conceitos matemáticos interagiu antes.

Analisando a literatura que inclui o uso de manipulativos em sala de aula, observamos pesquisas que mostram que crianças se saem melhor com uso de manipulativos do que sem esse uso (Carpenter e Moser, 1982; Riley, Greeno & Heller (1983); Hughes, (1986); Nunes & Bryant (1991); Selva, (1998)). Carpenter e Moser (1982), por exemplo, mostraram que crianças pré-escolares norte-americanas que não haviam recebido instrução escolar sobre adição e subtração apresentaram desempenhos superiores (78,5% de acertos) na resolução de problemas de combinação com pares numéricos pequenos quando tinham blocos disponíveis do que na resolução do mesmo tipo de problema sem a presença de qualquer material (68%). Esta diferença foi ainda mais marcante quando os números envolvidos eram maiores que dez (60,5% de acerto com a presença de blocos e 36,5% sem a presença).

Resultados semelhantes foram encontrados por Riley, Greeno & Heller (1983) ao solicitar que crianças novas resolvessem problemas comparáveis (do tipo mudança com resultado final desconhecido) de adição e subtração usando blocos como apoio. Crianças de seis anos apresentaram poucos erros quando os números envolvidos eram pequenos e lhes era permitido o uso de blocos (87% de acerto para adição e 100% para subtração).

Hughes (1986) analisou o desempenho de crianças de três a cinco anos em problemas de adição e de subtração em dois tipos de situação: com uso de objetos concretos e resolvendo situações cotidianas imaginadas. Na resolução de problemas que envolviam números menores (aproximadamente até quatro) as crianças obtiveram desempenhos superiores quando usaram objetos concretos (83% para 62% de respostas corretas). No entanto, nos problemas com números maiores essa diferença deixou de ser significativa (28% de acerto com objetos concretos e 23% de acerto nas situações cotidianas).

Selva (1998), analisando a resolução de problemas de divisão por crianças de alfabetização, primeira e segunda séries (seis a oito anos de idade), observou melhores desempenhos no grupo com objetos concretos do que nos grupos com papel e lápis ou sem qualquer material como apoio aos cálculos. Entretanto, a autora também observou que crianças do grupo com manipulativos em todas as séries apresentavam estratégias mais simples de representação direta dos dados e ações problema. Enquanto que crianças dos outros grupos (com papel e lápis ou sem qualquer objeto) apresentavam estratégias mais flexíveis, tal como adição repetida e fatos memorizados.

Nunes & Bryant (1991) realizaram uma intervenção envolvendo o uso de material manipulativo na resolução de problemas de comparação. Esse tipo de problema tem sido apontado pela literatura como um dos que trazem maiores dificuldades para as crianças. Os autores argumentaram que a resolução deste tipo de problema estaria relacionada a uma dificuldade das crianças em estabelecerem uma conexão entre dois esquemas que elas já possuem: os esquemas de adição/subtração e o esquema de correspondência. Para avaliar se as dificuldades na resolução de problemas de comparação se deviam à falta de coordenação de esquemas conhecidos, propuseram a crianças de cinco a sete anos que resolvessem uma série de problemas de comparação sob duas condições experimentais que enfatizavam a idéia de correspondência: condição espacial e condição temporal. Na condição espacial, inicialmente, as crianças foram solicitadas a colocarem lado a lado a quantidade de doces dela e do experimentador. Em seguida, o experimentador acrescentou (ou retirou) doces da criança a partir de uma justificativa imaginária, tal como dizendo-lhe que havia se comportado muito bem naquele dia. Foi, então, feita a pergunta-chave de comparação "quantos a mais você tem?". Na outra condição experimental, a temporal, o procedimento foi o mesmo, entretanto, não houve a correspondência espacial entre as quantidades pois o experimentador e a criança tinham caixinhas para colocarem seus bombons. Após cada problema, as crianças receberam retorno do experimentador sobre a resposta correta. As crianças que fizeram parte da condição controle resolveram a mesma série de problemas e receberam também retorno sobre a resposta correta quando cometeram algum erro.

Os resultados indicaram que todos os três grupos apresentaram desempenhos melhores no pós-teste do que no pré-teste, o que significa que responder problemas e obter retornos sobre a resposta correta produz efeitos positivos no desempenho das crianças, entretanto, diferença significativa entre o pré e o pós-teste foi observada apenas no grupo com correspondência espacial. Esse resultado reforça a idéia de que a dificuldade de crianças mais novas em resolver problemas de comparação pode estar relacionada à dificuldades em coordenar os esquemas de adição/subtração e de correspondência. Os autores concluíram enfatizando a importância de atividades adequadamente planejadas em resolução de problemas desde o pré-escolar e que "a introdução de trabalhos de resolução de problemas com apoio de material concreto a nível pré-escolar pode representar um acréscimo positivo ao currículo do pré-escolar, estimulando o desenvolvimento de conceitos matemáticos na criança..." (p. 284).

Neste mesmo grupo de estudos que tem observado melhores desempenhos com o uso de manipulativos, algumas pesquisas têm constatado que o desempenho dos alunos está relacionado à experiência do professor com os manipulativos (Sowell, 1989 Raphael and Wahlstrom, 1989). Outros estudos enfatizam que a mera presença de manipulativos não garante a aquisição da compreensão conceitual (Meira, 1998, entre outros). No estudo de Meira (1998) foi analisado como crianças davam sentido a artefatos físicos. Alunos da oitava série trabalharam com problemas de função lineares em três condições: duas envolviam artefatos físicos e a terceira envolvia um programa de computador. Ele observou que na medida que as sessões progrediam os alunos iam dando sentido aos artefatos mecânicos, tornando-os “visíveis” enquanto materiais que requeriam explicações. As crianças que trabalharam com o computador focalizaram mais os números e suas relações, tendo resultados mais positivos no que se refere ao conhecimento sobre funções.

O estudo desenvolvido por Moyer (2001) analisou um outro fator relacionado ao uso de manipulativos: a concepção dos professores sobre como e porque manipulativos são usados na sala de aula. O estudo examinou o uso de manipulativos por 10 professores do ensino fundamental, através de entrevistas e observações de sala de aula durante um ano letivo. Os professores foram voluntários e tinham participado durante duas semanas iniciais de um curso em que se discutiu ferramentas pedagógicas tais como manipulativos, calculadoras e computadores para ensinar matemática. Eles faziam parte de escolas públicas norte-americanas. Os resultados sugerem que professores usam manipulativos como um recurso para tornar a aula divertida, sem contudo conectá-los ao conteúdo explorado no ensino regular. Na concepção dos professores entrevistados para a compreensão dos conceitos matemáticos, os alunos devem usar o algoritmo, portanto, ignoram a possibilidade que através de experiências significativas com representações, tais como manipulativos, estudantes possam inventar seus próprios algoritmos. Os professores não tinham sucesso em usar manipulativos para engajar alunos em fazer sentido da matemática. Em outro estudo (Moyer, 1998), a autora relata que quando as crianças tinham liberdade para usar manipulativos, elas espontânea e seletivamente usavam esses materiais para mediar sua própria aprendizagem.

Controvérsias sobre o ensino com manipulativos permanecem. Alguns estudos apontam a efetividade desses materiais, outros apontam efeitos benéficos apenas com crianças menores sendo desnecessários para crianças maiores e outros não encontram diferenças do uso de tais materiais com o ensino por outros meios significativos.

Sowell (1989) realizou uma revisão de 60 estudos que incluem crianças da pré-escola ao ensino médio. A autora procedeu uma meta-análise para determinar a efetividade do uso de manipulativos no ensino de matemática, considerando o desempenho, a retenção e transferência do conhecimento e a atitude dos alunos em relação à matemática. Os resultados mostraram-se significativos apenas no que se refere à efetividade do uso de manipulativos ao se comparar estudos envolvendo material concreto e instrução simbólica por períodos de intervenção longos (um ou mais anos). Não foram encontradas diferenças significativas ao se comparar instrução simbólica com pictórica ou pictórica com material concreto. Estes resultados também confirmaram a revisão realizada por Suydam e Higgins (1977, citado por Sowell, 1989), que ao analisarem estudos que comparavam o uso de diferentes tipos de representação no ensino de matemática, encontraram que o uso de manipulativos produzia melhores resultados durante todas as séries da escola elementar.

4.2 Refletindo sobre o trabalho com gráficos

No capítulo anterior realizamos uma breve análise sobre a importância de se trabalhar com gráficos. Nesse capítulo, nos tópicos iniciais, também relatamos algumas dificuldades relacionadas ao uso do sistema cartesiano que foram observadas na literatura da área. Neste tópico alguns outros aspectos teóricos serão abordados, como também apresentaremos estudos empíricos na área.

Em relação aos gráficos, um aspecto ainda merece ser comentado: a relação gráfico e seu usuário.

Devemos considerar que o leitor de um gráfico tem sempre suas experiências prévias, além de desejos e expectativas que interagem na própria leitura realizada. Friel, Curcio & Bright (2001) sugerem algumas características dos leitores que podem influenciar a interpretação de gráficos: se gráficos são rotinas importantes na vida ou se apenas uma atividade escolar sem sentido, se o leitor possui conhecimento e experiências sobre o fenômeno descrito no gráfico e o conhecimento matemático do leitor. Os estudos de Monteiro (1998) e Lima (1998) mostraram como adultos são influenciados por suas experiências e expectativas mesmo quando os gráficos tratam de conhecimentos relativos aos seus trabalhos diários. O estudo realizado por Carraher, Schliemann & Nemirovsky (1995) aponta claramente a necessidade de se considerarem as expectativas e conhecimentos do leitor do gráfico. Neste estudo, os autores apresentam dados que mostram a interpretação de um gráfico por um adulto sem qualquer escolarização, em que se observa uma interpretação ancorada no cotidiano e nas expectativas e desejos pessoais que, com a intervenção do entrevistador, vai se ampliando até chegar à compreensão das informações contidas no gráfico. O estudo realizado por Monteiro, Selva & Ferreira (2000) com professores do ensino fundamental sobre interpretação de gráficos é mais um exemplo da importância de se considerar, no processo interpretativo, o âmbito das experiências do sujeito. Neste estudo, professores foram solicitados a realizar a leitura de dois gráficos: um sobre casos de câncer no homem e na mulher nos anos de 1990 e 2020 e, outro, sobre o tempo de gestação em mamíferos. Observou-se que o envolvimento dos sujeitos com o tema abordado nos gráficos foi um fator determinante para o tipo de leitura realizado. Enquanto no gráfico sobre casos de câncer os sujeitos procuravam levantar explicações para os dados, comparar valores de barras, discutir políticas de prevenção, no gráfico sobre o tempo de gestação de animais, os sujeitos restringiam-se à leitura das informações explícitas no gráfico.

Finalmente, devemos lembrar que as crianças fazem matemática antes e em paralelo à atividade escolar de aprendizagem deste conteúdo, e que desenvolvem procedimentos próprios de resolução de problemas matemáticos (Groen & Resnick (1977) e Ginsburg (1977)). A análise desses procedimentos informais tem revelado interessantes resultados que vêm servindo como subsídios para o repensar das práticas pedagógicas. Seguindo esta mesma direção, diSessa, Hammer, Sherin, e Kolpakowski (1991) observam que muitos dos estudos sobre gráfico têm sido realizados com o intuito de explorar as intuições e interpretações informais dos alunos sobre eventos, valorizando a discussão sobre a organização dos eixos, o que deve ser representado, ou seja, permitem que a criança reinvente a representação gráfica a partir da necessidade de representação de algum evento.

Na compreensão de gráficos, Curcio (1987) distingue três níveis de dificuldade: 1. leitura dos dados explicitamente representados no gráfico, sem qualquer interpretação; 2. leitura dentro dos dados, realizando comparações e uso de conceitos e habilidades matemáticas, e; 3. leitura para além dos dados, que requer extrapolação, predição e realização de inferências. Outra análise nessa mesma direção de verificar os tipos de questões possíveis e seus níveis de dificuldade foi realizada por Wainer (1992) que identificou 3 níveis de informação relacionados à interpretação de gráficos: (a) compreensão da extração de dados (o que aconteceu em determinado momento?); (b) compreensão das partes de um gráfico (o que aconteceu em determinado intervalo de tempo?); (c) compreensão da estrutura "profunda" dos dados (relações que devem ser extraídas de uma compreensão mais geral e profunda do gráfico e que portanto, vão além dos aspectos figurativo-perceptuais).

Como dado empírico de pesquisa temos que alguns estudos sobre gráficos têm explorado questões e dificuldades que as crianças apresentam para representar eventos, construir representações. O estudo de Bell e Janvier (1981), por exemplo, analisou a interpretação de gráficos de crianças de escolas secundárias inglesas verificando dificuldades em calcular o aumento de taxas, que era conectado geralmente ao valor máximo do gráfico, em medir e comparar intervalos, em analisar tendências.

Observaram também efeitos de distratores situacionais, em que a experiência do leitor interferia na sua compreensão da informação veiculada pelo gráfico e distratores pictóricos, em que a forma do gráfico interferia na interpretação do leitor.

O estudo de Guimarães (2002) com crianças de 3ª. série de uma escola particular, entre nove e dez anos de idade, analisou a compreensão de gráficos a partir de questões de leituras de dados, comparação de freqüências e combinação de freqüências. Foram realizados um pré-teste, uma intervenção e um pós-teste. A intervenção foi realizada em duplas e foi de apenas uma sessão, em que o papel do experimentador foi apenas de incentivar a discussão das duplas sobre as questões propostas. Os dados obtidos demonstraram dificuldades mesmo após a intervenção na resolução de problemas de combinação (21,5% de acertos) e de comparação (38,3% de acertos) em gráficos nominais. Entretanto, devemos salientar a curta duração da intervenção (um encontro) e principalmente, o tipo de intervenção realizada em que as crianças foram organizadas em duplas mas não se dava qualquer retorno as mesmas sobre suas respostas aos problemas propostos e nem havia um papel mais ativo do experimentador na interação com as crianças, estimulando as trocas e a sistematização do conhecimento mobilizado naquela situação.

Observamos na literatura autores (Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990, por exemplo) que focalizam os aspectos formais do gráfico (compreensão da escala, por exemplo) como causas das dificuldades observadas na leitura/construção desse tipo de representação e outros (Meira, 1997, por exemplo) que consideram que a análise do gráfico não pode se concentrar apenas nos aspectos formais do mesmo, mas que essa representação tem que ser enfocada como uma ferramenta para compreensão da realidade, em que leitor e representação formam um todo. Meira (1995) analisando a questão das representações faz uma análise específica sobre o desenvolvimento do processo de raciocínio utilizado por uma dupla de crianças da oitava série na realização de uma atividade envolvendo a compreensão de função. Os dados obtidos mostraram que a representação escrita pelas crianças é transformada no decorrer da própria atividade, diante da emergência de conhecimentos e relações entre os conhecimentos que vão sendo explorados pelas crianças. Dessa forma, não faz sentido a dualidade sujeito-representação, pois a representação torna-se constituinte do próprio pensamento do sujeito. Nesse sentido, representações não podem ser analisadas apenas a partir dos elementos formais que a constituem.

Do ponto de vista didático temos observado algumas experiências em trabalhar com gráficos com crianças desde a pré-escola. Selva (1999) coordenou um trabalho numa escola da rede municipal do Recife, que envolvia uma combinação de matemática e literatura infantil. Este trabalho foi realizado com crianças de 6 anos, na própria sala de aula, sendo conduzido pela professora e uma estagiária. A partir da leitura de uma história, as crianças foram solicitadas a darem opiniões que, por sua vez, eram registradas no quadro de giz, servindo como fonte de dados para elaboração de tabela e gráficos. As crianças, reunidas em grupos, receberam uma folha de papel quadriculado e, junto com o professor, construíram gráficos relativos aos dados obtidos. A partir da construção do gráfico, foi proposto um trabalho com resolução de problemas com as crianças, comparando as quantidades de votos obtidas pelos animais, combinando as quantidades de voto de dois ou mais animais, avaliando o animal que obteve maior número de votos (valor máximo) e o animal que obteve menor número de votos (valor mínimo). Deve-se salientar o envolvimento das crianças com as atividades propostas, perguntando, comparando e buscando respostas.

Lima (2000), realizou um trabalho de intervenção com crianças de seis anos sobre gráficos de barras. A intervenção constou de uma série de atividades enfocando construção e interpretação deste tipo de gráfico a partir do tema “família”. Inicialmente, houve um levantamento sobre os integrantes das famílias dos alunos a partir de fotografias e desenhos realizados pelas próprias crianças. Em seguida, as crianças receberam retângulos na quantidade de integrantes de suas famílias e construíram, junto com o professor, um gráfico de barras referente à quantidade de pais, mães, irmãs e irmãos. Cada criança colava os seus retângulos no gráfico e, sistematicamente, surgiam discussões sobre a posição adequada para colar, a precisão da colagem. A partir desta construção, as crianças passaram a interpretar o gráfico e a sugerir a realização de novos levantamentos sobre outros aspectos relacionados às famílias (ex. tipo de moradia). A autora observou que rapidamente as crianças se apropriavam dos termos utilizados em relação aos gráficos (ex. eixo) e demonstravam grande interesse na coleta dos dados e construção dos gráficos.

Figueiredo (2002) também relatou um trabalho com gráficos, realizado em sala de aula, com crianças de quatro e cinco anos. O objetivo foi escolher personagens que serviriam de modelos para a confecção de máscaras. Após a votação realizada, um gráfico foi construído em painel e as crianças observaram que personagem havia sido o vencedor em função da altura maior da coluna no gráfico e do que tinha tido maior número de votos. Também foi realizada a leitura das freqüências de votos obtidas por cada um dos personagens.

Diferentemente do estudo de Selva (1999), Lima (2000) e Figueiredo (2002) não trabalharam com problemas gerados a partir das informações contidas no gráfico, limitando-se à leitura dessas informações. Assim, esse trabalho com gráficos na Educação Infantil que já é escasso, tem se restringido, na maior parte das vezes, apenas à representação e leitura de freqüências, sem incluir questões que levem a criança a realizar combinações, comparações, predições a partir das informações do gráfico. Este ponto é corroborado pela análise realizada por Lemos (2002) em coleções de livros didáticos de primeira a quarta série do ensino fundamental bem recomendadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (Brasil, 2000). Esta autora observou ausência de atividades envolvendo gráficos nos livros analisados relativos à primeira série do ensino fundamental, encontrando-se, nas outras séries, uma predominância de atividades de localização do valor de uma freqüência e de localização do ponto de maior freqüência representado no gráfico.

Mevarech & Kramarsky (1997) investigaram as concepções de 92 estudantes de oitava série de duas escolas israelitas relativas à construção de gráficos a partir de uma situação verbal representativa de situações cotidianas. Os autores estavam interessados ainda em examinar a resistência de tais concepções ao ensino formal de gráficos. Assim, o estudo seguiu o modelo pré-teste, ensino formal sobre gráficos e pós-teste. O pré e pós-testes consistiram de uma tarefa envolvendo a construção de gráficos a partir de afirmações de algumas pessoas sobre a relação entre tempo de estudo e notas obtidas. Para cada uma das quatro afirmações, solicitava-se a construção de um gráfico. Foi analisado o desempenho dos estudantes antes e depois da instrução formal sobre gráficos. Os resultados indicaram que um quarto dos estudantes, aproximadamente, eram capazes de transformar corretamente instrução verbal em representação gráfica. 60% dos estudantes podiam representar corretamente pelo menos um tipo de função. Observaram-se três categorias: a) construção de gráfico de único ponto; b) construção de uma série de gráficos, cada um representando um fator dos dados relevantes (por exemplo: um gráfico para o tempo de estudo e outro para as notas obtidas); c) conservação da forma de função crescente para todas as condições (era correto para apenas uma das condições). Alguns alunos utilizaram múltiplas concepções. Geralmente os estudantes eram consistentes no uso desses tipos de categorias de gráfico. Em relação à construção dos gráficos no pré e pós-testes, observaram um percentual de 27% de acertos no pré-teste e 45% no pós-teste. A melhora para cada tipo de gráfico especificamente também foi significante. A categoria "série de gráficos" foi mais freqüente do que "gráficos de um ponto", que por sua vez foi mais freqüente do que "função crescente em todas as condições". Os autores ainda observaram que muitos estudantes permanecem com as categorias iniciais (37% para gráfico de um ponto", 36% para vários gráficos e 20% para função crescente).

Um outro estudo que fornece valiosas sugestões para o trabalho de construção de gráficos foi realizado por Healy, Hoyles & Pozzi (1994). Estes autores trabalharam com crianças inglesas de quinto ano distribuídas em grupos de seis que realizariam determinada tarefa fazendo um trabalho em interação com o computador. A tarefa consistiu em encontrar a moradia adequada para uma determinada família. As crianças receberam características das moradias e também dados relativos à família em questão. Também foi fornecido um pequeno questionário sobre características das casas para a criança responder, estimulando a classificação das casas em categorias no computador. Os resultados indicaram que as crianças se envolveram em discussões, formulando categorias para análise das moradias, sendo tais categorias relacionadas à família. Este estudo aponta a importância de se pensar atividades que envolvam as crianças em discussões para a elaboração de um banco de dados, o que é fundamental para a elaboração de gráficos.

Pratt (1995) analisou crianças de oito e nove anos em duas seqüências de atividades envolvendo gráficos: na primeira, o gráfico foi usado para apresentação dos dados coletados pelas crianças; na segunda, gráficos foram usados interativamente, como parte da tarefa. Neste caso, as crianças coletaram dados e elaboram gráficos que por sua vez, nortearam novas coletas de dados. Os resultados mostraram que, ainda que uma infinidade de gráficos fossem construídos como resultado da primeira seqüência de atividades, as crianças focalizavam, principalmente, a estética do gráfico e não a sua relevância para a compreensão dos dados trabalhados. Por outro lado, as crianças que participaram da segunda seqüência de atividades usaram gráficos como uma ferramenta relevante, favorecendo a construção de significados para os dados obtidos. O autor analisou a importância de atividades que envolvam a criança em um processo ativo de construção e representação.

Um outro estudo interessante sobre a prática de sala de aula foi realizado por Zawojewski (1991) Esta pesquisa se constituiu em um projeto interdisciplinar e consistiu em uma seqüência didática envolvendo coleta e análise de dados realizada com alunos de quinto ano de uma escola americana durante o período de seis semanas. O trabalho foi desenvolvido em etapas. Inicialmente os alunos trabalhavam o conceito de média e o significado de pesquisar. O passo seguinte foi definir o objetivo e a metodologia a ser utilizada na investigação. Após a coleta, aproveitou-se para se discutir como organizar e representar os dados, usando-se gráficos e/ou tabelas para apresentação dos resultados que também foram redigidos para serem discutidos com os outros alunos. O estudo de Zawojewski (op. cit.) constituiu uma experiência positiva desenvolvida em sala de aula com interação do professor e alunos. Nos parece que tal tipo de atividade didática tem muito a contribuir na aproximação entre a pesquisa em matemática e a escola, favorecendo uma compreensão mais profunda do processo de ensino-aprendizagem.

Os estudos descritos acima mostraram avanços na compreensão do trabalho com gráficos inserido na prática de sala de aula. Retomando nossa análise sobre o uso de manipulativos e gráficos na resolução de problemas de estrutura aditiva, pudemos observar estudos que mostraram o papel dos manipulativos como suportes representacionais como também verificamos estudos que mostraram experiências de ensino envolvendo gráficos. O presente estudo propõe um caminho didático para trabalhar com o gráfico de barra na educação infantil e ensino fundamental, conectando essa representação aos materiais manipulativos, na resolução de problemas de estrutura aditiva. O próximo tópico visa detalhar os objetivos pretendidos com o desenvolvimento do presente estudo.

5. Objetivos

Do ponto de vista educacional, gráficos se constituem em poderosas ferramentas e objetos de reflexão por parte das crianças. Alem de permitirem a representação de dados em diversos conteúdos favorecendo uma articulação da matemática com diversas outras áreas de conhecimento, os gráficos possibilitam uma compreensão mais ampla das informações ao possibilitar ao seu leitor a análise de tendências e taxas de variação, a realização de prognósticos, o levantamento de hipóteses. Neste sentido, o gráfico aprofunda a análise de dados e estimula que conhecimentos da experiência pessoal sejam mobilizados, possibilitando a produção de um conhecimento mais consistente por parte do sujeito.

É neste âmbito que esse trabalho se insere, buscando contribuir para as discussões acerca do aprendizado de ferramentas simbólicas, bem como trazer subsídios para o trabalho de resolução de problemas na Educação Infantil e séries iniciais do ensino fundamental.

Especificamente, pretendemos explorar o uso do gráfico de barras como mais um suporte auxiliar na resolução de problemas. Sendo o primeiro estudo, um estudo exploratório, estávamos preocupados em propor uma seqüência didática que favorecesse a execução de nossos objetivos, que podem ser sumarizados nos seguintes pontos:

- Explorar a resolução de alguns problemas de estrutura aditiva a partir de blocos de encaixe e, posteriormente, da própria representação gráfica e investigar as relações entre tais formas de representação (blocos de encaixe e gráficos de barras).
- Discutir alguns aspectos relacionados ao próprio gráfico enquanto instrumento matemático, tais como eixos, linha de base e unidade de representação no gráfico a partir de situações que favoreçam a reflexão das crianças sobre tais aspectos e promovam a superação das dificuldades encontradas.

No segundo estudo, foi realizado um experimento de ensino na área de resolução de problemas aditivos para avaliar nossas hipóteses sobre que metodologia de ensino seria mais efetiva para o desenvolvimento de um trabalho com gráficos de barras na educação infantil e séries iniciais, se combinado ao uso de materiais manipulativos ou não. Assim, três grupos de trabalho foram formados:

- O primeiro grupo resolveu problemas aditivos envolvendo a representação em blocos de encaixe (material manipulativo) e em gráficos de barras;
- O segundo grupo resolveu os mesmos problemas solicitados ao grupo anterior, entretanto apenas através de gráficos de barras;
- O terceiro grupo, grupo controle, resolveu algoritmos de adição e subtração envolvendo a representação em blocos de encaixe (material manipulativo).

A metodologia, os resultados e conclusões dos dois estudos desenvolvidos encontram-se descritos nos capítulos seguintes. O capítulo final consiste numa análise geral dos resultados obtidos e desdobramentos para futuros estudos.

CAPÍTULO 3

INVESTIGANDO A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ADITIVOS ATRAVÉS DE GRÁFICOS DE BARRAS: A PROPOSIÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA CRIANÇAS DA ALFABETIZAÇÃO

1. Introdução

Nos capítulos anteriores procuramos situar o leitor sobre os objetivos dessa tese e possibilitar uma visão sobre as questões e os estudos que contribuem para a discussão desses objetivos. Esse capítulo e o próximo referem-se aos estudos realizados. Em cada um deles, serão apresentados de forma breve uma introdução, a metodologia utilizada, os resultados obtidos e as conclusões. O último capítulo focalizará conclusões gerais sobre os estudos e também incluirá sugestões para estudos futuros que nos pareceram pertinentes de serem conduzidos como complementações para os estudos que foram desenvolvidos.

Como explicitado anteriormente, o presente estudo constituiu-se em uma pesquisa de caráter exploratório, com enfoque didático. Os objetivos delineados foram: 1. analisar algumas das dificuldades observadas na literatura envolvendo o trabalho com gráficos, a partir de situações que auxiliassem as crianças a superarem tais dificuldades e 2. explorar a resolução de problemas aditivos com blocos de encaixe e gráficos de barras, analisando as relações entre essas duas formas de representação.

Os dados obtidos foram analisados qualitativamente, fornecendo uma ampla base empírica importante para a compreensão de nosso campo de interesse, o das estruturas aditivas, e em particular, a resolução de problemas com gráficos de barras. Os resultados desse primeiro estudo também serviram como base para o planejamento de um experimento de ensino, nosso segundo estudo, enfocando o trabalho com gráficos de barras.

2. Método

Conforme apresentado anteriormente, o presente estudo investigou a resolução de problemas no campo das estruturas aditivas a partir de dois suportes representacionais, manipulativos (blocos de encaixe) e gráficos de barras. Um dos objetivos desse estudo foi analisar se a combinação entre essas duas formas de representação poderia auxiliar crianças pequenas na superação de obstáculos, já relatados na literatura, observados no trabalho com gráficos. Assim, desenvolvemos uma seqüência didática com crianças entre seis e sete anos da Educação Infantil, especificamente na série de Alfabetização, envolvendo resolução de problemas de estrutura aditiva e atividades específicas para refletir sobre algumas dificuldades comumente encontradas no trabalho com gráficos.

Nessa direção, optamos por trabalhar com duplas de alunos, considerando a interação entre alunos e também com o pesquisador fatores importantes ao processo ensino-aprendizagem, conforme constatado em estudos citados no primeiro capítulo.

Optamos por trabalhar com duplas homogêneas quanto ao gênero e com crianças de mesmo nível de habilidade ou com níveis diferentes de habilidade. A opção pela homogeneidade quanto ao gênero ocorreu em função de dois aspectos: pela preferência das crianças em trabalhar com companheiros do mesmo sexo (observado em sala de aula e nas brincadeiras no recreio) e em função de alguns estudos, como por exemplo o de Swann (1992), terem mostrado que, principalmente, nas duplas heterogêneas fatores como autoridade/submissão podiam ser variáveis importantes na interação da dupla.

A opção por trabalhar com duplas de crianças com níveis de habilidade semelhantes e com duplas com níveis de habilidade diferentes baseou-se em estudos (Martí, 1994 e Pessoa, 2000) que mostraram que a habilidade inicial dos alunos influencia o funcionamento do trabalho. Nessa linha, optamos em ter duplas homogêneas e heterogêneas quanto ao nível de habilidade (ambas crianças com bom desempenho, ambas crianças com fraco desempenho e uma criança com bom desempenho e outra com desempenho fraco) de modo a observarmos o comportamento dessa variável em relação ao desenvolvimento alcançado ao longo das atividades pelas duplas. Entretanto, gostaríamos de deixar claro que a análise da interação entre as crianças (como os pares se relacionaram, se o tipo de relacionamento influenciou o trabalho da dupla, como, etc) não se constituiu no foco central desse estudo, ainda que essa tema perpasse nossa discussão em determinados momentos.

Outra preocupação nossa consistiu na quantidade de atividades desenvolvidas com as crianças em cada momento. Estabelecemos uma programação que foi flexível, avançando de modo mais rápido ou mais lentamente, dependendo do decorrer dos encontros com cada uma das duplas. Vale dizer que anteriormente ao trabalho de coleta de dados, dedicamos algum tempo interagindo com as crianças na escola de modo a que se familiarizassem com nossa presença.

Por fim, ressaltamos novamente o caráter exploratório desse estudo que buscou fornecer maiores dados e sugestões para o trabalho com uma forma de representação até então pouco utilizada na Educação Infantil e nas séries iniciais, o gráfico de barras. Optamos por um modelo de estudo que nos permitisse explorar a dinâmica do pensamento das crianças ao longo de uma série de atividades com blocos de encaixe e com gráficos. É essa análise o foco desse estudo. A operacionalização dos objetivos a que nos propomos está explicitada abaixo.

2.1 Participantes

Participaram desta pesquisa 24 crianças (16 do sexo feminino e oito do sexo masculino) cursando a alfabetização, com idades entre seis e sete anos (idade média: seis anos e seis meses), alunos de uma escola da rede pública da cidade do Recife. As crianças pertenciam a três turmas do turno da tarde, sendo 12 crianças de uma turma, oito de outra e duas de outra. As crianças nunca haviam trabalhado com gráficos na escola.

Em cada turma, as crianças foram organizadas em duplas de mesmo sexo para realização das atividades propostas, não havendo variação na constituição das duplas no decorrer do estudo.

2.2 Formação das duplas

Quarenta e sete crianças realizaram o exame de sondagem. A partir dos resultados desse exame de sondagem foram selecionadas 24 crianças, 12 com bom desempenho e 12 com desempenho fraco. Para organização das duplas alguns critérios foram utilizados: serem do mesmo sexo e pertencerem à mesma sala de aula pois isso facilitava tanto a saída da classe para nossos encontros como indicava que os mesmos já tinham algum grau de familiarização entre si. Estas crianças foram organizadas pelo pesquisador em oito duplas de meninas e quatro duplas de meninos. Nenhuma das crianças se opôs a trabalhar com o parceiro determinado ou fez algum comentário negativo sobre o desempenho do colega. Apenas uma das crianças, um menino, cobrou ao seu par maior freqüência às aulas para que não "perdessem" os encontros. No que diz respeito à distribuição em função do desempenho escolar, tivemos a seguinte partição:

- Quatro duplas constituídas por crianças que apresentaram bom desempenho na sondagem (uma dupla de menino e três de meninas)
- Quatro duplas constituídas por uma criança que apresentou bom desempenho e outra que apresentou desempenho fraco na sondagem (duas de meninos e duas de meninas)
- Quatro duplas constituídas por crianças que apresentaram desempenho fraco na sondagem (uma de menino e três de meninas)

As atividades de sondagem incluíram questões para avaliar conhecimentos relacionados à compreensão de coordenadas, bem como questões sobre interpretação e construção de gráficos (valor máximo, leitura de freqüência, problema de combinação de quantidades e representação de dados no gráfico) de modo a se conhecer o desempenho das crianças na área específica do estudo. O exame de sondagem pode ser visto no Anexo 1. Além dessas atividades, o pesquisador procurou saber de cada criança se conhecia a representação em gráfico de barras e onde já tinha visto. A informação passada pelas crianças, em sua maioria, indicava que já haviam visto aquele tipo de representação de dados principalmente em jornais ou na televisão, mas que nunca haviam trabalhado com gráficos na escola.

Foram selecionadas, a partir dos resultados obtidos na sondagem, 12 crianças com bom desempenho e 12 com desempenho fraco. O desempenho das crianças foi caracterizado como bom ou fraco basicamente em relação a uma questão sobre localização de coordenadas espaciais e duas questões relativas à resolução de problemas a partir de um gráfico de barras. Uma dessas questões referiu-se à composição de quantidades e a outra à representação de dados no gráfico. Assim, crianças consideradas de desempenho fraco fracassaram nessas atividades, enquanto que as que obtiveram sucesso foram consideradas com desempenho bom. As outras questões utilizadas na sondagem não permitiram diferenciar as crianças por serem, em geral, facilmente resolvidas por todas as crianças selecionadas (questão dois e quatro) ou trazerem dificuldades também gerais (questão um). Algumas crianças também foram excluídas em função de não conseguirem realizar eficientemente a contagem de números até 10 ou mesmo, distinguir as cores corretamente. No anexo 2, encontra-se um quadro com o desempenho das crianças nas atividades que foram consideradas para fins de seleção e organização das duplas.

2.3 Material

Filmadora de vídeo (VHS), gravador de áudio, 48 blocos de encaixe de mesmo tamanho e nas cores vermelha, amarela, azul e verde, um bloco de tamanho duplo na cor amarela, papel, lápis, papel quadriculado, tesoura, cola, caixinha. Os blocos de encaixe utilizados podem ser visualizados abaixo.

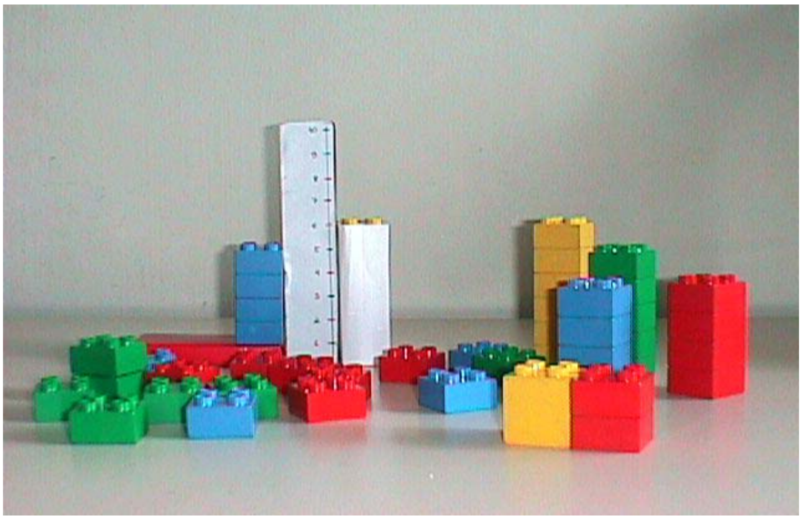

Figura 2: Alguns materiais utilizados no estudo.

2.4 Procedimento

O pesquisador foi apresentado às crianças pelas professoras. O pesquisador explicou que era professora da universidade e que ia fazer algumas atividades de matemática com eles, fora da sala de aula. Explicou ainda que algumas crianças fariam um maior número de atividades, sendo necessário vários encontros. Com o objetivo de favorecer a familiarização com o grupo de crianças e professores da escola, o pesquisador, após ser apresentado às crianças pelos professores, esteve presente em algumas atividades organizadas pelos professores com as turmas envolvidas no estudo, tal como a apresentação de um filme sobre contos de fadas, na biblioteca.

Após a sondagem que foi individual, no primeiro encontro com cada dupla, o pesquisador explicou que eles iriam se encontrar algumas vezes para fazerem um trabalho que visava ajudar na compreensão de gráficos e que em cada encontro iriam ser propostas algumas atividades para serem trabalhadas pela dupla. O pesquisador procurou incentivar o trabalho em grupo ressaltando a importância do trabalho conjunto, solicitando que sempre dissessem em voz alta o que estivessem fazendo e procurassem explicar ao seu colega as idéias que surgissem. Também informou que todos os encontros seriam filmados e gravados para que depois ele pudesse saber exatamente o que cada dupla fez. No próximo tópico encontra-se uma apresentação detalhada da seqüência didática que foi utilizada na presente pesquisa.

Todas as duplas participaram da mesma seqüência didática e tiveram em todos os encontros a presença de um mesmo pesquisador. Este pesquisador atuou não apenas na proposição das atividades, mas também interagindo com as crianças, levantando questões, estabelecendo relações, incentivando a participação e interação dos componentes da dupla, ou seja, ele não atuou apenas como mero observador do desempenho das crianças, mas participou da situação didática. Em cada encontro, o pesquisador também estimulou a explicitação por parte das duplas sobre as conclusões e/ou estratégias desenvolvidas nas atividades daquele encontro.

No início dos encontros, o pesquisador mostrava o material referente ao encontro anterior para as crianças e conversavam sobre o que havia sido feito, a que conclusões haviam chegado, sendo, então, propostas novas atividades para a dupla.

Ao final do estudo, os resultados da presente pesquisa foram discutidos com os professores, coordenadores e direção da escola de modo a contribuir para o trabalho de matemática realizado pela instituição.

2.5 Atividades

A seqüência didática que foi desenvolvida incluiu atividades com o apoio de blocos de encaixe e atividades com gráficos.

Inicialmente, na primeira atividade as crianças foram familiarizadas com o material manipulativo que seria utilizado (os blocos de encaixe) e com sua arrumação em colunas. A partir daí, foi então desenvolvido um trabalho de resolução de problemas e reflexão sobre alguns conceitos pertinentes ao trabalho com gráficos. Em seguida, foi proposta uma transposição das atividades com os blocos de encaixe arrumados em colunas para o papel, finalizando a seqüência didática com atividades de construção e interpretação de gráficos de barras.

Na próxima página, encontra-se no quadro 1, um esquema geral das atividades que foram desenvolvidas com as crianças e, em seguida, apresentamos mais detalhadamente cada atividade, especificando seus objetivos.

Quadro 1: Esquema geral das atividades

Atividade	Objetivo principal
1	Familiarização com o material
2	Resolver problemas de combinação e igualização com “barras de blocos”
3 e 3.1	Resolver problemas de comparação com “barras de blocos”
4	Refletir sobre o conceito de unidade de medida e suas representações
5	Refletir sobre medidas proporcionais
6	Introduzir o uso da escala e refletir sobre a importância de uma referência comum às barras (linha de base)
7	Transposição de barras de blocos para o papel
8 e 8.1	Construir gráficos de barras e resolver problemas aditivos
9 e 9.1	Interpretar gráficos de barras representando acréscimo e decréscimo da quantidade representada em dados em função do tempo e gráfico nominal

Como já foi dito, as atividades foram apresentadas para todas as duplas sempre na mesma ordem, havendo uma certa flexibilidade na duração média de cada encontro bem como nas atividades previstas para o mesmo, de modo a não cansar demasiadamente as crianças. De modo geral, o planejamento foi o seguinte:

Quadro 2: Planejamento das Atividades

Encontros	**Atividades**
1º	1, 2 e 3
2º	3.1, 4 e 5
3º	6 e 7
4º	8
5º	8.1
6º	9
7º	9.1

A seguir apresentamos uma descrição minuciosa de cada uma das atividades que foram propostas às duplas e seus objetivos.

Atividade 1

Objetivo geral: familiarização com o trabalho com os blocos de encaixe.

1.1 Vamos fazer de conta que estas peças[1] são bombons. Temos então, bombons vermelhos, amarelos, verdes e azuis. Ok? Pega para mim oito bombons vermelhos.

1.2 Se eu empilhar estes bombons formando uma barra vertical, continua a mesma quantidade?

1.3 [Com os bombons empilhados] Eita! Eu queria dez e não oito.

1.4 Não é dez que eu quero mais não, é sete.

Atividade 2

Objetivo geral: Trabalhar problemas de combinação e igualização a partir dos blocos de encaixe em barras: montagem pelas crianças de barras representativas das quantidades indicadas pelas situações-problema.

Inicialmente, o pesquisador leu para a dupla de crianças uma história sobre uma cobra que estava com a barriga cheia deixando todos os outros bichos da floresta em polvorosa, com medo de que algum de seus filhotes tivesse sido devorado. O comportamento de cada bicho era, então, contar seus filhotes para ter certeza que nenhum havia sido devorado pela cobra[2].

Pesquisador: "Pronto, agora eu vou ler uma história para vocês e vai aparecer nesta história uma questão para saber que bicho foi comido por uma cobra. Queria que prestassem atenção para vocês me dizerem o palpite de vocês. Certo?"

P: "Na opinião de vocês, que bicho a cobra comeu?"

C:...

P: "Aqui estão as opiniões de outras crianças da sala."

---

[1] O pesquisador usou nesse estudo, sem qualquer distinção, o termo peça e bloco para se referir aos blocos de encaixe.

[2] História originalmente proposta por Ângelo Machado com ilustrações de Roger Mello, da Editora Melhoramentos, 1996.

A partir de dados apresentados pelo pesquisador como sendo referente às respostas de outras crianças (fictícias), foram apresentadas as situações-problema descritas abaixo. Para resolução das mesmas, as crianças foram solicitadas a usar as barras de blocos para representar as quantidades envolvidas.

2.1 Tivemos cinco votos para o sapo e três para o pinto. Vamos usar os blocos para representar os votos. Comparando os votos dados para o sapo e para o pinto, qual bicho foi mais escolhido? Quantas crianças precisavam votar no pinto para que o pinto e o sapo tivessem a mesma quantidade de votos? (igualização relação desconhecida)

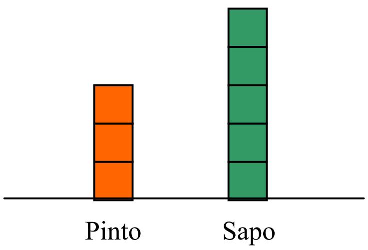

Figura 3: Quantidade de votos do pinto e do sapo representadas pelas crianças

2.2 Quantos votos esses dois bichos tiveram ao todo? (combinação todo desconhecido)

2.3 Eita! Esqueci de anotar a quantidade de votos que deram ao besouro. Sei que tinha 12 crianças na sala e que cada uma deu só um voto. O sapo teve cinco votos e o pinto três. Quantos votos o besouro recebeu? (combinação parte desconhecida)

Atividade 3

Objetivo geral: Resolução de problemas de comparação a partir dos blocos. As barras de blocos foram propostas como suporte representacional das quantidades envolvidas nas situações-problema apresentadas abaixo.

P: Vamos agora analisar o calendário de faltas numa sala de aula [fictícia]. Estou precisando fazer isto para saber quem está faltando mais em cada mês.

3.1 Maria teve quatro faltas. Joana teve seis faltas. Quem faltou mais? Quantas faltas Joana teve a mais do que Maria? (comparação relação desconhecida)

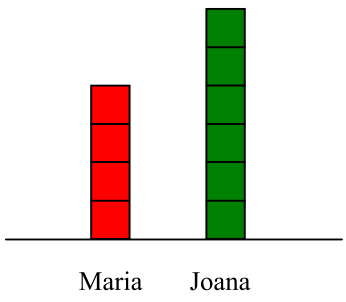

Figura 4: Quantidade de faltas de Maria e Joana

Diante das dificuldades apresentadas por todas as duplas na resolução do problema acima foi apresentada a seguinte situação de intervenção baseada em Nunes e Bryant (1997):

3.2 Agora vamos ver um caso dos meninos. Marcos e Paulo faltaram cinco dias. Vocês vão montar as barras com a quantidade de faltas de Marcos e de Paulo. Após a montagem: Eles faltaram a mesma quantidade de dias? ... Só que Paulo ficou doente e faltou mais dois dias [acrescentou dois blocos]. Quantas faltas Paulo teve a mais do que Marcos?

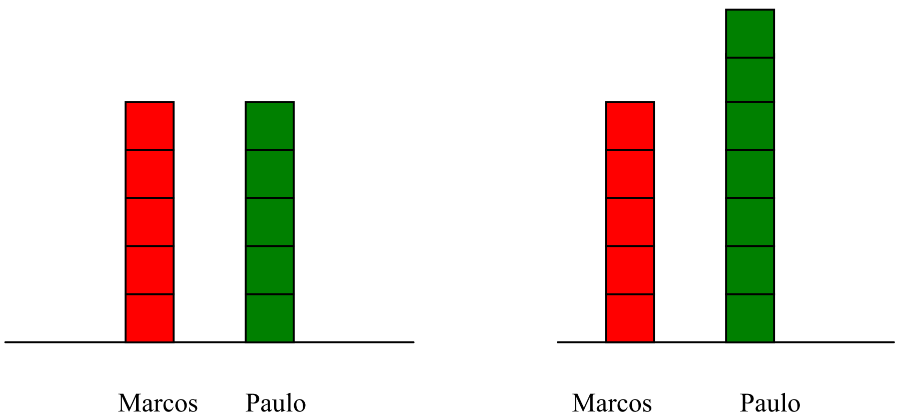

Figura 5: Igualdade na quantidade de faltas de Marcos e Paulo (1º momento) e diferença na quantidade de faltas de Marcos e Paulo (2º momento).

Após o problema auxiliar acima, retornou-se ao problema inicial. No caso das duplas que ainda apresentaram dificuldades em algum dos problemas, a intervenção foi relembrada; nos casos em que a dificuldade ainda persistiu, uma nova intervenção foi realizada enfatizando-se a correspondência um-a-um entre as quantidades na formação das quantidades iniciais (cada criança da dupla ia colocando um bloco para formação de cada uma das colunas). No caso de algumas duplas que ainda na intervenção inicial mostraram não terem compreendido esse tipo de problema, o pesquisador introduziu de imediato essa situação de correspondência um-a-um, antes de voltar ao problema inicial. Por fim, quando após as intervenções acima descritas, a dupla ainda permaneceu com dificuldades, o pesquisador apresentou a resposta correta, explicando o problema.

3.3 Problema inicial das faltas de Joana e Maria.

3.4 Patrícia tem quatro faltas. Patrícia tem duas faltas a mais que Luiza. Quantas faltas Luiza tem? (comparação - uma das partes desconhecida)

3.5 Joana teve seis faltas. Luiza teve duas faltas. Quantas faltas Joana teve a mais do que Luiza? (comparação - relação desconhecida)

Novos problemas foram introduzidos pelo pesquisador quando a dupla não mostrou segurança em suas respostas. Os problemas novos tratavam das faltas de dois outros alunos:

- Augusto faltou três dias e Pedro dois. Quantos dias Augusto faltou a mais do que Pedro?
- Maria teve quatro faltas e João uma. Quantos dias Maria faltou a mais do que João?

Atividade 3.1 (continuação do encontro anterior)

P: Vamos ver algumas outras questões sobre o calendário de faltas, certo?

3.1.1 No outro mês, Maria teve três faltas. Joana teve seis faltas. Quem faltou mais? Quantas faltas Joana teve a mais do que Maria? (comparação relação desconhecida)

3.1.2 Depois, em outro mês, Joana teve cinco faltas. Luiza teve duas faltas. Quantas faltas Joana teve a mais do que Luiza? (comparação relação desconhecida)

3.1.3 Nesse outro mês foi o seguinte, Patrícia teve seis faltas. Patrícia teve duas faltas a mais que Luiza. Quantas faltas Luiza teve? (comparação com uma das quantidades desconhecida)

Atividade 4

Objetivo geral: Refletir sobre unidade de medida e suas representações. Explorar com a dupla as dificuldades decorrentes de se trabalhar, no contexto de uma mesma atividade, com representações diferentes.

4.1 Eita, sabe o que aconteceu quando outra dupla de crianças fez a representação das faltas de um dos meses com os blocos? Elas montaram desse jeito aqui [pesquisador monta as colunas de acordo com a ilustração abaixo]. Maria tinha quatro faltas, Joana seis, Patrícia quatro e Luíza duas [na barra referente às faltas de Patrícia, uma das peças encaixadas foi de tamanho diferente, equivalendo a duas peças comuns].

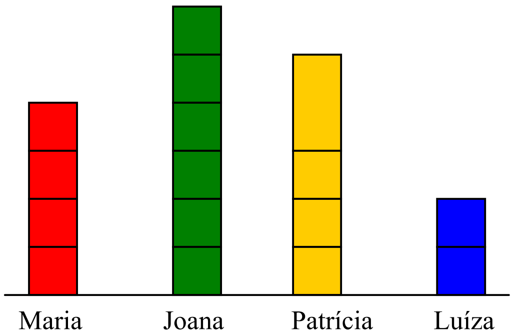

Figura 6: Barras apresentadas às duplas na atividade 4.

O que vocês acham dessa representação feita pelas crianças [apresentando as barras de blocos construídas para a dupla de crianças]? Quantas faltas cada criança teve mesmo?

Para estimular a reflexão sobre as implicações do bloco duplo o seguinte problema foi apresentado nessa mesma atividade:

4.2 Quantas faltas Patrícia precisa ter para ficar com o mesmo número de faltas de Joana? (igualização relação desconhecida).

Atividade 5

Objetivo geral: Trabalhar medidas proporcionais

P: Hoje vamos tentar fazer com os blocos uma representação dos materiais contidos no armário da sala.

5.1 Agora Marcos e João estão organizando os lápis: João tem quatro lápis verdes na mão e Marcos tem dois azuis. Eu queria representar a quantidade de lápis de Marcos e João, mas está faltando peças. Só tenho aqui duas peças verdes e uma azul. De que forma vocês poderiam representar as quantidades de lápis de João e Marcos, usando somente esses blocos?

5.2 Agora vamos fazer um tipo de jogo, certo?. Em cada bloco tem um papelzinho escondido dizendo quanto aquela peça vale. Assim, por exemplo se tiver nesta peça um papelzinho com o número dois, quer dizer que ela vale dois, se tiver três, ela vale três... Certo? O problema então é o seguinte: Quantos lápis vermelhos tem aqui [dois blocos] e quantos lápis amarelos tem aqui nessa outra barra [três blocos] [em cada bloco, está escrito no papelzinho "2"]?.

a) Quantos lápis de cor vermelhos tem? E amarelos?
b) Quantos lápis vermelhos precisam ganhar para ficar com o mesmo número de lápis amarelos?

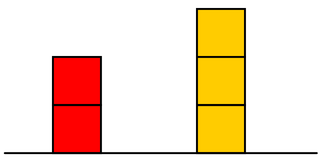

Figura 7: Barras de blocos que representam proporcionalmente lápis vermelhos e amarelos.

Atividade 6

Objetivo geral: Trabalhar noções relativas à escala e linha de base

6.1 Veja agora o que eu vou fazer. Uma criança de outra escola me disse que se eu apresentasse o problema desse jeito [blocos envolvidos em papel sem permitir a visualização ou o tato dos limites entre as peças e uma escala com freqüência em unidades. Um exemplo da barra de blocos coberta com papel pode ser visto na figura 2], ela também conseguia resolver pois cada medida aqui dessa escala [mostra a escala] correspondia a um bloco [mostra um bloco em correspondência à primeira medida da escala]. Você pode me dizer quantos blocos tem nesta barra? [pesquisador apresentou uma barra com sete blocos cobertos e solicitou que a dupla dissesse quantos blocos tinham. Após a resposta, o pesquisador retirou o papel que envolvia a barra e mostrou a correspondência entre a barra e a escala, permitindo que as duplas contassem os blocos constituintes da barra comparando com a escala].

6.2 Agora vamos fazer este problema [ainda organização do material da sala]: aqui são os jogos e aqui os livros [duas barras, uma com três blocos e outra com seis blocos, com os limites das peças cobertos e uma escala faltando preencher alguns valores]. Eita, está faltando alguns números aqui na escala, vamos preencher primeiro? Quantos livros e jogos temos para arrumar? (problema de combinação todo desconhecido).

6.3 Quantos livros tem a mais do que jogos? (problema de comparação relação desconhecida).

6.4 Se a gente estivesse trabalhando com a barra de bloco coberta e, por descuido, a barra fosse colocada em cima de uma caixa [a altura da caixa foi a mesma de um bloco], teria algum problema para a gente saber quantos blocos tem nessa barra?

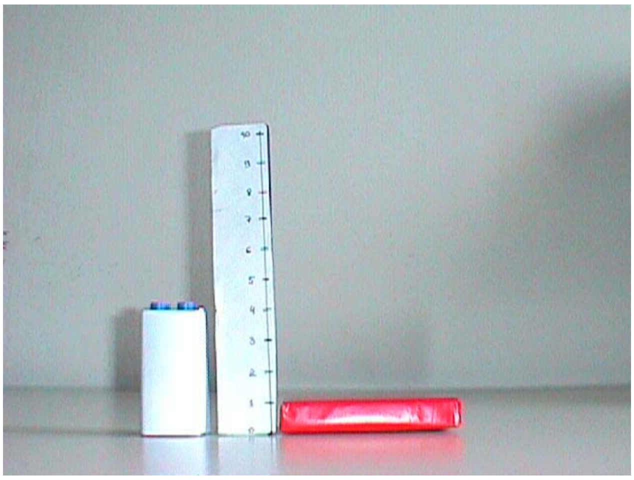

Figura 8: Material usado na atividade 6.4 (barra coberta, escala e caixa).

Atividade 7

Objetivo geral: introduzir o uso do gráfico no papel

7.1 Se a gente tivesse que mandar esta informação sobre os livros e jogos da sala [barras usadas na atividade anterior] para a secretaria da escola ou para outra professora, como poderíamos fazer? [Esperar sugestões] Uma idéia seria cortar o papel que recobre as barras e colar em uma folha de papel. Vocês podem fazer isto? [Entrevistador corta o papel das barras de blocos e questiona se aquela barra de papel continua a representar a mesma quantidade que havia na barra de blocos].

7.2 Para que serve a escala?

Atividade 8

Objetivo geral: Representar quantidades em um gráfico em que os eixos foram fornecidos previamente pelo pesquisador e resolver problemas aditivos a partir de gráficos de barras.

8.1. Vamos imaginar que a gente está sem os blocos. Deram para a gente papel e lápis e este papel quadriculado com a escala e o eixo horizontal desenhados [mostrando cada um deles]. É possível construir um gráfico no papel feito vocês faziam com os blocos em barras? Como podemos fazer um gráfico dos materiais da sala? Veja: Na prateleira há oito tesouras e cinco colas [a quantidade é fictícia mas referente a materiais encontrados nas salas dos alunos].

8.2 Vamos colocar neste mesmo gráfico a quantidade de livros [seis] e de jogos [três] que tem na sala?

8.3 Se eu tivesse este outro gráfico aqui e vocês soubessem que ele representa a quantidade de material da sala do lado[3].

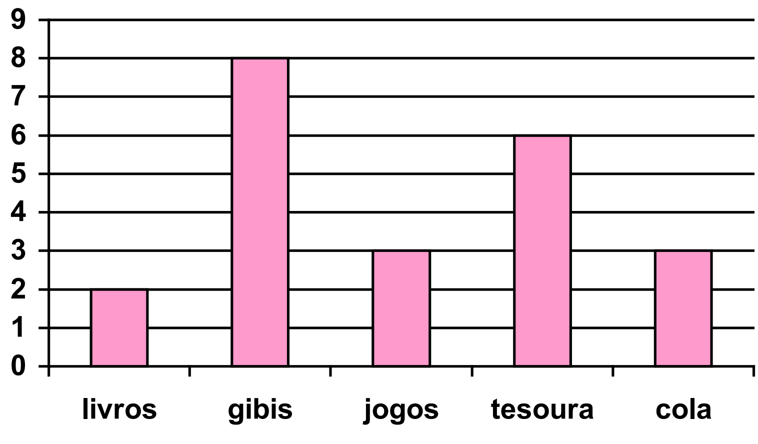

Figura 9: Gráfico do material escolar de uma sala

[3] Ainda que gráficos de barras representem freqüências, usamos neste estudo o termo "quantidades" pois não tinha sentido falar com as crianças em freqüência de material escolar e sim, quantidade de material escolar.

a) Quantas gibis tem nessa sala?

b) Quantos livros?

8.4 Quanto material de leitura tem ao todo [gibis e livros]?

8.5 Quantas colas precisa-se conseguir para na sala ter o mesmo número de colas e de tesouras?

8.6 O que vocês acham que os meninos da outra sala lêem mais, gibis ou livros?

8.7 Comparando estes dados desse gráfico com o que vocês construíram:

a) Que materiais há na outra sala que não há na sala de vocês?
b) Há algum material na sala de vocês que as crianças da outra sala não tem?
c) Quantos livros tem a mais nessa sala do que nessa outra?
d) E tesouras, quantas nessa sala tem a mais do que nessa?

Atividade 8.1 (continuação do encontro anterior)

8.1.1 Agora quem vai fazer o gráfico são vocês [papel quadriculado com eixos fornecidos]. Construam um gráfico para representar a quantidade de picolés comprados por João durante a semana. Ele comprou cinco picolés de morango, dois de côco e dois de maracujá.

8.1.2 Como podemos fazer para saber que aqui são os de morango, aqui os de côco e aqui os de maracujá?

8.1.3 Que informações vocês podem ter a partir do gráfico que vocês desenharam:

a) Qual tipo de picolé que João comprou mais? Por que vocês acham que ele comprou mais desse tipo?

b) Quantos picolés ele comprou ao todo?

c) Esqueci de dizer que ele comprou também um picolé de limão [espera crianças representarem a quantidade]. Quantos picolés foram comprados ao todo?

d) Quantos picolés de morango tem a mais do que de côco?

8.1.4 Que título vocês dariam a esse gráfico?

Atividade 9

Objetivo geral: interpretação de gráficos

9.1 A partir do gráfico sobre o crescimento de uma plantinha [apresentado abaixo], digam o que vocês estão vendo sobre o crescimento dessa planta. Ela está crescendo ou não? O que vocês acham que aconteceu na 4ª semana [cresceu ou não]?

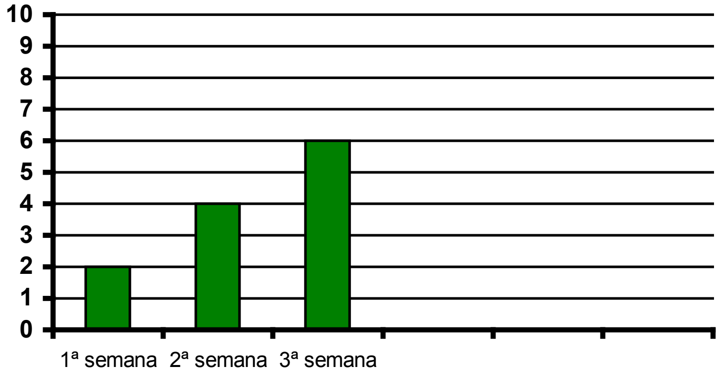

Figura 10: Gráfico do crescimento de uma plantinha

9.2 Qual foi o crescimento da planta da 1ª para a 2ª semana? E da 2ª para a 3ª semana? E na 4ª semana será que ela cresceu quanto [solicitar que as crianças desenhem a barra relativa à 4ª semana]? Por que?

9.3 [Após o pesquisador desenhar neste mesmo gráfico, na 5ª e 6ª semana, queda na altura da planta, correspondendo na 6ª semana a zero]. O que vocês acham que aconteceu nestas semanas?

9.4 Conta agora como foi o crescimento dessa plantinha desde a 1ª vez que foi medida.

9.5 Vejam este outro gráfico sobre o peso de um bebê por mês (figura 10). Ele está engordando? O que vocês acham que houve no 5º mês? O bebê engordou ou não?

9.6 Quanto o bebê engordou do 1º para o 2º mês? E da 2º para o 3º mês? E do 3º para o 4º mês? E no 5º mês, quanto será que ele estará pesando (solicita à criança que desenhe a barra)? Por que?

9.7 E no sexto mês, qual será que foi o peso dele?

9.8 Veja agora o que houve nos meses seguintes (o pesquisador desenha no gráfico, no 7º mês o mesmo peso do 6º mês e no 8º mês uma diminuição no peso). O que será que houve com o bebê?

9.9 Conta agora como está o desenvolvimento desse bebê desde o 1º mês.

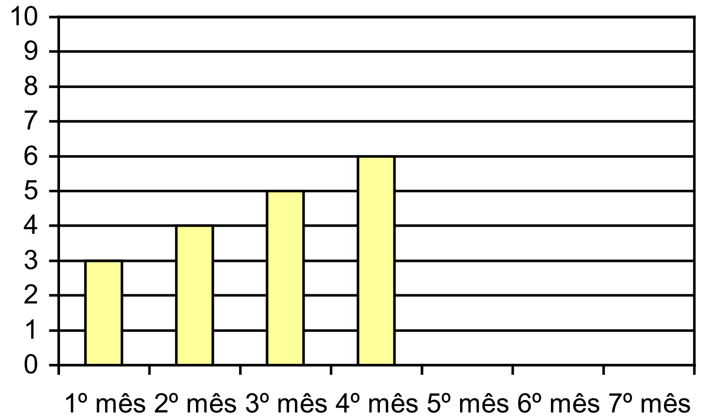

Figura 11: Gráfico do peso de um bebê

9.1 atividade (continuação da atividade anterior)

9.1.1 Veja este gráfico aqui, sobre a quantidade de alguns animais de um sítio.

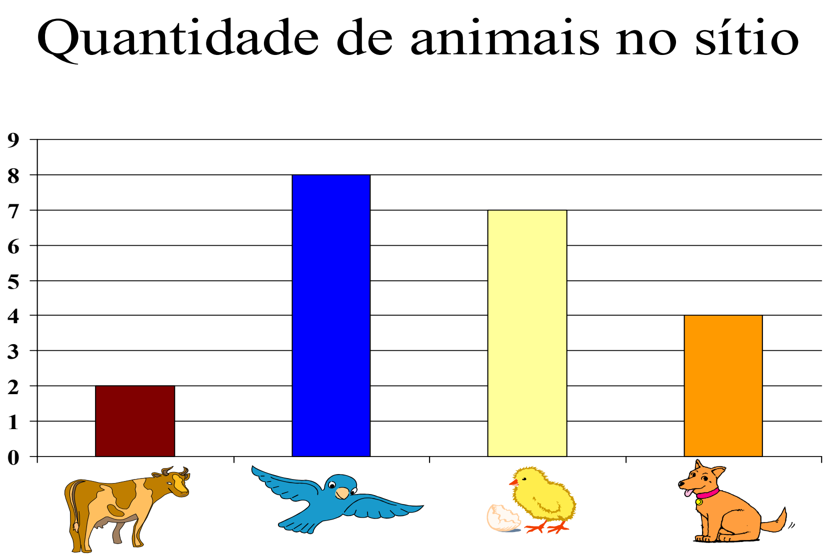

Figura 12: Gráfico dos animais de um sítio

- Que informações vocês podem ter a partir desse gráfico?
- Que animal tem em maior quantidade no gráfico?
- Que animal tem em menor quantidade no gráfico?
- Quantos animais estão representados no gráfico ao todo?
- Quanto pintos tem a mais do que cachorros?

9.1.2 Vejam agora este outro gráfico [Apresentar um gráfico que mostra a quantidade de picolés vendidos durante uma semana por um vendedor].

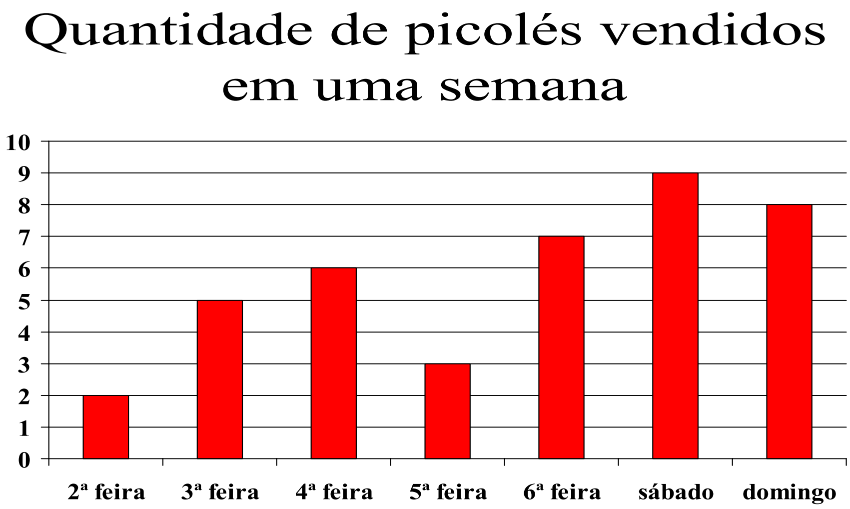

Figura 13: Gráfico de picolés vendidos

- Que informações vocês podem ter a partir desse gráfico?
- Em que dia ele vendeu uma maior quantidade de picolés? Por que?
- Em que dia vendeu menos? Por que?
- Contem como foi a venda de picolés durante esta semana toda.
- Quantos na terça ele vendeu a mais do que na segunda-feira? E da terça para a quarta o que aconteceu? [solicitar que a dupla indique aumento ou diminuição na quantidade de picolés vendidos de um dia para o outro e quantifique a diferença).

No próximo tópico discutiremos mais detalhadamente alguns aspectos relativos às atividades desenvolvidas: dificuldades observadas no desempenho das crianças e também no próprio planejamento da atividade, o que se esperava investigar em cada uma das atividades. Em algumas atividades também apresentamos aspectos observados no desenvolvimento da própria atividade.

2. 6 Análise das atividades

Nessa parte iremos fazer alguns comentários sobre o que esperávamos investigar em cada atividade desenvolvida com as duplas de crianças, o que pudemos observar durante as entrevistas, dificuldades observadas. Será uma análise breve mas que permite ao leitor uma compreensão melhor dos nossos objetivos e dos nossos resultados, que serão apresentados em seguida.

Atividade 1

Objetivo geral: familiarização com o trabalho com o bloco de encaixe

Nesta atividade inicial do primeiro encontro com cada dupla, nosso objetivo principal foi familiarizá-los com o material que íamos trabalhar (blocos de encaixe) e sua organização em colunas e também, proporcionar uma atividade já com adição e subtração para ser resolvida pela dupla, permitindo que abordássemos aspectos importantes para o trabalho que seria realizado: importância da explicação sobre as ações realizadas, discussão de idéias com o colega, ouvir o raciocínio do colega, trabalhar em conjunto.

A questão sobre conservação foi importante para que tivéssemos certeza de que a arrumação em colunas não estava trazendo conseqüências para a compreensão das quantidades.

A análise dessa atividade não mostrou dificuldades por parte de nenhuma das duplas no uso dos blocos em colunas, na questão sobre conservação de quantidades, adição e subtração. Os aspectos abordados sobre o trabalho em dupla mencionados acima pareceram ser importantes para o desenvolvimento das outras atividades, ainda que tivessem que ser durante outros encontros retomados com duas duplas (uma do sexo masculino e outra do sexo feminino), quando observou-se nas mesmas uma competição exagerada entre os integrantes (os dois discutiam para falar primeiro e ficavam sem querer escutar as explicações do parceiro em determinados momentos).

Atividade 2 e 3

Objetivo geral: Trabalhar problemas de combinação, igualização e comparação a partir das barras de blocos.

O objetivo das atividades 2 e 3 foi trabalhar com as duplas problemas de estrutura aditiva usando como suporte de representação blocos de encaixe. Os problemas trabalhados foram do tipo combinação, comparação e igualização. A partir dos dados obtidos na literatura, esperávamos que as crianças resolvessem com facilidade problemas de combinação e de igualização mas que apresentassem dificuldades nos problemas de comparação. Nesse tipo de problema uma intervenção seria realizada pelo pesquisador com objetivo de facilitar a compreensão do mesmo. Se ao final das intervenções previstas na atividade, a dupla de crianças ainda apresentasse dificuldades, o pesquisador daria a resposta correta, prosseguindo a seqüência didática.

Conforme previsto, não se observaram dificuldades em problemas de combinação e de igualização. Nos problemas de comparação todas as duplas apresentaram dificuldades iniciais, sendo constatada a persistência de dificuldades após a intervenção em duas duplas FF, quando então a resposta correta do problema foi dada pelo pesquisador. O protocolo de uma dessas duplas será descrito na análise dos resultados, mais adiante.

A intervenção teve uma importância especial no contexto do trabalho proposto na medida em que as crianças pequenas têm apresentado maiores dificuldades na resolução de problemas de comparação e que consideramos que o gráfico de barras pode ser uma representação que favoreça a compreensão desse tipo de problema por já apresentar a correspondência visual entre as barras.

Em relação aos problemas de comparação apresentados observamos uma falha no problema envolvendo o par numérico 4 e 2 e o par 6 e 3. Em ambos os problemas, o valor da diferença que é a resposta correta consiste também no valor da barra menor. Na análise das respostas dadas a esses problemas, a justificativa das crianças e a filmagem da atividade (os blocos que pegavam e/ou apontavam, por exemplo) foram fundamentais na avaliação do que havia sido a resposta e estratégia utilizadas.

Outro aspecto que devemos mencionar foi o uso exclusivo da expressão “a mais” para formular a pergunta comparativa entre as quantidades nos problemas de comparação. A intenção de usar esta expressão foi evitar que “vícios” relativos ao uso de pistas de linguagem influenciassem a resolução dos problemas. Nesse sentido, como os problemas de comparação com a relação desconhecida poderiam ser solucionados encontrando-se a diferença entre as quantidades, o uso da expressão “a menos” poderia sugerir o uso da operação de subtração, sem realmente as crianças estarem compreendendo as relações envolvidas nos problemas. Por outro lado, reconhecemos que tendo como objetivo desenvolver um raciocínio mais flexível, o uso exclusivo da expressão “a mais” nos problemas de comparação não nos conduz a atingir esse objetivo proposto. Assim, em nosso segundo estudo procuramos corrigir esse problema e usamos ambos tipos de expressões (“a mais” e “a menos”) para focalizar a relação entre as quantidades envolvidas nos problemas de comparação.

O uso de mesmos nomes para os personagens de alguns problemas diferentes não provocou confusões entre as duplas pois era enfatizado que se referia às faltas em meses diferentes.

Atividade 4

Objetivo geral: Refletir sobre unidade de medida e suas representações. Explorar com a dupla as dificuldades decorrentes de se trabalhar, no contexto de uma mesma atividade ou gráfico, com representações diferentes.

O objetivo nessa atividade foi possibilitar à dupla uma reflexão sobre a importância do uso de mesma unidade de representação para estabelecer comparações entre dois ou mais dados. Assim, inicialmente foi solicitado que confirmassem os valores das barras e depois foi inserido um problema de igualização para estimular a reflexão de duplas que não percebessem imediatamente os problemas decorrentes do uso de unidades de representação diferentes naquela atividade.

Os resultados indicaram que ainda que as duplas percebessem a diferença entre os blocos simples e o duplo, grande parte não percebeu imediatamente as conseqüências em utilizá-lo, sendo fundamental a reflexão gerada a partir do problema de igualização.

Atividade 5

Objetivo: Trabalhar medidas proporcionais

Um dos focos de análise nessa atividade consistiu em observar se as crianças conseguiam trabalhar com medidas proporcionais espontaneamente. Em caso contrário, foi criado um “jogo”, que visava estimular o uso da correspondência um para muitos. Este tipo de conhecimento é importante para a compreensão de escalas.

Todas duplas apresentaram dificuldades em lidar com medidas proporcionais, sendo auxiliadas pela introdução do “jogo” a partir da qual o valor proporcional de cada bloco foi obtido. Ainda que conseguissem identificar o valor proporcional das quantidades, comparar tais valores ainda se mostrou uma tarefa difícil para grande parte das duplas.

Após o “jogo”, solucionado pelas duplas com êxito, não retornamos ao problema inicial que também poderia ser resolvido usando-se medidas proporcionais. Desta forma, não podemos avaliar se após terem refletido sobre esse aspecto numa atividade com esse fim, a dupla poderia usar espontaneamente a representação proporcional em outro problema.

Atividade 6

Objetivo: Trabalhar noções relativas à escala e linha de base

Com o objetivo de introduzir a escala mostrando sua funcionalidade, barras de blocos foram recobertas com papel de modo a não permitirem a visualização e o tato dos limites entre as unidades. Assim, para saber o valor das barras, as crianças precisavam usar a escala. Foi usada uma escala com freqüência em unidades, como uma reta numérica. Os problemas solicitados (combinação e comparação) a partir dos blocos cobertos apresentaram um novo obstáculo para as duplas que não podiam mais fazer a contagem das unidades constituintes das barras, sendo necessário o uso da escala.

No que se refere à questão da linha de base, essa atividade também teve como objetivo refletir sobre a importância das colunas e da escala se erguerem sobre uma base comum para possibilitarem comparações adequadas de suas freqüências. Com esse objetivo foi introduzida uma caixinha equivalente a altura de um bloco. Variações no posicionamento da barra e da escala (em cima da mesa ou em cima da caixinha) foram propostas pelo pesquisador ou realizadas pelas crianças possibilitando a verificação de diferentes resultados que auxiliaram as crianças a concluírem sobre a necessidade de uso de uma linha de base comum para as barras e escala na avaliação e comparação de freqüências. Não se observaram dificuldades na realização dessa atividade. O pesquisador estimulou que as duplas explicitassem uma conclusão após as diversas verificações realizadas. Essa “conclusão final” das duplas foi lembrada pelo pesquisador e pelas próprias crianças nas atividades seguintes, de colagem em folha de papel e de construção de gráficos.

Atividade 7

Objetivo geral: introduzir o uso do gráfico no papel

Nessa atividade esperávamos que as crianças coordenassem as bases das colunas e da escala e refletissem sobre a necessidade da escala como instrumento de medida, aspectos discutidos em atividades anteriores com blocos de encaixe.

Esta atividade pareceu ser mais difícil do que outras com gráficos realizadas nos encontros posteriores pois o papel usado foi branco, sem linhas que servissem de referência, e os eixos perpendiculares não estavam desenhados, tal como aconteceu nas atividades com gráficos nos outros encontros.

As duplas tiveram que coordenar as origens das barras e da escala na colagem. Quando a dupla não obtinha sucesso, o pesquisador realizava intervenções relembrando a atividade anterior [com a caixa] e dava novo recorte da barra para ser colado, sem que o recorte anterior fosse descolado. Com isso nas produções finais das duplas estão também representadas todas as tentativas realizadas durante o decorrer da atividade.

Atividade 8 e 8.1

Objetivo geral: Representar quantidades em um gráfico em que os eixos foram fornecidos previamente pelo pesquisador e resolver problemas aditivos a partir de gráficos de barras.

Nessas atividades esperávamos observar se os aspectos trabalhados nas outras atividades anteriores (consistência entre as unidades de representação do gráfico, linha de base comum das barras) ainda persistiriam enquanto dificuldades para as crianças no momento de representar quantidades em um gráfico. Também solicitou-se a resolução de problemas e, em caso de dificuldades, foram realizadas intervenções do pesquisador no sentido de relembrar os problemas resolvidos anteriormente com blocos ou mesmo, solicitar a resolução de um outro problema de estrutura semelhante, usando blocos. Depois, então, retomava-se o problema no gráfico.

Nos problemas que as duplas precisaram usar informações relativas a dois gráficos (atividade 8), foi necessário padronizar o tipo de legenda utilizado nos gráficos de modo a não se confundir sobre o que cada barra representava. Nessa atividade as crianças usaram desenhos ou letras semelhantes para representar as barras que representavam os mesmos materiais.

Atividade 9 e 9.1

Objetivo geral: interpretação de gráficos

O gráfico que envolveu dados em função do tempo permitiu novas questões de análise para as crianças, tal como questões relativas à extrapolação. Perguntas como "quanto a planta cresceu? Quanto aumentou o peso do bebê?" foram usadas como alternativas para relações de comparação de dados ao invés das questões trabalhadas anteriormente, do tipo, "quantos a mais?".

Também foi solicitado que a dupla fizesse uma leitura geral do que estavam vendo no gráfico, antes de serem feitas questões específicas pelo pesquisador. Ao final, foi solicitado que explicassem o que o gráfico estava mostrando, como se contassem uma história envolvendo os dados representados no gráfico.

Um gráfico nominal também foi utilizado nessa atividade final em que se explorou diversas questões relativas às estruturas aditivas.

Questões sobre o valor máximo e mínimo também foram apresentadas para as duplas em dois gráficos, o que mostrava os picolés vendidos durante uma semana e o que apresentava a quantidade de alguns animais do sítio. Todas as duplas responderam corretamente essas questões.

3. Resultados

Os dados obtidos foram analisados qualitativamente considerando-se dois eixos centrais do estudo: (1) a resolução de problemas com blocos e com gráficos e (2) exemplos de protocolos que mostram dificuldades apresentadas pelas duplas em lidar com aspectos relacionados ao sistema cartesiano, como: unidade de representação no gráfico, posicionamento da origem, consistência na representação de cada eixo e correspondência um para muitos. A opção pela análise qualitativa foi realizada em função da natureza dos dados obtidos e por ser mais adequada para responder aos objetivos determinados no início do estudo.

Três análises foram conduzidas. A primeira consistiu em uma análise geral que observou se as dificuldades relatadas na literatura estavam presentes também em nossos protocolos e se as atividades propostas auxiliaram as crianças na superação dessas dificuldades. Como exemplos são apresentados extratos de protocolos de várias duplas. Uma segunda análise enfocou as atividades de resolução de problemas com blocos e com gráficos de barras explorando as relações entre ambas representações. A terceira análise realizada consistiu numa avaliação de três duplas, uma com ambas crianças que apresentaram bom desempenho na sondagem (BB), uma formada com crianças que apresentaram desempenho fraco na sondagem (FF) e outra formada por uma criança que apresentou bom desempenho na sondagem e outra que apresentou desempenho fraco (BF), ao longo de todos os encontros considerando-se as dificuldades com o sistema cartesiano e também o trabalho desenvolvido na resolução de problemas com blocos e gráficos.

Nos próximos tópicos encontram-se apresentados os resultados obtidos em cada uma das análises mencionadas acima. No caso particular da análise que envolveu três duplas ao longo das atividades realizadas, consideramos importante a inclusão de breves comparações entre os desempenhos das duplas após cada aspecto considerado. Esperamos que esse tipo de organização auxilie o leitor na compreensão dos resultados obtidos nessa pesquisa.

3.1 Dificuldades das crianças com o sistema cartesiano

Nessa análise abordamos alguns aspectos já relatados no capítulo 2, que têm se constituído em fontes de dificuldades para as crianças ao trabalharem com o sistema cartesiano. São eles:

- Consistência de representação da unidade no gráfico – as unidades de representação em um gráfico devem consistentemente representar as unidades de medida.
- Linha de base comum para as colunas representativas de quantidades nos gráficos – no sentido de que barras e escalas devem ter uma origem comum.
- Correspondência um para muitos – em alguns gráficos uma unidade de medida pode representar uma ou mais coisas.
- Consistência na representação da medida de cada eixo

Dificuldades em relação a esses aspectos já foram relatadas em outros estudos, conforme descrevemos no capítulo dois desse trabalho. A seguir apresentamos extratos de protocolos de nossas entrevistas que focalizaram cada um dos aspectos citados acima.

3.1.1 Consistência de representação da unidade no gráfico

Para abordar a necessidade de consistência na representação da unidade no gráfico, nosso estudo propôs duas situações para as crianças, em que esperávamos que algumas questões relacionadas a esse conceito pudessem emergir. São elas: 1. Uma atividade com um bloco duplo, ou seja, um bloco que correspondia a dois blocos encaixados mas que não tinha nenhuma marca que realçasse a sua duplicidade, e; 2. Atividade de construção de gráficos.

Em relação a atividade com o bloco duplo (atividade 4, p.61) foram mostradas às crianças quatro colunas que correspondiam, cada coluna, à quantidade de faltas de um criança. A barra de Maria tinha quatro blocos, a de Joana seis, a de Patrícia quatro (três blocos simples e um blocos duplo) e a barra de Luiza tinha dois blocos. Em seguida, o pesquisador perguntou se a representação das faltas de cada aluna estava adequada. Abaixo, apresentamos alguns exemplos de protocolos.

R e L (BF)[4]

[Após o pesquisador dizer a quantidade de peças de cada barra]

R: Esse está errado [mostrando o bloco duplo].

P: Por que?

R: Se juntar com essa [a barra de seis blocos] *só tem um a mais. Se tirar esse grandão e colocar outro amarelinho aí fica com dois a mais.*

P: L, você concorda com o que R está dizendo?

R: L, tem que tirar esse grandão e colocar do mesminho desse.

L: Fica todas as peças iguais [referente às peças constituintes dos blocos].

A e G (BF)

G: [Junta as quatro colunas] *Esse não tá certo não* [mostra o bloco duplo].

A: Tira a peça grande.

---

[4] Convencionamos que a ordem em que colocamos as iniciais das crianças de cada dupla e o tipo de desempenho na sondagem das crianças (colocado entre parênteses) são correspondentes, ou seja, R e L (BF), significa que R é a criança com desempenho bom e L a com desempenho fraco no exame de sondagem.

G:Está faltando esse negócio aqui [aponta o meio do bloco duplo]. *Se tivesse ficava cinco* [a coluna de Patrícia].

P: Pode usar esse bloco?

Crs: Não, fica cinco.[Trocam por um bloco simples]

P: Quantas faltas Patrícia precisa ter a mais para ficar com o mesmo tanto de faltas de Joana?

Crs: Duas.

A: Ela tem 4, botando dois fica seis.

R e F (FF)

[Não demonstram estranheza em relação à peça ao relatarem a quantidade de faltas de cada criança].

R: Quatro, seis, quatro e duas faltas.

P: Quantas faltas Patrícia ainda deve ter para ficar com o mesmo número de faltas de Joana?

R: Uma. [acrescenta um bloco à coluna de Patrícia].

P: Com quantas faltas ela ficou?

R e F: Um, dois, três, quatro, cinco [coluna de Patrícia]. *Um, dois, três, quatro, cinco, seis.*

P: Como pode? Cinco e seis?

R e F: [Contam de novo as colunas].

R: Peraí, já sei [conta duas peças para a peça grande]. *Seis e seis.*

F: É porque essa [peça] *aqui tá maior. Tá errado. Tem que trocar a peça* [trocam o duplo por um bloco simples, voltando às quantidades iniciais das colunas, quatro e seis].

P: Então, quantas faltas Patrícia ainda deve ter para ficar com o mesmo número de faltas de Joana?

Crs: [Juntam colunas] *Mais duas.*

L e B (BB):

L:Eita, esse está muito grande.

P: Há algum problema em usá-lo?

Crs.: Não.

P: Quantas faltas cada criança teve?

Crianças: [Dizem as faltas de cada uma contando o valor absoluto dos blocos].

P: Quantas faltas Patrícia precisa ter para ficar com o mesmo número de faltas de Joana?

B: Uma [coloca um bloco na coluna de Patrícia].

P: Ficou com quantas faltas?

Crs.: [contam] *Cinco e seis.*

P: Cinco e seis?Está certo?

L: Não, esse daqui está muito grande [troca o bloco duplo por um simples].

B: Com essa ficava errado.

P: Por que?

B: Precisa de dois a mais para ficar o mesmo de Joana.

É interessante notar que até o momento dessa atividade as crianças não estavam preocupadas com a "medida" da peça, simplesmente contavam a quantidade de peças. Esta atividade permitiu que introduzíssemos um novo aspecto a ser considerado pelas crianças, a representação da unidade no gráfico.

A maioria das duplas (oito), tal como R e F, apesar de perceber a diferença do bloco duplo para os outros, inicialmente não considerava a necessidade de trocar a peça dupla ou de considerá-la de duplo valor. O problema de igualização, apresentado a todas as duplas funcionou como um ponto de partida para a reflexão das crianças sobre as conseqüências do uso de peças com medidas diferentes. Apenas quatro duplas, tal como A e G, trocaram o bloco duplo antes de serem questionadas sobre o problema de igualização. Apenas uma dupla não ressaltou a necessidade de trocar o bloco duplo por uma unidade simples desde que considerado como "dois". O protocolo dessa dupla poderá ser visto mais adiante na análise do desenvolvimento das duplas ao longo dos encontros.

A outra situação em que pudemos observar dificuldades com a representação da unidade usada no gráfico foi na construção de gráficos. Algumas crianças que optaram por construir gráficos icônicos apresentaram dificuldades em construir os ícones que formavam as barras coordenando a quantidade solicitada pelo problema e o ponto que deveria finalizar a representação na escala. Ou seja, ao representarem por exemplo, oito tesouras no gráfico, tais crianças tinham dificuldades em distribuir o espaço referente à barra (indicado pelo valor na escala) entre a quantidade de desenhos que queriam fazer (valor dado no problema). Vejamos alguns exemplos:

Gráfico sobre o material escolar (atividade 8, p. 64-5)

S e B (FF)

[0 pesquisador explica sobre o que vai ser representado no gráfico e vai dizendo o valor das quantidades que devem ser representadas].

P: Oito tesouras, três colas, três jogos e seis livros.

S:[desenha uma tesoura].

P: Como vão fazer para saber que são oito tesouras?

B: Vai desenhar até o oito [na escala].

[Quando desenha três tesouras atinge o número quatro na escala].

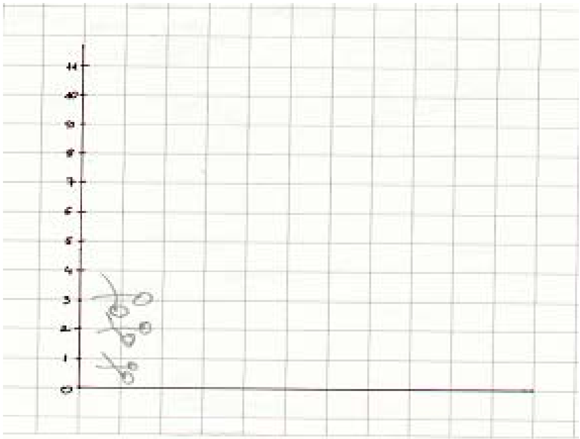

Figura 14: representação de quantidades em um gráfico pela dupla B e S

B: Quatro tesouras [apontando na escala o número quatro e o final da última tesoura desenhada].

S: Três tesouras.

P: Aí são três ou quatro tesouras?

S: Três.

B: Mas tem quatro [na escala]. *Peraí, pode dar outra folha?* [dirigindo-se ao pesquisador].

S: [Com outra folha] *Deixa eu fazer* [desenha três tesouras correspondendo ao três na escala].

P: Como sabe quanto é para fazer?

B: Aqui [mostra o número de desenhos de cada coluna] *e aqui* [mostra o valor na escala].

Gráfico dos picolés comprados (atividade 8.1, p. 65)

F e AC (FF)

[O pesquisador solicita que representem cinco picolés de morango no gráfico]

F: Até aqui [mostrando o número cinco na escala. Entretanto, com quatro desenhos atinge o número cinco na escala como mostra a figura 14].

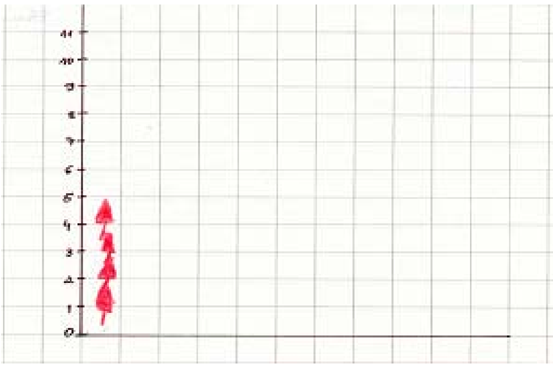

Figura 15: Representação dos picolés de morango – dupla F e AC (FF)

AC: Tem que ser um aqui, um aqui, um aqui, um aqui e um aqui [um em cada quadrado do papel quadriculado].

P: Por que? Não está em cinco na escala?

AC: Mas não está certo não.

F: Está não.

AC: Tem que ser um em cada quadrado. Está quatro. [Fiscaliza o desenho de F]. *Posso pegar outra folha*?[dirigindo-se ao pesquisador. Em outra folha desenha um picolé dentro de cada quadrado].

Os exemplos apresentados acima mostram a dificuldade das crianças em considerar apenas a medida da escala como indicativo da quantidade representada pela barra. Esse dado nos parece bastante interessante na medida em que o uso de gráficos icônicos em atividades com crianças pequenas baseia-se no fato que tais gráficos por serem mais concretos, poderiam ser mais fáceis. Entretanto, nossos dados sugerem que a representação icônica quando a escala já está desenhada pode gerar dificuldades para as crianças pequenas, especialmente em situações em que não haja uma correspondência explícita entre a quantidade de ícones e o valor indicado pela escala, como no caso dos exemplos apresentados acima.

3.1.2 Linha de base comum

Esse aspecto foi observado em nossos protocolos relativos à atividade 6 (p. 62-3). Nessa atividade o pesquisador introduzia uma caixinha (que media a mesma altura de um bloco) embaixo de uma barra coberta com papel (a criança não podia ver a separação entre os blocos), questionando sobre quantos blocos estavam representados. Vejamos dois extratos de protocolos:

J e D (BF)

J e D: [Coluna com blocos cobertos está em cima da caixa e a escala em cima da mesa]. *Um, dois, três, quatro e cinco* [contando pela escala].

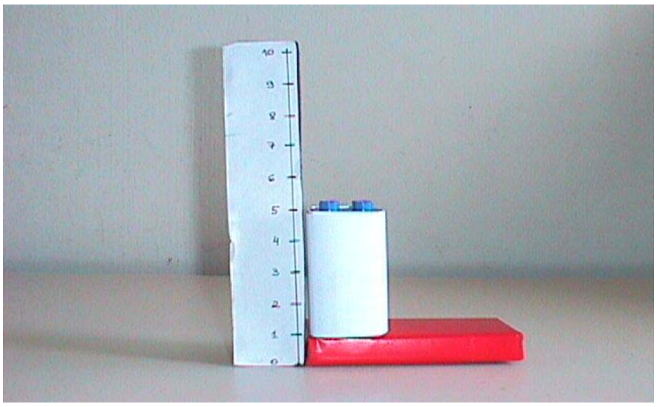

Figura 16: barra em cima da caixa e escala em cima da mesa.

P: [Coloca a escala em cima da caixa também].

Crs: Um, dois, três, quatro [olhando pela escala]. *Quatro.*

P: Tem quatro ou cinco peças?

D: Quando colocou aqui deu cinco [escala na mesa e blocos em cima da caixa]. *Aqui deu quatro* [escala e blocos em cima da caixa].

P: E então?

J: [Coloca a escala e a barra na mesa. A barra na frente da escala]. *Quatro é o certo.*

D:É quatro.

P: Por que está dando cinco?

D: Se você botar os dois em cima da caixa fica quatro.

P: Então, por que aqui dá cinco [só a barra em cima da caixa]?

Crs: [experimentam de todos os jeitos: barra e escala em cima da caixa, barra e escala embaixo da caixa, escala em cima da caixa e apenas barra em cima da caixa].

D: É só quando bota aqui em cima [da caixa].

P: O que acontece quando bota a barra em cima [da caixa]?

D: Dá cinco.

P: E assim [escala em cima da caixa e barra na mesa]?

J: Dá três. Fica errado. Em cima [da caixa] *o número fica errado. É quatro.*

P: Como sabem?

D:Tem que ser na mesma linha.

S e B (FF)

S: [Coluna com quatro blocos cobertos sobre a caixa e escala sobre a mesa]. *Não pode em cima da caixa.*

É interessante a afirmação espontânea de S sobre o posicionamento impróprio da barra em cima da caixa.

P: Por que não?

S: Porque [a barra] *está em cima da caixa. Se tirar fica quatro* [mostra colocando a barra e a escala em cima da mesa]. *Se colocar em cima da caixinha fica cinco* [coloca barra em cima da caixinha].

P: E se colocar ao contrário? A escala em cima da caixinha e a barra na mesa?

S e B: Fica errado também.

B: Tem que botar no chão igual.

Observamos que as duplas não apresentaram dificuldades nessa atividade e que após diversas experimentações em que modificaram o posicionamento da barra e da escala obtiveram uma conclusão sobre a necessidade de uma linha de referência comum para as barras e a escala. Como poderá ser visto nos exemplos seguintes, essa sistematização final das duplas, objetivo da atividade, foi retomada em diversos momentos pelos integrantes das duplas ou mesmo pelo pesquisador.

A atividade seguinte, realizada em um mesmo encontro com as duplas, também visou trabalhar a importância da linha de base para a construção de gráficos. Diferentemente da atividade anterior em que as duplas usaram blocos cobertos, nessa atividade elas receberam barras de papel brancas, cortadas do papel que envolvia as barras na atividade com a caixinha, e a escala que tinham utilizado para medir as barras cobertas. As barras deveriam ser coladas em uma folha branca de papel. Foi solicitado, inicialmente, que as duplas montassem e colassem no papel as barras de modo que qualquer pessoa pudesse saber que aquelas barras equivaliam a seis livros e três jogos. Nada foi mencionado sobre a necessidade de se colar também a escala. A seguir apresentamos dois exemplos que ilustram as dificuldades observadas no trabalho de algumas crianças.

Atividade de colagem de barras no papel (Atividade 7, p. 63-4)

D e J (BF)

[D e J montam as colunas e a escala da seguinte forma:]

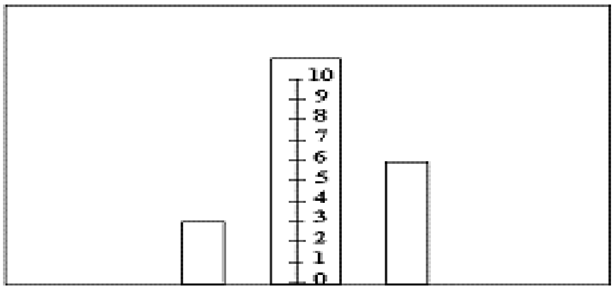

Figura 17: Montagem das barras e da escala (Dupla D e J)

Note-se que a escala foi incluída na montagem espontaneamente, sem suscitar qualquer dúvida.

D: Vamos colar logo a barra menor [depois colam a escala e a barra maior].

P: Está certo?

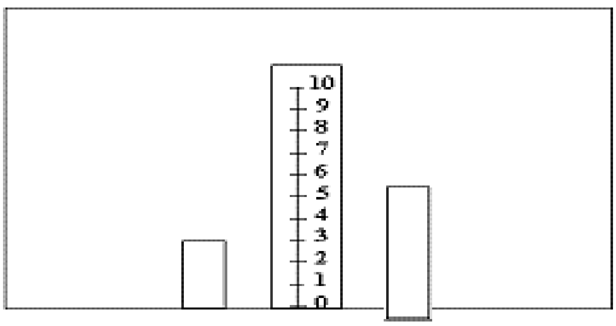

Figura 18: atividade de colagem das barras e da escala (Dupla D e J)

J: [Vai com o dedo fazendo a correspondência entre os valores da escala e a barra de três]. *Agora a de seis* [Vai fazendo com o dedo a correspondência entre a barra de seis e a escala].

D: Aqui está errado [barra de seis]. *Está para fora* [saindo embaixo do papel]. *Ficou parecendo que tem cinco* [a correspondência entre a barra e a escala. Ajeita um pouquinho a barra de seis]. [Cola outra barra de seis, ajeitando com cuidado a origem para ficar igual a da escala. Depois de colada acompanha com o dedo o número seis na escala].

P: Qual foi o problema?

D: Estava parecendo cinco.

J:Tem que colar na mesma linha [mostra o alinhamento das barras e da escala].

É interessante observar que a dupla vinha focalizando os valores já conhecidos das barras e suas correspondências com a escala como referencial para a colagem. A colagem final de D da barra maior foi feita a partir da necessidade de uma origem comum, ainda que em sua justificativa sobre o problema observado ele focalize apenas a diferença entre o valor conhecido da barra e o observado na escala depois da colagem. A sistematização de J retomou a linha de base como referência para a colagem adequada das barras e da escala.

F e AC (FF)

[F e AC montam e colam da seguinte forma:]

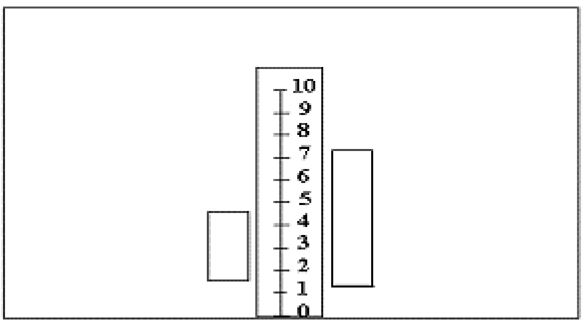

Figura 19: Primeira colagem das barras e da escala (Dupla F e AC)

F: Esse vai parecer que tem sete [a barra maior]. *Vou ajeitar. Tá sete.*

P: Lembram da caixinha [referência a atividade seis em que se colocava uma caixa abaixo apenas de uma das barras]*?*

F e AC: Tem que ficar na mesma linha.

[A dupla faz a seguinte nova colagem[5]:]

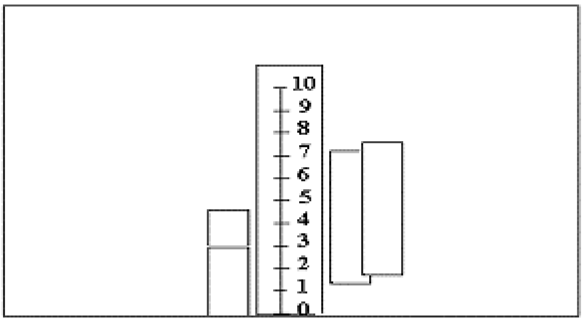

Figura 20: Segunda tentativa de colagem das barras e da escala (Dupla F e AC)

P: E agora? Está tudo na mesma linha? Cuidado para não deixar caixinha [referência a atividade seis]!

F e AC: Eita! [Fazem nova colagem]

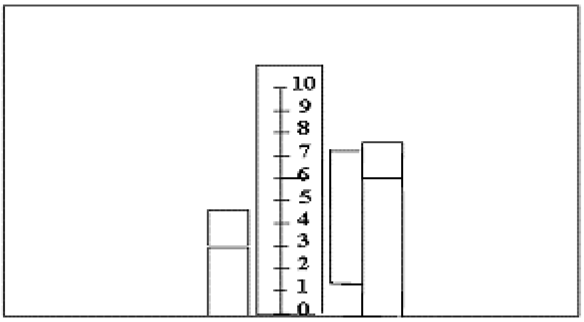

Figura 21: Terceira tentativa de colagem das barras e da escala (Dupla F e AC)

F: Tá certo.

AC: Ficou na mesma linha aqui embaixo.

P: E a outra barra?

F: Tá certo. Tá três [apontando para a escala].

[5] As colagens foram realizadas todas numa mesma folha. Entretanto, com o objetivo de facilitar a compreensão do leitor aqui apresentamos as etapas de colagem realizadas pela dupla separadamente.

S e B (FF)

[S e B colam as barras e a escala no papel como mostra a seguinte figura:]

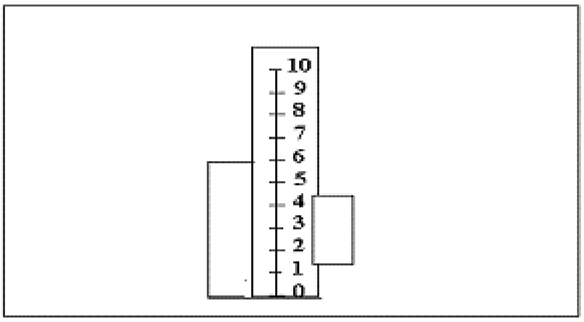

Figura 22: Colagem das barras e da escala (Dupla S e B)

S: Não está bom. Parece que tem um monte de caixinhas [referência espontânea à atividade anterior].

B: [Cola a barra menor novamente alinhando com a origem da escala].

S: Tudo tem que ficar no mesmo chão.

P: Está certo?

S: Está. [Faz uma linha ligando cada barra ao número correspondente na escala]. *Seis e três.*

Devemos notar que um aspecto comum aos exemplos apresentados foi o resgate por parte dos integrantes das duplas da conclusão verbalizada na atividade anterior (da caixinha), sobre a necessidade de uma mesma "linha" para a origem das barras e da escala. A colagem da escala também não foi discutida por nenhuma das duplas exemplificadas acima, sendo a mesma incluída de imediato entre os elementos que deviam ser colados na folha de papel, ainda que isso não tivesse sido explicitado pelo pesquisador na instrução da tarefa.

A dificuldade em estabelecer uma base comum para as categorias e para a escala também pode ser observada na atividade de construção dos gráficos. Algumas crianças consideravam, tal como nos exemplos anteriores, que poderiam desenhar a barra em qualquer espaço entre os eixos perpendiculares.

Gráfico do material escolar (atividade 8, p. 64-5)

M e D (BB)

D: [Pinta oito quadrados para tesouras].

M: Vou pintar as colas.

D: Tem que ser até o três.

D: [Começa a pintar a quantidade relativa à cola em cima da coluna das tesouras].

M: Aí não! Aqui [ao lado].

P: Por que não pode em cima? Onde deve pintar?

M: Aqui [ao lado]. *Se não vai misturar.*

D: É, vai confundir [com as tesouras].

Um outro exemplo interessante foi uma criança que preferiu começar a representar as quantidades a partir do número um na escala, sendo imediatamente corrigida por sua parceira. Vejamos um trecho desse protocolo:

Gráfico dos picolés comprados (atividade 8.1, p.65)

L e B (BB)

L: [começa a pintar cinco picolés de morango a partir do segundo quadrado acima do eixo x].

B:Por que não pintou esse?

L: Vou pintar.

[Depois, ao pintar a quantidade de picolés de maracujá, L começa pelo quadrado acima do número um da escala].

B: Pinta embaixo! Ela só pinta em cima, vai ficar parecendo três [o número indicado no problema era dois].

L: Vou pintar o [quadrado] *de baixo depois.*

Esses exemplos mostram que o uso de uma mesma linha de base não é algo simples e automático para as crianças nessa faixa etária. A atividade realizada com blocos (a atividade com a caixinha) pareceu ter contribuído para a reflexão das crianças sobre a necessidade de uma base comum na representação de quantidades. Maiores dificuldades foram observadas na atividade de colagem, possivelmente por não ter sido fornecido os eixos já desenhados, tal como ocorreu nas outras atividades com gráficos.

3.1.3 Unidade no gráfico representa uma ou mais unidades de medida

Para investigar o uso do raciocínio proporcional entre as crianças no nosso estudo, propomos um problema para as duplas que poderia ser solucionado usando medidas proporcionais: "João tem quatro lápis verdes na mão e Marcos tem dois azuis. Eu queria representar a quantidade de lápis de Marcos e João, mas está faltando peças. Só tenho aqui duas peças verdes e uma azul. De que forma vocês poderiam representar as quantidades de lápis de João e Marcos, usando somente esses blocos?"

Como respostas para esse problema obtivemos "não tem jeito", "só se tiver mais blocos", etc. Sugerimos, então, uma nova atividade: um jogo em que cada bloco valeria uma quantidade "x" de lápis. Os blocos estavam encaixados em duas colunas , uma com dois blocos e outra com três blocos. Para tornar o jogo mais interessante, colocamos em cada bloco um papel escondido que mostrava quantos lápis ele representava. Todos os blocos valiam dois lápis. Após as crianças abrirem os papéis e verificarem o valor de cada bloco, perguntamos sobre quantos lápis estavam representados em cada coluna e, então, quantos lápis da cor referente à coluna menor, seriam necessários ganhar para ficar com a mesma quantidade de lápis da coluna maior. Vejamos alguns exemplos de protocolos:

Atividade 5 (p.62)

M e D (BB)

P: Então quantos lápis vermelhos tem aqui? [dois blocos]

M: Dois.

P: mas a gente não combinou que cada peça valia dois lápis? Como vocês tiraram nos papeizinhos...

M: Foi.

P: Então, quem ganhar essas duas peças, ganha quantos lápis?

D: Dois.

P: E quem ganhar uma peça , ganha quantos lápis?

D: Dois.

P: E quem ganhar duas peças, ganha dois lápis também?

M: Não, três.

D: Não, quatro.

P: Como foi que vocês fizeram?

D: Ganha dois [uma peça] *e dois* [outra peça].

M: Fica quatro.

P: E quem ganhar três peças?

D: Cinco. [Conta o grupo de três e sobe o dedo no ar, dizendo quatro, cinco].

P: Como foi que você fez?

D: Essa ganha dois [uma peça], *essa ganha quatro* [segunda peça] *e aqui mais uma peça, cinco.*

P: Mas cada peça não vale dois lápis?

D: [Conta para cada bloco] *Um, dois, três.* [Apontando para o ar acima da barra diz:] *quatro, cinco, seis. Seis lápis.*

M: quatro e seis [apontando para as barras].

P: Quantos lápis vermelhos precisamos ganhar para ficar com o mesmo número de lápis amarelos?

Crs.: Mais um.

P: Um lápis ou uma peça?

D: Uma peça.

P: Quantos lápis então?

Crs.: Três.

P: Mas cada peça vale quanto? A gente tirou no papelzinho,lembram?

D: Vale dois lápis.

P: Então, precisamos ganhar quantos lápis vermelhos para ficar com o mesmo tanto de lápis amarelos?

Crs: Mais uma peça.

P: Quantos lápis?

D: Um lápis.

M: Três, dez lápis.

B e C (BB)

P: Então quantos lápis vermelhos tem aqui? [dois blocos]

C: dois.

P: Como você sabe?

C: Porque tem duas pecinhas.

P: Mas cada peça vale quanto lápis?

Crs.: Dois.

P: Então quantos lápis tem aqui [coluna de dois]?

Crs.: Duas.

P: Como pode, uma peça vale dois lápis e duas peças valem dois lápis também?

C: Uma pecinha com um lápis.

P: Mas a gente não combinou que cada peça valia dois lápis? Como vocês tiraram nos papeizinhos...

B: Vale duas.

P: Uma peça vale quantos lápis?

Crs.: Dois.

P: E duas pecinhas?

Crs.: Dois lápis.

P: Tanto faz receber uma ou duas peças?

B: Esse a gente sabe não.

P: Essas duas peças valem quantos lápis?

C:3.

P: Como você fez?

C: Essa peça [toca no bloco] *é dois, vai receber dois* [lápis] *e essa recebe dois* [lápis] *também. Aí fica quatro lápis.*

P: E aqui?

C: Um, dois [uma peça]. *Três, quatro* [outra peça], *cinco, seis* [outra peça]. *Seis lápis.*

P: Então essa [a barra com dois blocos] *precisa ganhar quantos lápis para ficar com o mesmo tanto que essa outra* [barra de três blocos]?

B: Um…É não, é dois.

P: Por que?

B: Porque a gente viu no papelzinho.

P: Precisa ganhar quantas peças?

Crs: Uma.

P: E precisa ganhar quantos lápis?

Crs:Dois

Os dados obtidos mostraram que embora nenhuma dupla solucionasse espontaneamente o primeiro problema proposto (lápis de Marcos e João), o uso de uma situação que colocou relevante o problema em questão possibilitou que a estratégia de correspondência um para muitos fosse utilizada com sucesso por todas as duplas para descobrir o valor de lápis representados nas colunas. Entretanto, como pode ser observado no primeiro exemplo, algumas crianças ainda que conseguissem estabelecer a proporcionalidade entre peças e lápis, voltavam a apresentar dificuldades quando tinham que operar com essas medidas proporcionais.

3.1.4 Consistência na representação da medida por cada eixo

Esse aspecto foi observado em apenas uma dupla. Como também não encontramos outros casos relatados na literatura enfocando esse tipo de dificuldade, parece-nos que as crianças, geralmente, ao definirem o que cada barra representa são consistentes em manter tais definições. Sendo assim, esse tipo de dificuldade, após esse relato, não será mais discutido em outras análises.

Vejamos, abaixo, o protocolo que ilustra essa dificuldade em manter uma consistência na representação das medidas dos eixos.

Gráfico do material escolar (Atividade 8, p. 64-5)

F e AC (FF)

[Cada criança pinta um quadrado de cada vez até que oito quadrados estão pintados verticalmente para representar as tesouras do gráfico.]

P: Três colas.

F: Eu vou pintar desse jeito [pinta três quadrados azuis na posição horizontal].

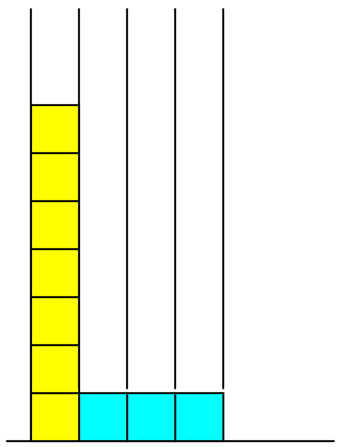

Figura 23: Representação de mesma medida pelos dois eixos (Dupla F e AC)

AC: Não pode. Assim, parece que só tem um [apontando o número um na escala].

P: Como você sabe?

AC: É para fazer assim [mostra três quadrados na posição vertical, ao lado da barra das tesouras]. *Assim, é três* [apontando o número três na escala].

Podemos observar que a questão levantada é resolvida internamente pela dupla, sem serem necessárias intervenções do pesquisador.

3.1.5 Discussão geral sobre as dificuldades geradas a partir do sistema cartesiano

Observamos que dificuldades apresentada por crianças, já relatadas na literatura, em relação a conceitos relativos ao sistema cartesiano (Bell e Janvier, 1981; Tierney & Nemirovsky, 1991; Tierney, Weinberg & Nemirovsky, 1992, Nunes, Light & Mason, 1995; Frydman & Bryant, 1988, entre outros) foram também observadas em nossas entrevistas. Nossos dados sugerem, entretanto, que as atividades realizadas auxiliaram as duplas a refletirem sobre suas dificuldades. Nesse sentido, observamos que nas atividades seguintes as duplas muitas vezes resolveram internamente alguns conflitos referentes a dificuldades anteriormente apresentadas, sem necessidade de intervenções do pesquisador. Um exemplo interessante desse aspecto foi a alusão espontânea de S, integrante da dupla S e B (FF), à atividade com a caixinha, ao observar o erro de sua parceira na atividade seguinte, de colagem de barras e escala no papel em branco. Ela disse: *"Não está bom. Parece que tem um monte de caixinhas",* referindo-se ao espaço entre e as origens da barra maior e da escala que já estavam alinhadas e a base da barra menor.

Um outro aspecto que devemos ressaltar refere-se ao papel do pesquisador no processo de reflexão das duplas. Como já dissemos ao relatarmos o método utilizado nesse estudo, o pesquisador fazia parte do processo de interação, apresentando questões, solicitando esclarecimentos, incentivando a participação das crianças e a explicitação dos conhecimentos que estavam sendo abordados.

O próximo tópico dá continuidade a análise dos resultados, apresentando a segunda análise realizada. Seu objetivo foi focalizar as relações entre o trabalho com blocos e com gráficos propostos nesse estudo.

3.2 Resolução de problemas com blocos e gráficos de barras

A segunda análise conduzida abordou a relação entre blocos de encaixe e gráficos de barras na resolução de problemas. Para analisar esse aspecto, selecionamos alguns protocolos como exemplos:

R e L (BF) (atividade 9, p.66-7)

Gráfico sobre o peso de um bebê:

R: ...Tá aumentando o peso.

L: Aumentou...

P: Quanto foi que o bebê engordou do primeiro para o segundo mês [três quilos para quatro quilos]?

Crs.:...

R: Dois.

P: Dois? De três para quatro quilos?

R: ...

P: Lembra das pecinhas? Como era com as pecinhas? Daqui de três para quatro quilos, quanto ele engordou [mostra no gráfico as respectivas barras]?

R: [desenha linhas estabelecendo os limites entre as unidades das duas primeiras barras nos espaços necessários para estabelecer a comparação entre as colunas e mostra o que não está em correspondência]. *Uma.*

P: Então do primeiro para o segundo mês, o bebê engordou quanto?

R: Um.

P: E do segundo para o terceiro mês?

R: [Desenha os limites entre as unidades constituintes de todas as barras necessárias para a comparação]. *Um.*

P: E do terceiro para o quarto mês?

R: Um.

P: E do quarto para o quinto mês?

R: Toda vez ele engorda um quilo...

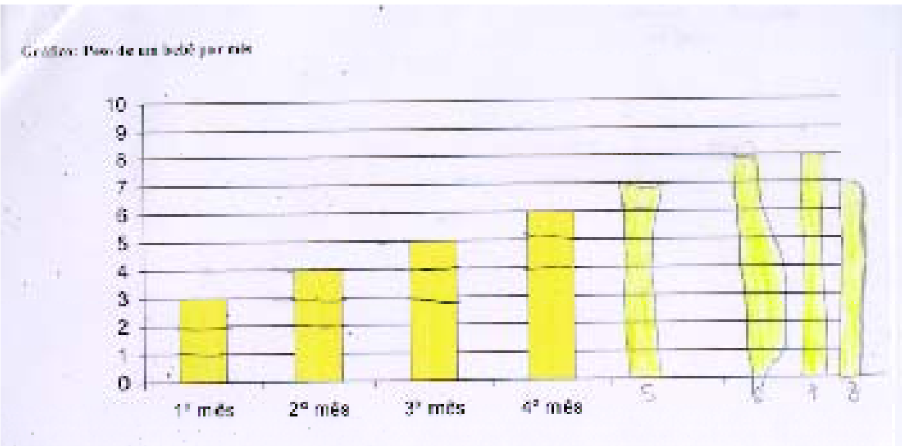

Figura 24: Gráfico do peso de um bebê – dupla R e L

Essa mesma dupla, em um encontro posterior, analisando um outro gráfico sobre a quantidade de animais em um sítio, retoma a mesma estratégia do encontro anterior, de delimitar as unidades nas barras. Veja o seguinte trecho do protocolo:

...P:Quantos pintos tem a mais do que cachorros?

R: [Desenha limites entre as unidades da barra do pinto e cobre com a mão a barra do cachorro]. *Um, dois, três* [contando as unidades da barra do pinto que estavam visíveis]. *Três pintos.*

Figura 25: Gráfico dos animais do sítio - dupla R e L (BF).

Esse protocolo acima sugere que o trabalho com blocos de encaixe, tal como proposto nesse estudo, pode auxiliar as crianças a "descomprimirem" alguns aspectos da representação gráfica. Nesse caso específico, a possibilidade de visualização e manipulação das unidades que constituíam as barras de blocos pareceu auxiliar a dupla a manipular com mais flexibilidade os dados representados nos gráficos, na medida em que as barras de um gráfico geralmente são colunas uniformes, sem delimitações das unidades constituintes. Assim, a combinação entre blocos e gráficos de barras pareceu favorecer a compreensão do gráfico ao permitir que as barras de freqüências do mesmo fossem "decompostas" em suas unidades simples para fins de solução dos problemas apresentados. Devemos ressaltar também a observação feita por R, considerando o padrão de aumento de peso demonstrado pelo gráfico ("Toda vez ele engorda um quilo"), que sugere que a mesma estava realizando uma análise global do gráfico.

O protocolo de **R e F (FF)**, a seguir, também traz um exemplo interessante sobre as relações entre o uso de blocos e gráficos. O primeiro problema de combinação foi resolvido rapidamente por meio da estratégia de contar todos os blocos. O outro problema de combinação, realizado com blocos cobertos (Atividade 6, p.62-3), a dupla resolveu da seguinte forma:

...P: Quantos livros e jogos tem ao todo? [blocos cobertos e escala]

F: Ficava até o dez [mostrando a escala].

P: Como você sabe?

F: Nove [encaixa a barra menor sobre a maior e vê na escala o valor correspondente].

A mudança de representação de blocos visíveis para blocos cobertos gerou um novo obstáculo para a dupla, resolvido pelo uso de uma estratégia de superposição das barras ao invés da contagem de todos os elementos como tinha sido feito quando os blocos encaixados estavam visíveis. Na atividade com gráfico, novas dificuldades surgiram levando a dupla a repetir a estratégia utilizada com sucesso nos problemas com blocos cobertos. Vejamos o protocolo:

Gráfico dos Animais no sítio (Atividade 9.1, p.67-8)

...P: Quantos animais tem ao todo?

R: Se botar esse aqui [boi] *aqui em cima* [passarinho], *fica sete. Se botar esse outro em cima* [pinto], *fica dez. E esse outro em cima* [cachorro], *fica onze.*

F: Peraí. Se botar esses dois em cima [valor da barra da boi em cima da barra do passarinho], *fica nove.*

P: Nove? Já tem oito passarinhos!

F: Dez.

R: Se botar o pinto fica 11.

P: 11? Mas tem quantos pintos?

Crs: [Contam em cima da barra e depois correspondem na escala] Sete.

P: E então? Juntando boi com passarinho ficou dez.

R: Com o pinto 11 não, 12.

P: Tentem fazer.

R: [Diz os valores de cada barra].

F: [Confere os valores de cada barra na escala fazendo a correspondência entre a altura da barra e a escala].

P: Vocês juntaram boi com passarinho e deu dez.

F: Com pinto dá 20 [conta dentro da barra do pinto de 10 até 20].

P: Mas quantos pintos são?

R: Sete. Dez com sete dá 14.

F: Vou fazer as peças. [Desenha dois quadrados em cima da barra do passarinho]. *A vaca..dez. Agora é sete.* [Continua desenhando mais sete quadrados em cima da barra]. *E quatro cachorros* [Desenha mais quatro quadrados]. [Conta a barra do passarinho e os quadrados desenhados]. *21.*

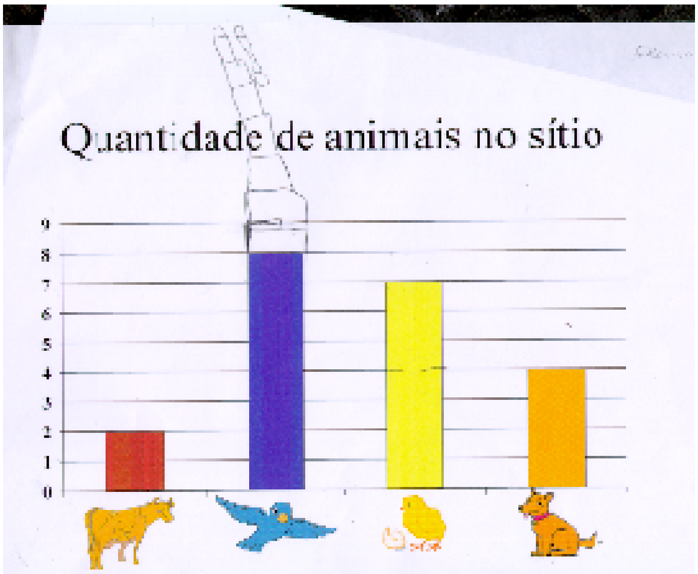

Figura 26: Gráfico dos animais de um sítio – dupla F e AC (FF)

Esses dois exemplos acima ilustram casos em que se pode observar que o trabalho com o material manipulativo pode auxiliar em determinados aspectos a resolução de problemas no gráfico. No primeiro exemplo, dupla R e L (BF), a visualização dos limites entre as unidades, aspecto aparente no caso de colunas de blocos encaixados e não visível nas barras de um gráfico, pareceu favorecer o desempenho da dupla nos problemas com gráficos. É interessante que no encontro seguinte, diante de um problema semelhante de comparação, a dupla usa consistentemente o mesmo procedimento de delimitar unidades e observar os que não estavam em correspondência, sem ser necessária qualquer intervenção do pesquisador.

No segundo exemplo, dupla F e AC (FF), observamos que com blocos visíveis a dupla procedeu contando todas as unidades. Na atividade com os blocos cobertos, diante desse novo obstáculo, uma outra estratégia foi usada, a de superpor as colunas e usar a escala para ver o valor final. Esta estratégia pareceu ser mais econômica do que a de "contar todos" naquela atividade, na medida que para contar todos a dupla precisaria recorrer diretamente à contagem na escala pois as unidades não estavam visíveis. No problema no gráfico em que as unidades também não podiam ser visualizadas (as barras são contínuas mesmo tendo linhas de grade), observamos a tentativa de usar a mesma estratégia de superpor colunas, usada com sucesso com os blocos cobertos. Entretanto, a dupla precisou lidar com um novo obstáculo: enquanto que os blocos cobertos permitiam a manipulação e superposição de colunas, no gráfico as barras não podem ser mudadas de posição. A dupla tentou inicialmente adicionar o valor das colunas sem o suporte material mas encontrou dificuldades. Diante das dificuldades, F numa clara alusão ao uso dos blocos afirmou “vou fazer as peças” e fez desenhos de cada unidade constituinte das colunas em cima da barra representativa da quantidade de passarinhos (barra maior). Em suma, neste exemplo, observamos dificuldades no trabalho com gráfico que pareceram relacionadas à dificuldades em lidar com a representação bidimensional, entretanto o uso de problemas com blocos pareceu ter auxiliado a dupla na resolução do problema proposto.

É interessante, entretanto, mencionar que sendo blocos e gráficos representações diferentes, nem sempre é fácil estabelecer relações entre ambas. Também, devemos considerar as especificidades de cada representação, sua amplitude e seus limites. No caso do protocolo de F e AC, acima, observamos que sua estratégia de superposição de colunas apesar de adequada para o trabalho com blocos, nem sempre poderá ser usada com gráficos (por exemplo, freqüências maiores). Sendo assim, devemos ter cuidado no processo de ensino-aprendizagem em não limitar uma nova representação às possibilidades de outra já familiar, mas usar essa familiar (se possível!) como base para a nova compreensão que queremos que as crianças construam.

Outro aspecto que devemos ressaltar é que nem sempre a criança estabeleceu as relações que tínhamos por objetivo que a mesma estabelecesse. Esse aspecto, de fundamental importância, pode ser exemplificado a partir da dupla S e B (FF) na resolução de um problema de combinação a partir do gráfico do material escolar.

Gráfico do material escolar (Atividade 8, p.64-5)

S e B (FF)

...P: Quantos livros e gibis tem ao todo para eles lerem? [Freqüência das barras: dois e oito]

S: [Desenha uma coluna de lápis azul começando do um na escala e finalizando no oito entre a coluna do livro e a da gibi]. *Isso é para juntar.*

P: Deu quantos?

Crs:...

P: Como a gente fazia com o bloco? Por exemplo, Sílvia faltou dois dias e Bárbara quatro. Quantos dias elas faltaram ao todo?

B: [Faz duas barras com os blocos para representar as faltas de cada menina.]

S: É assim [coloca a barra de dois em cima da barra de quatro]. Um, dois, três, ..., seis.

P: Jóia. E aqui? São dois livros e oito gibis, quanto material de leitura eles tem ao todo?

S: Vou juntar esse em cima. Vou fazer dois.

P: Como?

S: Aqui [na coluna do dois] *vou botar todos os oito.* [Desenha uma barra com lápis laranja acima da coluna dos livros, entretanto a barra finaliza no valor oito na escala. Conta os espaços entre as linhas.]. Um*, dois, ..., sete, oito.*

P: Diga aqui no bloco como foi. Quantos você colocou em cima da barra do livro?

S: Botei oito.

P: Oito? Veja que já tem dois que são da barra do livro.

S: É oito.

P: Como pode ser oito se só gibi já são oito?

S: Oxe!

B: Aqui tem dois [mostrando a barra do livro].

Crs:...

P: Com os blocos, com quatro faltas e duas faltas vocês colocaram a barra com dois em cima da barra de quatro. Aqui [no gráfico] *dois é a barra de livros e oito é a de gibis. Então só está botando esse pedaço em cima* [mostra a barra laranja desenhada pela dupla acima da barra do livro].

Crs: ...

B: [Conta blocos]. Oito [faz barra].

S: [Faz barra de dois].

P: Quantos livros e gibis ao todo?

S: [Coloca a barra de dois em cima da barra de oito]. *Um, dois, ..., nove, dez.* [Conta as peças].

P: Agora aqui no gráfico.

S: [Desenha uma coluna ao lado direito da coluna de gibis, da mesma altura].

P: Como vocês estão fazendo?

S: Sei não aqui.

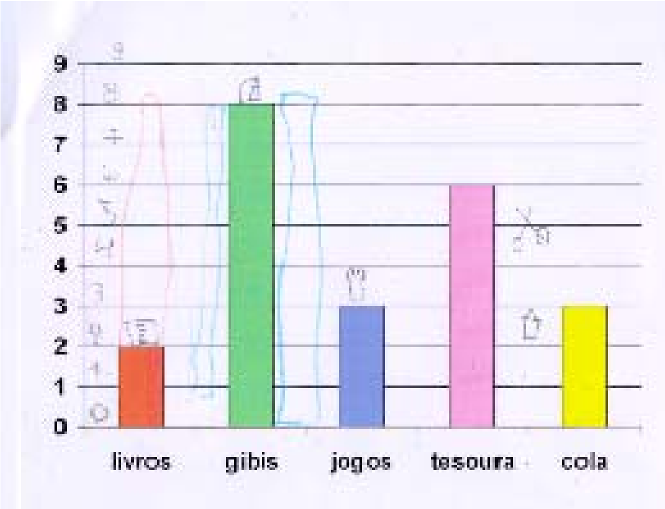

Figura 27: Gráfico do material escolar – dupla S e B (FF)

Podemos notar nesse protocolo acima que a dupla S e B ainda que conseguisse resolver o problema com os blocos não conseguiu resolver no gráfico. É interessante observar que, no gráfico, a dupla apresentou dificuldades em implementar a estratégia escolhida para uso, de complementar uma das barras usada com êxito com blocos ("Vou juntar esse em cima"). Uma dificuldade observada foi relativa à representação da quantidade no gráfico numa situação em que tal representação não deveria iniciar na origem pois deveria ser posicionada acima da barra referente aos livros. Outros fatores que podem ter se constituído em obstáculos para a dupla foram: a "força" da altura da barra maior dificultando que a barra a ser construída transpusesse aquele limite (assim a barra laranja apesar de ter sido desenhada acima da barra dos livros foi finalizada no valor oito) e o fato da escala só estar representada até o algarismo nove podendo esse valor ter sido considerado pela dupla como limite. Esse protocolo exemplifica que estabelecer relações entre representações não é algo simples e automático, pois cada representação tem suas especificidades que podem gerar novos obstáculos para a criança transpor.

A seguir apresentaremos uma análise do desenvolvimento de três duplas ao longo de todos os encontros tomando como eixos os mesmos aspectos já analisados: o trabalho com blocos e gráficos na resolução de problemas aditivos e as dificuldades observadas no uso do sistema cartesiano. O objetivo dessa análise foi ampliar a discussão que vem sendo realizada, trazendo dados relativos ao desempenho de três duplas em todas as atividades.

3.3 Análise dos protocolos de três duplas ao longo dos encontros

Como mencionamos acima, o objetivo dessa análise foi investigar o processo pelo qual alguns conceitos trabalhados foram sendo compreendidos pelas duplas ao longo das diversas atividades desenvolvidas. Com essa análise, pretendemos ampliar o nosso conhecimento sobre o processo de aprendizagem das duplas, conhecer tipos de respostas existentes, dificuldades presentes na aprendizagem e verificar se tais dificuldades puderam ser superadas a partir das atividades propostas.

Os aspectos analisados foram os seguintes:

1. Resolução de problemas de combinação e comparação com blocos e com gráfico de barras.
2. Dificuldades com o sistema cartesiano, em relação a(o): linha de base das barras e da escala, uso de uma unidade de representação no gráfico, uso da estratégia de correspondência um-para-muitos.

Foram analisados três protocolos de duplas distintas. A escolha dessas duplas baseou-se em um critério: o desempenho das crianças na sondagem. Assim, foi escolhida uma dupla em que ambas crianças apresentaram bom desempenho na sondagem, outra em que ambas crianças apresentaram desempenho fraco e outra constituída por uma criança que apresentou bom desempenho e uma criança que apresentou desempenho fraco. Optamos por duplas que tivessem obtido na sondagem resultados típicos de cada categoria, "desempenho bom" ou "desempenho fraco". Ou seja, nenhuma das crianças integrantes das duplas apresentou resultados um pouco mais discrepantes, no caso dos fortes aproximando-se mais da categoria fraco, e no caso dos fracos se aproximando mais dos fortes. Outra preocupação posterior foi escolher duplas cujas crianças fossem mais falantes, permitindo uma melhor compreensão sobre como lidavam com as atividades propostas.

Para desenvolver essa análise selecionamos para cada aspecto investigado, as atividades em que foram enfocados, seguindo seu percurso temporal. Apresentaremos para cada aspecto analisado, inicialmente o protocolo da dupla forte-forte, depois da forte-fraco e por último o da fraco-fraco. Após a discussão destas três duplas realizaremos uma comparação entre os seus desempenhos.

3.3.1 Resolução de problemas com blocos e com gráficos de barras

A questão investigada nesse tópico consistiu em analisar se o acerto com blocos e as estratégias utilizadas com esse tipo de material auxiliaram a resolução de problemas com gráficos. As atividades que fizeram parte dessa análise foram as relativas aos problemas de combinação e comparação resolvidos com blocos, blocos cobertos com papel (como uma barra única) e gráficos de barras em papel quadriculado.

Devemos relembrar que em todas as atividades de resolução de problemas com blocos foi solicitado às duplas que montassem barras relativas aos dados numéricos envolvidos nos problemas.

Os problemas foram descritos e analisados na ordem em que foram apresentados nas atividades. Isto não significa que um problema seguiu imediatamente o outro, mas que foi nessa seqüência que foram trabalhados pelas crianças.

Em relação aos problemas de combinação e comparação, selecionamos para análise problemas comuns às atividades com blocos, blocos cobertos e gráficos. Assim, os problemas de combinação analisados foram aqueles em que foram dadas as duas partes sendo solicitado encontrar o todo. E problemas de comparação analisados foram aqueles com relação desconhecida.

Os problemas de combinação selecionados para análise foram: um problema com blocos visíveis apresentado às crianças e um problema com blocos cobertos (as crianças resolveram apenas esses com esses suportes de representação) e os três primeiros problemas apresentados com gráficos, em encontros distintos.

No caso dos problemas de comparação, como tivemos uma maior freqüência de resolução desse tipo de problema, os exemplos apresentados foram selecionados a partir de sua organização na seqüência de problemas. Foram escolhidos para análise o problema imediatamente antes e após a intervenção realizada e, no encontro seguinte, o último na mesma categoria (relação desconhecida) apresentado às crianças com blocos visíveis. Tentamos assim, no caso do trabalho com blocos visíveis, traçar um caminho entre o desempenho inicial, imediatamente após a intervenção e ao final dos encontros. Apenas um problema foi apresentado com blocos cobertos e esse também será descrito. No caso dos gráficos, tomamos como exemplo também o primeiro problema apresentado às crianças a partir desse tipo de representação e problemas apresentados em cada encontro posterior.

DUPLA D E I (BB)

Problemas de Combinação[6]

Blocos (atividade 2, p. 57-8)

P: O gato teve cinco votos e o pinto três.Quantos votos eles tiveram juntos?

Crs.: Oito.

D: Cinco com três dá oito [mostrando cinco e três nas mãos].

P: Você contou cinco e três?

D: Não, eu já sabia. Eu consigo botar oito assim [cinco e três nos dedos] *e assim* [quatro e quatro nos dedos].

P: E você I, fez como?

I: [Mostra uma mão com cinco e outra com dois].

D: Dá sete o total. Tá errado! É três [mostra barra com três blocos]. *É assim* [coloca uma coluna em cima da outra], *um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito* [contando um-a-um todos os blocos].

Blocos cobertos e escala (atividade 6, p. 62-3)

P: Quantos livros e jogos tem ao todo? [São seis livros e três jogos em barras encobertas por papel, portanto, sem ser possível a visualização do limite das unidades].

I: [Coloca uma barra em cima da outra e junta com a escala]. *Tem nove* [lendo na escala].

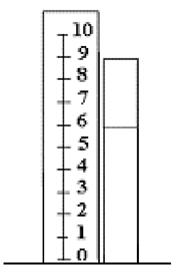

Figura 28: superposição de barras na resolução de problema de combinação pela dupla D e I (BB)

[6] Ao lado dos problemas estão indicados em que atividades se inserem e em que página da tese encontra-se a descrição completa da atividade.

Gráfico

Gráfico 1: gráfico do material escolar (atividade 8, p. 64-5)

P: Quantos livros e gibis tem nessa sala ao todo? [gráfico com linhas de grade. Freqüência das barras: oito e dois].

D:Nove,...,dez.

P: Como você sabe?

D: Oito do lado de cá [lendo na escala o valor da barra representando as gibis], *nove, dez* [contando na escala mais dois acima da barra de gibis, referente a barra que representava os livros]. *Oito com dois fica dez.*

É interessante observar a consistência da dupla no uso da estratégia de colocar uma barra sobre a outra em todas as atividades.

Gráfico 2: gráfico dos picolés comprados (atividade 8.1, p.65)

P: Quantos picolés João comprou? [gráfico construído pelas crianças em papel quadriculado. São cinco picolés de morango, dois de côco, dois de maracujá].

D: [Conta todos quadradinhos, um-a-um] Nove.

I: Eu fiz assim [coloca dois dedos acima da barra com cinco e depois mais dois dedos acima]. *Dá nove* [lendo na escala].

P: Por que botou esses dois?

I: É o de côco e o de maracujá, dois e dois [freqüência de cada barra]. *Botei esses dois* [mostrando a barra do picolé de côco e levando dois dedos para cima da barra dos picolés de morango] *e mais dois* [mostra a barra do picolé de maracujá e leva mais dois dedos para cima da barra, agora com quatro dedos]. *Aqui tem dois e dois, dá nove* [lendo na escala].

P: Eita! Esqueci, ele também comprou um picolé de limão.

Crs.: [Acrescentam no gráfico, pintando um quadrado para representar o picolé de limão].

P: E agora, quantos picolés ele comprou ao todo?

D:Um, não, nove com mais um, dez.

I: É, nove mais um, dez.

Gráfico 3: gráfico dos animais no sítio (atividade 9.1, p. 67-8)

P: Quantos animais tem ao todo? [Gráfico com linhas de grade. Freqüência das barras: dois, oito, sete e quatro]

Crs: [contam dentro das colunas, um-a-um, os espaços entre as linhas] *21.*

Podemos observar que problemas de combinação com todo desconhecido não trouxeram dificuldades para a dupla em nenhuma das formas de representação apresentadas, havendo, inclusive, uma repetição no uso das estratégias em que obtiveram êxito ao longo dos problemas.

Com os blocos visíveis, D resolveu inicialmente com os dedos. Quando I apresentou uma solução errada, D utilizou os blocos para corrigi-lo colocando uma coluna sobre a outra. Na segunda situação, em que não se pode mais visualizar a divisão entre os blocos, I usa imediatamente a estratégia anterior apresentada por D, encaixar as barras, fazendo a leitura do valor final pela escala. No gráfico, no primeiro problema apresentado D utiliza uma estratégia semelhante às anteriores, a partir da barra maior, conta os valores da barra menor. Entretanto, no problema seguinte D utiliza uma estratégia de contar todos (talvez por estarem definidos todos os quadrados), enquanto I prefere contar a partir da barra maior, os valores das barras menores (mesma estratégia do problema anterior). Para calcularem o total final de picolés, as crianças usaram o total já obtido anteriormente como primeira parcela da adição. No terceiro problema, ambas as crianças resolvem usar a estratégia de contar todos. Uma dificuldade para usar a estratégia de contar a partir da barra maior neste último problema pode estar relacionada ao fato deste gráfico envolver freqüências maiores do que os gráficos anteriores.

Também é interessante notar que a partir dos blocos cobertos, o uso dos dedos ocorreu apenas como suporte auxiliar da memória de trabalho, registrando a freqüência de uma barra e procedendo-se em seguida à junção da freqüência de tal barra para outra, usando a escala para realizar as leituras das adições das freqüências.

Problemas de Comparação

Blocos (atividade 3, p. 58-60)

P: Joana faltou seis dias e Maria quatro. Quantas faltas Joana tem a mais que Maria?

D: Seis [mostrando a barra das faltas de Joana].

P: Seis são todas as faltas de Joana. Comparando com as faltas de Maria, quantas faltas Joana teve a mais?

I: Quatro.

P: Como você fez?

I: [Mostra a barra com as faltas de Maria].

Intervenção (atividade 3, p. 58-60)

P: Marcos e Paulo faltaram cinco dias de aula cada um.

Crs.: [Constroem colunas].

P: Eles faltaram o mesmo tanto de dias?

Crs: Sim.

P: Paulo ficou doente e faltou mais dois dias [colocou mais dois blocos na barra de Paulo]. *Agora, quantas faltas Paulo tem a mais do que Marcos?*

D: Sete.

I: [Conta a barra um-a-um] *Um, dois,..., sete!*

Diante das dificuldades que parecem permanecer foi introduzida uma outra situação que objetivou tornar a igualdade inicial mais saliente para as crianças através do uso da correspondência um-a-um:

P: Vamos fazer assim: a cada falta de Paulo, vocês colocam a de Marcos. Paulo teve uma falta [colocou um bloco para Paulo] *e Marcos também faltou um dia* [crianças colocam um bloco para Marcos e continuam colocando as faltas até atingir cinco faltas em cada barra] *Quantas faltas cada um teve?*

Crs: Cinco.

P: Só que Paulo ficou doente e teve mais duas [coloco mais dois blocos na barra de Paulo]. *Quantas faltas Paulo teve a mais do que Marcos?*

I: Sete, doze.

P: Compare as faltas dos dois. Quantas faltas eles tem igual?

Crs: Cinco.

P: E quantas Paulo teve que Marcos não teve?

D: Duas.

I: Esse tem cinco e esse sete.

P: Quantas faltas Paulo tem a mais do que Marcos?

D: Duas.

P: Como você fez? Explica.

D: Aqui está junto [as barras], *se botar mais dois, fica sete também. Aí eu tirando esse mais* [mostra os dois blocos a partir da igualdade das colunas], *é dois* [mostra os dois blocos].

I: É, é dois.

Além de salientar a correspondência um-a-um entre as quantidades iniciais, outra intervenção importante realizada pelo pesquisador teve como objetivo realçar as faltas em comum e a diferença entre a quantidade de faltas de Marcos e Paulo. Após essa intervenção a dupla resolveu o problema adequadamente.

Reapresentação do problema anterior

P: Joana teve seis faltas e Maria quatro. Quantas faltas Joana teve a mais do que Maria?

Crs.:[Após a construção das barras, posicionam as mesmas lado-a-lado e dizem:] *Dois.*

D: Mais duas aqui [na coluna menor] *fica igual* [à coluna maior].

I: Tirando dois [da coluna maior] *também fica igual.*

Dois dias depois (atividade 3.1, p. 60-1)

P: Em outro mês, Joana teve cinco faltas e Luiza duas. Quantas faltas Joana teve a mais do que Luiza?

[Crianças construíram barras com as quantidades indicadas pelo problema]

D: Três a mais.

I: Dois, não, três.

P: Como você fez?

D: [Mostrando a barra de cinco que está junto da de dois] *Aqui tem dois e três para cima e aqui tem dois* [barra das faltas de Luiza].

P: E você I, como fez?

I: Porque tem dois para baixo, igual, e três para cima, a mais.

Após a situação de intervenção, em que o pesquisador sugeriu que considerassem a igualdade e a diferença entre as colunas, as crianças passaram a considerar cada coluna como dividida entre o que é igual e o que não é. Os problemas de comparação parecem, então, serem transformados em problemas de igualização. Para restabelecerem a igualdade consideravam que duas ações podiam ser executadas sem alterar o resultado: retirar peças da barra maior ou acrescentá-las à barra menor. Essas estratégias foram utilizadas em todos os problemas subseqüentes, com a presença dos blocos visíveis.

Blocos cobertos (atividade 6, p. 62-3)

P: Quantos livros tem a mais do que jogos?

Crs: Três.

I: Três em cima e três embaixo [olhando as colunas juntas, ao lado da escala].

D: Aqui tem seis e aqui três. [Tocando na coluna de seis, diz:] *Tem três para cima* [mostrando a escala a partir da altura da coluna menor, do três para o seis]. *É três.*

É interessante notar o uso da escala como referência para a contagem das medidas das barras.

Gráfico

Gráfico 1: material escolar (atividade 8, p. 64-5)

P: Quantos livros tem essa sala a mais do que essa? [Comparação de dois gráficos. Freqüência das barras: seis e dois]

D: Mais três.

I: Mais quatro. Porque aqui tem dois, botando mais quatro, fica seis [mostra a outra barra de seis, em outro gráfico].

P: O que você acha D?

D: É quatro.

Gráfico 2: picolés comprados (atividade 8.1, p. 65)

P: Quantos picolés de morango ele comprou a mais do que picolés de côco? [gráfico construído pelas crianças em papel quadriculado] [valores numérico: cinco e dois]

D: Três.

P: Como você sabe?

D: Aqui e aqui. [Mostra os três quadrados acima dos dois quadrados que representam os picolés de côco igualando a barra relativa aos picolés de morango e mostra na barra dos picolés de morango, os três quadrados que ficam acima da barra relativa aos picolés de côco]. *Três a mais.*

Gráfico 3: animais de um sítio (atividade 9.1, p. 67-8)
P: Quantos pintos tem a mais do que cachorros? [freqüência das barras: sete e quatro]
D: Três. Porque eu vi que se botar três aqui [na barra menor] *fica igual* [mostra três dedos acima da barra menor].
I: [Coloca três dedos acima da barra menor]. *É três.*

Quando os blocos estavam cobertos, essa dupla utilizou, sem dificuldade, a escala como referência para saber a freqüência. As crianças usaram no gráfico as mesmas estratégias que usaram com os blocos, ou seja, acrescentar ou tirar para obter a igualdade. A quantidade acrescentada ou retirada era a resposta do problema. Os problemas seguintes foram realizados a partir de um gráfico que envolvia dados em função do tempo. Vejamos o que aconteceu:

Gráfico do crescimento de uma planta (atividade 9, p. 66-7)
P: Quanto a planta cresceu dessa semana para essa outra? [da altura de dois canudos para quatro canudos]
I: quatro.
D: Dois. Porque já tem dois aqui [primeira semana], *se botar mais dois, fica quatro* [coloca dois dedos em cima da coluna do dois, mostrando que fica quatro].
P: Explica para I.
D: Essa [coluna de quatro] *é a mesma planta dessa* [coluna de dois]. *Tem que ser mais dois.*
I: E para ficar nessa outra altura [seis] *tem que ser mais dois também.*
D: Esse bota mais dois para ficar igual [dois dedos acima da coluna de dois] *e esse bota mais dois para ficar igual* [dois dedos acima da coluna de quatro para ficar igual a de seis].

Podemos observar que I responde, de imediato, com o valor total da barra. É interessante que a partir da explicação de D enfocando a correspondência a partir da identidade “é a mesma planta dessa”, I parece superar essa dificuldade inicial.

Gráfico sobre venda de picolés em uma semana (atividade 9.1, p.67-8)

P: Da segunda-feira para a terça-feira, o que houve com a venda? [freqüência das barras: dois e cinco]

D:Aumentou.

P: Em quanto?

D: Três [cobre três espaços da coluna maior, igualando à menor].

P: E da terça para a quarta? [freqüência das barras: cinco e seis]

I: Aumentou em um.

P: E da quarta para a quinta? [freqüência das barras: seis e três]

D: Abaixou de três [coloca três dedos acima da coluna do três igualando à de seis]. *Da quinta para a sexta ele aumentou quatro* [coloca agora, quatro dedos acima da coluna de três, igualando à de sete].

I: Foi para sete. Aumentou quatro [conta espaços acima da coluna de três até sete].

P: E de sexta para sábado? [freqüência das barras: sete e nove]

I: Aumentou dois.

P: E sábado para domingo? [freqüência das barras: nove e oito]

D: Abaixou um [mostra coluna de oito, colocando um dedo acima].

As crianças resolveram sem dificuldades essa nova situação de gráficos com dados em função do tempo. Dados envolvendo uma diminuição da freqüência também foram abordados com facilidade, embora fossem situações novas, que não tinham sido apresentadas nas atividades anteriores.

De modo geral, após dificuldades iniciais observadas na atividade com blocos anterior e durante a intervenção, a dupla pareceu, ao longo dos encontros, lidar facilmente com os problemas de comparação solicitados mesmo diante da presença de novos obstáculos: os blocos cobertos, a escala, o gráfico nominal e de dados em função do tempo. Podemos observar o uso consistente da estratégia de comparar o que é comum e acrescentar (ou tirar) o que falta para igualar as duas barras em todos os problemas.

A dupla mostrou, inclusive, uma flexibilidade no uso das estratégias podendo "tirar para igualar" ou "colocar para igualar", como na reapresentação do problema das faltas de Joana e Maria, em que D propõe o acréscimo na coluna menor para igualar à coluna maior e I afirma que *"tirando dois* [da coluna maior] *também fica igual".*

A alteração da questão de comparação (caso das questões do tipo: Quanto a planta cresceu dessa semana para essa outra?), também, não trouxe dificuldades para a dupla.

Dupla R e K (BF)

Problemas de Combinação (atividade 2, p. 57-8)

Blocos

P: O gato teve cinco votos e o pinto três.Quantos votos eles tiveram juntos?

R: Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito. Oito. [contando os blocos um-a-um].

Blocos cobertos (atividade 6, p. 62-3)

P: Quantos livros e jogos tem ao todo?

R: Livro tem seis e jogos três. Então…um, dois, três,... [contando em cima da barra].

K: Assim… [interrompe a contagem de R e coloca uma barra em cima da outra]. *Nove* [olhando na escala].

A dupla não apresentou dificuldades em lidar com essa nova situação.

Gráfico

Gráfico 1: gráfico do material escolar (atividade 8, p.64-5)

P: Quantos livros e gibis tem ao todo nessa sala? [gráfico com barras com linhas marcando as freqüências indicadas pela escala. Valores das barras: oito (gibis) e dois (livros)]

K: Dez.

R: Oito [lendo a barra de gibi na escala], *nove, dez* [contando em cima da barra de livro].

P: Como você fez K?

K: Eu pensei.

A estratégia utilizada no problema com blocos cobertos foi a mesma utilizada por R nesse problema com gráficos.

Gráfico 2: gráfico dos picolés comprados (atividade 8.1, p.65)

P: Quantos picolés João comprou? [gráfico construído pelas crianças em papel quadriculado. Valores das barras: cinco picolés de morango, dois picolés de côco e dois picolés de maracujá]

K: [Conta os quadrados pintados] *Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove.*

P: Eita! Esqueci, ele também comprou um picolé de limão.

Crs.: [Pintam um quadrado para representar o picolé de limão].

P: E agora, quantos picolés ele comprou ao todo?

R: Dez.

K: [Conta todos os quadrados um-a-um] *Dez.*

P: Como você fez R?

R: Nove com um, dez.

Gráfico 3: gráfico dos animais de um sítio (atividade 9.1, p. 67-8)

P: Quantos animais tem ao todo? [gráfico com linhas de grade]

Crs: [contam dentro das barras, um-a-um, os espaços entre as linhas] *21.*

De modo geral, problemas de combinação foram facilmente resolvidos pela dupla. A estratégia inicialmente usada pelas crianças foi a de contar todos. É interessante notar que as novas situações que foram se apresentando (blocos cobertos e gráficos) levaram a dupla a usar outras estratégias diferentes. No caso dos blocos cobertos, K interrompe a estratégia de contar todos adotada por R, colocando uma coluna em cima da outra e fazendo a leitura na escala. No primeiro problema no gráfico, R não utiliza mais a estratégia de contar todos, optando pela estratégia de contar a partir do maior, o que faz, consistentemente, também no segundo problema no gráfico após já saber um total e ser solicitada a incluir mais um picolé. O segundo problema é resolvido por K através da contagem de todos quadrados nas duas situações que foram apresentadas. No terceiro problema no gráfico, as duas crianças optaram por usar a estratégia de contar todos.

Problemas de Comparação

Blocos (atividade 3, p.58-60)

P: Joana faltou seis dias e Maria quatro. Quantas faltas Joana tem a mais que Maria?

K: Seis.

P: São todas as faltas de Joana, mas comparando as faltas de Joana com as de Maria, quantas faltas Joana teve a mais?

K: [Conta todos os blocos] *Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez.*

P: Dez são as faltas de Joana e Maria juntas. Vejam o que estou perguntando: Joana faltou seis dias e Maria quatro. Quantas faltas Joana tem a mais que Maria?

Crs: ...

Intervenção (atividade 3, p. 58-60)

P: Marcos e Paulo faltaram cinco dias de aula cada um.

K: Um, um. Dois, dois. Três, três. Quatro, quatro. Cinco, cinco. [Constroem colunas].

R: [Conta todas] *Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez.*

P: Eles faltaram o mesmo tanto de dias?

Crs: Sim.

P: Paulo ficou doente e faltou mais dois dias [coloca mais dois blocos na barra de faltas de Paulo]. *Agora, quantas faltas Paulo tem a mais do que Marcos?*

R: Sete.

P: Sete são todas as faltas de Paulo, mas quantas faltas ele teve a mais do que Marcos?

K: 12. [contando todos os blocos um-a-um].

P: 12 são as faltas dos dois juntos, não é? Comparando as faltas de Paulo com as faltas de Marcos, os dois tiveram cinco faltas, depois Paulo teve mais duas faltas. Quantas faltas Paulo teve a mais do que Marcos?

K: Esse deu sete e esse deu cinco [mostrando colunas].

P: Certo. E esse teve quantas faltas a mais do que esse?

R: Duas [mostra dois dedos].

P: Como tu sabes?

R:...

K: Pra colocar duas [coloca dois blocos na barra menor].

P: Por que?

K: Aí fica igual.

R: Um, dois. Sete e sete.

P: Certo. E quantos dias Paulo faltou a mais do que Marcos?

K: 12.

R: Dois dias a mais.

P: Por que?

R: Sete e sete [quantidade nas barras]. *Ele estava doente. Dois dias a mais.*

Reapresentação do problema anterior

P: Joana teve seis faltas e Maria quatro. Quantas faltas Joana teve a mais do que Maria?

Crs.:[Constroem barras] *Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez* [contando todos os blocos]. *As duas faltaram dez.*

P: Dez dias elas faltaram juntas. Quantos dias Joana faltou a mais do que Maria?

K: Dois.

P: Como você sabe?

K: [Tira os dois blocos a mais] *Um, dois. Ela ficou doente.*

P: E como você sabe que são dois dias a mais e não três?

Crs:...

Diante da insegurança da dupla nesse tipo de problema, resolvido inicialmente como se fosse de combinação, e da dificuldade em explicitar a estratégia usada, o pesquisador voltou à situação de intervenção.

Volta a situação de intervenção:

P: Como vocês fizeram no outro [Repete problema da intervenção].

R: Ele ficou doente. Foi dois.

P: E por que foi dois e não três ou quatro?

R: Foi dois.

P: Como vocês sabem?

Crs:...

P: Eles tinham faltado igual [coloca barras iguais de cinco e cinco]. *Depois Paulo ficou doente e faltou mais dois dias* [coloca mais dois]. *Quantas faltas Paulo faltou a mais?*

R: Dois.

P: Como você fez?

R:...

P: Se ele tivesse faltado três dias a mais?

R: Não foi, não fica igual.

K: [Tira três peças]. Não fica igual.

R: Dois dias a mais.

É interessante notar que o caminho seguido pelas crianças é encontrar a igualdade entre a altura das barras. Esse tipo de estratégia foi a mesma usada pela dupla BB.

Reapresentação do 1º problema

P:Então, aqui, Joana teve seis faltas e Maria quatro. Quantas faltas Joana teve a mais do que Maria?

K: Essa passou dessa dois dias [mostrando blocos sem correspondência].

P: Então, quantas faltas Joana teve a mais do que Maria?

K: Um, dois, três,..., dez. [conta todos os blocos]

R: Tem dez ao todo.

P: Certo, dez ao todo. E quantas faltas Joana teve a mais do que Maria?

K: Essa ficou pequena e essa não [comparando as colunas]. *Essa teve doente e essa não teve.*

P: E quantos dias de falta a mais Joana teve porque ela estava doente? [pesquisador aproveita a justificativa usada pela criança]

K: Dois.

P: Como você sabe?

K: Por que eu sei.

P: E você R, o que acha?

R: ...

P: Como você está pensando? Quantos dias de falta Joana teve a mais do que Maria?

R: Dois. Falta dois para ficar igual.

Diante da insegurança ainda demonstrada, principalmente no início, pela dupla em suas respostas a esse problema e do fato do mesmo ter como resposta o mesmo valor do problema usado na intervenção, o pesquisador apresenta outros problemas previstos no planejamento da atividade 3 (p.60) para acompanhar o raciocínio usado pelas crianças.

Problema 1:

P: Augusto faltou três dias e Pedro dois. Quantos dias Augusto faltou a mais do que Pedro?

R: Um.

P: Como você sabe?

R:...

K: Esse [coluna maior] *faltou um a mais.*

P: Como você sabe?

K: Eu sei.

Problema 2:

P: Maria teve quatro faltas e João uma. Quantos dias Maria faltou a mais do que João?

K: Dois.

R: Não, três. Três faltas.

P: Como você sabe?

K: [Pega três blocos de outra cor e acrescenta]. *Ficou igual.*

R: Três para ficar igual.

Dois dias depois (atividade 3.1, p.60-1):

P: No outro mês, Joana teve cinco faltas e Luiza duas. Quantas faltas Joana teve a mais do que Luiza?

[Crianças construíram barras com as quantidades indicadas pelo problema]

R: Três.

K: Três. Ela passou três desse [mostra a correspondência entre as colunas].

R: [Mostra as três peças sem correspondência].

Após a primeira intervenção, as crianças parecem permanecer ainda com dificuldades observadas a partir de suas respostas na reapresentação do primeiro problema quando enfocaram o total de faltas e não a relação entre as faltas. A volta à intervenção se deu para tentar refletir mais com as crianças sobre as relações envolvidas entre as medidas que estavam sendo comparadas. Na reapresentação do primeiro problema, a dupla ainda apresentou dificuldades, buscando, inicialmente, relatar relações já familiares, tais como o total de faltas, quem tem mais e quem tem menos.

Quando o pesquisador aproveitando a justificativa de K, questiona sobre quantas faltas Joana teve a mais porque estava doente, a resposta de K ("dois") podia estar focalizando a relação entre a quantidade de faltas ou, também podia estar simplesmente, relembrando o que tinha sido expresso na intervenção ("faltou mais dois dias porque estava doente"). Entretanto, R pela primeira vez, explicita melhor sua resposta ("dois a mais. Falta dois para ficar igual") baseada na relação com a igualdade que já vinha sendo construída desde a intervenção. Entretanto, podemos observar que com o decorrer dos problemas, R e K parecem superar as dificuldades iniciais, explicitando melhor o raciocínio utilizado.

Blocos cobertos (atividade 6, p. 62-3):

P: Quantos livros tem a mais do que jogos? [Seis livros e três jogos]

K: Seis.

P: Seis são os livros. Lembram dos problemas sobre as faltas… Joana teve seis faltas, Maria quatro. Quantas faltas Joana teve a mais do que Maria? ... Agora, quantos livros tem a mais do que jogos?

R: Três a mais, falta três para ficar igual.

K: [Coloca uma coluna em cima da outra].

R: Não, é aqui que falta [mostra o que está sem correspondência].

P: Como você fez R? Explique a K.

R: Eu fiz… falta três pecinhas para ficar igual [coloca colunas lado a lado e mostra na escala os três que faltam para ficar igual].

Gráfico

Gráfico 1: gráfico do material escolar (atividade 8, p. 64-5)

P: Quantos livros tem essa sala a mais do que essa? [comparando dois gráficos] [freqüência das barras: seis num gráfico e dois no outro]

K: Aqui tem dois e aqui tem seis.

P: E quantos livros essa sala tem a mais do que essa?

Crs: ...

P: Lembram do problema das faltas? Comparando as faltas de duas crianças…

Crs: ...

P: Vejam aqui [duas barras, uma com cinco e outra com três blocos]. *Quantos blocos aqui tem a mais do que aqui?*

K: Dois. Falta dois pra ficar a quantidade certa [mostrando os dois blocos sem correspondência].

P: E aqui, quantos livros essa sala tem a mais do que essa?

R: Tem mais quatro.

P: Como foi que você fez?

R: Eu contei um, dois, três, quatro [em cima da coluna do dois, contou quatro espaços até chegar ao seis na escala].

No problema com blocos cobertos K apresentou, inicialmente, o valor da barra maior como resposta. Após a referência do pesquisador às atividades com blocos resolvidas anteriormente a dupla respondeu corretamente ao problema. A dupla também apresentou dificuldades no primeiro problema com gráficos, sendo necessário uma intervenção do pesquisador propondo um novo problema semelhante (com outro par numérico) usando os blocos. Esse problema foi solucionado com facilidade sendo então retomado o problema no gráfico e resolvido pela dupla com sucesso.

Gráfico 2: gráfico dos picolés comprados (atividade 8.1, p. 65)

P: Quantos picolés de morango ele comprou a mais do que picolés de côco? [gráfico construído pelas crianças em papel quadriculado] [freqüência das barras: cinco picolés de morango e dois de côco]

R: Porque é mais grande.

K: Esse tem cinco [barra correspondente aos picolés de morango] *, esse tem dois* [barra correspondente aos picolés de côco]*, esse tem dois* [barra correspondente aos picolés de maracujá] *e esse um* [barra correspondente ao picolés de limão].

P: Certo, mas quantos picolés de morango tem a mais do que de côco?Como vocês fizeram com o problema das faltas...

R: ...Falta mais três pra ficar igual a esse. Três a mais [acima da coluna de dois, conta um, dois, três quadrados igualando à coluna de cinco].

Podemos observar que a estratégia que vem sendo usada por essa dupla é a mesma que a dupla forte-forte utilizou, que enfatiza a busca pela igualdade.

Gráfico 3: gráfico dos animais de um sítio (atividade 9.1, p.67-8)

P: Quantos pintos tem a mais do que cachorros? [freqüência das barras: sete e quatro]

K: Cachorros tem quatro.

R: Pinto tem mais.

P: Pinto tem mais.

R: Tem sete pintos. [Conta todos] *11 pintos e cachorros.*

P: 11 pintos e cachorros. Quantos pintos tem a mais do que cachorros?

R: Esse tem mais [a coluna do pinto]. *Tá faltando três pra esse* [conta acima da coluna do cachorro os espaços, até igualar com a coluna do pinto]. *Três, esse tem mais.*

É interessante notar que no encontro em que se trabalhou com os blocos cobertos, a dupla apresentou dificuldades iniciais, superadas a partir da referência do pesquisador aos problemas anteriores. No primeiro problema no gráfico, a dupla também apresentou dificuldades mas que foram superadas a partir da introdução de um problema com blocos. Ainda que as crianças tenham resolvido corretamente os problemas seguintes, podemos perceber que suas primeiras respostas sempre procuram realizar leituras dos valores das barras do gráfico ou comparar “pinto tem mais” sem quantificar, o que pode ser um indicativo de que a compreensão de problemas de comparação ainda não se apresenta completamente consistente.

Outros problemas foram realizados a partir de gráficos que envolviam a mudança de uma freqüência no tempo. Vejamos o que aconteceu:

Gráfico do crescimento de uma planta (atividade 9, p.66-7)

P: Essa plantinha está crescendo ou não?

R: Está. Aqui está mais dois [mostrando a altura da segunda para a terceira semana].

P: E da primeira para a segunda semana?

R: Aumentou dois.

P: K, veja da altura de dois canudos para a altura de quatro canudos, quanto a plantinha aumentou?

K:…Dois.

R: Aqui K [coloca dois dedos acima da barra da primeira semana, igualando com a altura da segunda semana].

P: E da segunda para a terceira semana?

R: Aumentou dois [coloca dois dedos em cima da segunda barra, mostrando a igualdade com a terceira semana].

Gráfico sobre venda de picolés em uma semana (atividade 9.1, p. 67-8)

P:...Qual dia ele vendeu mais picolé?

K: Foi nove, no sábado [olhando a escala]. *Tem mais.*

R: Aqui [barra do domingo] *falta mais um para ficar igual* [ao sábado]. *Aqui* [quinta-feira] *falta três para a sexta. Aqui* [barra da segunda-feira] *falta um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete* [contando na escala] *para ficar igual ao sábado.*

P: E que dia vendeu menos?

Crs: Aqui [segunda-feira].

R: Falta mais sete para ficar igual ao dia que vendeu mais.

P: Da segunda- feira para a terça-feira, ele aumentou ou diminuiu a venda de picolés?

K: Aumentou.

R: Falta mais três, um, dois, três [contando os espaços acima da barra da segunda-feira até atingir o topo da barra da terça-feira].

P: E da terça para a quarta- feira?

R: Aumentou um.

[R continua fazendo todas as comparações entre as quantidades vendidas ao ser questionada pelo pesquisador]...

P: E de quarta para quinta-feira, o que houve?

R: Aqui [quarta para quinta-feira] *diminuiu três, um, dois, três* [contando da barra da quarta para a barra da quinta-feira]...

Podemos observar que a compreensão da dupla parece estar sendo ampliada ao longo dos encontros. No último gráfico apresentado (sobre a venda de picolés) R, espontaneamente, estabeleceu relações entre os valores das barras do gráfico. K permitiu que R dominasse a entrevista e respondesse a maioria das questões. A dupla não apresentou nenhuma dificuldade em lidar com a mudança de questão (caso das questões do tipo: ...quanto a planta aumentou?) e com situações de diminuição e não de acréscimo, como vinha acontecendo nos problemas anteriores.

Dupla I e A (FF)

Problemas de Combinação

Blocos (atividade 2, p. 57-8)

P: O gato teve cinco votos e o pinto três. Quantos votos ao todo tiveram o gato e o pinto?

I: Um, dois, três,..., sete, oito [contando todos os blocos].

P: Você concorda A?

A: Sim.

Blocos Cobertos (atividade 6, p. 62-3)

P: Vocês disseram que tinham seis livros e três jogos. Quantos livros e jogos tem ao todo?

I: 10! [tentando fazer a contagem um-a-um nas barras cobertas].

A: Não, nove. Seis do livro e três do jogo. Se completar em cima dá nove. [Coloca uma barra em cima da outra e mostra na escala o valor alcançado].

P: Como você fez?

A: Peguei o seis [mostra a barra correspondendo ao seis na escala] e botei o três [aponta a escala], *sete,oito, nove. Dava nove.*

I tentou usar, inicialmente, a mesma estratégia usada com sucesso no problema com blocos visíveis.

Gráfico

Gráfico 1: gráfico do material escolar (atividade 8, p. 64-5)

P: Quantas gibis e livros tem nessa sala ao todo?

I: Duas [mostrando as duas barras].

A: Aqui [mostra barra dos livros] *tem dois.*

P: Quantas gibis e livros tem ao todo nessa sala?

A: 20!

I: 20.

P: 20? Como vocês fizeram?

A: [Conta dentro das barras, nos espaços entre as linhas] um, dois [barra dos livros]. *Três, quatro,..., nove, dez* [barra das gibis].

Gráfico 2: gráfico dos picolés comprados (atividade 8.1, p. 65)

P: Quantos picolés tem ao todo? [Cinco de morango, dois de maracujá e dois de côco]

I: Cinco [de morango], *seis, sete, oito, nove* [conta bem rápido os quadrados], *nove, não, oito.*

A: [Conta todos os quadrados no gráfico, começando pela barra do morango]. *Um, dois, três,..., oito, nove. Nove.*

I: É, nove.

P: Eita! Ele também comprou um picolé de limão.

Crs: [Contorna um quadrado para representar o picolé de limão correspondente e faz um desenho no eixo "x" para representar o picolé de limão].

P: E agora? Quantos picolés ele comprou ao todo?

A: [Conta todos os quadrados um-a-um]. *Dez.*

I: [conta todos os quadrados um-a-um]. *Dez.*

Gráfico 3: gráfico dos animais de um sítio (atividade 9.1, p. 67-8)

P: Quantos animais tem ao todo no gráfico?

A: [Conta nas barras, nos espaços entre as linhas]. *Um, dois, três, ..., vinte, vinte e um. Vinte e um.*

I: É, 21.

A estratégia de contar todos um-a-um foi usada inicialmente pela dupla no problema com os blocos visíveis. A presença dos blocos cobertos representou um obstáculo para o uso dessa estratégia, levando ao uso de uma nova estratégia: contar a partir do número maior. Esta estratégia foi utilizada novamente por I no gráfico dos picolés comprados, na atividade 8.1. Nos outros problemas com gráficos, a dupla usou a estratégia de contar todos, usando os espaços entre as linhas como unidade para a contagem.

Problemas de Comparação

Blocos (atividade 3, p. 58-60)

P: Joana teve seis faltas e Maria teve quatro. Quantas faltas Joana teve a mais do que Maria?

A e I: [Constroem barras representando a quantidade de faltas de Joana e de Maria]. *Joana faltou mais.* [Contam a barra] *Seis.*

P: Como vocês sabem que Joana faltou mais?

I: É mais grande.

P: Quantas faltas Joana teve a mais do que Maria?

A: Seis.

P: Seis são todas as faltas de Joana. Mas comparando as faltas de Joana com as faltas de Maria, quantas faltas Joana teve a mais do que Maria?

A e I: [Contam as faltas de Maria e de Joana] *Um, dois, três,..., dez.*

P: Essas são as faltas de Maria e Joana?

A: É.

P: Mas o que estou perguntando não é quantas faltas elas tem ao todo... Comparando as faltas de Joana e Maria, quantas faltas Joana tem a mais do que Maria?

I: Seis [mostra coluna de Joana].

Intervenção (atividade 3, p. 58-60)

P: Marcos e Paulo faltaram cinco dias de aula cada um.

Crs.: [Construíram as colunas].

P: Eles faltaram o mesmo tanto de dias?

Crs: Sim.

P: Paulo ficou doente e faltou mais dois dias [coloca mais dois blocos na barra de faltas de Paulo]. *Agora, quantas faltas Paulo tem a mais do que Marcos?*

A: Sete.

P: Vejam, vocês disseram que até aqui eles faltaram o mesmo tanto [mostra as barras]. *Depois Paulo ficou doente e faltou mais dois dias. Quantas faltas ele teve a mais do que Marcos?*

I: Sete a mais![mostrando a barra de Paulo].

Diante das dificuldades que as crianças ainda apresentavam foi introduzida uma outra situação que objetivou tornar a igualdade inicial mais saliente através do uso da correspondência um-a-um:

P: Vamos fazer assim: a cada falta de Paulo, vocês colocam a de Marcos. Paulo teve uma falta [coloca um bloco para Paulo] *e Marcos também faltou um dia* [as crianças colocam um bloco para Marcos]...[quando chega a cinco faltas cada um, o pesquisador pergunta:] *Quantas faltas cada um teve?*

Crs: Cinco.

P: Só que Paulo ficou doente e teve mais duas [coloca mais dois blocos na barra de Paulo]. *Quantas faltas Paulo teve a mais do que Marcos?*

A: Sete.

I: [conta todas] *12.*

P: 12 foi o que?

I: Os dois juntos.

P: Compare as faltas dos dois. Quantas faltas eles tem igual?

I: Cinco e cinco.

P: E quantas Paulo teve que Marcos não teve?

A: Duas.

P: Quantas faltas Paulo tem a mais do que Marcos?

Crs:...

P: Duas faltas [pesquisador mostra na barra] *Paulo tem a mais do que Marcos. Paulo teve sete faltas e Marcos cinco. Os dois tiveram cinco faltas* [pesquisador mostra a correspondência] *e Paulo teve duas faltas a mais* [mostrando a diferença].

Devemos notar que ainda que as crianças percebessem a diferença entre as faltas de Paulo e Marcos, apresentaram dificuldades em responder a questão sobre a comparação, "quantos a mais". Como estava previsto no planejamento da atividade 3, nos casos em que a dupla após a intervenção com correspondência um-a-um não conseguisse responder ao problema proposto, o pesquisador apresentava a resposta correta, mostrando a correspondência e a diferença entre as quantidades.

Reapresentação do problema inicial

P: Joana tem seis faltas e Maria quatro. Quantas faltas Joana tem a mais do que Maria?

A: Seis.

P: Comparando as faltas de Maria e Joana. Quantas faltas Joana têm a mais do que Maria?

I: Quatro [mostra barra de Maria].

P: Como foi que fizemos no problema de Marcos e Paulo?

Crs:...

Apesar da explicação anterior fornecida pelo pesquisador, a dupla ainda permaneceu com dificuldades nesse tipo de problema.

Volta à situação de intervenção:

P: Cada peça é um bombom, certo? Para cada bombom que I ganhar, A ganha um também.

[Crianças fazem por correspondência duas colunas com três blocos cada].

P: Vocês têm a mesma quantidade?

Crs: Tá igual.

P: A foi muito legal hoje, ajudando sua mãe em casa. Vou dar mais dois bombons a ele. Quantos bombons A ganhou a mais do que I?

I: Cinco [mostrando a barra de A].

P: Três vocês dois tem.

A: Dois a mais.

P: Como você está fazendo? Mostra para I.

A: Esses dois [retira os dois a mais, deixando as colunas iguais].

P: Até aqui [mostra as colunas] *vocês tinham a mesma quantidade.*

I: Esses dois a mais [segurando as peças].

Reapresentação do 1º. Problema:

P: Joana teve seis faltas e Maria quatro. Quantas faltas Joana teve a mais do que Maria?

A: Duas [retira os dois blocos a mais] *e junta as barras.*

P: Explica A como você fez.

A: Tirei essas duas aí ficou igual. É duas, então.

Diante das dificuldades anteriores mostradas pela dupla e também em razão do problema acima envolver a mesma diferença entre as quantidades do problema usado na intervenção, apresentamos o problema seguinte resolvido no mesmo encontro.

2º. Problema

P: Agora outro problema: Joana teve seis faltas e Luiza teve duas. Quantas faltas Joana teve a mais do que Luiza?

A: duas [retira duas peças].

P: E você, I, acha o que?

I: Seis, não, um, dois, três, ..., seis [conta barra de Joana]. *Sete, oito* [barra de Luiza]. *Oito.*

P: Como foi que vocês fizeram no problema dos bombons? Agora é com as faltas de Joana e Luiza. Quantas faltas Joana teve a mais do que Luiza [mostrando as barras]?

A: ...quatro.

P: Por que quatro?

A: Porque mais um, mais um, mais um, mais um. É quatro [mostrando as peças sem correspondência].

No problema acima, A, inicialmente, respondeu "dois" possivelmente porque nos problemas anteriores a resposta também foi dois. Entretanto, após a referência do pesquisador à situação de intervenção, ele conseguiu resolver o problema. I ainda persistiu tentando usar uma estratégia já familiar, a de combinar as quantidades, sem perceber a inadequação da mesma ao problema questionado.

Dois dias depois (atividade 3.1, p..60-1)

P: No outro mês Joana teve cinco faltas e Luiza duas. Quantas faltas Joana teve a mais do que Luiza?

A: Cinco.

P: Cinco são as faltas de Joana.. Lembram dos problemas daquele outro dia sobre as faltas de Joana e Maria ....

I: [Coloca mais dois blocos, ficando uma barra de cinco e outra com quatro]. *Falta mais um* [acrescenta ficando as duas barras com cinco blocos].

P: Quantas faltas Joana teve a mais que Luiza?

A: Cinco.

I: [Separa a barra de cinco em duas barras, uma com três blocos e outra com dois]. *Três a mais. Duas já tinha.*

Esta dupla apresentou grande dificuldade nesse tipo de problema. Inicialmente na intervenção, as crianças não conseguiram resolver o problema proposto sozinhas sendo, então, apresentado pelo pesquisador uma explicação para a dupla. Entretanto, no problema seguinte as dificuldades permaneceram. Foi, então, introduzida uma nova intervenção. Mesmo após essa segunda intervenção, A e I não pareceram seguros na resolução deste tipo de problema. Como os problemas até então envolviam sempre a relação "dois a mais", ao ser modificado o valor dessa relação em um outro problema (par numérico seis e dois), as dificuldades da dupla voltaram a aparecer. No entanto, após uma nova intervenção do pesquisador relembrando a intervenção realizada anteriormente, **A** conseguiu resolver o problema. Dois dias após, numa nova série de problemas de comparação, ainda não observamos o acerto imediato, entretanto I conseguiu resolver o problema após a intervenção do pesquisador.

Blocos Cobertos (atividade 6, p. 62-3)

P: Quantos livros tem a mais do que jogos? [seis livros e três jogos]

I: Oito.

P: Como você fez?

A: Dois.

I: Eu digo que é dez.

P: Dez a mais? Mas só tem seis livros e três jogos. Como pode ter dez a mais?

A: Seis.

P: Seis é a quantidade de livros. E tem três jogos. Quantos livros tem a mais do que jogos? Como vocês fizeram antes, nos problemas das faltas?

A: Aqui tem três. Precisa botar três.

P: Como você está fazendo?

A: Precisa de três. Se botar um, outro e outro [bloco] *fica igual* [olhando as barras e apontando na escala os números quatro, cinco e seis, contando como um, dois e três]. *Três a mais.*

Os blocos cobertos trouxeram um novo obstáculo para a dupla, que não podia mais contar os blocos um-a-um, precisando para isso usar a escala. **I** apresentou maiores dificuldades, entretanto, **A** conseguiu resolver o problema adequadamente após a referência do pesquisador às situações anteriores. É interessante notar que **A** pareceu transformar o problema proposto em um problema de obtenção da igualdade entre as barras.

Gráfico

Gráfico 1: gráfico sobre o material escolar (atividade 8, p. 64-5)

P: Quantos livros tem essa sala a mais do que essa? [comparando dois gráficos] [freqüência das barras: seis num gráfico e dois no outro]

A: Quatro.

P: Como você sabe?

A: Aqui tem seis [mostra barra no gráfico]. *Se tirar quatro fica igual* [cobre com os dedos os dois quadrados mais próximos à base da barra e conta os quadrados seguintes]. *Um, dois, três, quatro*.

Inicialmente podemos observar o acerto imediato nesse problema no gráfico. O fato de um dos gráficos, o que continha as quantidades maiores ser construído no papel quadriculado, que delimitava as unidades, pode ter sido um fator auxiliar. Tal como as outras duplas analisadas, esta dupla pareceu transformar o problema proposto em um problema de igualização. Os demais problemas foram resolvidos por **A** da mesma forma. Quando não estava usando papel quadriculado, **A** usava os espaços entre as linhas de grade do gráfico para marcar as unidades, como pode ser visto nos exemplos seguintes:

Gráfico 2: gráfico dos picolés comprados (atividade 8.1, p. 65)

P: Quantos picolés de morango ele comprou a mais do que picolés de côco? [gráfico construído pelas crianças em papel quadriculado] [freqüência das barras: cinco picolés de morango e dois de côco]

A: Três.

P: Como você fez?

A: Aqui tem cinco. Se tirar três aí fica igual [na barra de cinco, a partir do segundo quadrado conta um, dois, três quadrados]. *É três.*

P: Concorda I?

I: Sim. É três.

Gráfico 3: gráfico dos animais de um sítio (atividade 9.1, p. 67-8)

P: Quantos pintos tem a mais do que cachorros? [freqüência das barras: sete e quatro]

A: Três. Aqui tem quatro, tem que colocar mais três para fazer igual [coloca três dedos acima da coluna dos cachorros, nos espaços entre as linhas, atingindo o topo da barra dos pintos].

Gráficos que envolviam dados em função do tempo:

Gráfico do crescimento de uma planta (atividade 9, p. 66-7)

P: Quanto essa planta cresceu da primeira para a segunda semana?

A: Dois. Colocou mais dois.

P: E da segunda para a terceira semana?

A: Tinha dois.

P: Veja, tinha quatro.

A: Tinha quatro, colocou dois, ficou seis [coloca dois dedos acima do quatro mostrando a igualdade com a barra seguinte, de seis].

P: Veja I, A está dizendo que da primeira semana para a segunda a planta cresceu dois canudos, e da terceira para a quarta também cresceu dois.

I: É [distraído].

P: O que você acha?

I: ...

[Mais adiante da entrevista...]

P: Vamos ver, daqui para cá [primeira para segunda semana] *o que houve I?*

I: Esses dois [coloca dois dedos acima da barra de dois até atingir a barra de quatro, dois espaços].

P: E da segunda para a terceira semana?

I: Esses dois [repete o mesmo procedimento anterior]. *Aumentou.*

Gráfico da venda de picolés (atividade 9.1, p.67-8)

P: Da segunda para a terça- feira, ele aumentou ou não a venda dele?

I: Cinco [barra referente a terça-feira].

A: Dois [barra referente a segunda-feira].

P: Ele tinha vendido dois e vendeu cinco na terça. Ele aumentou ou não a venda dele?

A: Aumentou.

I: Tá cinco.

P: Ele aumentou em quantos picolés a venda dele?

I: Cinco.

P: Quantos picolés ele vendeu na terça- feira a mais do que na segunda-feira?

A: Três.

I: Três.

A: Aqui é dois, não é? [Coloca dois dedos cobrindo dois espaços da barra da terça-feira e conta os espaços restantes até o final da barra] *Um, dois, três.*

P: E da terça para a quarta-feira, ele aumentou a venda ou diminuiu?

A: Aumentou.

P: Em quanto ele aumentou a venda?

I: Seis.

A: Não, um [mostra na barra do seis um a mais depois da altura que corresponde a barra do cinco].

P: Explica para I.

A: É um, ó [repete o procedimento anterior].

P: E da quarta para a quinta, ele aumentou ou diminuiu a venda dele?

Crs: Diminuiu.

P: Diminuiu em quanto?

A: Em um, dois, três [mostrando três dedos].

P: Como foi que você fez?

A: *Um , dois, três* [Conta acima da barra menor, da quinta-feira, para igualar a barra da quarta-feira].

Nos exemplos acima envolvendo problemas de comparação com gráficos, podemos observar que A dominou as entrevistas. No último gráfico, a mudança no tipo de questão (de “quantos a mais?” para “quanto aumentou a venda?”) trouxe dificuldade para a dupla. Tal dificuldade foi superada quando o pesquisador voltou a usar o mesmo tipo de questão já conhecido das crianças (“quantos a mais?”). A situação de diminuição não causou dificuldades a mais para **A**, que resolveu usando a mesma estratégia usada anteriormente, acrescentar à coluna menor até igualar a maior.

Comparação dos desempenhos das duplas

Para facilitar a compreensão do leitor do desenvolvimento das atividades com as duplas, apresentamos, abaixo, dois quadros sintéticos (3 e 4) com alguns aspectos que merecem ser realçados em relação aos problemas de combinação e de comparação.

Quadro 3: Síntese do desempenho das duplas nos problemas de combinação

Tipo de suporte representacional	Dupla D e I (BB)	Dupla R e K (BF)	Dupla I e A (FF)
Blocos de encaixe	-Acerto imediato. -Usa fato memorizado ("cinco com três dá oito") e posiciona uma barra em cima da outra.	- Acerto imediato -Estratégia de contar todos.	- Acerto imediato - Estratégia de contar todos.
Blocos cobertos	- Acerto imediato - Posiciona uma barra em cima da outra, lendo o resultado na escala.	- Acerto imediato -Tenta contar as unidades por cima da barra - Posiciona uma barra em cima da outra, lendo o resultado na escala	-O acerto não é imediato - Tenta contar as unidades por cima das barras - Posiciona uma barra em cima da outra, lendo o resultado na escala
Gráficos	- Acerto imediato - Estratégias de acrescentar valor da barra menor à maior, e de contar todos.	-Acerto imediato -Estratégias de acrescentar valor da barra menor à maior, e de contar todos.	- O acerto não é imediato no primeiro problema com gráfico -Estratégia de contar todos.

Comparando os desempenhos das duplas acima, pudemos observar que problemas de combinação com blocos não trouxeram dificuldades para nenhuma das duplas, havendo acerto imediato por parte de todas as duplas. O uso de blocos cobertos trouxe maiores dificuldades para as duplas BF e FF que tentaram, inicialmente, usar a mesma estratégia usada com sucesso no caso dos blocos quando os mesmos estavam visíveis. Entretanto, ambas duplas conseguiram superar esse obstáculo utilizando uma estratégia nova na resolução do problema. No primeiro problema com gráfico, a dupla FF demonstrou alguma dificuldade, logo superada. As duplas BF e BB tiveram em todos os problemas acerto imediato e utilizaram dois tipos de estratégias: 1. contar todos usando para isso os quadrados (no papel quadriculado) ou os espaços entre as linhas de grade correspondentes às barras e 2. acrescentar o valor da barra menor à maior. É interessante que essa última estratégia foi usada pela dupla BB em todos os problemas com exceção do último problema com gráfico que envolvia valores maiores das barras e que a soma de tais valores ultrapassava a escala do gráfico. A dupla FF usou apenas a estratégia de contar todos nos problemas apresentados através de gráficos.

Analisando, especificamente, os problemas de comparação (Quadro 4, a seguir), observamos avanços na compreensão dos problemas em todas as duplas. A intervenção inicial não garantiu uma imediata compreensão dos problemas de comparação nas três duplas selecionadas para análise. Problemas com blocos cobertos foram facilmente resolvidos pela dupla BB enquanto que intervenções do pesquisador foram necessárias às outras duplas. Em relação aos problemas com gráfico, observamos que as crianças foram se familiarizando com essa forma de representação gerando leituras espontâneas como a realizada por R da dupla BF. Também notamos nas duplas BF e FF diferenças do ponto de vista conceitual entre as crianças que constituíam cada dupla. R, na dupla BF, e A, na dupla FF, pareceram dominar as entrevistas, principalmente nos problemas através de gráficos, mostrando maior desenvoltura e iniciativa nas interações com o examinador.

Outro aspecto a ressaltar foi o tratamento dado por todas as duplas aos problemas de comparação. As crianças pareciam transformar tais problemas em problemas de igualização para, então, resolvê-los. Esse aspecto é interessante pois apesar de terem tido uma intervenção enfocando a diferença entre as duas barras comparadas, as crianças usaram um vocabulário próprio, diferente do vocabulário utilizado na intervenção, enfocando o restabelecimento da igualdade. Ou seja, elas entendem o que está sendo solicitado e mostraram uma flexibilidade no uso de estratégias de resolução desse tipo de problema, que incluiu "tirar do maior para ficar igual" e "colocar no menor para ficar igual".

Pudemos ainda observar que para a dupla FF a mudança no tipo de questão (de "quantos a mais?" para "quantos aumentou?") constituiu-se em fonte de dificuldades.

Também, devemos considerar que os gráficos apresentados eram construídos em papel quadriculado ou tinham linhas de grade facilitando a visão das barras como constituídas por unidades. Tais subdivisões podem ter sido favoráveis à passagem do trabalho com blocos para a representação em gráficos. Nesse sentido, também o fato de trabalharmos apenas com gráficos de freqüências pequenas, em que as crianças não precisavam lidar com a correspondência um-para-muitos, deve ser um aspecto considerado nessa análise. Como iremos ver mais adiante, grande parte das duplas apresentou dificuldades em lidar com situações que envolviam esse tipo de correspondência.

Quadro 4: Síntese do desempenho das duplas nos problemas de comparação

Tipo de suporte representacional	Dupla D e I (BB)	Dupla R e K (BF)	Dupla I e A (FF)
Blocos de encaixe visíveis	-Não apresentam acerto imediato - Como resposta dão o valor da barra maior e depois, da menor.	-Não apresentam acerto imediato - Como resposta dão o valor da barra maior e depois, a soma dos blocos.	-Não apresentam acerto imediato - Como resposta dão o valor da barra maior e depois, a soma dos blocos.
Intervenção	- Necessidade de três tipos de intervenções (duas que enfatizam a correspondência entre as quantidades e a terceira que questiona o que é comum a ambas barras e quanto é diferente)	- Necessidade de apenas uma intervenção enfatizando a correspondência entre as quantidades. Entretanto, como ainda apresentaram dificuldades nos problemas com blocos, a intervenção foi repetida.	- Necessidade de três tipos de intervenções (duas enfatizando a correspondência entre as quantidades e a terceira questionando o que é comum a ambas barras e quanto é diferente). - Como a dificuldade ainda permaneceu, o pesquisador disse a resposta correta à dupla. - Durante a resolução dos outros problemas foi realizado ainda um retorno à intervenção
Blocos de encaixe visíveis	- Após as intervenções realizadas apresentam acerto imediato nos problemas com blocos - Justificam a resposta dada a partir da necessidade de restabelecer a igualdade entre as barras por acréscimo à barra menor ou retirando da maior.	- Após as intervenções uma integrante da dupla ainda apresenta dificuldade em um dos problemas - Justificam a resposta dada a partir da necessidade de restabelecer a igualdade entre as barras ou por mostrar os que não estão em correspondência	- O pesquisador fez referência em alguns problemas `a intervenção ou a outros problemas resolvidos anteriormente -Justificam a resposta dada a partir da necessidade de restabelecer a igualdade entre as barras ou por mostrar os que não estão em correspondência
Blocos cobertos	- Acerto imediato - Justificam a resposta mostrando os que não estão em correspondência.	- O acerto não é imediato. - o pesquisador faz referência a um problema resolvido no encontro anterior. - Justificam a resposta na necessidade de restabelecer a igualdade	- O acerto não é imediato. - o pesquisador faz referência a um problema resolvido no encontro anterior. - Justificam a resposta na necessidade de restabelecer a igualdade
Gráficos	- O acerto não é imediato em alguns problemas por um dos integrantes da dupla - Justificam as respostas a partir da necessidade de restabelecer a igualdade	- Dificuldades nos primeiros dois problemas, sendo realizadas intervenções (resolução de problema com blocos e referências à intervenção). - Nos dois últimos problemas com gráficos, apresentam acerto imediato e fazem uma leitura espontânea de algumas relações comparativas presentes nos gráficos.	- Apresentam acerto imediato nos problemas com exceção de um em que houve a mudança da questão de comparação de "...quantos a mais?..." para "...aumentou em quanto?..." - Justificam as respostas a partir da necessidade de restabelecer a igualdade

3.3.2 Dificuldades relacionadas ao sistema cartesiano

Considerando-se essas mesmas duplas que examinamos acima em relação à resolução de problemas de combinação e comparação, o segundo tópico analisado foi relativo às dificuldades relacionadas a aspectos do sistema cartesiano. Os aspectos analisados foram os mesmos a que nos referimos no capítulo 2 desse trabalho e que fizemos uma análise geral no início desse capítulo: a unidade de representação no gráfico, a estratégia de correspondência um para muitos e a linha de base.

3.3.2.1 Unidade de representação no gráfico

Foi desenvolvida uma atividade específica para trabalhar a importância do uso de uma unidade consistente de representação no gráfico. Essa atividade foi realizada após a resolução de problemas de comparação com uso de blocos, tendo sido a primeira atividade que teve como objetivo discutir alguns aspectos conceituais relacionados aos gráficos.

Nessa atividade apresentávamos às duplas colunas de blocos que representavam a quantidade de faltas de quatro crianças na escola. Uma das faltas de uma das colunas foi representada por um bloco de tamanho duplo, sem que os limites entre suas unidades constituintes pudessem ser vistos. A figura 29 apresenta uma visualização dessa atividade. Apresentamos a seguir a descrição, para cada uma das três duplas que analisamos, das entrevistas realizadas.

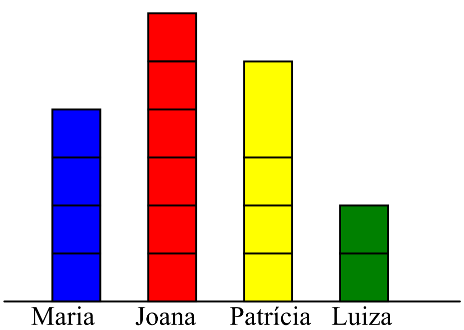

Figura 29: reprodução das barras apresentadas aos sujeitos na atividade de comparação de quantidades com variação da unidade de representação.

Atividade com bloco duplo (Atividade 4, p. 61)

Dupla D e I (BB)

O examinador apresentava quatro colunas dizendo que representavam a quantidade de faltas de quatro crianças. Era dito o nome das crianças com a respectiva quantidade de faltas, enquanto as barras iam sendo colocadas na frente da dupla. As colunas tinham quatro, seis, quatro e dois blocos, entretanto um dos blocos que fazia parte de uma das colunas com quatro blocos possuia tamanho duplo, sem qualquer divisão que mostrasse isso. Assim, essa barra com quatro blocos correspondia ao tamanho de uma barra com cinco blocos (veja figura 29, na página anterior).

D: Ó esse [o "bloco duplo"]! *Amarelo grandão.*

P: Há algum problema em usá-lo?

D: Não.

P: Quantas faltas cada criança teve?

Crianças: Quatro,seis, quatro, dois..

P: Quantas faltas Patrícia [blocos amarelos] *precisa ter para ficar com o mesmo número de faltas de Joana* [blocos vermelhos]?

I: Ela tem que faltar mais uma vez para ficar igual [comparando as colunas e acrescentando uma peça].

P: Quantas faltas ela tem agora?

D: Seis.

I: Seis.

D: Tá errado, é cinco.

P: Cinco ou seis?

Crianças: Um, dois, três, quatro, cinco [contando a coluna de Patrícia].

P: E Joana?

D/I: Um, dois, três, quatro, cinco, seis.

P: Pode ser?

D: É porque esse é grande.

I: Peraí. Um, dois, três, quatro, cinco, seis [conta dois no bloco grande].

D: Tem que contar ele como dois para ficar certo. Seis e seis.

A dupla resolve o conflito em relação ao valor representado pelo bloco duplo, mas com isso, há uma modificação no valor inicial das faltas de Patrícia, que passa a ser cinco e não quatro como afirmado no enunciado do problema.

P: Mas vejam, o problema foi Patrícia tem quatro faltas e Joana seis, quantas faltas Patrícia precisa ter para ficar igual a Joana?
Crs:...
P: [substitui o bloco duplo por um bloco simples].
D e I: Duas [juntando as colunas e contando os blocos sem correspondência].
I: Esse grande é dois. Um, dois, três, quatro, cinco, seis [troca dois blocos simples pelo grande].

É interessante notar que até o momento dessa atividade as crianças não estavam preocupadas com a "medida" da peça, simplesmente contavam a quantidade. Esta atividade permitiu que introduzíssemos uma novo aspecto a ser considerado pelas crianças no trabalho com gráficos, o uso de uma mesma unidade de representação.

Podemos observar que inicialmente D e I não consideravam problema usar o bloco grande. Eles estavam focalizando apenas o valor absoluto das barras e nesse sentido, mesmo com um tamanho diferente, aquela barra podia ser quantificada como tendo quatro blocos. Ao serem solicitados a resolverem um problema de igualização, o primeiro conflito colocado foi realçado, o valor duplo do bloco maior. Esse conflito foi resolvido pela dupla ao tratarem o bloco duplo como dois blocos simples. Entretanto, a dupla aceita a permanência do bloco duplo na coluna de Patrícia sem perceber as implicações acarretadas pelo uso de diferentes unidades de representação: a primeira refere-se ao fato de que nenhuma unidade foi retirada da barra de faltas de Patrícia, então contar o bloco duplo como dois viola a quantidade de falta inicialmente determinada para ser representada; a segunda consiste que o uso de unidades de representação diferentes confunde o leitor sobre o valor da freqüência que está sendo representado, provocando leituras e comparações inadequadas.

Em relação a representação de unidades nas atividades com gráficos, a dupla não mostrou qualquer dificuldade, pintando um quadrado para representar uma unidade, até completar o valor da barra solicitado pelo problema. Os gráficos produzidos podem ser visualizados no tópico referente à análise da questão da linha de base, mais adiante.

Dupla R e K (BF)

Esta atividade foi apresentada da mesma forma já descrita em relação à dupla anterior.

K: Seis, dois [contando os blocos]. *Peraí, não tá certo!* [Junta as barras de quatro e conta os blocos da barra que tem mais]. *Tá certo, quatro e quatro.*

P: O que houve?

K: Esse tá mais grande.

P: Está certo assim?

Crs: Essa tem quatro e essa quatro.

P: Pode ficar assim?

Crs: Pode.

P: Quantas faltas Patrícia precisa ter para ficar com o mesmo tanto de faltas de Joana?

R: Mais uma [coloca um bloco na coluna que tem o bloco duplo, que fica do mesmo tamanho da coluna com seis blocos].

P: Quantas faltas cada uma teve?

Crs: Cinco e seis [contando].

P: Mas não era para ficar o mesmo tanto?

K: [Conta de novo].

R: Esse aqui [bloco duplo] *está muito grande.*

P: Tem algum problema usá-lo?

R: Não.

P: Mas quando vocês colocaram mais um na barra amarela, vocês disseram que ficou uma barra com seis e outra com cinco…

Crs:…

P: Veja, quantas faltas Patrícia precisa ter para ficar com o mesmo tanto de faltas que Joana?

K: Tem que tirar uma de Joana. [Tira]. *Cinco e cinco* [conta].

As barras ficam como está ilustrado na figura 30, a seguir.

Figura 30: reprodução da barras movimentadas pela dupla R e K (BF) na atividade de variação da unidade de representação.

Para obter a mesma quantidade de blocos K retira um dos blocos da barra maior (de Joana) sem perceber que está transgredindo o próprio enunciado do problema. Tal como a dupla BB, ainda que percebessem a diferença entre o bloco duplo e os blocos simples, R e K consideraram pertinente o seu uso.

P: E agora, o tanto ficou igual mas a altura das colunas está diferente...
K: É esse maior, tira ele [diz para R].
R: [Troca o duplo por um simples. As duas barras ficam com cinco blocos].
P: Joana tinha seis faltas e Patrícia quatro [restabelece a quantidade de faltas de Joana e de Patrícia]. *Quantas faltas Patrícia precisa ter para ficar com o mesmo tanto de faltas de Joana?*
R: Duas.
K: [Completa a coluna amarela com mais dois blocos].
P: Como vocês sabem?
R: Para ficar na altura toda igual e no tanto.

As crianças, inicialmente, focalizaram apenas a questão da quantidade. Consideraram o bloco duplo diferente mas ao conferirem a quantidade de blocos da barra através da contagem do valor absoluto, aceitaram trabalhar com ele.

No problema de igualização, a dupla mudou o foco de atenção, concentrando-se na igualdade visual das barras e não demonstraram estranheza ao relatarem que representavam quantidades diferentes. As implicações de usar um bloco de tamanho diferente ainda não ficaram totalmente evidentes, de modo que a dupla sugeriu retirar um bloco de Joana, obtendo a igualdade na quantidade de blocos mas deixando a altura das barras diferente. Desse modo resolveram o conflito sobre a quantidade de blocos, mas não resolveram o problema colocado pois modificaram a quantidade original indicada pelo problema. Após nova intervenção do pesquisador, as crianças enfocaram o tamanho duplo do bloco como sendo indesejável, sendo então substituído por um bloco simples. O pesquisador, então, retomou o problema inicial, restabelecendo a quantidade de blocos de cada coluna. Na resolução final desse problema, a dupla enfatizou a necessidade de se obter a igualdade tanto em relação ao tamanho das colunas como em relação à quantidade de blocos.

Nas atividades seguintes envolvendo construção de gráficos, essa dupla demonstrou uso consistente de representações das unidades no gráfico (para visualização dos gráficos produzidos por essa dupla, veja o tópico sobre linha de base, mais adiante). Devemos lembrar, entretanto, que a presença do papel quadriculado nas atividades com gráficos pode ter tido um efeito facilitador pois a dupla optou por pintar os quadrados para representar as quantidades.

Dupla I e A (FF)

A atividade foi iniciada da mesma forma que foi com as dupla BB e BF, descritas acima.

A: Esse é grandão [apontando para o bloco duplo].

P: Quantas faltas tem cada uma?

Crs: [Apontando para as colunas e contando] *Um, dois, três, quatro* [uma]. *Um, dois, três, quatro, cinco, seis* [outra barra]. *Um, dois, três, quatro* [outra barra, com o amarelo grande]. *Um, dois* [outra barra].

P: Tem algum problema usar esse amarelo grandão?

Crs: Não.

P: Quantas faltas Patrícia [representada pela barra com o bloco duplo] *precisa ter para ficar com o mesmo tanto de faltas de Joana* [com seis blocos]?

I: Três.

A: Um.

I: [coloca um bloco na barra de Patrícia].

P: Quantas faltas Patrícia tem agora?

A: Seis.

P: Conta aqui.

A: Um, dois, três, quatro, cinco.

P: E Joana?

A: Um, dois, três, quatro, cinco, seis.

P: Cinco e seis? E agora?

A: [Conta de novo parecendo espantado] *Um, dois, três, quatro, cinco.*

P: Qual é o problema?

I: É por causa da gorda.

A: Fica parecendo seis.

P: Pode usar essa peça? [o bloco duplo]

Crs: Não.

P: Por que?

I: Fica errado [troca por outra peça simples].

P: E agora, quantas faltas precisam para ficar o mesmo tanto?

I: Duas, é duas [coloca].

P: E por que não pode usar a gordinha?

I: Ela é dois.

A: Fica cinco, parecendo seis.

Podemos notar que apesar das crianças perceberem a presença da peça diferente, inicialmente eles não consideraram problema em utilizá-la. O problema de igualização serviu, tal como no exemplo relativo as outras duplas, para levá-los a considerar as implicações do uso de diferentes representações para uma mesma unidade. Esta dupla ao constatar as conseqüências do uso do bloco duplo, considerou a utilização do mesmo inapropriada, trocando-o por um bloco simples. Dessa forma, resolveu completamente tanto o conflito sobre a quantidade de faltas de cada criança e a representação dessas faltas, como também o problema de igualização apresentado.

Nas outras atividades com gráficos, essa dupla optou por usar os quadrados do papel quadriculado como unidades de representação. No gráfico sobre material escolar eles optaram por pintar cada quadrado e, quando perguntado como iam saber o que cada barra estava representando, optaram por fazer o desenho, no interior do quadrado, do objeto que estava sendo representado. No gráfico sobre os picolés, a dupla apenas desenhou picolés, um em cada quadrado até atingir o valor indicado no problema. Os gráficos construídos por essa dupla encontram-se no tópico referente à análise da linha de base, mais adiante.

Comparação entre as duplas

Com o intuito de facilitar a comparação entre o desempenho das duplas, apresentamos abaixo um quadro sintético dos resultados discutidos anteriormente (Quadro 5).

Quadro 5: Síntese do desempenho das duplas na atividade envolvendo o uso de diferentes unidades de representação

Duplas	Atividade com o bloco duplo	Atividades com gráficos
Dupla D e I (BB)	- Inicialmente, não consideraram problema usar o bloco duplo. - Resolveram o conflito entre barras com mesma altura mas de diferentes valores contando o bloco duplo como dois. Entretanto, não perceberam as implicações disso para o valor original dos dados do problema. - Houve necessidade do pesquisador intervir para restabelecer as quantidades iniciais para o problema de igualização ser solucionado.	-Não apresentaram dificuldades com a representação no gráfico, pintando um quadrado no gráfico para representar cada unidade.
Dupla R e K (BF)	- Inicialmente, não consideraram problema usar o bloco duplo. - Resolveram o conflito entre o valor absoluto das duas barras de mesma altura tratando o bloco duplo como uma unidade e retirando um bloco simples da outra barra (a que não tem o bloco duplo) sem perceber as implicações disso para a resolução do problema proposto. Em seguida, retiraram o bloco duplo mas não restabeleceram as quantidades iniciais do problema. - Houve necessidade do pesquisador intervir para restabelecer as quantidades iniciais para o problema de igualização ser solucionado.	- Não apresentaram dificuldades com a representação no gráfico, pintando um quadrado no gráfico para representar cada unidade.
Dupla A e I (FF)	- Inicialmente, não consideraram problema usar o bloco duplo. - Resolveram o conflito entre diferentes valores de barras com mesma altura trocando o bloco duplo por um simples, resolvendo também o problema de igualização.	- Não apresentaram dificuldades com a representação no gráfico, pintando um quadrado para representar cada unidade e/ou fazendo um desenho do que está sendo representado em cada quadrado.

Podemos observar que ainda que todas as duplas resolvessem o primeiro conflito apresentado (quantidades absolutas diferentes em barras de mesma altura), as duplas BB e BF apresentaram maior dificuldade em perceber a inadequação do uso do bloco duplo e suas implicações. A dupla BB aceita o valor duplo do bloco mas não percebe que seu uso modifica o valor da coluna de faltas de Patrícia e compromete a comparação solicitada no problema de igualização. A dupla BF focaliza ora o tamanho das barras, ora o valor absoluto das mesmas, antes de considerar a inadequação do uso do bloco duplo. Apenas a dupla FF obteve um sucesso espontâneo diante do conflito posto, trocando o bloco duplo por um simples e resolvendo o problema de igualização.

Outro aspecto que devemos citar foi o bom desempenho dessas duplas nas atividades posteriores em que foram solicitadas a representarem determinadas quantidades em gráficos em que os eixos já estavam desenhados. Um provável fator facilitador foi o papel quadriculado que já deixava as unidades (quadrados) demarcadas. Nos dois gráficos que foram solicitadas a representar a dupla BB e a dupla BF pintaram os quadrados correspondentes às freqüências indicadas, enquanto que a dupla FF optou em um dos gráficos por pintar os quadrados e depois desenhar em cada quadrado o objeto que representavam (ao serem questionadas sobre como saberíamos sobre o que era aquela barra) e no outro gráfico, por fazer apenas os desenhos em cada quadrado, sem pintá-los.

3.3.2.2 Correspondência um-para-muitos

A atividade em relação a esse tópico foi realizada após a atividade com o bloco duplo (atividade 5, p. 62).

O seguinte problema foi apresentado para as duplas: João tem quatro lápis verdes na mão e Marcos tem dois azuis. Eu queria representar a quantidade de lápis de João e de Marcos, mas está faltando peças. Só tenho aqui duas peças verdes e uma azul. De que forma vocês poderiam representar as quantidades de lápis de João e Marcos, usando somente esses blocos?

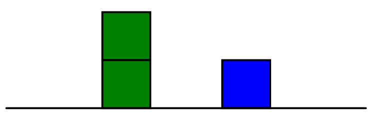

Figura 31: representação das barras utilizadas na atividade de correspondência um para muitos.

Dupla D e I (BB)

[Após serem questionado sobre o problema acima:]

I: Só se botar mais dois aqui [na coluna com dois blocos verdes] *e mais um aqui* [em cima do bloco azul].

D: Ou partia esses.

P: Mas não pode partir.

D: Então tem que botar mais.

Após esse problema, outro foi então apresentado. O contexto relatado às crianças se referiu a uma situação de jogo. Um papelzinho com um número escrito foi colocado em cada bloco de encaixe. O valor escrito no papelzinho indicava quantos lápis o bloco valia. Depois de se certificar que as crianças entenderam a atividade proposta, os papeizinhos foram colocados em três blocos amarelos e dois vermelhos. As crianças abriram os papeizinhos afirmando, então, que cada bloco valia dois lápis.

P: Quantos lápis tem aqui [uma barra com três amarelos e outra barra de dois vermelhos]?

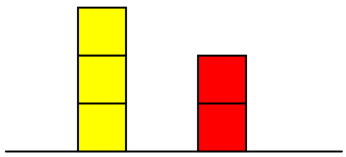

Figura 32: barras representando lápis amarelos e vermelhos na atividade de correspondência um para muitos.

D: Três e dois.

P: Mas cada peça não vale dois lápis?

I: Três e dois [mostrando as barras].

P: Uma peça vale quantos lápis?

Crs: Dois.

P: Como é que uma peça vale dois lápis e duas peças também valem dois lápis?

I: Aqui [barra de três] *tem três e aqui* [barra de dois] *tem quatro.*

D: Aqui [barra de dois] *tem quatro, tem quatro.*

I: Se tirar um amarelo fica a mesma coisa, fica quatro [tira uma peça amarela, igualando as colunas].

P: E se colocar mais essa peça?

I: Quatro e um, cinco.

D: [Conta os quatro pinos de encaixe de cada peça vermelha] *Um, dois, três, quatro. Um, dois, três, quatro. Essas duas valem oito* [Um , dois, três, quatro da primeira peça e cinco, seis, sete, oito, da segunda, contando os pinos de encaixe um-a-um].

D percebeu que cada bloco devia ter um valor diferente da unidade absoluta, parecendo procurar no bloco alguma característica concreta, visual, que lhe permitisse estabelecer a relação um-para-muitos.

P: Cada peça vale quantos lápis? Vocês viram no papelzinho.
Crs:Dois lápis.
P: Então, aqui tem quantos lápis?
D: Dois nesse e dois nesse [nos blocos vermelhos], *quatro.*
P: E quantos amarelos?
I: Dois não, três.
D: Não. [Conta os quatro pinos de encaixe de cada bloco, um-a-um] *Um, dois, três, ... doze. Doze!*
P: Cada peça vale quantos lápis que vocês viram no papelzinho?
Crs: Dois.
P: Quantos lápis valem três peças então?
D: Dois, quatro...
I: Cinco. Quatro mais um.
D: Vale dois.
I: Mais três.
D: Vale dois I! Quatro mais uma peça, dá ...cinco, seis. Seis!
I: Seis lápis amarelos.
P: Quatro lápis vermelhos e seis amarelos. Quantos lápis vermelhos precisam ganhar para ficar com o mesmo tanto de lápis amarelos?
I: Um.
D:Dois.
P: Por que um I? Por que dois, D?
D: Aqui tem dois e aqui tem três. Botando mais uma peça, dois lápis.

I: Uma peça, dois lápis, fica igual.

Podemos observar nesse protocolo como as crianças vão construindo a estratégia de correspondência um-para-muitos. Na primeira situação, anterior aos papeizinhos, elas não sugeriram, espontaneamente, a possibilidade de uso desse tipo de estratégia para lidar com o problema. A sugestão dos papeizinhos foi bem aceita pela dupla mas no primeiro momento, ainda foi difícil lidar com a relação um-para-muitos.

A correspondência um-para-muitos na quantidade menor (dois blocos - quatro lápis) foi primeiramente resolvida pelas crianças, que ainda assim, não transferiram imediatamente para a barra de três blocos. É interessante a estratégia de **D** que após ter resolvido a relação "dois blocos – quatro lápis", buscou alguma característica concreta nos blocos para utilizar a estratégia de correspondência na barra maior (três blocos). Foi quando ele utilizou os pinos de encaixe de cada bloco.

A intervenção do pesquisador relembrando a relação "um bloco-dois lápis" pareceu fundamental, bem como o momento em que I considera que dois blocos representam quatro lápis então mais um, fica cinco. Nesse momento D parece perceber a necessidade de não misturar a quantidade de peças com a quantidade de lápis, mantendo constante a relação "uma peça-dois lápis". Vamos rever esse trecho do protocolo:

I: Cinco. Quatro mais um.
D:Vale dois.
I: Mais três.
D: Vale dois I! Quatro mais uma peça, dá ... cinco, seis. Seis!
I: Seis lápis amarelos.

É interessante que **I** também pareceu acompanhar o raciocínio que **D** desenvolveu, explicitando o resultado obtido "seis lápis amarelos". Após esse momento, a relação peça-lápis pareceu ficar clara para a dupla, que resolveu sem dificuldades o problema de igualização proposto.

Dupla R e K (BF)

Problema "João tem quatro lápis verdes e Marcos tem dois azuis" - representar as quantidades de lápis com dois blocos verdes e um azul (o enunciado completo encontra-se na descrição da atividade 5, p. 62).

R: Aqui bota mais um [no azul] *e aqui bota mais dois* [no verde].
P: E não tem outro jeito?
Crs: Não.
P: A gente pode dizer que esses dois valem quatro lápis, por exemplo?
Crs: Não..

Apresentação do segundo problema em que cada bloco representava dois lápis. A dupla foi questionada sobre quantos lápis estavam representados em duas colunas, uma com dois blocos e outra com três blocos (Detalhes dessa atividade podem ser na descrição da atividade 5, p. 62).

P: Quantos lápis tem aqui? [duas peças]
R: Seis dela [amarelos].
P: E vermelhos?
R: Quatro.
P: Como foi que você fez?
K: Dois com dois é quatro [mostrando os blocos vermelhos].
P: E aqui?
R: Dois [dedos], *dois* [dedos], *dois* [dedos], *seis* [mostra os seis dedos].

Observamos por parte da dupla o uso de um recurso observável para ancorar o conceito de correspondência um-para-muitos.

P: Quantos lápis vermelhos precisam ganhar para ficar com a mesma quantidade de lápis amarelos?
K: Um [olhando as barras].
R: Dois.
P: Expliquem. K disse um e R disse dois.
K: Um porque fica a mesma conta.

R: Dois.

P: Por que dois R? Você mexeu no dedinho…

R:… Eu contei.

P: Como?

R: Contando.

P: Aqui tem seis lápis amarelos e quatro vermelhos. Quantos lápis vermelhos precisam para ficar com a mesma quantidade de lápis amarelos?

K:Um.

P: Um lápis?

K: Uma peça para ficar igual.

P: Mas uma peça vale quantos lápis?

K: Sete.

P: Sete?

R: Dois.

P: E então, quantos lápis vermelhos precisam para ficar com a mesma quantidade de lápis vermelhos e amarelos?

K: Um.

P: Se ganhar um lápis vai ficar com seis?

K:… não, dois.

R: Por que dois?

K: A quantidade vai ficar certa, igual ao lápis amarelo.

R: [Contando no dedo] *Um, dois, três, quatro. Cinco, seis. Fica seis igual.*

Observando o protocolo acima podemos notar que a dupla não apresentou dificuldades em usar a correspondência um-para-muitos para quantificar a quantidade de lápis que estavam sendo representados por blocos. Entretanto, maiores dificuldades puderam ser constatadas no momento de resolver o problema de igualização. K, consistentemente, considerava a quantidade de peças e não de lápis necessários para proceder a igualização. R pareceu procurar raciocinar apenas sobre os valores que representavam os lápis, preferindo para isso usar os dedos como auxiliares para seus cálculos.

Dupla I e A (FF)

Problema "João tem quatro lápis verdes e Marcos tem dois azuis" - representar as quantidades de lápis com dois blocos verdes e um azul (o enunciado completo encontra-se na descrição da atividade 5, p. 62).

A: Não tem jeito. Aqui tem dois e aqui tem um.
I: Dois verdes, um azul.

Apresentação do segundo problema em que cada bloco representava dois lápis. A dupla foi questionada sobre quantos lápis estavam representados em duas colunas, uma com dois blocos e outra com três blocos (Detalhes dessa atividade podem ser encontrados na descrição da atividade 5, p. 62).

P: Quantos lápis vermelhos tem aqui? [duas peças]
Crs: Dois.
P: Mas cada peça vale quantos lápis?
I: Dois.
P: Então quantos lápis têm aqui [dois blocos]?
Crs: Dois.
P: Se tiver só uma peça?
Crs: Um.
P: E no papelzinho tinha o quê? Cada peça vale dois lápis, lembram?
Crs:...
P: Quantos lápis vale uma peça?
Crs: Dois.
P: E duas peças?
Crs: Dois.
P: Tanto faz ganhar uma peça ou duas peças?
A: Uma peça vale dois.

P: Então quantos lápis vermelhos tem aqui [barra com dois]?

I: Dois.

P: Mas uma peça não vale dois lápis?

Crs: É.

P: E duas peças?

A: Dois. Um e um.

P: Se eu lhe der uma peça, quantos lápis eu estou lhe dando? [uma peça vermelha]

A: Dois.

P: E se eu lhe desse essa outra peça? [a outra peça vermelha].

A: Dois.

P: Se eu lhe der as duas peças?

A: Quatro.

P: Como você fez?

A: Tem dois, não é? [mostra dois dedos] *com dois* [mais dois dedos], *quatro.*

Após as intervenções do pesquisador, A usou os dedos para ancorar a representação um-para-muitos, tal como a dupla BF.

P: E quantos lápis amarelos? [mostra os três blocos]

I: Três.

P: Lembrem que cada peça vale dois.

A: Dois, dois, dois. Dá três.

P: Aqui [duas peças vermelhas] *vale quatro e aqui* [três amarelas] *vale três?*

A: Dois mais dois, mais um, cinco.

P: Por que essa peça vale um? O que a gente viu no papelzinho? Todas as peças valem dois.

A: Dois mais dois, mais dois.

I: Sete...

P: Duas peças valem quanto?

A: Quatro.

P: E três peças?

I: Seis. Um, dois, três, quatro.

A: ...Aqui é dois [separa uma peça], *mais dois* [mostra outra peça], *mais dois* [outra peça. Depois junta as peças novamente formando a barra].

I: Aqui tem um, mais um...

A:Não, tem dois, mais dois...

I: Mais dois [mostrando as três peças separadas].

A: Dá três. Mais dois, mais dois, mais dois.

I: Dá cinco [mostrando os dedos].

P: Como você fez?

Crs: Dá cinco.

P: Como foi?

I: Sete.

A: Oito.

A dupla apresentou grande dificuldade em usar a correspondência um-para-muitos, principalmente com a quantidade maior do que duas unidades. Apesar de **A** perceber que cada peça valia dois, no momento de somar essas representações, ele não conseguiu, contabilizando apenas o valor absoluto das peças.

P: Quantas peças a coluna vermelha precisa para ficar com o mesmo tanto de peças que a amarela?

A: Uma.

I: Uma.

P: Uma peça vale quantos lápis?

A: Um, dois, três, quatro, cinco, seis.

P: A gente combinou o que no papelzinho?

Crs: ...Dois.

O problema de igualização foi resolvido pela dupla quando a relação solicitada foi a quantidade de peças para igualar vermelhas a amarelas. Entretanto, quando questionados sobre quantos lápis essa peça representava, as crianças novamente apresentaram dificuldades.

Comparação entre as duplas

Seguindo a mesma sistemática adotada na análise do item anterior, apresentamos abaixo um quadro sintético dos resultados discutidos anteriormente (Quadro 6), de forma a facilitar uma análise global-comparativa do desempenho das duplas.

Quadro 6: Síntese do desempenho das duplas na atividade envolvendo o uso de correspondência um para muitos.

Duplas	**Correspondência um para muitos**
Dupla D e I (BB)	- Espontaneamente não conseguiram. - Tentaram usar características observáveis nos blocos (os pinos) para ancorar o conceito. - Conseguiram resolver com facilidade o problema de igualização envolvendo medidas proporcionais.
Dupla R e K (BF)	- Espontaneamente não conseguiram. - Usaram um recurso observável, os dedos, para ancorar o conceito. - Apresentaram alguma dificuldade em resolver o problema de igualização envolvendo medidas proporcionais, que, no entanto, foi superada.
Dupla A e I (FF)	- Espontaneamente não conseguiram. - Obtiveram sucesso usando a mesma estratégia da dupla BF para representar a relação dois blocos-quatro lápis, mas não têm sucesso no caso de três blocos-seis lápis. - Não conseguiram resolver o problema de igualização envolvendo medidas proporcionais.

As diferenças entre as duplas puderam ser observadas principalmente no momento de usar a estratégia de correspondência um-para-muitos com três blocos. Interessante que ainda que todas as duplas conseguissem usar a estratégia de correspondência com dois blocos, essa passagem para usar a mesma estratégia com três blocos foi difícil para a dupla BB e principalmente para a dupla FF, a qual não obteve sucesso. Na dupla BB pudemos observar a busca por referenciais visuais que permitissem o uso seguro da estratégia de correspondência por parte de D.

Valores proporcionais para dois e três blocos foram obtidos pela dupla BF por meio do uso de um recurso físico e observável (os dedos). Esta estratégia também foi utilizada pela dupla FF no caso de dois blocos. Quando se tratou de três blocos, esta dupla não obteve sucesso em usar essa mesma estratégia, ainda que os sujeitos se mantivessem atentos ao fato de que cada peça valia dois lápis. A dupla BF apresentou maiores dificuldades na resolução do problema de igualização: pensar ao mesmo tempo no quanto precisava para igualar as quantidades em termos de blocos e em termos da relação entre blocos e lápis, constituiu-se em grande fonte de dificuldade. A dupla BB, especialmente, o sujeito D, após explicitar a relação bloco-lápis, resolveu facilmente o problema de igualização proposto.

3.3.2.3 Linha de base

A reflexão sobre a linha de base foi abordada neste estudo a partir de uma atividade envolvendo blocos de encaixe cobertos com um papel (formando barras), uma escala de freqüência marcando as unidades e uma caixa com largura semelhante a altura de um bloco (atividade 6, p. 63). Uma barra foi posicionada em cima de uma caixa enquanto que a escala permaneceu sobre a mesa. As duplas, então, foram questionadas sobre a medida da barra. Para responder essa pergunta as duplas podiam alterar os posicionamentos da barra e da escala colocando-as em cima da caixa ou da mesa. Esta atividade foi apresentada antes da atividade de colagem de barras e da escala no papel. No encontro anterior haviam sido trabalhadas com as duplas as atividades envolvendo o bloco duplo e o uso de correspondência um-para-muitos.

Após a apresentação das entrevistas com as crianças nessa atividade, apresentaremos o desempenho das duplas em outras atividades em que a questão da linha de base também era relevante para sua solução: atividade de colagem de barras e escala em um papel em branco, que foi realizada imediatamente após a atividade envolvendo a caixinha e atividades de representação de quantidades em um gráfico, apresentadas nos dois encontros posteriores.

Dupla D e I (BB)

Atividade com uma caixinha (p.63)

P: Qual é o valor dessa barra?

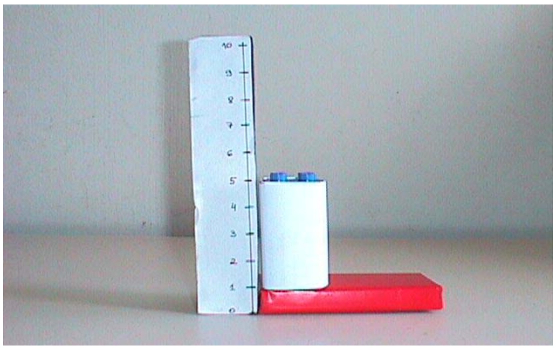

Figura 33: 1a. situação: escala na mesa e barra sobre a caixa – blocos cobertos

Crs: Tem cinco [apontando na escala o número cinco].

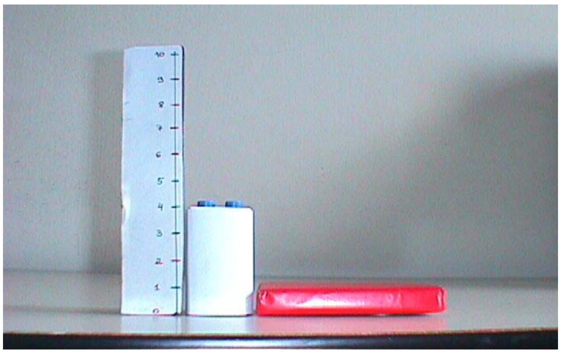

Figura 34: 2a. situação: escala e barra sobre a mesa.

Crs: Quatro [mostrando equivalência com a escala]

I: Assim [barra na caixa e escala na mesa] *é cinco e assim, é quatro* [ambos na mesa]. *Não pode botar em cima, senão fica mais.*

P: Se botar os dois em cima da caixa [escala e barra]?

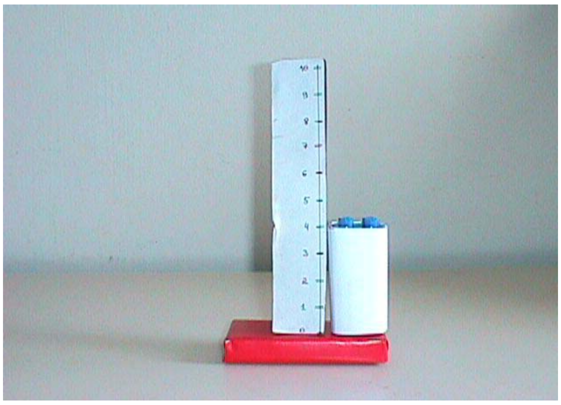

Figura 35: 3ª. situação: escala e barra sobre a caixa.

Crs: Ficava certo, ó [coloca a barra e a escala em cima da caixa]. *É quatro.*

P: Se colocasse só a escala em cima?

D: Ficava só três. Tá errado. Os dois tem que estar na mesma linha.

Nesta atividade, a dupla não apresentou qualquer dificuldade, facilmente estabelecendo uma "lei" geral: "os dois têm que estar na mesma linha". Esta lei foi seguida pela dupla nas atividades seguintes, como podemos ver abaixo:

Colagem de barras e escala em papel em branco (atividade 7, p.63-4)

A dupla montou as barras na folha de papel [uma representando seis blocos e outra, três blocos] e a escala para depois colar [escala está no meio das barras].

I: [Bota logo a escala] *Seis aqui* [coloca a barra de seis].

D: Três.

I: Tá quase quatro! [Olhando para o pesquisador:] *Ele está botando aqui em cima* [acima do alinhamento da origem da outra barra e da escala]!

P: E o que tem que fazer?

I: Botar embaixo, na mesma linha. [Ajeita a barra de três e cola].

P: Vai colar qual agora?

I: Essa [barra de seis]. [Para colar a barra, segura a escala no papel para não sair do lugar].

D: [Cola a escala].

I: Tá aqui embaixo [ajeita].

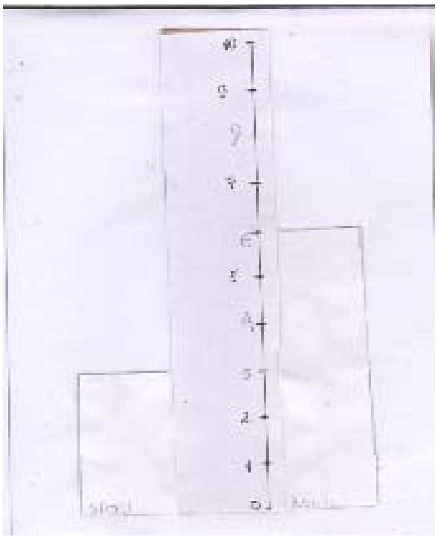

Figura 36: escala e barras coladas pela dupla D e I (BB)

P: Por que tem que botar na mesma linha?

I: Se não botar na mesma linha fica destrambelhado, não dá para saber quanto é os dois [as barras].
P: Por que colou a escala no meio?
D: Se bota no meio é mais fácil de ver quantos livros e quantos jogos.
P: E a escala é para que?
I: É um contador para contar a quantidade.

É interessante notar que ainda que a escala tenha sempre sido utilizada pelo pesquisador do lado esquerdo das barras, as crianças preferiram utilizá-la entre as barras. Também a função da escala pareceu bem clara para essa dupla.

Construção de gráficos (atividade 8 e 8.1, p. 64-5)

Nas atividades de representação de dados em gráficos em papel quadriculado, a questão da linha de base não se constituiu em problema para essa dupla. Representaram as quantidades nos gráficos pintando quadradinhos e iniciaram sempre do primeiro quadrado a partir do eixo "x". Ao serem indagadas sobre a razão de começarem a representar as quantidades solicitadas sempre a partir do primeiro quadrado, responderam: "porque tem o um aqui [mostrando o número um na escala, acima do primeiro quadrado] no contador". O último quadrado a ser pintado era indicado pelo valor correspondente da escala. Enquanto pintavam os quadradinhos, também iam contando quantos já tinham sido pintados e quantos faltavam. Vejamos protocolos que ilustram esse aspecto:

Gráfico do material escolar (figura 37):
P: ..Agora três colas.
I: [pega o lápis vermelho].
D: Não pode [vermelho]. *Já tem* [a barra das tesouras estava pintada de vermelho].
P: Por que não pode?
D:Ninguém vai saber o que vai ser.
I: Vermelho é do sport. Vou pegar esse outro [lápis].
[cada criança pinta um quadrado da barra alternando].
P: ... Seis livros...
[discutem sobre que cor preferem pintar]

D: Eu começo [primeiro quadrado da barra dos livros]

...

D: Pintou quatro.

I: Falta pintar mais dois. Até o seis [na escala].

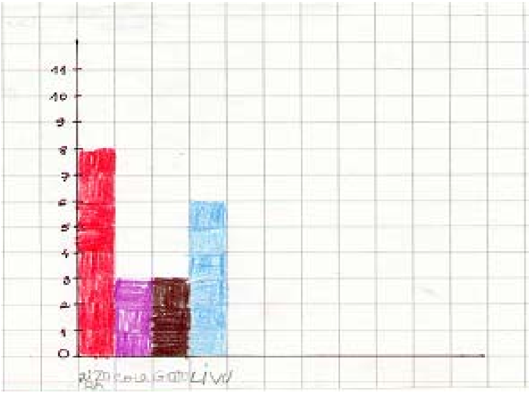

Figura 37: Gráfico do material escolar – Dupla D e I (BB)

Gráfico dos picolés comprados (figura 38):

Crianças pintam os quadrados a partir do eixo "x".

P: Por que começou a pintar daqui?

I: Porque tem o um no contador [escala].

D: É para pintar até o cinco [os picolés de morango] *aqui* [mostrando o número cinco na escala].

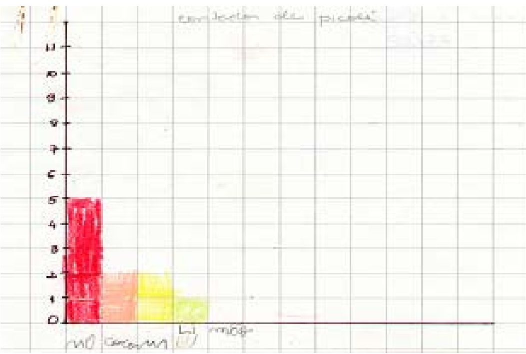

Figura 38: Gráfico dos picolés comprados – dupla D e I (BB)

As crianças não apresentaram dificuldades, pintando para todas as barras o primeiro quadrado a partir do eixo horizontal. A escala foi usada para verificar até onde a barra deveria ser pintada.

Também podemos observar nesse protocolo uma conversa interessante sobre a cor das barras. D acha que se colocar barras da mesma cor pode haver confusão sobre o significado das barras.

Dupla R e K (BF)

Atividade com uma caixinha

[Escala na mesa e barra na caixa]

P: Qual é o valor desta barra?

K: Fica cinco.

P: Está certa a medida dessa barra? O que vocês acham?

K: É. É cinco.

P: Se eu colocar assim [barra e escala sobre a mesa]?

K: Quatro.

P: E então? A barra mede cinco ou quatro?

Crs: Cinco, não, quatro.

P: Por que mede quatro?

K: Porque colocou a caixinha, fica cinco.

R: Fica parecendo mais.

P: Então não pode ser desse jeito [barra em cima da caixinha]

K: Não, tem que ser os dois na mesma linha.

Pode-se observar que, tal como a dupla forte-forte, esta dupla ao comparar as diferenças de medidas, consideraram a caixinha o fator perturbador, possibilitando que chegassem a uma conclusão geral sobre a necessidade da barra e da escala serem colocadas alinhadas, sobre uma mesma base.

Colagem de barras e escala em papel em branco (atividade 7, p. 63-4)

P: Precisa colar a escala?

K: Não.

P: Como vão saber qual o valor de cada barra?

K: É, tem que colar.

[Montaram as barras e a escala no papel da seguinte maneira:]

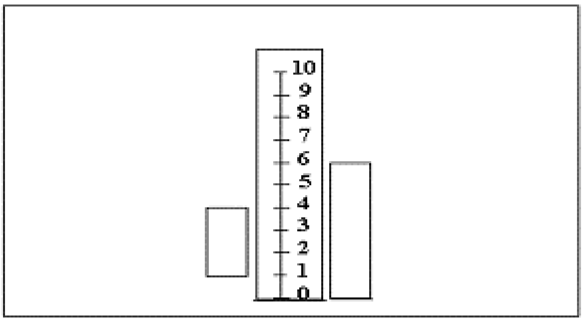

Figura 39: escala e barras arrumadas no papel branco pela dupla R e K (BF)

K: Peraí [puxa a barra menor para baixo].

P: Por que colocasse essa barra mais baixo?

K: Para ficar seis e aqui três. Estava quatro e seis.

R: Tem que ficar na mesma linha.

[no momento de colar, colaram assim:]

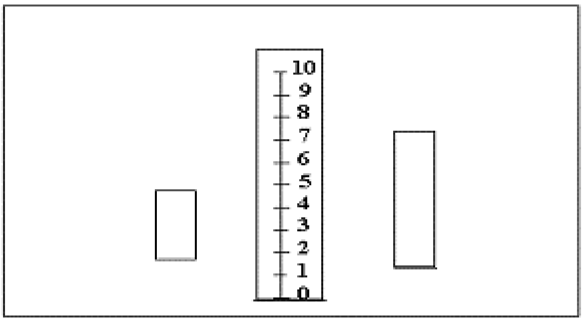

Figura 40: escala e barras coladas pela dupla R e K (BF)

P: Está certo?

K: Está.

P: Vai dar para saber quanto cada barra vale?

R: Não, passou do seis, tem sete [referindo-se à barra maior].

P: E essa outra barra, dá pra saber que é três?

K: Não,está em cinco.

P: Então como deve ser? Lembrem da atividade da caixinha... para não deixar caixinha embaixo não.

R: Tinha que estar na mesma linha.

[resolveram colar outras barras.]

R: [Colando a barra maior] *ficou certo* [conferindo com a base da escala].

K: Aqui? [colando a barra menor]

R: Não, está alto.

K: Parece quatro.

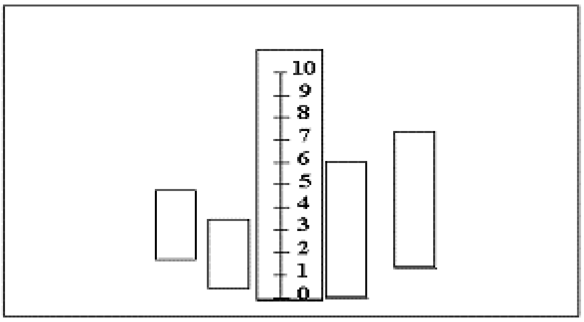

Figura 41: Segunda colagem de barras – dupla R e K (BF)

[Colando outra barra menor, como mostra a figura 42, a seguir:]

K: Mesma linha [alinha com a escala…]

R: [Ajeita também] *está um pouquinho alto. Eu contei até o três aqui* [na escala] *e colei.*

P: A escala podia estar ao lado?

K:...

R: Podia não.

P: Por que não podia?

K: Podia.

P: Explica r porque não podia.

R: [Coloca outra escala ao lado das barras e lê:] *três e seis. Pode, pode sim.*

K: Tem é que ver a quantidade.

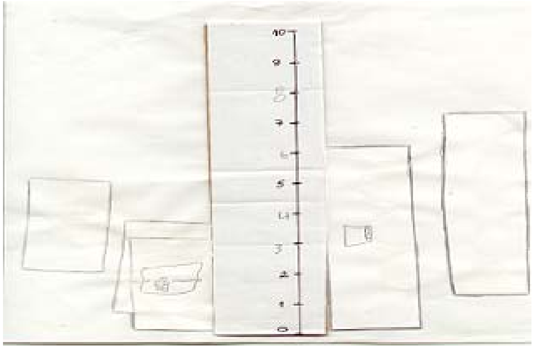

Figura 42: Atividade de colagem de barras e escala – dupla R e K (BF)

Os trechos de protocolos acima mostram que a questão da linha de base não é algo tão simples para as crianças. Ainda que na atividade da "caixinha", as crianças estabelecessem uma "lei" geral, na atividade de colagem observamos uma tendência a, inicialmente, não prestarem tanta atenção ao alinhamento das barras e escala, sendo necessário a intervenção do pesquisador relembrando a atividade prévia com a caixinha. A questão do posicionamento da escala também foi interessante pois para R o melhor posicionamento era entre as barras, ainda que até o momento só tivessem trabalhado com a escala do lado esquerdo das barras!

Construção de gráficos (atividade 8 e 8.1, p. 64-5)

O pesquisador entregou um papel quadriculado com os eixos desenhados. As crianças foram solicitadas a construir um gráfico referente aos materiais escolares de uma sala de aula. As freqüências foram ditas pelo pesquisador.

Gráfico do material escolar (figura 43):

P: Tem oito tesouras.

K: Tem que pintar até o oito [mostra o oito na escala].

P: Três colas.

R: Até o três [pinta].

Prosseguem pintando os quadrados, olhando na escala o número dito pelo pesquisador.

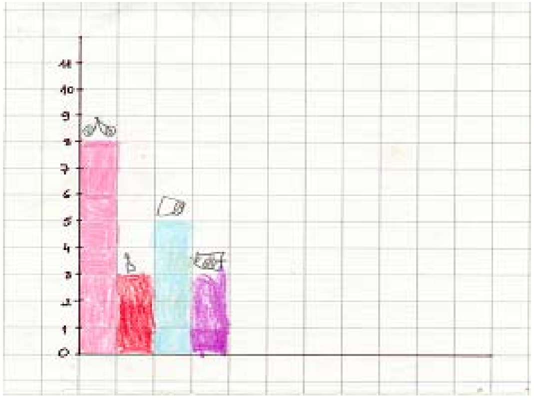

Figura 43: Gráfico do material escolar – dupla R e K (BF)

Gráfico dos picolés comprados (Figura 44):

P: João comprou cinco picolés de morango.

K: [Pinta até o cinco na escala].

P: Dois de côco.

R: Dois de côco [pinta dois quadrados contando um, dois].

P: Dois de maracujá.

K: Azulzinho. Um, dois [conta os quadrados].

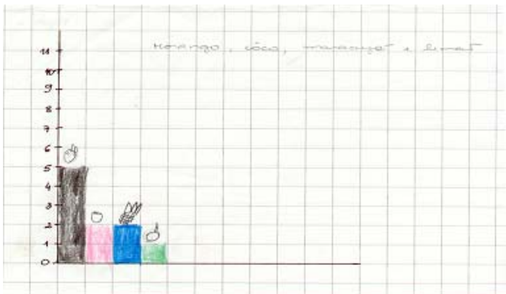

Figura 44: Gráfico dos picolés comprados – dupla R e K (BF)

Da mesma forma que a dupla BB, essa dupla não apresentou dificuldades em relação à questão da linha de base nas atividades de representação dos dados em eixos já desenhados. É interessante notar que essa atividade pareceu ter sido mais fácil para as crianças do que a atividade anterior de colar as barras e escalas em um papel em branco, em que não havia os eixos desenhados e o papel quadriculado. Com os eixos desenhados e o papel quadriculado que possibilitava a marcação das unidades, as crianças começavam a pintar sempre do primeiro quadrado a partir do eixo horizontal, contavam os quadrados e/ou marcavam na escala até onde deveriam representar.

Dupla I e A (FF)

Atividade com uma caixinha

[Escala na mesa e barra na caixa]

P: Qual o valor desta barra?

I: Tem cinco! [olhando na escala]

A: Tem quatro. Se botar a caixinha é que faz cinco [tira a caixinha para confirmar].

I: Quatro.

P: Por que ficou cinco?

I: Tava errado, porque tem quatro.

P: Por que tava errado?

I: Tem que ser na mesma coisa [mostra a mesa].

P: E se botar assim [escala em cima da caixa e barra na mesa]?

A: Parece que tem três. Tem que ficar no mesmo chão.

P: Na mesma linha, no mesmo chão.

A dupla resolveu facilmente essa atividade. **A** sem qualquer intervenção do pesquisador, concluiu que o fator que alterava a medida da barra era o posicionamento em cima da caixa. A partir disso, as crianças chegaram à conclusão sobre a necessidade da barra e escala ficarem "no mesmo chão".

Colagem de barras e escala em papel em branco (atividade 7, p. 63-4)

Crs: [Resolvem colar as Barras e a escala da seguinte maneira:]

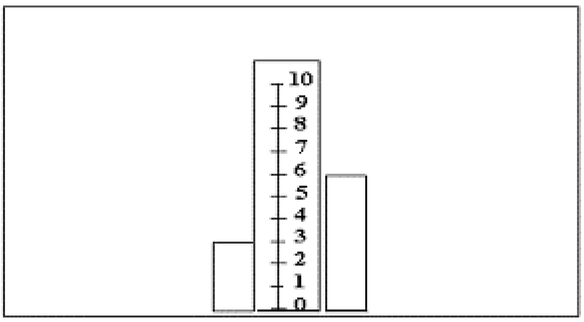

Figura 45: 1ª. situação: escala e barras arrumadas no papel – dupla I e A (FF)

P: Precisa da escala?

A: Precisa.. Senão, não pode ver o tamanho [mostra a escala].

[Tiram tudo e vão colar. **A** cola a barra menor].

I: [Cola a barra maior]

A: [Cola a escala e confere]

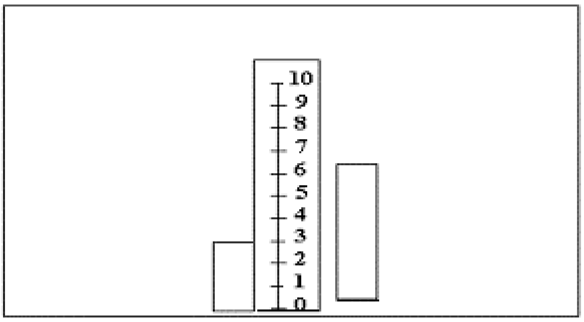

Figura 46: escala e barras coladas – dupla I e A (FF)

P: Está tudo certo?

A: O livro não [aponta a coluna maior].

P: O que há?

A: Tá quase no sete.

P: O que foi que a gente viu na atividade com a caixinha?

I: No mesmo chão.

A: [Cola outra barra relativa aos livros na posição correta].

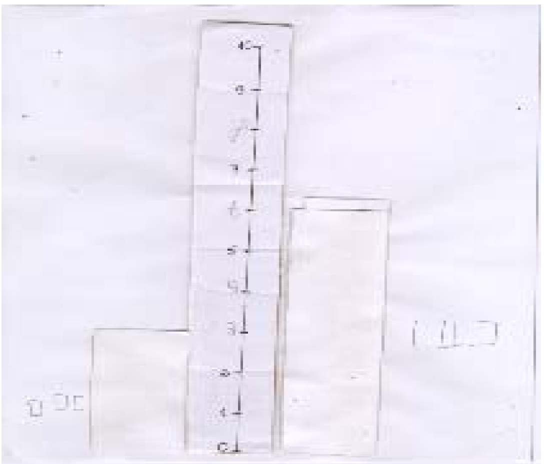

Figura 47: atividade de colagem de barras e escala – dupla I e A (FF)

P: A escala serve para que?

I: Pra ver o tanto.

P: A escala podia estar ao lado?

A: Não. Senão não dava para ver.

P: E quando a gente usava assim [mostra blocos e a escala do lado esquerdo]?
A: É dá, mas é melhor assim, no meio.

Podemos observar que a dupla não apresentou grandes dificuldades em relação ao posicionamento das barras e da escala. Quando i colou a barra dos livros numa posição inadequada, a imediatamente comentou que a leitura do valor da barra estava errada, colando outra barra adequadamente. Esta atividade proporcionou também uma maior reflexão por parte da dupla sobre a função da escala ("ver o tanto").

Construção de gráficos (atividade 8 e 8.1, p. 64-5)

O pesquisador procedeu da mesma forma que com as outras duplas, entregando um papel quadriculado com os eixos já desenhados.
Gráfico referente ao material escolar de uma sala de aula (figura 48):
P: oito tesouras.
A: Do um até o oito. [mostra o primeiro quadrado e marca com o dedo até o número oito na escala. Enquanto pinta vai contando um, dois, ..., sete, oito].
P: Três colas.
I: Vou pintar até o três [mostra na escala e conta três quadrados na vertical, ao lado da outra barra]...

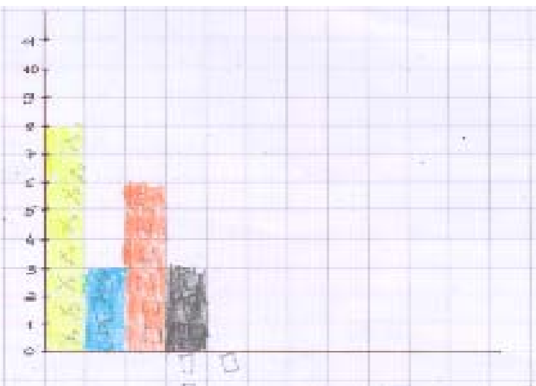

Figura 48: Gráfico do material escolar – dupla I e A (FF)

É interessante que as crianças usaram a escala para marcar até onde deviam pintar, mas também contaram na barra os quadrados que iam sendo pintados. Vejamos o segundo gráfico em que as crianças representaram as freqüências dadas pelo pesquisador:

Gráfico dos picolés comprados (figura 49)

P: João comprou cinco picolés de morango.

A: Até aqui [mostra o cinco na escala]. [desenha cinco picolés começando do primeiro quadrado na base do eixo "x", um picolé em cada quadrado].

P: Dois picolés de côco.

I: [Quando ia começar a desenhar na mesma coluna dos picolés de morango, acima, seu parceiro interrompe].

A: Se botar aqui em cima [dos cinco picolés já desenhados], *vai passar para sete. Bota aqui* [o lado, mostrando o primeiro quadrado da base].

I: [Desenha os picolés no local indicado por a].

P: Dois picolés de maracujá.

A: [Desenha na coluna ao lado dos dois picolés desenhados por i].

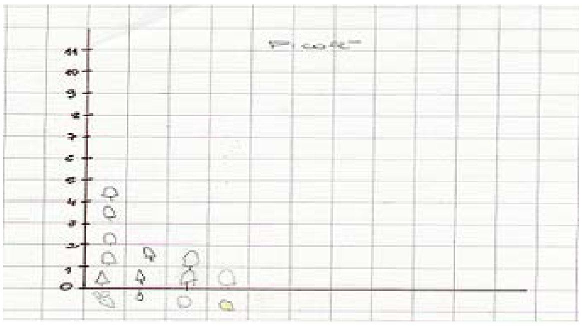

Figura 49: Gráfico dos picolés comprados – dupla I e A (FF)

Para **A,** os lugares de cada representação de uma quantidade pareceram ser bem delimitados, tal como os exemplos dos gráficos que ele tinha sido exposto nessa pesquisa até então. Assim, colocar mais dois picolés acima da coluna dos picolés de morango transformaria os picolés de côco em picolés de morango, também. Em relação a **I**, essa situação pode indicar ainda dificuldades em lidar com a origem, entretanto, como o pesquisador não questionou sobre o que ele estava pretendendo ao desenhar os picolés de côco na coluna em que haviam sido desenhados os picolés de morango, não podemos saber como ele iria tratar essa nova representação.

Comparando as duplas

Para facilitar a comparação das duplas apresentamos, no quadro 7, uma síntese do desempenho das mesmas nas atividades descritas acima:

Quadro 7: Síntese do desempenho das duplas na atividade envolvendo linha de base.

Duplas	Atividade da caixa	Atividade de colagem	Atividade com gráficos
Dupla D e I (BB)	- Não apresentaram dificuldades e sistematizaram a tarefa com "os dois [barra e escala] tem que estar na mesma linha".	- Focalizaram o alinhamento das origens das barras e escala	-Não apresentaram dificuldades.
Dupla R e K (BF)	- Não apresentaram dificuldades e sistematizaram a tarefa com "tem que ser os dois [barra e escala] na mesma linha".	- Uma das integrantes da dupla focalizou, inicialmente, a correspondência entre o valor da barra e a escala, enquanto a outra focalizou o alinhamento entre as bases das barras e da escala. - Colaram sem alinhamento. Após intervenção do pesquisador relembrando a "atividade da caixinha", as barras e a escala foram alinhadas.	-Não apresentaram dificuldades.
Dupla A e I (FF)	- Obtiveram sucesso espontâneo. Sistematizaram dizendo "tem que ficar na mesma linha, no mesmo chão"	- Colaram, inicialmente, uma das barras sem estar alinhada sendo isso percebido por um dos integrantes da dupla. - Após intervenção do pesquisador relembrando a "atividade da caixinha", o alinhamento foi considerado.	-Não apresentaram dificuldades.

Podemos observar que em geral, a questão da linha de base, tal como abordada nesse estudo, foi compreendida por todas as duplas. A dupla ff, inclusive, apresentou um sucesso espontâneo na atividade com a caixinha.

Na atividade com a caixa as crianças puderam refletir sobre a importância do alinhamento entre as barras e a escala. Entretanto, quando solicitadas a colar as barras e a escala em um papel em branco, as duplas bf e ff não usaram imediatamente esse conhecimento sobre a linha de base sendo necessário intervenções por parte do pesquisador alusivas à atividade anterior com a caixa. Este tipo de intervenção foi suficiente para auxiliar tais duplas na execução da tarefa.

As dificuldades observadas na atividade de colagem não foram observadas nas atividades de construção de gráficos. As duplas sempre iniciaram pintando o primeiro quadrado a partir do eixo horizontal. Essa análise parece indicar que a atividade de colagem foi mais difícil para as crianças do que as atividades de construção de gráficos, possivelmente porque enquanto na primeira atividade as crianças tinham que decidir o alinhamento das barras e da escala e o posicionamento das mesmas, nas atividades de construção de gráficos, tanto o eixo horizontal como também a escala já estavam desenhados, além do próprio papel quadriculado que favorecia a visualização das unidades constituintes das barras a serem representadas.

4. Discussão

Considerando os objetivos desse estudo, iremos refletir especialmente sobre a relação entre blocos e gráficos de barras considerando os dois aspectos abordados nessa pesquisa: as dificuldades relativas ao sistema cartesiano e as atividades de resolução de problemas de combinação e de comparação.

Em relação ao primeiro aspecto, os dados apresentados nessa análise parecem sugerir que as atividades realizadas com blocos apoiaram atividades realizadas com gráficos, permitindo maior reflexão das duplas quanto a alguns aspectos relativos à representação gráfica. Nas atividades com blocos as crianças puderam discutir alguns conceitos que muitas vezes trazem dificuldades no trabalho com gráficos, inclusive, compreendendo a funcionalidade de alguns aspectos novos que o gráfico traz, tal como a escala, chamada por algumas crianças de "contador", "medidor". Pudemos verificar que reflexões realizadas nas atividades com blocos (por exemplo, sobre a linha de base) foram importantes para as atividades posteriores realizadas com colagem e com gráficos. Em outros casos não, as mesmas dificuldades observadas e discutidas em atividades com blocos permaneceram (crianças que usaram unidades de representação diferentes na construção dos gráficos, por exemplo). Entretanto, devemos ressaltar que quando tais dificuldades ainda apareceram, a partir de intervenções do pesquisador e, em muitos casos, do próprio parceiro da dupla, essas dificuldades foram superadas.

Com isso não queremos dizer que o melhor caminho para o trabalho com gráficos seja apenas através de blocos, mas sim, que os blocos de encaixe inseridos nas atividades propostas parecem ter favorecido a reflexão sobre alguns conceitos importantes para a representação gráfica. Significa, então, que tais atividades podem se constituir em mais uma alternativa para o professor na sala de aula.

Em relação à resolução de problemas, vale dizer que o nosso objetivo não foi quantificar o acerto e erro na resolução de problemas a partir das diferentes representações. O nosso principal objetivo nesse estudo foi analisar se as crianças poderiam se beneficiar no trabalho com gráficos, de atividades com blocos. O foco das atividades com blocos foi a discussão de aspectos relativos ao sistema cartesiano e a resolução de problemas, principalmente, em relação aos problemas de comparação, observando se o estímulo à conexão entre essas duas representações (blocos e gráficos de barras) auxiliaria as crianças na resolução de problemas através de gráficos.

Considerando os problemas de combinação, observamos que todas as duplas do nosso estudo apresentaram um bom desempenho não apenas nas atividades com blocos mas também com gráficos, diferentemente dos dados observados por Guimarães (2002). Como já relatado, esta autora encontrou grandes dificuldades apresentadas por crianças de 3ª. série diante de problemas que envolviam combinação de quantidades a partir de gráficos de barras. Algumas diferenças entre nosso estudo e o de Guimarães devem ser comentadas. Enquanto nosso estudo tratou sempre de união de duas categorias (e em apenas um problema, união de quatro categorias), o estudo de Guimarães abordou um problema mais complexo que envolvia a relação região-estado (foi perguntado em qual das regiões do país, representadas cada uma por dois estados, houve maior número de assaltos?), sendo necessário combinar categorias e depois comparar tais combinações (relações de segunda ordem). Dificuldades relacionadas ao contexto específico do problema, como as relações estado-região e mesmo o conhecimento dos estados que fazem parte de cada região também podem ter se constituído em obstáculos. Um outro diferencial importante entre ambos os estudos pode ter sido representado pela interação dupla-pesquisador, que não ocorreu no estudo de Guimarães, quando as crianças apenas interagiam entre si, sem qualquer intervenção do pesquisador no sentido de auxiliar a explicitação de estratégias e sistematização dos conhecimentos.

Conforme dados da literatura, maiores dificuldades têm sido observadas nos problemas de comparação. Nesse tipo de problema, mesmo após a intervenção do pesquisador, observamos que as três duplas de crianças permaneceram com dificuldades, sendo necessário voltar à intervenção para explicitar a correspondência e, no caso de algumas duplas, comparar o que era comum entre as duas barras e a diferença entre elas. No trabalho com gráficos, também observamos dificuldades que, contudo, puderam ser superadas a partir de relações realçadas pelo pesquisador com as atividades realizadas com blocos e, em alguns casos, da volta ao uso dos blocos (dupla BF, no gráfico do material escolar). Uma outra questão que nos colocamos foi se as crianças compreenderam as relações envolvidas nos problemas de comparação ao usarem blocos ou apenas aprenderam rotinas procedurais. O fato de observarmos flexibilidade em suas estratégias (usando, por exemplo as duas formas: se tirar da barra maior fica igual, se botar na barra menor fica igual) e o uso de uma linguagem própria, não imitativa do pesquisador, transformando os problemas de comparação em problemas de igualização parecem sugerir que as duplas não ficaram apenas na rotina procedural. No entanto, também não sabemos se esse conhecimento foi duradouro. Teria sido interessante uma avaliação com as crianças após um certo período de tempo.

Considerando que dificuldades em problemas de comparação têm sido relatadas em diversos estudos (Carpenter e Moser, 1982 e Riley, Greeno & Heller, 1983), inclusive ainda entre estudantes de 4ª. série (Pessoa e da Rocha Falcão, 1999), nossos resultados são promissores. Nossos dados parecem sugerir que houve avanço de todas as duplas analisadas em relação à resolução desse tipo de problema, ainda que seja importante salientar que conexões entre representações não é algo simples e automático, como já discutido por Resnick e Omanson (1987). Entretanto, também como esses mesmos autores salientamos o importante papel desempenhado pelo pesquisador estimulando a reflexão e sistematização do saber, retomando em diversos momentos o trabalho com blocos ao longo das atividades como referencial para as crianças.

Uma questão em aberto consiste em saber se desenvolvendo um trabalho de reflexão já a partir de gráficos se obteria os mesmos resultados que se desenvolvendo um trabalho misturando gráficos com as barras de blocos. As barras de blocos parecem auxiliar não apenas por serem uma representação mais familiar para as crianças mas também por permitirem que os gráficos sejam até certo ponto descomprimidos em suas unidades de representação, aspecto esse que parece ter sido favorável ao desempenho de algumas duplas, tal como R e L (p. 92-4). Essa idéia de descompressão do gráfico parece também estar presente nos estudos que salientam a importância das crianças construírem o banco de dados possibilitando o domínio das informações veiculadas e do significado das representações contidas no gráfico (Healy, Hoyles & Pozzi, 1994; Pratt, 1994, 1995, entre outros).

Também nossos dados parecem indicar a importância de se considerar a complexidade da representação gráfica, tal como sugerido por Clement (1995), Gomes Ferreira (1997) e Goldenberg (1988), ao trabalhar com gráficos. Gráficos não se tornam transparentes para as crianças simplesmente porque para o professor essa transparência pode estar clara (Cobb, 1987; Meira, 1998). Entretanto, nossos dados mostraram que o desenvolvimento de uma seqüência didática envolvendo gráficos e manipulativos possibilitou que as crianças refletissem sobre alguns aspectos formais do gráfico e ao mesmo tempo gerou atividades que favoreceram uma análise mais geral dos dados veiculados pelos gráficos, tal como mostrou as atividades analisadas sobre resolução de problemas e outras que não nos aprofundamos nesse capítulo que envolveram valor máximo, valor mínimo, variações observadas no gráfico e extrapolações. A combinação de tais atividades pareceu propiciar uma base mais consistente sobre o conhecimento da representação em gráfico de barras. Abaixo, como ilustração, apresentamos o protocolo de duas duplas, uma analisando o valor máximo e mínimo no gráfico dos picolés vendidos durante uma semana e outra analisando o gráfico sobre crescimento da planta:

Dupla A e I (FF) – Gráfico dos picolés vendidos (atividade 9.1, p. 67-8)

P: Qual o dia que ele vendeu mais picolés?

A: Esse aqui [mostra barra], *sábado.*

I: É esse [aponta barra do sábado].

P: Por que você acha que é o sábado?

A: Ele vendeu mais. Teve mais procura.

P: E o pior dia, qual foi?

I: Dois [aponta para barra da segunda-feira]. *Vendeu dois.*

P: O melhor dia é o sábado?

A: Aqui [barra do sábado] *tem mais picolé vendido que tudinho* [em relação as outras barras].

P: E o pior dia de venda foi a segunda-feira?

A: Só tem dois.

Dupla R e L (BF) Gráfico do crescimento de uma planta (atividade 9, págs 66-7)

P: ...Quanto essa plantinha cresceu da primeira para a segunda semana?

R e L: Quatro.

P: Aqui na primeira semana quando eu medi, ela estava com dois. Na segunda semana ela estava com quatro. Quanto ela cresceu da primeira para a segunda semana?

L: Não sei.

P: Deixa eu mostrar aqui com os blocos. Na primeira semana ela media dois, na segunda semana quatro [coloca uma coluna com dois blocos e outra com quatro]. Quanto foi que ela cresceu dessa semana para essa?

R: [Coloca barras juntas] Dois.

P: Como você sabe?

R: Porque eu coloquei juntinho e vi dois.

P: E aqui no gráfico, da segunda para a terceira semana?

R: Dois também.

P: Como você sabe?

R: Cresceu esse e esse [mostrando duas unidades na barra da terceira semana sem correspondência com a barra da segunda semana].

P: E da terceira para a quarta semana, quanto ela vai crescer?

R: Dois. ...tava dois, passou para quatro, depois seis e aqui é oito [desenha barra de oito]. Tá crescendo toda vez mais dois...

[Mais adiante...]

R: A plantinha cresceu, cresceu, cresceu, aí depois diminuiu para seis [canudos], *aí pisaram nela e ela morreu* [explicando o valor zero no gráfico].

Os extratos de protocolos acima são ilustrações do desempenho das crianças em atividades com gráficos e que também mostram, como no segundo exemplo, algumas relações estabelecidas com as atividades com blocos que auxiliaram a compreensão das crianças.

Considerando as estratégias utilizadas pelas crianças, observamos que estratégias relatadas por outras pesquisas que investigaram os mesmos conceitos que abordamos (por exemplo, correspondência um para muitos) foram também observadas em nossas entrevistas. Um exemplo foi a estratégia utilizada pelas duplas BF e FF na atividade de correspondência um para muitos, de usar um recurso físico e observável para ancorar o conceito, quando valores proporcionais para dois e três blocos foram obtidos através dos dedos. Esse tipo de estratégia é semelhante ao encontrado por Steffe (1994) com crianças de oito anos, na resolução de adições com parcelas escondidas.

Em relação aos tipos de duplas com que trabalhamos (BB, BF e FF) observamos que houve avanços no conhecimento de todas as duplas analisadas. Sugerimos que tais avanços se devem a diversos fatores, tais como: a interação entre os pares, a interação com o pesquisador, a seqüência de atividades realizada em que se enfatizou a importância de verbalizações e sistematizações das conclusões durante as tarefas. Análises específicas sobre a influência de cada um desses fatores sobre o desempenho das duplas não foram desenvolvidas, como também a relação entre o comportamento interno das duplas (relações de cooperação, competição, dominação, etc) e o desempenho apresentado nas atividades não fez parte das análises por ora realizadas.

Para concluir gostaríamos de salientar que a construção de qualquer seqüência didática envolve alguns recortes no campo conceitual que irá se estudar, como também algumas decisões metodológicas precisam ser tomadas. Entretanto, devemos compreender que esse recorte responde a uma expectativa pessoal de quem está construindo, não sendo naturalmente o único recorte possível de ser realizado (Vergnaud, 1987). Raciocínio semelhante pode ser feito do ponto de vista da abordagem metodológica utiizada no presente estudo: as decisões tomadas são *alternativas* válidas, e não prescrições com a pretensão de serem as únicas possíveis. Dessa maneira, não consideramos em absoluto que a seqüência aqui apresentada e discutida seja o único ou o melhor caminho para o trabalho com gráficos com crianças pequenas. Trata-se tão somente de uma contribuição relevante para o trabalho com gráficos na Educação Infantil.

CAPÍTULO 4

GRÁFICOS E MATERIAIS MANIPULATIVOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ADITIVOS: UM EXPERIMENTO DE ENSINO

1. Introdução

No capítulo anterior descrevemos o primeiro estudo desenvolvido que consistiu em uma análise exploratória das dificuldades observadas no trabalho com gráficos de barras e da efetividade didática de uma combinação entre blocos de encaixe para a confecção de barras e gráficos na resolução de problemas aditivos.

Os resultados mostraram algumas dificuldades que crianças pequenas apresentam no processo de construção e interpretação de gráficos, mas também apontaram que a partir de atividades auxiliares, estas dificuldades podem ser superadas. Isto foi observado no contexto de problemas de estrutura aditiva, em atividades relacionadas à questão de um mesmo eixo de referência horizontal para as barras (sejam elas construídas com barras de encaixe ou representadas pictoricamente em folha de papel), ao uso consistente de uma mesma unidade de representação das medidas no gráfico e sobre o uso de estratégias de correspondência um para muitos, em que uma unidade de medida representa mais de um objeto.

Em relação à combinação de blocos e gráficos, observamos que algumas duplas fizeram referência espontânea às atividades com blocos enquanto trabalhavam com gráficos e também observamos que o retorno ou, em alguns casos, a referência do pesquisador às atividades com blocos em momentos de dificuldades das duplas na resolução de problemas com gráficos, também pareceram auxiliar as crianças. Nossos resultados no estudo anterior foram analisados qualitativamente de modo a nos dar um panorama dos tipos de estratégias utilizadas, das dificuldades encontradas, e dos avanços realizados durante as atividades. Tendo em vista a natureza clínico-exploratória do estudo anterior, resolvemos retomar, em contexto diverso, a análise de uma possível relação entre as atividades com blocos e gráficos e o desenvolvimento conceitual no âmbito das estruturas aditivas.

Nesse sentido, uma importante questão a explorar diz respeito ao seguinte aspecto: a combinação com a reflexão sobre uma representação concreta auxiliaria a compreensão do gráfico de barras ou seria suficiente para a obtenção desse mesmo resultado propiciar aos sujeitos uma reflexão sobre os problemas aditivos já a partir de gráficos de barras? É essa a questão de investigação do presente estudo.

O objetivo desse segundo estudo foi investigar comparativamente duas formas de trabalhar com gráficos de barras: proporcionar a combinação de gráficos com material de suporte manipulativo do tipo blocos de encaixe, versus propor o trabalho de resolução de problemas já a partir da representação gráfica. A nossa hipótese de partida propunha que possibilitar o estabelecimento de conexões dos gráficos com o material manipulativo acima aludido poderia favorecer a compreensão da representação gráfica, o que, por sua vez, teria impacto sobre a conceptualização no âmbito das estruturas aditivas.

Com esse objetivo, desenvolvemos um experimento de ensino com crianças de alfabetização e primeira série do ensino fundamental. A escolha desse tipo de estudo se justifica pela ênfase que estamos dando ao uso da instrução como lugar privilegiado para as crianças construírem conhecimento (thompson, 1994).

Resultados de outras pesquisas também apoiaram a opção metodológica do presente estudo. Podemos citar, especialmente, o desenvolvido por nunes, bryant, hurry & pretzlik (2002). Estes autores compararam o desempenho de três grupos de crianças de oito e nove anos de idade, antes e depois de um experimento de ensino. O grupo 1 trabalhou problemas diretos e inversos em blocos, ou seja, primeiro problemas diretos e depois problemas inversos. O grupo 2 trabalhou os mesmos problemas do grupo 1 mas de forma misturada. O grupo 3 foi um grupo controle que resolveu usando uma linha numérica as mesmas operações de adição e subtração que estavam sendo vistas pelos outros dois grupos. Os resultados no pós-teste mostraram desempenhos similares entre os grupos 1 e 2, significativamente melhores do que os resultados obtidos pelo grupo controle. Entretanto, no pós-teste posterior (oito ou nove semanas mais tarde) observou-se que apenas o grupo que havia trabalhado os problemas diretos e inversos de forma misturada permanecia com desempenhos significativamente melhores do que o grupo controle. Estes dados sugeriram que apresentar diferentes tipos de problemas misturados tornou a aprendizagem mais consistente e duradoura. A alternância facilitaria a inferência de pontos em comum e contrastes, do que resultaria o estabelecimento de abstração generalizante diferente do caso dos blocos separados de situações. Nessa mesma direção, resultados do nosso estudo anterior mostraram a importância de maior integração entre gráficos e os manipulativos ao longo das atividades.

Assim, seguindo a estratégia de exploração experimental proposta por nunes et al (2002), acima resumida, propusemos aos nossos sujeitos de uma das condições experimentais – blocos e gráficos (ver detalhamento a seguir) – as diferentes formas de representação (blocos e gráficos) e os diferentes problemas (combinação e comparação) misturados, possibilitando à criança construir contrastes e pontos comuns entre eles.

Uma apresentação detalhada do método utilizado é descrita a seguir.

2. Método

2.1 Participantes

Participaram do presente estudo 57 crianças das séries de alfabetização (27) e primeira série (30) do ensino fundamental (idade média das crianças da alfabetização: seis anos e seis meses; idade média das crianças da primeira série: sete anos e sete meses), oriundas de uma escola da rede privada da cidade do recife. As crianças de cada série foram emparelhadas a partir dos resultados do pré-teste e distribuídas em três grupos: controle, experimental gráfico e experimental bloco e gráfico.

O trabalho com gráficos realizado com essas turmas e em séries anteriores havia sido escasso e restrito a atividades de representação e leitura de quantidades em um gráfico.

Todas as crianças dispuseram de lápis, borracha e régua durante todas as fases do estudo (pré-teste, intervenção, pós-teste imediato e pós-teste posterior).

2.2 Tarefa e procedimento

2.2.1 Pré e pós-teste

Todas as crianças participaram de um mesmo pré e pós-teste. Tais testes foram exatamente iguais, consistindo na proposição de 30 problemas de estrutura aditiva por criança (ver reprodução de tal teste no anexo 3). Os problemas variaram quanto à estrutura (combinação e comparação) e quanto à forma de representação (problemas verbais-pictóricos[7] e gráficos, com ou sem linhas de grade). Assim, todas as crianças resolveram 15 problemas de combinação e 15 de comparação. Entre os problemas de combinação, três problemas foram relativos à soma de duas partes (ex.gráfico com a quantidade de lápis e de canetas. - *quantos lápis e canetas tem ao todo*?) Enquanto que os outros foram de inclusão numa classe superior (ex. Gráfico com a quantidade de

[7] Problemas verbais com desenhos representando os objetos descritos no enunciado do problema.

meninos e meninas.- *quantas crianças tem ao todo*?). Os 15 problemas de comparação foram do tipo relação desconhecida. Em cada tipo de problema (combinação e comparação), cinco problemas foram apresentados verbalmente com desenhos dos objetos envolvidos no enunciado (problemas verbais-pictóricos), cinco problemas foram apresentados por meio de um gráfico com linhas de grade e cinco problemas foram apresentados a partir de gráficos sem linhas de grade.

Durante o pré e pós-testes, as crianças não tiveram nenhum tipo de material manipulativo para auxiliá-las em suas atividades.

os problemas do pré e pós-testes foram apresentados em sessões coletivas na sala-de-aula, utilizando-se projeções de ilustrações a partir de ambiente informatizado de apresentação (aplicativo powerpoint™ do conjunto de aplicativos microsoft office™)[8] com duração de aproximadamente 60 minutos cada sessão. Os problemas foram distribuídos em quatro partes, três partes com oito problemas e uma com seis. Fantoches iniciavam e finalizavam cada parte, estimulando a participação das crianças. Os problemas foram apresentados de modo dinâmico, com som na entrada dos elementos de cada problema. Cada criança recebeu um livreto com todos os problemas que estavam sendo apresentados nas projeções da sessão coletiva impressos e com espaços reservados para que escrevesse sua resposta e/ou cálculo para cada um dos problemas (ver no anexo 4 a reprodução de algumas páginas do referido livreto, preenchidas por um dos sujeitos). Em cada folha do livreto, foram impressos três problemas. Inicialmente o pesquisador apresentava o problema e então, esperava que as crianças resolvessem. Quando todas as crianças tinham terminado, um novo problema era apresentado.

Nas duas primeiras partes, ou seja, em cerca de metade dos problemas houve uma predominância de problemas verbais-pictóricos, enquanto que nas duas últimas partes (segunda metade dos problemas) foi apresentada em maior freqüência problemas com gráficos sem linhas de grade. Problemas com gráficos com linhas de grade foram distribuídos em todas as quatro partes. Também problemas de combinação e de comparação foram apresentados misturados em todas as partes. O pré-teste, a intervenção, o pós-teste e o pós-teste posterior foram aplicados nessa ordem, com diferenças de cinco dias entre pré-teste e intervenção, de dois dias entre intervenção e

---

[8] As pranchas de toda a sessão estão reproduzidas no Anexo 3.

Pós-teste imediato e oito semanas entre o pós-teste e o pós-teste posterior.

O pré-teste, as intervenções em todos os grupos, o pós-teste e o pós-teste posterior foram gravados (áudio) na íntegra e transcritos para análise.

2.2.2 Intervenção

A partir do escore obtido no pré-teste, as crianças foram emparelhadas e distribuídas em três grupos: experimental bloco-gráfico, experimental gráfico e controle.

Os grupos experimentais resolveram 27 problemas durante a intervenção, sendo nove de combinação (dois de soma de duas partes e sete de inclusão em uma classe superior) e 18 de comparação. O grupo controle resolveu 27 contas que envolviam os mesmos pares numéricos utilizados nos problemas dos grupos experimentais. Cada sessão foi áudio-gravada e durou em torno de 75 minutos.

Dependendo do grupo experimental, a forma de representação dos problemas variou. Assim, no grupo bloco-gráfico, os problemas foram apresentados com desenhos de blocos[9] ou com gráficos com e sem linhas de grade, enquanto que no grupo gráfico, os problemas sempre foram apresentados por meio de gráficos mas que também podiam ter ou não linhas de grade.

Para todos os grupos, a apresentação dos problemas foi dividida em três partes de nove problemas, feita a partir do ambiente informatizado (projeção em tela por meio do datashow) com intervenções do pesquisador, em um mesmo dia. Fantoches iniciavam e finalizavam cada uma das partes. Cada criança recebeu um livreto com quatro problemas por folha, em que ela ia escrevendo suas respostas[10]. Também recebeu oito placas retangulares com números de dois a nove, com as quais mostrava suas respostas para os problemas que estavam resolvendo, ao serem solicitadas pelo pesquisador.

Durante a intervenção, o mesmo pesquisador trabalhou com cada grupo (bloco-gráfico, gráfico e controle) em momentos separados, mas no mesmo dia. Enquanto o pesquisador estava com um grupo na sala de aula, o professor estava com o outro grupo desenvolvendo alguma atividade.

---

[9] No caso dos problemas verbais-pictóricos da intervenção do grupo bloco-gráfico não se usou, como no pré e pós-testes, o desenho do próprio objeto. Foram usados desenhos de blocos formando colunas para representar as quantidades presentes no enunciado dos problemas.

[10] Algumas páginas do livreto usado na intervenção do grupo bloco-gráfico encontram-se no Anexo 5.

Em todos os 27 problemas que fizeram parte da intervenção as crianças foram solicitadas a mostrar placas indicando o valor de suas respostas e receberam retorno das respostas corretas, após ser mostrada no ambiente informatizado uma estratégia possível para solucionar o problema proposto. Desse total de problemas, em seis problemas de comparação e três de combinação, distribuídos entre as formas de representação presentes em cada grupo, houve uma participação maior do professor solicitando que algumas crianças explicassem a resposta correta e explicando a estratégia mostrada no suporte informatizado. Os problemas escolhidos para serem foco de explicação adicional por parte do professor foram aqueles que iniciavam cada tipo de categorização utilizada, ou seja, *tipo de apresentação* (com desenhos de blocos, gráfico com linhas de grade e gráfico sem linhas de grade) e *tipo de problema* (combinação e comparação). Assim, o primeiro problema de comparação e de combinação apresentados em cada uma das formas de apresentação serviu como elemento de explicação. Adicionalmente, foram incluídos mais três problemas de comparação (um em cada forma de representação) em função de terem sido observadas maiores dificuldades com esse tipo de problema em nosso estudo anterior e em outros da literatura, como já citado anteriormente, no capítulo introdutório.

Os passos utilizados nos problemas com apresentação das explicações por parte do pesquisador e das crianças foram os seguintes:

1. Apresentar o problema a partir da projeção do mesmo em tela para o grupo classe.
2. Pedir que as crianças o resolvessem.
3. Pedir que as crianças mostrassem suas respostas levantando o cartão com o número correspondente.
4. Mostrar no ambiente informatizado uma estratégia de resolução e apresentar a resposta correta.
5. Pedir que algumas crianças explicassem porque aquela era a resposta correta.
6. Apresentar explicações sobre a estratégia mostrada pelo programa.

Nos outros problemas apresentados que não foram alvo de demonstração de estratégias por parte das crianças e explicações por parte do pesquisador, os passos cinco e seis foram suprimidos. Vale ainda dizer que para cada tipo de problema apresentado buscou-se variar estratégias. Nos problemas de comparação com gráficos utilizou-se acrescentar à coluna menor ou retirar da coluna maior. Quando os problemas de comparação foram apresentados por blocos enfatizou-se a correspondência inicial entre as quantidades (tal como foi feito no estudo anterior) e usaram-se duas estratégias: contar os que não estavam em correspondência ou movimentar os que não estavam em correspondência. Nos problemas de combinação com blocos também foram utilizadas duas estratégias: movimentar uma das colunas e colocar em cima da outra, contando-se o total e desenhar um círculo ao redor de ambas as colunas, contando o total. Nos problemas de combinação com gráficos, contudo, a estratégia de superpor as colunas não se mostrava pertinente (pois no gráfico não se pode movimentar a coluna - pode-se desenhar uma coluna acima da outra, se o sujeito assim o quiser), então foi usada apenas a estratégia de desenhar um círculo ao redor das colunas e realizar a contagem. Na contagem do total foi utilizada sempre a contagem a partir de um dos valores das colunas, complementando um-a-um a contagem do restante dos blocos. Ainda, os valores da contagem podiam estar explícitos ou não serem incluídos na visualização da estratégia (por exemplo, ficando marcada algumas unidades mas sem aparecer os valores numéricos da contagem). O objetivo da variação nas estratégias foi mostrar às crianças diferentes formas de resolver o mesmo problema. As estratégias usadas foram baseadas nas estratégias apresentadas pelas crianças do nosso estudo anterior na resolução dos problemas de combinação e comparação.

Os pares numéricos utilizados foram os mesmos para ambos grupos experimentais e para o grupo controle. Também foram usados os mesmos contextos dos problemas em ambos grupos experimentais. Pares numéricos apresentaram em todos os problemas valores menores que dez.

Algumas diferenças entre os grupos experimentais ocorreram em função das diferenças entre formas de representação utilizadas em cada um desses grupos e encontram-se descritas na seção abaixo.

2.2.3 Grupo experimental com blocos e gráficos

Dos nove problemas de combinação e 18 problemas de comparação, um terço foi apresentado com desenhos de blocos empilhados verticalmente (colunas), um terço com gráficos com linhas de grade e um terço com gráficos sem linhas de grade[11]. O tipo de problema (combinação e comparação) bem como a forma de apresentação (com

[11] As pranchas da intervenção do grupo bloco-gráfico estão reproduzidas no Anexo 6.

Desenho de blocos, gráficos com linhas de grade e gráficos sem linhas de grade) foi misturada, de modo que a criança pudesse contrastar os diferentes tipos de representação e diferentes tipos de problemas. Entretanto, houve uma predominância de problemas com desenhos de blocos em colunas na primeira metade dos problemas e uma predominância de problemas com gráficos sem linhas de grade na segunda metade dos problemas. Gráficos com linhas de grade foram apresentados aproximadamente com a mesma freqüência entre as duas metades. Na primeira parte dos problemas (os 14 problemas iniciais), as crianças tiveram blocos de encaixe à disposição para usarem na resolução dos problemas se assim quisessem. A partir do 15º problema, os blocos foram guardados. Devemos observar que tal organização reflete duas concepções nossas: a primeira é relativa à possibilidade da criança realizar contrastes entre os tipos de problemas e também entre os tipos de representações. A segunda concepção envolvida reflete a nossa hipótese inicial que enfatiza a importância de se propor conexões explícitas entre o trabalho realizado com resolução de problemas usando blocos de encaixe como material de suporte e o trabalho realizado com interpretação de gráficos. Neste sentido, a primeira metade da intervenção enfatizou o trabalho com resolução de problemas que tinham os blocos desenhados e a segunda metade enfatizou o trabalho com gráficos, mas tais partes não se encontravam isoladas (encontramos gráficos com linhas de grade em ambas partes!). Ainda, nessa mesma linha de raciocínio, blocos de encaixe puderam ser utilizados tanto em problemas com desenho de blocos como em problemas apresentados com gráficos desde que estiveram disponíveis durante cerca de metade da intervenção, na apresentação de ambos tipos de problemas.

Na demonstração dos problemas de comparação com blocos, a correspondência inicial entre as quantidades foi enfatizada através da construção inicial de barras com quantidades iguais de blocos. Este tipo de intervenção foi adaptada de nunes e bryant (1997), que obtiveram resultados favoráveis ao desempenhos das crianças nesse tipo de situação; também em nosso estudo anterior, relatado no terceiro capítulo, foi observado efeitos positivos de uma intervenção baseada na correspondência espacial das quantidades.

No quadro seguinte, apresentamos um quadro sinóptico descritivo dos problemas propostos durante a intervenção e dos tipos de representação mobilizados:

Quadro 8: Síntese dos problemas apresentados ao grupo Bloco-Gráfico durante a intervenção.

Tipos de representação		Tipos de problemas			
		Combinação		Comparação	
		Exp.	Não-expl.	Exp.	Não-exp
Bloco		1	2	2	4
Gráfico	C/linha	1	2	2	4
	S/linha	1	2	2	4
	Totais:	3	6	6	12

Uma visão mais detalhada, que inclui a ordem de apresentação e o contexto usado nos problemas pode ser vista no quadro 9 a seguir:.

Quadro 9: Quadro analítico-descritivo da apresentação dos problemas no grupo experimental bloco-gráfico

Tipo de problema	Explicação	Tipo de representação	Par numérico	Contexto
Combinação	Sim	Bloco	5 e 2	Animais
Combinação	Não		6 e 3	Flores
Comparação	Sim		6 e 4	Blocos
Comparação	Não		9 e 3	Guloseimas
Comparação	Sim	Gráfico *com* linhas de grade	5 e 3	Flores
Comparação	Não		6 e 2	Crianças
Combinação	Sim		4 e 3	Frutas
Combinação	Não	Bloco	6 e 2	Brinquedos
Comparação	Não		9 e 7	Animais
Comparação	Sim		7 e 4	Material escolar
Comparação	Não	Gráfico *com* linhas de grade	9 e 4	Instrumento musical
Comparação	Não	Bloco	7 e 3	Brinquedos
Combinação	Não	Gráfico *com* linhas de grade	7 e 2	Doces
Comparação	Não	Bloco	8 e 3	Transporte
Comparação	Sim	Gráfico *com* linhas de grade	9 e 6	Animais
Comparação	Não		8 e 2	Material escolar
Comparação	Sim	Gráfico sem linhas de grade	8 e 6	Bandeiras
Comparação	Não		5 e 2	Sanduíches
Combinação	Sim		4 e 2	Carros
Combinação	Não	Gráfico *com* linhas de grade	5 e 3	Artigos de informática
Combinação	Não	Gráfico sem linhas de grade	6 e 2	Animais
Comparação	Sim		9 e 5	Animais
Comparação	Não	Gráfico *com* linhas de grade	7 e 5	Frutas
Comparação	Não	Gráfico sem linhas de grade	7 e 2	Brinquedos
Combinação	Não		5 e 4	Lápis
Comparação	Não		8 e 5	Esporte
Comparação	Não		9 e 2	Seres marinhos

2.2.4 Grupo experimental Gráfico

A mesma quantidade total de problemas de combinação (nove) e de problemas de comparação (18) que foi apresentada no grupo bloco-gráfico foi apresentada nesse grupo[12]. Entretanto, o que diferiu foi que nesta condição não houve a representação por meio de desenho de blocos, de modo que as crianças também não tiveram blocos à disposição durante a resolução dos problemas. Assim, tivemos cinco problemas de combinação que envolviam gráficos com linhas de grade e quatro que envolviam gráficos sem linhas de grade. Em relação aos problemas de comparação, foram nove problemas com gráficos com linhas de grade e nove com gráficos sem linhas de grade. A mesma estrutura de predominância de um tipo de representação em cada metade dos problemas adotada no grupo anterior foi adotada para esse grupo, de modo que na primeira parte dos problemas foram enfatizados problemas com gráficos com linhas de grade e na segunda parte foram enfatizados problemas com gráficos sem linhas de grade.

Essa diferença entre as formas de representação utilizadas nos dois grupos experimentais trouxe também algumas outras implicações em relação aos problemas usados como exemplo. Os nove problemas que foram alvo de explicação de estratégias nos grupo bloco-gráfico foram explicados também nesse grupo. Tais problemas envolveram os mesmos pares numéricos, o mesmo tipo de problema, o mesmo contexto criado e seguiam a mesma ordem de apresentação. Assim, o terceiro problema foi em todos os grupos problema-explicação de comparação, sendo que podia variar quanto à forma de apresentação (por exemplo, com desenho de blocos no grupo bloco-gráfico e gráfico com linhas de grade no grupo gráfico).

No primeiro quadro a seguir (quadro 10), encontramos um quadro sintético da apresentação dos problemas. Mais abaixo podemos ver um outro quadro mais explicativo (quadro 11) que inclui a ordem em que os problemas foram apresentados, se foram explicados pelo pesquisador ou não, a forma de representação, os pares numéricos e o contexto que os problemas estavam inseridos:

---

[12] As pranchas de toda a intervenção realizada no grupo gráfico estão reproduzidas no Anexo 7.

quadro 10: síntese dos problemas apresentados ao grupo gráfico durante a intervenção

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="3">Tipos de representação</th><th colspan="4">Tipos de problemas</th></tr>
<tr><th colspan="2">Combinação</th><th colspan="2">Comparação</th></tr>
<tr><th>Exp.</th><th>Não-expl.</th><th>Exp.</th><th>Não-exp</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Gráfico</td><td>C/linha</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>S/linha</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="2">Totais:</td><td>3</td><td>6</td><td>6</td><td>12</td></tr>
</table>

Quadro 11: quadro analítico-descritivo da apresentação dos problemas no grupo experimental gráfico

Tipo de problema	**Explicação**	**Tipo de representação**	**Par numérico**	**Contexto**
Combinação	Sim	Gráfico *com* linhas de grade	5 e 2	Animais
Combinação	Não		6 e 3	Flores
Comparação	Sim		6 e 4	Blocos
Comparação	Não		9 e 3	Guloseimas
Comparação	Sim	Gráfico sem linhas de grade	5 e 3	Flores
Comparação	Não		6 e 2	Crianças
Combinação	Sim		4 e 3	Frutas
Combinação	Não	Gráfico *com* linhas de grade	6 e 2	Brinquedos
Comparação	Não		9 e 7	Animais
Comparação	Sim		7 e 4	Material escolar
Comparação	Não	Gráfico sem linhas de grade	9 e 4	Instrumento musical
Comparação	Não	Gráfico *com* linhas de grade	7 e 3	Brinquedos
Combinação	Não		7 e 2	Doces
Comparação	Não		8 e 3	Transporte
Comparação	Sim		9 e 6	Animais
Comparação	Não		8 e 2	Material escolar
Comparação	Sim	Gráfico sem linhas de grade	8 e 6	Bandeiras
Comparação	Não		5 e 2	Sanduíches
Combinação	Sim		4 e 2	Carros
Combinação	Não	Gráfico *com* linhas de grade	5 e 3	Artigos de informática
Combinação	Não	Gráfico sem linhas de grade	6 e 2	Animais
Comparação	Sim		9 e 5	Animais
Comparação	Não	Gráfico *com* linhas de grade	7 e 5	Frutas
Comparação	Não	Gráfico sem linhas de grade	7 e 2	Brinquedos
Combinação	Não		5 e 4	Lápis
Comparação	Não		8 e 5	Esporte
Comparação	Não		9 e 2	Seres marinhos

Em suma, ambos os grupos resolveram a mesma quantidade de problemas, envolvendo os mesmos pares numéricos e o mesmo contexto de problemas. A mesma quantidade de problemas exemplificados foi trabalhada em ambos grupos e os exemplos

Envolvendo gráficos usados no grupo bloco-gráfico foram também usados no grupo gráfico. Foram também seguidos em ambas intervenções os mesmos passos: apresentação do problema, resolução das crianças, apresentação das placas indicativas de suas respostas, apresentação pelo computador de estratégia e resposta, explicação das crianças e do pesquisador. A diferença entre os grupos experimentais foi em relação a apresentação de problemas com desenho de blocos em barras no grupo bloco-gráfico em nove problemas, que não aconteceu no grupo gráfico, onde todos os problemas foram apresentados por meio de gráficos. Outra diferença também notada foi a possibilidade que as crianças do grupo bloco-gráfico tiveram de usar blocos para resolver os primeiros quatorze problemas.

2.2.5 grupo controle

O grupo controle diferiu dos dois grupos experimentais em função de não trabalharem com gráficos, nem com problemas com desenho de blocos durante a intervenção. Este grupo resolveu o mesmo pré-teste, pós-teste e pós-teste posterior utilizado com os grupos experimentais. A atividade de intervenção realizada com esse grupo consistiu na resolução de nove operações aritméticas de adição e dezoito de subtração envolvendo os mesmos pares numéricos trabalhados nos outros dois grupos, também com uso de ambiente informatizado e seguindo os mesmos passos, como já foi dito. A seqüência dos pares numéricos foi a mesma apresentada nos dois outros grupos (bloco-gráfico e gráfico) sendo fornecidas explicações adicionais por parte do pesquisador nas operações aritméticas que envolviam os mesmos pares numéricos utilizados nos problemas com explicação dos outros dois grupos. As telas de projeção incluíram blocos para representar as quantidades indicadas pelas operações aritméticas solicitadas, de forma semelhante ao procedimento utilizado para os problemas que envolviam blocos no grupo bloco-gráfico[13]. Durante metade dos problemas da intervenção as crianças tiveram blocos para auxiliá-las na resolução das operações.

Para que esse grupo não ficasse prejudicado, combinamos com o professor que após o término da pesquisa, iríamos apresentar também a esse grupo os mesmos problemas apresentados aos demais grupos. Isto foi realizado após o pós-teste com todas as crianças participantes não só do grupo controle, mas também do grupo gráfico.

[13] As pranchas da intervenção realizada no grupo controle estão reproduzidas no Anexo 8.

3. Resultados

Conforme explicitado no início do presente capítulo, este estudo consistiu em um experimento de ensino que teve como objetivo comparar duas abordagens didáticas voltadas para a facilitação da compreensão integrada dos princípios envolvidos na construção de gráficos de barra, bem como de aspectos centrais ligados ao campo conceitual das estruturas aditivas. A primeira abordagem envolveu o uso combinado de blocos de encaixe e gráficos de barras, enquanto que a segunda envolveu apenas o uso de gráficos. Um grupo controle, em que as crianças resolveram contas de adição e subtração, também fez parte do experimento.

inicialmente, devemos dizer que em relação aos problemas de combinação três problemas solicitados no pré-teste e pós-testes (um problema verbal-pictórico, um com gráfico com linhas de grade e um com gráfico sem linha de grade) e dois nas intervenções dos grupos bloco-gráfico e gráfico trataram da soma de duas partes, sem a relação de inclusão numa classe superior. Entretanto, como no pré-teste e pós-testes não se verificaram desempenhos diferentes nesses problemas em relação aos outros que envolveram a inclusão em uma classe superior, os mesmos foram tratados conjuntamente em nossa análise.

Foram realizados, inicialmente, comparações de desempenho em função do gênero nas três fases do estudo (escores no pré-teste, pós-teste e pós-teste posterior) nas três fases, a variável ***sexo*** não demonstrou ser um fator diferenciador significativo sobre o desempenho nos problemas (u = 369, bi-caudal, p= .564 no pré-teste, u= 373, bi-caudal, p= .608 no pós-teste, u= 356, bi-caudal, p= .433, no pós-teste posterior). Não se encontrando efeitos diferenciadores significativos nesta análise inicial, a variável ***sexo*** não foi considerada nas outras análises realizadas.

Em seguida, os dados foram submetidos a três análises de variância, de acordo com os seguintes planejamentos:

- ANOVA 1: Uma análise de co-variância que teve como fatores independentes a ***série*** (com dois níveis: alfabetização e primeira série) e o ***grupo*** ao qual os sujeitos pertenciam (com três níveis: bloco-gráfico, gráfico e controle) e como variável co-variante o ***desempenho*** no pré-teste. A variável dependente foi o desempenho no pós-teste. O objetivo dessa análise foi verificar efeitos do nível de escolaridade dos sujeitos, dos grupos de intervenção a que pertenciam e da interação entre essas variáveis nos resultados obtidos pelos mesmos no pós-teste em relação aos resultados do pré-teste.

- ANOVA 2: Uma outra análise de covariância para analisar os dados obtidos no pós-teste posterior, em que foram mantidos os mesmos fatores independentes e variável co-variante, sendo o desempenho no pós-teste posterior a variável dependente. Essa análise visou verificar o efeito do nível de escolaridade, dos grupos a que os sujeitos pertenciam e da interação entre essas variáveis nos resultados obtidos no pós-teste posterior comparando-se com o pré-teste. Os dados obtidos por meio dessa análise permitiram verificar se o comportamento observado no pós-teste em relação às variáveis investigadas (Anova 1) havia sido mantido ou não após oito semanas (período entre o pós-teste e o pós-teste posterior).
- ANOVA 3: Uma terceira análise de co-variância, tendo também como fatores independentes a série e o grupo, como co-variante o desempenho no pós-teste e como variável dependente, o desempenho do pós-teste posterior. Os resultados dessa análise possibilitaram investigar as variações ocorridas entre o pós-teste imediato e o pós-teste posterior considerando-se as variáveis série, grupo e a interação entre ambas.

Para facilitar a compreensão dos resultados obtidos a partir dessas análises realizadas, serão primeiramente apresentados os resultados comparando pré-teste e pós-teste e, em seguida, apresentados os dados obtidos na comparação do pré-teste e pós-teste posterior e, por fim, a comparação entre o pós-teste imediato e o pós-teste posterior.

Considerando o desempenho dos sujeitos no pré e pós-teste, para cada um dos níveis escolares analisados (variável ***série***), observamos no pré-teste médias de 9,11 para a alfabetização e 19,13 para a primeira série e no pós-teste médias de 11,22 para a alfabetização e 21,5 para a primeira série. Os sujeitos de ambas séries apresentaram melhores desempenhos no pós-teste sendo essa diferença de desempenho significativa em relação ao pré-teste (anova 1, efeito isolado da variável ***série*** sobre o desempenho no pós-teste: f= 4,610, 1g.l., p=.037). Observou-se diferenciação igualmente significativa nas séries no pós-teste posterior em relação ao pré-teste (anova 2, f= 5,783, 1g.l., p=.020), em que se verificou média de acerto de 12 na alfabetização e 23,60 na primeira série no pós-teste posterior. Comparando-se os resultados do pós-teste posterior tendo o pós-teste imediato como co-variante não se verificaram diferenças significativas em função da série (anova 3, f= 1,873, 1g.l., p=.177). No gráfico abaixo podemos ver as médias obtidas por ambas séries considerando-se o pré, o pós-teste e o pós-teste posterior:

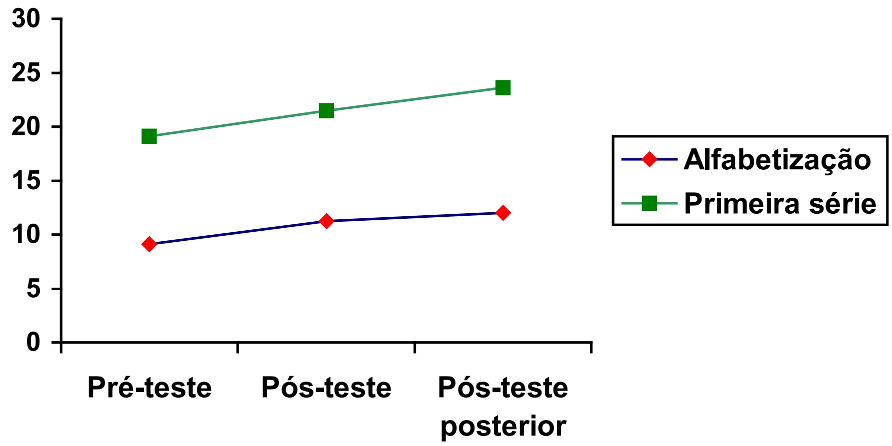

Gráfico 1: média de acerto no pós-teste em função do nível de escolaridade (*série*)

A análise comparativa do desempenho entre as séries de alfabetização e primeira série nas três fases do estudo (pré-tese, pós-teste e pós-teste posterior) também foi verificada a partir do teste u de mann-whitney. No gráfico acima, podemos observar, em todas as fases, desempenhos superiores da primeira série em relação à alfabetização. Conforme esperávamos, essas diferenças mostraram-se significativas (u= 55,5, uni-caudal, p<.000 no pré-teste; u = 78,5, uni-caudal, p<.000, no pós-teste e u = 99,5, uni-caudal, p<.000, no pós-teste posterior).

Em relação à variável ***grupo***, observamos no pré-teste médias de 14,32 no grupo ***bloco-gráfico***, 14,42 no grupo ***gráfico*** e 14,42 no grupo ***controle***. No pós-teste, o grupo bloco-gráfico obteve uma média de acerto de 18,89, o grupo gráfico obteve 17 e o grupo controle 14. Estas diferenças nos resultados do pós-teste em relação ao pré-teste mostraram-se significativas (Anova 1: F= 9,552, 2gl, p = .000). Este efeito diferenciador da variável grupo se manteve ao serem comparados o pré-teste e o pós-teste posterior (Anova 2: F= 4,548, 2g.l., p= .015). No pós-teste posterior o grupo bloco-gráfico obteve uma média de acertos de 20,84, o grupo gráfico 17,68 e o grupo controle 15,79. Comparando o pós-teste imediato com o pós-teste posterior não se constatam diferenças significativas em relação à variável grupo (Anova 3: F= ,693, 2g.l., p=.505).

Refinando-se a análise do efeito da variável ***grupo*** verificou-se no pós-teste a existência de diferenças significativas de desempenho em função do tipo de grupo para a comparação bloco-gráfico e controle (Bonferroni, p=.000) e gráfico e controle (Bonferroni, p=.033). Entre o grupo bloco-gráfico e gráfico não encontramos diferenças significativas. No pós-teste posterior observamos efeitos significativos apenas entre os grupos bloco-gráfico e controle (Bonferroni, p=.014). Esses resultados são ilustrados pelo gráfico 2 abaixo, que compara a média de acerto do pré, pós-teste e pós-teste posterior por grupo:

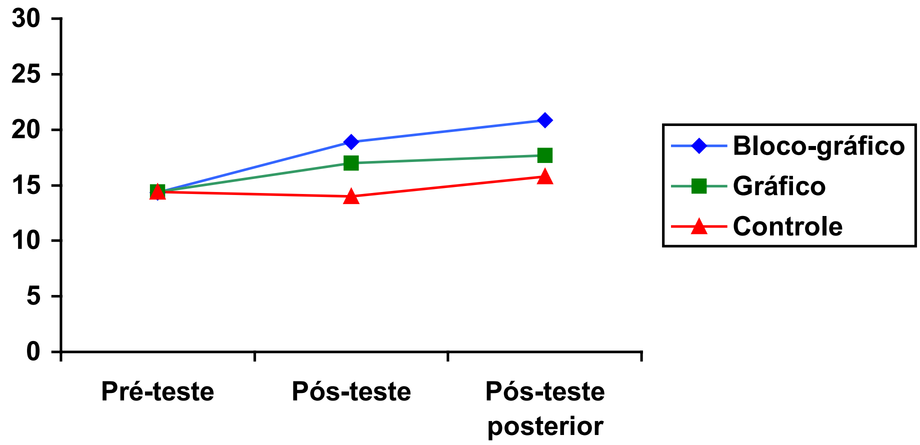

Gráfico 2: Média de acerto no pré, pós-teste e pós-teste posterior em função do tipo de *grupo*

O efeito de interação entre as variáveis ***série*** *e* ***grupo*** não se mostrou significativo ao serem comparados tanto os dados obtidos no pré-teste e no pós-teste como ao se comparar pré-teste e pós-teste posterior (Anova 1: F_{Inter}= ,229, 2 g.l., p = .796 e Anova 2: F_{Inter}= 1,673, 2 g.l., p = .198, respectivamente). No entanto, a comparação entre os desempenhos no pós-teste imediato e no pós-teste posterior mostraram diferenças significativas na interação série e grupo (Anova 3: F_{Inter}= 3,675, 2 g.l., p = .032). Os gráficos abaixo ilustram para cada uma das séries o desempenho dos grupos.

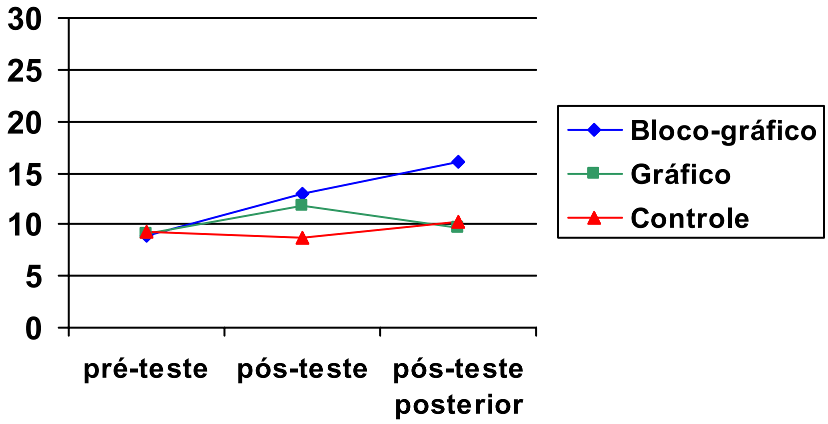

Gráfico 3: Média De Acerto No Pré, Pós-Teste E Pós-Teste Posterior Em Função Do Tipo De Grupo Na Alfabetização

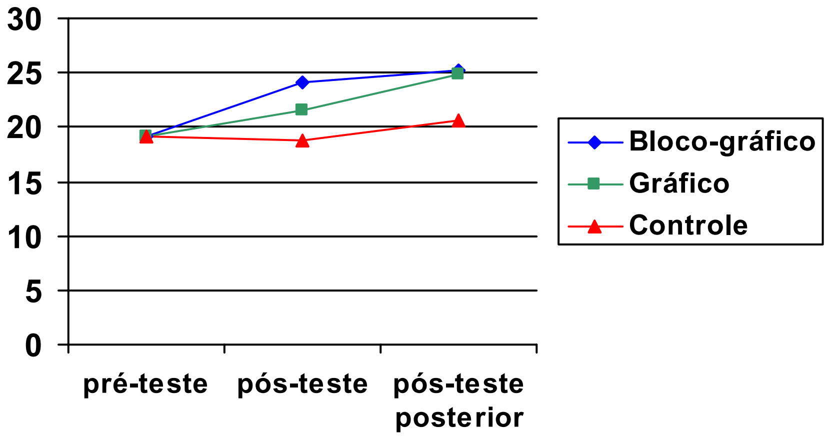

Gráfico 4: Média de acerto no pré, pós-teste e pós-teste posterior em função do tipo de *grupo* na primeira série

É interessante notar que o grupo gráfico na alfabetização apresenta uma queda de desempenho no pós-teste posterior comparado ao desempenho observado no pós-teste imediato. Esse mesmo grupo, na primeira série, mostrou um padrão de desempenho diferente, verificando-se um acentuado avanço no pós-teste posterior.

Considerando isoladamente a alfabetização, as médias de acerto observadas foram nove no pré-teste e 13 no pós-teste do grupo bloco-gráfico, 9,11 no pré-teste e 11,89 no pós-teste do grupo gráfico e 9,22 no pré-teste e 8,78 no pós-teste do grupo controle (veja gráfico 3, acima). Comparando as médias obtidas por cada um dos grupos no pós-teste na alfabetização, observamos diferenças significativas entre os grupos bloco-gráfico e controle (u=19, p=.028, unicaudal) e aproximadamente significativa entre o grupo gráfico e controle (u= 22,5, p= .055, unicaudal). Na comparação das médias dos grupos no pós-teste posterior se encontrou diferenças significativas no desempenho do grupo bloco-gráfico em relação ao grupo gráfico (u=21, p=.0415, unicaudal) e em relação ao grupo controle (u=21,5, p=.046, unicaudal). A média de acerto obtidas no pós-teste posterior do grupo bloco-gráfico foi 16, do grupo gráfico foi 9,67 e do grupo controle foi 10,33.

Em suma, na alfabetização, ainda que no pós-teste imediato ambos grupos tenham mostrado diferenças no desempenho em relação ao grupo controle, ao se comparar o desempenho no pós-teste posterior se observa uma queda acentuada no desempenho do grupo gráfico. Assim, no pós-teste posterior, apenas o grupo bloco-gráfico manteve uma diferença significativa de desempenho em relação ao grupo controle apresentando, também, desempenho significativamente superior ao grupo gráfico.

Na primeira série, as médias obtidas pelos grupos no pré-teste foram: 19,1 o grupo bloco-gráfico, 19,2 o grupo gráfico e 19,1 o grupo controle. No pós-teste foram: 24, 2 o grupo bloco-gráfico, 21, 6 o grupo gráfico e 18, 7 o grupo controle. Comparando as médias do pós-teste imediato, o teste u de mann-whitney mostrou diferenças de desempenho significativas apenas na comparação do grupo bloco-gráfico e controle (u= 14,5, p=.0025, unicaudal). Ainda que se observem melhores desempenhos do grupo gráfico em relação ao controle, essa diferença não se mostrou significativa (u=32,5, p=.090, unicaudal). Esses dados estão ilustrados no gráfico 4.

Considerando as médias do pós-teste posterior na primeira série, observamos diferenças significativas entre o grupo bloco-gráfico e o grupo controle (u=14, p=.0025, unicaudal) e entre o grupo gráfico e o grupo controle (u=23,5, p=.022, unicaudal).

Em resumo, na primeira série, no pós-teste imediato apenas o grupo bloco-gráfico apresentou um desempenho significativamente superior em relação ao grupo controle. No pós-teste posterior, o grupo bloco-gráfico permaneceu ascendendo e o grupo gráfico apresentou um acentuado crescimento. Nessa fase, as diferenças de ambos grupos experimentais em relação ao grupo controle foram significativas. Não se observaram diferenças significativas entre os grupos experimentais.

Outra análise realizada considerou os efeitos das variáveis ***tipo de problema*** (combinação e comparação) e ***apresentação dos problemas*** (problema verbal-pictórico, gráfico com linhas de grade e gráfico sem linhas de grade) nos grupos bloco-gráfico, gráfico e controle e nas séries da alfabetização e primeira série, considerando-se diferenciação de desempenho entre o pré e o pós-teste para verificar o efeito imediato da intervenção e entre pós-teste e pós-teste posterior para avaliar o desenvolvimento após oito semanas.

Em relação à variável ***tipo de problema***, a tabela 1, na página seguinte, apresenta as médias de acerto por tipo de problemas e grupo no pré, pós teste e pós-teste posterior.

Observando-se a tabela 1 podemos notar diferenças de desempenho nos três momentos de avaliação (pré-teste, pós-teste e pós-teste posterior) entre os três grupos nos problemas de combinação e de comparação, sendo esses últimos mais difíceis. No pós-teste e no pós-teste posterior, tanto nos problemas de combinação como nos de comparação, os melhores desempenhos pertencem às crianças do grupo bloco-gráfico, seguidas pelo grupo gráfico.

Tabela 1: Médias de acerto no pré, pós-teste e pós-teste posterior em função do tipo de problema (combinação e comparação) e do grupo*.

Tipo de problema	Grupo	Pré-teste	Pós-teste	Pós-teste posterior
Combinação	Bloco-gráfico	8,53	11,42	12,05
	Gráfico	8,84	9,84	10,16
	Controle	8,47	8,11	9,47
Comparação	Bloco-gráfico	5,79	7,47	8,79
	Gráfico	5,58	7,16	7,53
	Controle	5,95	5,89	6,32

* as setas indicam diferenças significativas entre as fases e estão orientadas da menor média para a maior.

Ainda na Tabela 1, considerando-se apenas o grupo *bloco-gráfico*, observamos diferenças significativas entre os desempenhos das crianças no pré e pós-teste nos problemas de comparação (Teste de Wilcoxon, Z= 2,622, p = .0045, unicaudal) e nos problemas de combinação (Teste de Wilcoxon, Z= 3,405, p =.0005, unicaudal). Diferentemente, comparando-se o pós-teste e o pós-teste posterior não foram constatadas diferenças significativas em relação à variável tipo de problema.

Em relação ao grupo *gráfico*, diferenças significativas foram verificadas entre o pós-teste imediato e o pré-teste apenas nos problemas de comparação (teste de wilcoxon, z= 2,269, p=.0115, unicaudal). Comparando-se o pós-teste imediato e pós-teste posterior não foram observadas diferenças significativas no desempenho das crianças nos problemas de combinação e nos de comparação.

Como era de se esperar, não se constataram diferenças significativas nos desempenhos das crianças do grupo *controle* no pré-teste e pós-teste imediato em relação a ambos tipos de problemas, comparação e combinação. Entretanto, comparando-se pós-teste e pós-teste posterior diferenças significativas foram encontradas nos problemas de combinação (teste de wilcoxon, z=2,463, p=.007, bicaudal).

Quando analisamos essas variáveis (tipo de problema e grupo) em função da série (alfabetização e primeira série), obtemos resultados interessantes, que podem ser vistos nas tabelas 2 e 3, a seguir.

Tabela 2: Médias de acerto da série da alfabetização no pré, pós-teste e pós-teste posterior em função do tipo de problema (combinação e comparação) e do grupo*.

Tipo de problema	Grupo	Pré-teste	Pós-teste	Pós-teste posterior
combinação	Bloco-gráfico	6,89 →	9,22	11,11
	Gráfico	6,78	7,33	6,67
	Controle	6,89	6,56	7,89
Comparação	Bloco-gráfico	2,11	3,78	4,89
	Gráfico	2,33 →	4,56	3
	Controle	2,33	2,22	2,44

* as setas indicam diferenças significativas entre as fases e estão orientadas da menor média para a maior.

Comparando o desempenho de crianças da alfabetização no pós-teste imediato com o pré-teste, observamos um avanço significativo no desempenho das crianças do grupo bloco-gráfico nos problemas de combinação (z=2,565, p=.005, unicaudal) e do grupo gráfico nos problemas de comparação (z=1,866, p=.031, unicaudal). No pós-teste posterior, entretanto, verificamos no grupo gráfico uma queda no desempenho em ambos tipos problemas. A análise estatística desses dados não mostrou diferenças significativas, entretanto, vale notar esse resultado na medida em que os outros grupos apresentam um comportamento diferente, com desempenhos ascendentes no pós-teste posterior em relação ao pós-teste imediato em todos os tipos de problemas.

Resultados diferentes foram encontrados na primeira série. A tabela 3 ilustra esses dados.

Tabela 3: Médias de acerto da primeira série no pré, pós-teste e pós-teste posterior em função do tipo de problema (combinação e comparação) e do grupo*.

Tipo de problema	Grupo	Pré-teste	Pós-teste	Pós-teste posterior
Combinação	Bloco-gráfico	10 →	13,4	12,9
	Gráfico	10,7	12,1	13,3
	Controle	9,9	9,5	10,9
Comparação	Bloco-gráfico	9,1 →	10,8	12,3
	Gráfico	8,5	9,5	11,6
	Controle	9,2	9,2	9,8

* as setas indicam diferenças significativas entre as fases e estão orientadas da menor média para a maior.

os dados obtidos na primeira série mostram melhores desempenhos de ambos grupos experimentais no pós-teste tanto nos problemas de combinação como de comparação. A análise através do teste de wilcoxon constatou diferenças significativas apenas nos resultados obtidos pelo grupo bloco-gráfico (z=2,383, p=.0085, unicaudal para os problemas de combinação e z=2,539, p=.0055, unicaudal para os problemas de comparação). Considerando o pós-teste posterior, verificamos nessa série um comportamento ascendente do grupo gráfico em ambos tipos de problemas, embora não significativo, que contrasta com a queda observada no desempenho deste mesmo grupo na alfabetização.

A análise da variável ***apresentação dos problemas*** foi conduzida da mesma forma que a variável ***tipo de problema***, através do teste de wilcoxon, comparando-se o desempenho de cada grupo no pré-teste e pós-teste e, depois, no pós-teste e pós-teste posterior. A tabela 4, na página seguinte, mostra as médias no pré-teste, pós-teste e pós-teste posterior considerando a variável apresentação dos problemas por grupo.

Inicialmente, podemos notar que as crianças de todos os grupos apresentam maiores dificuldades em trabalhar com gráficos do que com problemas verbais-pictóricos. Na resolução de problemas através de gráficos, como já era esperado, gráficos sem linhas de grade trazem maiores dificuldades do que gráficos com linhas de grade. No pós-teste imediato os grupos experimentais apresentaram desempenhos superiores em relação ao grupo controle nos problemas com gráficos (com e sem linhas de grade). No pós-teste posterior, os maiores avanços para os grupos bloco-gráfico e controle ocorreram nos problemas com gráficos sem linhas de grade. O grupo gráfico teve um avanço maior nos problemas verbais-pictóricos e uma queda no desempenho nos problemas de gráficos com linhas de grade.

É interessante notar ainda que no pós-teste posterior os melhores desempenhos são observados no grupo bloco-gráfico, seguido pelo grupo gráfico. Também nessa mesma fase (pós-teste posterior) podemos observar uma tendência do grupo bloco-gráfico em continuar avançando em todas formas de apresentação dos problemas, diferentemente dos outros grupos em que se observam algumas quedas no desempenho.

Tabela 4: Média de acerto no pré, pós-teste e pós-teste posterior por grupo e apresentação dos problemas (verbal com desenhos, gráfico com e gráfico sem linha de grade)*.

Apresentação dos problemas	Grupo	Pré-teste	Pós-teste	Pós-teste posterior
Verbal com desenhos	Bloco-gráfico	7,21	7,53	8,11
	Gráfico	7,11	6,63	7,42
	Controle	7,16	7,16	7,05
Gráfico com Linhas de grade	Bloco-gráfico	5 →	6,84	6,95
	Gráfico	4,42 →	6,16	5,68
	Controle	4,79	4,52	5,16
Gráfico sem linhas de grade	Bloco-gráfico	2,11 →	4,53	5,79
	Gráfico	2,89	4,21	4,58
	Controle	2,47	2,32 →	3,58

* as setas indicam diferenças significativas entre as fases e estão orientadas da menor média para a maior.

Considerando a fase pré-teste e pós-teste intra grupo encontramos no grupo *bloco-gráfico* desempenhos significativamente melhores no pós-teste apenas nos problemas com gráficos, com linhas de grade ($z = 3,359$, $p =.0005$, unicaudal) e sem linhas de grade ($z = 2,785$, $p =.0025$, unicaudal). Quando comparamos os resultados do pós-teste e do pós-teste posterior não constatamos diferenças significativas de desempenhos nesse grupo.

O grupo *gráfico* apresenta desempenhos significativamente superiores apenas nos problemas com gráficos com linhas de grade, comparando-se o pré-teste e o pós-teste ($z = 2,786$, $p = .0025$, unicaudal). Na fase pós-teste – pós-teste posterior não foram verificadas diferenças significativas.

No grupo *controle*, foram observados diferenças significativas no desempenho apenas quando comparou-se pós-teste imediato e pós-teste posterior, em relação ao problemas com gráficos sem linhas de grade (z=2,973, p=.003, bicaudal). As crianças desse grupo apresentaram desempenhos superiores no pós-teste posterior, embora não atingindo os mesmos patamares obtidos pelas crianças dos outros grupos.

Analisando a variável apresentação dos problemas por grupo em cada uma das séries, obtivemos os seguintes resultados na série da alfabetização, apresentados na tabela 5, abaixo.

Tabela 5: Médias de acerto do alfabetização no pré, pós-teste e pós-teste posterior em função da apresentação dos problemas (verbal com desenhos, gráfico com linhas de grade e gráficos sem linhas de grade)*.

Apresentação dos problemas	Grupo	Pré-teste	Pós-teste	Pós-teste posterior
Verbal com desenhos	Bloco-gráfico	4,67	5,67	6,78
	Gráfico	5	4,78	5,33
	Controle	5,22	5,22	4,89
Gráfico com linhas	Bloco-gráfico	3,44	5	5,22
	Gráfico	1,89	4,44	2,89
	Controle	2,89	2,89	3,78
Gráfico sem linhas	Bloco-gráfico	,89	2,33	4
	Gráfico	2,22	2,67	1,44
	Controle	1,11	,67	1,67

* as setas indicam diferenças significativas entre as fases e estão orientadas da menor média para a maior.

Nessa série podemos constatar no pós-teste imediato avanços do grupo bloco-gráfico em todos as formas de apresentação de problemas, ainda que diferenças significativas em relação aos resultados do pré-teste sejam observadas apenas nos problemas verbais-pictóricos (z=1,725, p=.042, unicaudal) e nos de gráficos com linhas de grade (z=1,980, p=.024, unicaudal). O grupo gráfico apresenta desempenho significativamente superior nos problemas de gráficos com linhas de grade (z=2,461, p=.007, unicaudal). As outras variações de desempenho observadas em todos os grupos não se mostraram significativas.

No pós-teste posterior constatamos diferenças significativas em relação ao pós-teste imediato em todos os grupos nos problemas com gráficos sem linhas de grade, entretanto enquanto nos grupos bloco-gráfico e controle verificam-se aumentos nas médias de acerto, no grupo gráfico se observa uma queda no desempenho (z=2,280, p=.023, bicaudal, no grupo bloco-gráfico; z=2,232, p=.026, bicaudal, no grupo gráfico e z=2,06, p=.039, bicaudal no grupo controle).

Os resultados da primeira série estão apresentados abaixo, na tabela 6. Podemos notar, como já foi mencionado, que problemas verbais foram mais fáceis do que problemas com gráficos para todos os grupos. Entretanto, também é interessante salientar que há grandes avanços nos grupos experimentais, principalmente no grupo bloco-gráfico, em problemas com gráficos, do pré para o pós-teste imediato. As diferenças de desempenho constatadas no grupo bloco-gráfico foram significativas tanto para os problemas com gráficos com linhas como para os problemas com gráficos sem linhas de grade (z=2,689, p=.0035, unicaudal e z=2,296, p=.011, unicaudal, respectivamente). Não se observaram efeitos significativos em relação ao grupo gráfico e ao grupo controle.

Tabela 6: Médias de acerto da primeira série no pré, pós-teste e pós-teste posterior em função da apresentação dos problemas (verbal com desenhos, gráfico com linhas de grade e gráficos sem linhas de grade)*.

Apresentação dos problemas	Grupo	Pré-teste	Pós-teste	Pós-teste posterior
Verbal com desenhos	Bloco-gráfico	9,5	9,2	9,3
	Gráfico	9	8,3	9,3
	Controle	8,9	8,9	9
Gráfico com linhas	Bloco-gráfico	6,4	8,5	8,5
	Gráfico	6,7	7,7	8,2
	Controle	6,5	6	6,4
Gráfico sem linhas	Bloco-gráfico	3,2	6,5	7,4
	Gráfico	3,5	5,6	7,4
	Controle	3,7	3,8	5,3

* as setas indicam diferenças significativas entre as fases e estão orientadas da menor média para a maior.

Analisando os resultados obtidos no pós-teste posterior, observamos que o grupo bloco-gráfico manteve os escores obtidos no pós-teste imediato tanto nos problemas verbais como nos problemas com gráficos com linhas de grade. Apenas nos problemas de gráficos sem linhas de grade foram observados melhores desempenhos, mesmo que não significativos.

O grupo gráfico foi aquele que apresentou os maiores avanços em todas as formas de apresentação dos problemas no pós-teste posterior, praticamente igualando-se às médias obtidas pelo grupo bloco-gráfico em todas as categorias de problemas. O teste de wilcoxon revelou diferenças significativas de desempenho apenas em relação aos problemas de gráficos sem linhas de grade (z=2,226, p=.026, bicaudal). Também no grupo controle, problemas de gráficos sem linhas de grade apresentaram desempenhos significativamente superiores (z=2,257, p=.024, bicaudal).

é interessante notar que a semelhança nas médias de acerto entre os grupos bloco-gráfico e gráfico no pós-teste posterior se deve ao avanço observado no grupo gráfico, sem haver quedas no desempenho do grupo bloco-gráfico.

Em relação à interação entre as variáveis ***tipo de problema e apresentação dos problemas***, observamos, na tabela 7, as seguintes médias de acerto no pré, pós e pós-teste posterior:

Tabela 7: Média de acerto no pré, pós-teste e pós-teste posterior por grupo, apresentação dos problemas e tipo de problema*.

Grupo	**Apresentação dos problemas**	**Problemas de combinação**			**Problemas de comparação**		
		Pré-teste	Pós-teste	Pós-teste posterior	Pré-teste	Pós-teste	Pós-teste posterior
Bloco-gráfico	Prob. Verbal	4,32	4,68	4,68	2,89	2,84	3,42
	Graf.c/ linhas	2,89	4,26	4,21	2,11	2,58	2,74
	Graf. S/ linhas	1,32	2,47	3,16	0,79	2,05	2,63
Gráfico	Prob. Verbal	4,21	4,37	4,42	2,89	2,26	3
	Graf.c/ linhas	2,63	3,05	3,47	1,79	3,11	2,21
	Graf. S/ linhas	2	2,42	2,26	0,89	1,79	2,32
Controle	Prob. Verbal	4,32	4,32	4,37	2,84	2,84	2,68
	Graf.c/ linhas	2,79	2,47	3,05	2	2,05	2,11
	Graf. S/ linhas	1,37	1,32	2,05	1,10	1	1,53

* as setas indicam diferenças significativas entre as fases e estão orientadas da menor média para a maior.

Observamos que as crianças de todos os grupos apresentaram já no pré-teste bons desempenhos nos problemas verbais de combinação (média máxima seria 5), o mesmo não aconteceu quando consideramos a apresentação com gráficos com linhas de grade, sendo essa dificuldade acentuada quando a apresentação é através de gráficos sem linhas de grade. No caso dos problemas de comparação, constatamos que a dificuldade inicial nos problemas verbais (pré-teste) é bastante superior à observada nos problemas de combinação e que essa dificuldade também vai se acentuando quando os problemas são apresentados com gráficos, principalmente, sem linhas de grade.

Comparando o desempenho no pós-teste imediato em relação ao pré-teste, verificamos que no grupo *bloco-gráfico*, problemas de combinação verbais-pictóricos e com gráficos com e sem linhas de grade apresentaram desempenhos significativamente superiores (z=2,333, p=0.010, unicaudal; z=3,497, p<.000, unicaudal; z=2,362, p= .009, unicaudal, respectivamente). Problemas de comparação através de gráficos sem linhas de grade também apresentaram diferenças significativas entre os desempenhos no pré e pós-teste imediato z=2,483, p=.0075, unicaudal).

No grupo *gráfico*, o desempenho foi significativamente superior no pós-teste imediato nos problemas de comparação com gráficos com e sem linhas de grade em relação ao pré-teste (z=2,837, p=.0025, unicaudal e z=2,021, p=.0215, unicaudal respectivamente). Ainda nesse grupo foi observada uma queda no desempenho nos problemas de comparação verbais-pictóricos (z=2,36, p=0.009, unicaudal).

Não se observaram diferenças significativas no desempenho do grupo *controle* no pós-teste imediato em relação ao pré-teste na interação entre as variáveis tipo de problema e apresentação dos problemas.

Quando consideramos a interação entre essas mesmas variáveis com relação ao pós-teste e o pós-teste posterior, não observamos diferenças significativas no grupo bloco-gráfico. No grupo gráfico, os problemas de comparação através de gráficos com linhas de grade apresentaram uma queda significativa no desempenho no pós-teste posterior (z=2,127, p=0.033, bicaudal) enquanto que no grupo controle houve avanços significativos nos problemas de combinação e comparação através de gráficos sem linhas de grade (z=2,547, p=0.011, bicaudal e z=2,058, p=0.04, bicaudal, respectivamente).

Por fim, vale dizer que considerando que o pós-teste posterior, o grupo bloco-gráfico apresentou desempenhos superiores em relação aos outros grupos, sugerindo que o avanço possibilitado pela intervenção foi bastante consistente e duradouro.

Observando a interação entre as variáveis "tipo de problema" e "apresentação dos problemas" por série, os resultados obtidos na alfabetização podem ser vistos na tabela 8, a seguir.

Iremos focalizar, inicialmente, os resultados obtidos pelo grupo gráfico da alfabetização. Em análise anterior (cf. Gráfico 3, p.188) esse grupo apresentou uma queda no desempenho no pós-teste posterior sendo tal resultado discrepante do resultado obtido por esse mesmo grupo na primeira série (cf. Gráfico 4, p. 188).

Tabela 8: média de acerto na série de alfabetização no pré, pós-teste e pós-teste posterior por grupo, apresentação dos problemas e tipo de problema*.

Grupo	Apresentação dos problemas	Problemas de combinação			Problemas de comparação		
		Pré-teste	Pós-teste	Pós-teste posterior	Pré-teste	Pós-teste	Pós-teste posterior
Bloco-gráfico	Prob. Verbal	3,78 →	4,33	4,56	0,89	1,33	2,22
	Graf.c/ linhas	2,56 →	3,78	3,89	0,89	1,22	1,33
	Graf. S/ linhas	0,56	1,11 →	2,67	0,33	1,22	1,33
Gráfico	Prob. Verbal	3,67	3,89	3,78	1,33	0,89	1,56
	Graf.c/ linhas	1,44	2	2	0,44 →	2,44	← 0,89
	Graf. S/ linhas	1,67	1,44	0,89	0,57	1,22	0,56
Controle	Prob. Verbal	4,11	3,89	3,89	1,11	1,33	1
	Graf.c/ linhas	1,89	2	2,66	1	0,89	1,11
	Graf. S/ linhas	0,89	0,67	1,33	0,22	0	0,33

* as setas indicam diferenças significativas entre as fases e estão orientadas da menor média para a maior.

A tabela 8 mostra no grupo gráfico um avanço que foi significativo no desempenho entre pré e pós-teste nos problemas de comparação com gráficos com linhas (z=2,220, p=.013, unicaudal). Entretanto, após oito semanas, no pós-teste posterior, observou-se uma acentuada queda no desempenho nesse mesmo tipo de problema. Esta queda demonstrou ser significativa (z=2,032, p=.042, bicaudal). Também no pós-teste posterior podemos observar desempenho inferior nos problemas de comparação com gráficos sem linhas, que, no entanto, não foi significativo. No caso dos problemas de comparação verbais-pictóricos também observamos uma queda no desempenho comparando os resultados do pré e pós-teste, entretanto essa queda e outras variações nas médias observadas não se mostraram significativas.

Em relação ao grupo bloco-gráfico desempenhos superiores nos problemas de combinação verbal-pictórico e com gráfico com linhas no pós-teste imediato mostraram ser significativos (z=1,890, p=0,0295, unicaudal e z=2,636, p=.004, unicaudal, respectivamente). No pós-teste posterior observamos um avanço significativo nos problemas de combinação com gráficos sem linhas de grade em relação ao pós-teste imediato (z=2,280, p=.023, bicaudal).

Não foram observadas diferenças significativas na resolução do grupo controle em nenhum dos problemas, comparando-se pré e pós-teste e pós-teste e pós-teste posterior.

os resultados obtidos pela primeira série podem ser visualizados a partir da tabela 9, abaixo.

Tabela 9: média de acerto da primeira série no pré, pós-teste e pós-teste posterior por grupo, apresentação dos problemas e tipo de problema*.

Grupo	Apresentação dos problemas	Problemas de combinação			Problemas de comparação		
		Pré-teste	Pós-teste	Pós-teste posterior	Pré-teste	Pós-teste	Pós-teste posterior
Bloco-gráfico	Prob. Verbal	4,8	5	4,8	4,7 ←	4,2	4,5
	Graf.c/ linhas	3,2 →	4,7	4,5	3,2	3,8	4
	Graf. S/ linhas	2 →	3,7	3,6	1,2 →	2,8	3,8
Gráfico	Prob. Verbal	4,7	4,8	5	4,3 ←	3,5	4,3
	Graf.c/ linhas	3,7	4	4,8	3 →	3,7	3,4
	Graf. S/ linhas	2,3	3,3	3,5	1,2 →	2,3	3,9
Controle	Prob. Verbal	4,5	4,7	4,8	4,4	4,2	4,2
	Graf.c/ linhas	3,6	2,9	3,4	2,9	3,1	3
	Graf. S/ linhas	1,8	1,9	2,7	1,9	1,9	2,6

* as setas indicam diferenças significativas entre as fases e estão orientadas da menor média para a maior.

Contrastando com os resultados da alfabetização, o grupo gráfico na primeira série apresentou no pós-teste posterior, na maioria dos problemas, médias de acerto superiores às do pós-teste imediato. A exceção foi nos problemas de comparação com gráficos com linhas de grade em que houve uma pequena queda que, no entanto, não se mostrou significativa. Esse mesmo grupo, na análise do desempenho no pós-teste imediato em relação ao pré-teste, apresentou avanços significativos no desempenho nos problemas de comparação com gráficos com e sem linhas de grade (z=1,732, p=.0415, unicaudal, e z= 1,653, p=.049, unicaudal, respectivamente). No caso particular dos problemas de comparação verbais-pictóricos constatou-se uma queda significativa na média de acerto (z= 1,93, p=.027, unicaudal). Esse dado parece sugerir que a intervenção do grupo gráfico exerceu um efeito mais localizado sobre os problemas apresentados através de gráficos.

o grupo bloco-gráfico nessa série, comparando-se o desempenho do pré-teste com o do pós-teste apresentou significativos avanços no desempenho em problemas de combinação com gráfico com linhas de grade (z=2,388, p=.0085, unicaudal) e sem linhas de grade (z=2,116, p=.017, unicaudal). No caso dos problemas de comparação, observamos uma queda significativa no desempenho nos problemas verbais-pictóricos (z=1,982, p= .048, unicaudal) e um avanço também significativo nos problemas com gráficos sem linhas de grade (z=1,982, p=.0285, unicaudal). Não se observaram diferenças significativas de desempenho entre o pós-teste imediato e o pós-teste posterior. Também no grupo controle não foi constatada diferença significativa no desempenho entre pré e pós-teste e entre pós-teste e pós-teste posterior.

4. Discussão

De modo geral, os resultados descritos confirmam estudos da literatura em que se observam melhores desempenhos nos problemas de combinação do que de comparação em atividades de resolução de problemas (carpenter e moser, 1982, por exemplo), bem como estudos que discutem as dificuldades de resolução de problemas com gráficos (santos e gitirana, 1999; guimarães, 2002, entre outros). Entretanto, o presente estudo traz novos dados para serem refletidos no contexto dessa direção de pesquisa. Com o intuito de tornar mais clara a abordagem de tais dados, retomamos nesta seção quatro aspectos centrais levantados nos dois primeiros capítulos da presente tese, discutindo-os à luz dos dados obtidos.

1. *A intervenção cumpriu o seu objetivo de favorecer melhoria do desempenho das crianças nas atividades propostas?*

a resposta para essa pergunta foi afirmativa. Os resultados obtidos mostraram efeitos significativos da variável grupo sobre o desempenho no pós-teste realizado. Observamos que no pós-teste, crianças dos grupos de intervenção (gráfico e bloco-gráfico) apresentaram médias de acerto superiores às crianças do grupo controle. Comparando-se tais desempenhos, diferenças significativas foram observadas entre o grupo bloco-gráfico e controle e entre o grupo gráfico e controle.

No pós-teste posterior, oito semanas após a intervenção, os grupos experimentais e o grupo controle apresentaram avanços que podem ser atribuídos ao efeito escolar. Os dados obtidos na comparação entre os grupos no pós-teste posterior mostraram uma significativa superioridade no desempenho apenas do grupo bloco-gráfico em relação ao grupo controle.

Quando consideramos as séries isoladamente, observamos que na primeira série após a intervenção, ambos grupos experimentais apresentaram desempenhos superiores em relação ao grupo controle sendo, no entanto, significativa apenas a diferença entre o grupo bloco-gráfico e o controle. No pós-teste posterior, devemos ressaltar o avanço observado no grupo gráfico praticamente igualando às médias do grupo bloco-gráfico, constatando-se diferenças significativas de desempenho de ambos grupos experimentais em relação ao grupo controle.

A alfabetização apresentou um comportamento semelhante à primeira série no pós-teste imediato, mostrando o efeito da intervenção principalmente no grupo bloco-gráfico. No pós-teste posterior diferenças significativas foram observadas também apenas comparando-se o grupo bloco-gráfico e controle, havendo uma acentuada queda no desempenho do grupo gráfico.

Esses resultados sugerem que efeitos da intervenção favoreceram o desempenho das crianças de ambos grupos experimentais da primeira série e do grupo bloco-gráfico da alfabetização, que mantiveram um desempenho ascendente no pós-teste posterior em relação às médias do pós-teste imediato. Diferentemente, o grupo gráfico na alfabetização apresentou uma queda de desempenho acentuada no pós-teste posterior.

Ainda que tenhamos observado os avanços relatados acima, que mostraram que a intervenção produziu efeito positivo sobre o desempenho, ainda constatamos a persistência de algumas dificuldades na resolução de problemas de comparação, principalmente na série da alfabetização e com uso do suporte gráfico. Esses dados parecem confirmar que estabelecer conexões entre diferentes representações não é algo fácil e simples para as crianças, como já relatado no estudo de resnick & omason (1987) e observado em alguns protocolos em nosso estudo anterior.

2. O que pode ter contribuído para favorecer as crianças dos grupos experimentais, especialmente as do grupo bloco-gráfico?

Inicialmente, é importante realçar o papel do planejamento de ensino em qualquer área do conhecimento. As intervenções foram realizadas com o objetivo de favorecer uma discussão sobre resolução de problemas envolvendo gráficos e, diante dos resultados obtidos, podemos concluir que atingiram o objetivo de gerar reflexão sobre essa área específica.

Parece-nos que diante dos resultados obtidos uma questão pode ser levantada: por que as crianças do grupo bloco-gráfico apresentaram um melhor desempenho no pós-teste posterior do que as crianças do grupo gráfico? O que houve com o grupo gráfico no pós-teste posterior que não manteve os avanços observados imediatamente após a intervenção?

Quando analisamos os resultados em função do nível de escolaridade, notamos que no pós-teste posterior o desempenho do grupo gráfico na série de alfabetização apresentou uma acentuada queda, principalmente nos problemas envolvendo gráficos (cf. Gráfico 3, p. 188 e tabela 5 p.194). Diferentemente, nessa mesma série, a apresentação combinada entre blocos e gráficos na intervenção parece ter auxiliado as crianças, observando-se avanços no desempenho desse grupo no pós-teste posterior. Esse padrão de comportamento não foi verificado na primeira série. Nesta série, o grupo gráfico apresentou um desempenho ascendente no pós-teste posterior, praticamente igualando-se ao desempenho do grupo bloco-gráfico que também permaneceu evoluindo. Assim, ao que parece a queda no desempenho geral (as duas séries juntas) do grupo gráfico no pós-teste posterior foi pressionada pela queda acentuada do desempenho desse mesmo grupo na série da alfabetização.

Diante desses dados duas análises devem ser realizadas. A primeira buscando os fatores que podem ter auxiliado as crianças do grupo bloco-gráfico a se beneficiarem da intervenção mais do que as crianças do grupo gráfico e a segunda, relacionada à primeira, que tente levantar possíveis razões para a queda do desempenho do grupo gráfico na alfabetização.

Para responder essas questões vamos primeiro focalizar as semelhanças e diferenças entre os grupos de intervenção.

Todos os grupos resolveram a mesma quantidade de problemas na intervenção, obtendo retorno da resposta correta em todos os problemas e recebendo explicações adicionais na mesma quantidade de problemas e nos mesmos problemas. O que diferia entre eles? Basicamente dois aspectos: 1. Crianças do grupo bloco-gráfico e do grupo controle tiveram blocos à disposição para manipulação durante metade dos problemas da intervenção, enquanto crianças do grupo gráfico não tiveram tal material de suporte à sua disposição; 2. No ambiente informatizado de apresentação dos problemas, na intervenção, um terço dos problemas foram apresentados por meio de imagens de blocos encaixados em barras para as crianças do grupo bloco-gráfico e dois terços a partir de gráficos, enquanto crianças do grupo gráfico resolveram apenas problemas com gráficos.

A partir desses pontos podemos levantar possíveis razões para o desempenho superior das crianças do grupo bloco-gráfico. A primeira, que não nos parece consistente, foi a possibilidade de manipulação do material na resolução dos problemas. As crianças do grupo bloco-gráfico tiveram os blocos à disposição e resolveram problemas verbais-pictóricos e com gráficos de barras em ambiente informatizado. Entretanto, as crianças não foram obrigadas a usarem os blocos, eles apenas estiveram à disposição. Nossas observações da sala durante a intervenção consideraram que, aproximadamente, metade das crianças utilizou os blocos em algum dos problemas (inclusive em problemas que estavam apresentados por gráficos!), ainda que algumas crianças e o próprio pesquisador tenham usado blocos como apoio para as explicações sobre os problemas resolvidos. Um trecho da intervenção que ilustra esse aspecto é o seguinte:

<u>Intervenção grupo bloco-gráfico (1ª. Série)</u>

Problema: gráfico com linhas de grade com duas barras representando girassóis (três) e rosas (cinco). A pergunta do problema era: quantas rosas tem a mais do que girassóis?

Crianças: [mostram placas com dois e cinco como respostas]

P: *vamos ver...* [a estratégia é mostrada na tela: aparecem duas linhas que vão do limite superior das barras até a escala. Em seguida escurece o pedaço da barra maior que não está em correspondência com a barra menor. Números aparecem para contar os espaços escurecidos, surgindo a resposta por escrito.] *Duas rosas a mais.*

[vibração das crianças]

P: *quem pode explicar porque a resposta foi "duas rosas"? ... Diga* [dirigindo-se a uma das crianças (c1)].

C1: *porque três mais dois é cinco.*

C2: *tem dois para cima* [na coluna da rosa].

P: *jóia. Tinha três girassóis e cinco rosas. Tem duas rosas a mais* [mostra no gráfico e pega duas colunas de três e cinco blocos]. *Como a gente resolveu antes com os blocos. Vejam, se tirar dois daqui* [tira da coluna de cinco] *fica o mesmo tanto. Ou, se* *botar dois aqui* [acrescenta dois à coluna menor] *fica o mesmo tanto. Assim, comparando a quantidade de rosas com girassóis, tem duas rosas a mais do que girassóis* [mostrando os blocos da coluna maior que não estavam em correspondência com os blocos da coluna menor]. *Agora aqui no gráfico...três girassóis e cinco rosas. Até aqui era o mesmo tanto de girassóis e rosas, três* [mostra a linha referente a três]. *Se tirar dois daqui* [coluna maior] *fica o mesmo tanto ou se botar dois aqui também fica a mesma quantidade. Tem duas rosas a mais do que girassóis.*

Considerando o uso de blocos, ainda é importante lembrar que as crianças do grupo controle também tiveram blocos à disposição e nem por isso obtiveram desempenhos semelhantes ao grupo bloco-gráfico. Assim, ainda que blocos tenham sido utilizados por algumas crianças, não nos parece o suficiente para afirmar que os blocos foram o fator crucial para o melhor desempenho do grupo bloco-gráfico.

Outra possibilidade seria que tivessem sido observados efeitos apenas sobre os problemas verbais-pictóricos na medida em que crianças do grupo bloco-gráfico também discutiram problemas desse tipo. Entretanto, essa explicação não parece fortemente apoiada pelos nossos dados. Primeiro, porque os problemas verbais-pictóricos apresentados ao grupo bloco-gráfico na intervenção foram diferentes dos apresentados no pré-teste e pós-testes, não apenas em relação aos pares numéricos mas na própria organização dos desenhos. Enquanto que os desenhos desses problemas no pré e pós-testes representavam os objetos a que se referiam e foram apresentados “misturados”, os desenhos nos problemas da intervenção representavam blocos e foram organizados em pilhas verticais (colunas), colocadas lado a lado, de modo a favorecer a correspondência visual entre as mesmas. Segundo, porque se o melhor desempenho do grupo bloco-gráfico se devesse a apresentação desse tipo de problema durante a intervenção, deveríamos ter observado em relação à variável *apresentação dos problemas,* diferenças significativas de desempenho entre o pré e o pós-teste em relação aos problemas verbais-pictóricos e isso não se confirmou (cf. Tabela 4, p. 193). Na análise dessa variável no grupo bloco-gráfico entre pré e pós-teste foram observadas diferenças significativas apenas nos problemas que mobilizavam gráficos.

Quando consideramos as séries isoladamente, na alfabetização (tabela 5. P.194) observamos desempenhos superiores no grupo bloco-gráfico nos problemas verbais-pictóricos e nos problemas com gráficos com linhas de grade no pós-teste em relação ao pré-teste. Ao contrário, na primeira série (tabela 6, p.195) foi observada uma queda no desempenho nos problemas verbais-pictóricos considerando-se essa mesma fase (pós-teste em relação ao pré-teste) constatando-se avanços apenas nos problemas com gráficos. Esses dados sugerem que os melhores resultados do grupo bloco-gráfico não podem ser explicados exclusivamente em função da apresentação de problemas verbais-pictóricos durante a intervenção nesse grupo.

Uma terceira explicação que nos parece mais consistente, considera o fato das crianças do grupo bloco-gráfico terem trabalhado problemas com blocos e com gráficos misturados na intervenção, o que lhes permitiu o estabelecimento de ligações mais funcionais entre essas duas formas de representação, uma já conhecida (problemas verbais com desenhos) e outra, os gráficos, à qual eles tinham tido até então pouco acesso na escola no contexto de resolução de problemas. Este aspecto seria favorável ao desempenho em ambos tipos de problemas (comparação e combinação) enfocados no estudo. A apresentação dos problemas com blocos no ambiente informatizado e a relação explícita enfatizada pelo pesquisador entre os blocos e os gráficos de barras naquele contexto específico de investigação (como ilustrada acima) poderiam auxiliar na "descompressão" do gráfico de barras, para usar a terminologia utilizada por nunes (1997), possibilitando que as crianças percebessem as unidades constituintes (mesmo no gráfico com linha de grade as barras são contínuas!), sua relação com a escala e relacionassem o trabalho com gráficos às estratégias de resolução de problemas utilizadas por eles com outras representações mais familiares. Nossos dados parecem apoiar essa argumentação na medida em que observamos no pós-teste imediato desempenhos significativamente superiores em problemas de combinação e de comparação apenas nas crianças do grupo bloco-gráfico, sendo tais resultados mantidos ou melhorados no pós-teste posterior (cf. Tabela 1, p.190). Também as crianças do grupo bloco-gráfico apresentaram diferenças significativas no desempenho entre o pré-teste e o pós-teste imediato nos problemas com gráficos com e sem linhas de grade (cf. Tabela 4, p.193). Esses dados diferem dos resultados do grupo gráfico desde que nesse grupo desempenhos significativamente melhores foram constatados apenas nos problemas de comparação no pós-teste imediato e também apenas nos problemas com gráficos com linhas de grade.

Esses resultados parecem ser a base também para explicar as razões da queda observada na alfabetização no grupo gráfico. Observando-se a tabela 8 (p.198), constatamos que a queda no pós-teste posterior desse grupo se deve basicamente aos problemas de comparação que mobilizavam gráficos. Dessa forma, verificamos que os maiores avanços observados no pós-teste imediato que foram justamente nesses problemas, não foram mantidos após oito semanas. Uma das possíveis razões para isso nos remete à nossa hipótese acima descrita que explica os melhores resultados do grupo bloco-gráfico pela possibilidade do estabelecimento de relações entre representações já familiares com a representação gráfica. Possivelmente, a falta de conexões explícitas entre formas de representação mais familiares e a representação gráfica foi mais sentida pela alfabetização, desde que para as crianças da primeira série, que já apresentavam uma compreensão conceitual mais avançada dos problemas trabalhados (podendo-se ver pelos resultados do pré-teste nas tabelas 8 e 9), pode ter sido mais fácil desenvolver uma compreensão sobre os gráficos. Assim, a intervenção do grupo gráfico na alfabetização parece ter exercido apenas um efeito imediato da aprendizagem, sem envolver uma compreensão consistente por parte das crianças.

3. A influência da intervenção sobre o desempenho dos sujeitos variou em função do tipo de problema ?

Uma hipótese do nosso estudo foi que problemas de comparação poderiam ser beneficiados pela apresentação em gráficos de barras. Nossos dados indicaram que ambos os grupos experimentais (bloco-gráfico e gráfico) apresentaram avanços no pós-teste nesse tipo de problema (Tabela 1, p. 190), diferentemente dos problemas de combinação em que observamos melhores desempenhos apenas no grupo bloco-gráfico. Esse resultado parece sugerir que problemas de comparação podem ser favorecidos pela representação gráfica. Entretanto, devemos ressaltar que esperávamos nesse tipo de problema desempenhos ainda melhores do que os observados, principalmente entre as crianças da alfabetização.

Para explicar os avanços verificados no pós-teste imediato devemos considerar a importância da intervenção realizada pelo pesquisador nos grupos experimentais. Tais grupos, diferentemente do grupo controle, foram beneficiados por intervenções da pesquisadora em que foi realçada a correspondência entre as quantidades na demonstração das estratégias de resolução de problemas no ambiente informatizado. Este aspecto parece ter favorecido ambos os grupos a estabelecerem conexões entre a estratégia de correspondência e a de adição/subtração, facilitando a compreensão dos problemas de comparação. A importância desse aspecto foi relatada por Nunes &

Bryant (1997) e também verificada no nosso estudo anterior com crianças de alfabetização, quando a partir de uma intervenção que enfatizou o uso da estratégia de correspondência, foram constatados grandes avanços no desempenho das duplas.

Propomos que os gráficos podem ser suportes auxiliares na medida em que enfatizam a correspondência entre as quantidades, mas não podemos atribuir apenas ao uso de gráficos os avanços observados nos nossos grupos experimentais. Parece essencial considerar a intervenção realizada bem como as interações entre o pesquisador e os alunos na reflexão sobre os problemas. Tal interação possibilitou às crianças explicitarem e justificarem suas proposições, conforme ilustrado na transcrição de protocolo anterior (p. 203-4). Conforme ressaltado por Leitão, Da Rocha Falcão, Araújo, Lins Lessa & Osório (2001), tais atividades de troca argumentativa não são freqüentes no âmbito do contrato didático da sala-de-aula de matemática (em qualquer nível de escolaridade), embora seu interesse em termos de construção conceitual não seja negligenciável, como confirmam os nossos dados.

Também devemos mencionar que problemas de comparação foram mais freqüentes na intervenção (18 problemas de comparação e 9 de combinação) em função das dificuldades já conhecidas de crianças nesse tipo de problema, o que também pode ter contribuído para os avanços observados no pós-teste imediato.

No caso dos problemas de combinação, podemos observar que ainda que não trouxessem dificuldades quando apresentados por meio de desenhos, maiores dificuldades foram observadas na resolução a partir de gráficos. O grupo que apresentou melhores desempenhos após a intervenção foi o grupo bloco-gráfico. É interessante notar que no pós-teste posterior, o grupo controle apresentou uma melhora de desempenho significativa em relação ao pós-teste imediato nesse tipo de problema (cf. Tabela 1, p. 190). Esse dado pode ser resultado da ênfase escolar na apresentação desse tipo de problema já relatada por outros estudos tais como Brandão e Selva (1999) no caso de coleções para a educação infantil e Santos, Pessoa & Borba (1999) na análise das coleções de 1ª. À 4ª. Série. Além disso, vale dizer que as atividades realizadas com gráficos pela escola durante os dois meses entre o pós-teste e o pós-teste posterior consistiram em sua maioria de solicitações de leitura pontual dos dados ou representação dos dados em malha quadriculada, seguida de atividades de combinação de quantidades, como pode ser visto um exemplo no anexo 9.

4. A influência da intervenção sobre o desempenho dos sujeitos variou em função do tipo de apresentação dos problemas?

A forma de apresentação dos problemas que se mostrou mais influenciada pela intervenção no pós-teste imediato foi a resolução de problemas envolvendo gráficos, especialmente, com linhas de grade. A intervenção parece ter possibilitado às crianças se tornarem mais familiares com esse tipo de representação, possibilitando uma melhor análise e compreensão das informações veiculadas. Comparando-se os problemas de gráficos com linhas de grade e sem linhas de grade, observamos que as linhas de grade parecem ter facilitado tanto a correspondência com a escala para verificação dos valores de cada barra, como também a contagem por parte das crianças das unidades constituintes das barras. Esses aspectos possivelmente influenciaram favoravelmente o desempenho das crianças tanto em problemas de combinação como de comparação. É interessante notar que após a intervenção, crianças dos grupos experimentais (gráfico e bloco-gráfico) utilizaram com maior freqüência a régua, embora todas as crianças tivessem esse instrumento de medida disponível também no pré-teste.

Outro aspecto a ser mencionado consiste na queda de desempenho observada nos grupos experimentais, nos problemas de comparação verbais-pictóricos, no pós-teste imediato em relação ao pré-teste, na primeira série (cf. Tabela 9, p.199). O que gerou tal queda? Uma hipótese nossa refere-se ao fato de ambas intervenções terem enfatizado problemas em que as quantidades comparadas estavam em correspondência espacial de modo que voltando-se a uma situação em que as quantidades estavam sem essa correspondência já estabelecida, as crianças apresentaram uma maior dificuldade.

Ainda devemos comentar o surpreendente resultado obtido no pós-teste posterior mostrando avanços do grupo controle na resolução de problemas de gráficos sem linhas de grade (Tabela 4, p.193). Creditamos esses avanços observados em oito semanas basicamente ao efeito escolar, favorecendo o desenvolvimento conceitual das crianças.

Para concluir devemos ressaltar que consideramos um dos importantes aspectos da intervenção a possibilidade que as crianças tiveram de discutir aspectos da representação gráfica (ambos os grupos experimentais), suas estratégias de resolução de problemas e ainda, no caso do grupo bloco-gráfico, de relacionar a representação gráfica a outras representações mais familiares, tal como os materiais manipulativos, possibilitando uma possível conexão entre ambas representações.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

Este capítulo visa apresentar conclusões gerais de natureza teórica e empírica relativas ao trabalho desenvolvido, buscando integrar os resultados obtidos nos dois estudos que foram realizados.

O objetivo dessa tese foi ampliar a reflexão sobre o campo conceitual das estruturas aditivas através da resolução de problemas com diferentes representações (gráficos e manipulativos). Em relação ao referido campo conceitual, analisamos, em particular, dois tipos de problemas: combinação e comparação.

A análise de Vergnaud (1982) sobre a importância de considerar o conceito a partir de suas três dimensões (invariantes, situações e representações) norteou nosso interesse teórico na análise das representações. Nesse sentido, a resolução de problemas usando gráficos ou manipulativos poderia influenciar diferentemente o desempenho das crianças. O estudo de Guimarães (2002) mostrou, por exemplo, dificuldades de crianças de 9/10 anos na resolução de problemas de combinação com gráficos, quando outros estudos demonstram que crianças menores ou de mesma faixa etária apresentam alta taxa de sucesso nesse mesmo tipo de problema usando o cálculo oral ou manipulativos (Carpenter e Moser, 1982; Carraher, Carraher e Schliemann, 1988, por exemplo).

A influência de diferentes tipos de representações na resolução de problemas de estrutura aditiva foi confirmada por nossos dados, na medida em que observamos no pré-teste do segundo estudo conduzido (capítulo 4), por exemplo, diferentes médias de respostas corretas entre os problemas de combinação apresentados por meio de desenhos e de gráficos de barras, sendo estes últimos mais difíceis.

Em relação, especificamente, ao trabalho com gráficos confirmamos dificuldades encontradas na literatura na interpretação e construção de gráficos por crianças, tal como mostram alguns estudos (Bell & Janvier, 1981; Tierney & Nemirovsky, 1991; Guimarães, 2002; Santos e Gitirana, 1999, entre outros). Entretanto, os dados obtidos em nosso primeiro estudo (capítulo 3) mostraram que algumas dessas dificuldades puderam ser superadas a partir da proposição de atividades que fizeram relevante o problema a ser tratado pelas crianças. Assim, do ponto de vista didático, consideramos que as atividades criadas no primeiro estudo e o ambiente informatizado de apresentação de problemas do segundo estudo importantes contribuições para a área da educação matemática.

Considerando os problemas de comparação e nossa hipótese de que a apresentação por meio de gráficos poderia favorecer o uso da estratégia de correspondência, observamos que a visualização da correspondência entre as barras de um gráfico ou nos blocos não foi suficiente por si só para mobilizar o esquema de correspondência. Entretanto, tal correspondência espacial quando salientada pelo pesquisador nos problemas com gráficos e com blocos (na intervenção do primeiro estudo e nas explicações fornecidas pelo pesquisador nos grupos bloco-gráfico e gráfico no segundo estudo) pareceu funcionar como um suporte auxiliar e importante na resolução dos problemas de comparação, conforme observado por Nunes e Bryant (1991).

Podemos, ainda, observar que no decorrer dos estudos realizados, diversas idéias relacionadas ao trabalho com diferentes representações (em nosso caso, gráficos e manipulativos) foram se tornando mais consistentes e mesmo, amadurecidas, como no que se refere à combinação de materiais manipulativos do tipo blocos de encaixe e gráficos de barras.

Quando consideramos especificamente a forma como procuramos combinar o uso de blocos e gráficos, observamos que em nosso primeiro estudo (capítulo 3) as crianças participaram, inicialmente, de atividades de resolução de problemas aditivos e de atividades que discutiram aspectos relacionados aos gráficos de barras (linha de base, correspondência um para muitos, unidade de representação) usando blocos. Em seguida, as duplas resolveram problemas envolvendo a representação gráfica. Em caso de dificuldades das duplas, o experimentador voltava ao uso dos manipulativos através de intervenções que faziam referências às atividades com blocos ou mesmo propondo um outro problema semelhante com blocos. No segundo estudo (capítulo 4), a integração entre gráficos e manipulativos foi mais enfatizada ocorrendo ao longo de toda intervenção do grupo bloco-gráfico de modo a favorecer o contraste e a conexão entre as diferentes representações. As crianças podiam usar blocos durante a apresentação de problemas verbais-pictóricos e de problemas com gráficos. Observamos que esse grupo que trabalhou com blocos e gráficos combinados obteve melhores resultados no pós-teste imediato e no pós-teste posterior em relação ao grupo controle, ainda que nem todas as crianças tenham efetivamente usado os blocos para resolução dos problemas (aproximadamente 50% usou em algum dos problemas). Comparando em ambas as séries as intervenções desse grupo com o outro grupo experimental que trabalhou apenas com gráficos, observamos que no pós-teste posterior apenas o grupo bloco-gráfico apresentou diferenças significativas de desempenho em relação ao grupo controle. Entre os fatores que podem ter contribuído para os melhores resultados verificados no grupo bloco-gráfico podemos sugerir que a apresentação pictórica dos blocos pode ter se constituído em um fator importante pois favoreceu uma maior visualização das unidades constituintes das barras e proporcionou a ênfase na correspondência inicial entre as quantidades do problema através da visualização das barras com tamanhos e quantidades iguais. Adicionalmente, o uso combinado de manipulativos com gráficos permitiu o contraste entre ambas representações ao abrigar sob uma mesma estrutura de problema (combinação ou comparação) estratégias freqüentemente usadas com manipulativos (observadas em nosso primeiro estudo com blocos e mesmo com gráficos, tal como contar a partir de uma das quantidades em problemas de combinação ou comparar quantidades e ver o quanto é igual e o quanto é diferente nos problemas de comparação) e estratégias usadas com a representação gráfica, também observadas em nosso primeiro estudo (capítulo 3), favorecendo que conexões entre tais representações fossem construídas pelas crianças.

Os resultados descritos acima também parecem confirmar a importância de se trabalhar não com o conteúdo organizado em módulos homogêneos (por exemplo, trabalhar com apenas um tipo de representação de cada vez), mas proporcionar às crianças o uso simultâneo e combinado de diferentes representações, auxiliando-as a formar contrastes e conexões úteis para sua aprendizagem. Tais resultados trazem igualmente suporte à perspectiva aqui defendida no que diz respeito ao papel de materiais manipulativos nas atividades de ensino. Tais materiais não podem ser tratados como artefatos capazes, por si mesmos, de veicular significado conceitual, ou seja, não é a simples manipulação dos mesmos que garante a aprendizagem. Assim, os dados aqui obtidos mais uma vez confirmam que não é possível desconectar a atividade conjunta (envolvendo alunos e professor) de reflexão a partir do material manipulativo disponibilizado. Em outras palavras, manipulativos são artefatos mobilizados *pelo professor*, com determinadas *intenções* e no contexto de atividades com dinâmica própria. Nos estudos que realizamos esperávamos que as atividades propostas auxiliassem as crianças a refletirem sobre as conexões entre a resolução de problemas com manipulativos e com gráficos, ampliando sua compreensão das estruturas aditivas.

A constatação de resultados mais favoráveis ao grupo que trabalhou combinando representações não implica em afirmar que a conexão entre representações é algo fácil e evidente para a criança. Vergnaud (1987) analisou o papel das representações ressaltando que representações distintas podem ser transparentes de diferentes maneiras e levantar dificuldades específicas. Nesse sentido, o uso de cada representação permite estratégias que são específicas ao seu domínio e que, nem sempre, podem ser diretamente correspondidas no domínio de outra representação. Esse foi o caso da estratégia usada pelas crianças do primeiro estudo nos problemas de combinação com blocos cobertos, de colocar uma coluna sobre a outra. Essa estratégia não pode ser transposta para gráficos de barras da mesma maneira pois os gráficos possuem características próprias, distintas dos manipulativos, ou seja, no gráfico de barras as colunas não são manipuláveis fisicamente. Uma alternativa para as crianças diante desse novo obstáculo presente na representação gráfica foi realizar o desenho da segunda barra em cima da primeira barra, tal como R e F (FF) fizeram (p. 94-6). Entretanto, fazer essa transposição da barra de um lugar para outro no gráfico levantava novos obstáculos para a criança que nem sempre foram superados pelas duplas, como pode ser observado no protocolo da dupla S e B (FF, p.97-9).

Por outro lado, outros protocolos mostram benefícios do trabalho com blocos na reflexão sobre características específicas do gráfico de barras e na resolução de problemas. São exemplos o protocolo de S e B (FF), em que se constata uma referência à atividade feita com blocos que enfatizava a necessidade de se levar em conta a linha de base para a construção de um gráfico (p. 86) e os protocolos de R e L (BF) resolvendo um problema de comparação a partir de um gráfico que apresentava o peso de um bebê (p. 92-3) e de R e K (BF) na resolução de uma comparação entre a quantidade de materiais apresentados em dois gráficos (p. 116-7), em que se observam que dificuldades de resolução de problemas no gráfico foram superadas após a relação estabelecida com as atividades com blocos ou a apresentação de um problema semelhante com blocos.

Os resultados do segundo estudo dessa tese, considerando ambas as séries, mostraram melhores resultados no grupo que fez parte da instrução que combinava blocos com gráficos (grupo bloco-gráfico). A análise em separado das séries mostrou que no caso dos sujeitos da alfabetização, o grupo da intervenção que focalizou apenas gráficos (grupo gráfico) apresentou uma queda acentuada no desempenho após oito semanas, diferentemente do que ocorreu com o grupo bloco-gráfico, que permaneceu avançando. Já na primeira série, ainda que o grupo bloco-gráfico tenha apresentado melhores resultados, pudemos observar um grande avanço do grupo gráfico nas oito semanas seguintes ao pós-teste. Esses dados parecem sugerir que a aprendizagem não ocorre sempre por uma única via (há várias possibilidades!) e, também, que a queda do grupo gráfico no pós-teste posterior nos resultados gerais se deve aos resultados obtidos por esse grupo na série da alfabetização. Uma questão, então, precisa ser objeto de reflexão: por que no pós-teste posterior o grupo gráfico na alfabetização não manteve os efeitos verificados no pós-teste imediato?

Para refletir sobre essa questão vamos nos voltar para os resultados obtidos nessa série específica. Considerando o desempenho das crianças da alfabetização (cf. Gráfico 3, p. 188), constatamos diferenças significativas no desempenho do grupo bloco-gráfico em relação ao grupo controle no pós-teste imediato e constatamos que entre o pós-teste imediato e pós-teste posterior a média desse mesmo grupo manteve-se aproximadamente constante, com tendência a uma ligeira melhora (lembramos que no pós-teste posterior foram verificadas diferenças significativas de desempenhos entre o grupo bloco-gráfico e o grupo controle e entre o grupo bloco-gráfico e o grupo gráfico). Esse dado sugere que as crianças da alfabetização que usaram representações combinadas entre problemas verbais-pictóricos e gráficos diferenciaram-se em relação às outras crianças que não tiveram a mesma oportunidade. No caso particular do grupo gráfico da alfabetização, verificamos que as crianças desse grupo apresentaram melhoras no desempenho imediatamente após a intervenção (aproximadamente significativas). Tais avanços, no entanto, não foram mantidos havendo uma acentuada queda no desempenho no pós-teste posterior. Esses dados parecem indicar que nessa série a intervenção a partir apenas de gráficos não exerceu os efeitos desejados no desempenho das crianças.

Buscando compreender melhor esses dados nos voltamos para os resultados obtidos no grupo gráfico especificamente. Comparando as médias de acerto obtidas no pré-teste pelas crianças da alfabetização e da primeira série (Tabelas 7 e 8, p.196 e 198) podemos notar que as maiores diferenças de desempenho, favoráveis às crianças mais velhas, se encontram nos problemas de comparação apresentados através de desenhos ou de gráficos com linhas de grade. Por outro lado, em ambas séries os efeitos imediatos da intervenção do grupo gráfico foram observados basicamente nos problemas de comparação envolvendo gráficos, tipo de problema mais trabalhado. No entanto, também nesses mesmos problemas foram constatadas, na série da alfabetização, as maiores quedas no desempenho após oito semanas, não observadas na primeira série. Esses dados sugerem efeitos diferentes da intervenção apenas com gráficos nas séries da alfabetização e primeira série. Enquanto que as crianças da primeira série do grupo gráfico tiveram que lidar com um suporte de representação pouco freqüente na escola, o gráfico, para resolver problemas com os quais já estavam familiarizados (combinação e comparação), esse mesmo grupo na alfabetização esteve diante de desafios maiores pois além das dificuldades com a própria representação gráfica, as crianças ainda apresentavam grandes dificuldades em compreender a estrutura de comparação. Nesse sentido, para as crianças menores, as conexões do suporte gráfico com as estratégias usadas com o material manipulativo (grupo bloco-gráfico) parecem ter adquirido maior importância possibilitando que os problemas propostos com gráficos fossem melhor compreendidos. Uma possibilidade que poderia ser investigada em um outro estudo seria a necessidade da intervenção com crianças menores envolver uma maior freqüência de problemas com explicação, oferecendo assim, maiores oportunidades para as crianças refletirem sobre suas estratégias de resolução e sobre a própria representação. Ou mesmo, intervenções que envolvessem um período de tempo maior do que apenas uma sessão, que foi o caso de nosso estudo.

Um outro aspecto importante para compreensão dos resultados obtidos nos estudos conduzidos consiste no papel das intervenções realizadas pelo experimentador e pelos próprios integrantes das duplas durante todas as atividades do primeiro estudo (capítulo 3) e a explicitação das estratégias e justificativas para as ações realizadas elaboradas pelas crianças ou pelo experimentador no segundo estudo (capítulo 4). Pudemos constatar em vários momentos no primeiro estudo que a dupla internamente resolvia suas dificuldades sem necessidade de intervenções auxiliares do experimentador. Também observamos a importância da explicitação das estratégias usadas pela dupla, da sistematização de algumas atividades no sentido de promover a compreensão conceitual, tal como na atividade sobre a linha de base, em que as duplas finalizavam elaborando uma conclusão para a atividade, do tipo “tudo tem que estar no mesmo chão”. No caso do segundo estudo, consideramos fundamentais os problemas em que as crianças explicavam as respostas, explicitavam suas estratégias como também as explicações fornecidas pelo experimentador. A importância das verbalizações da criança foi também relatada por Resnick e Omanson (1987).

Esse *conjunto* de aspectos, considerado em sua multidimensionalidade, é que parece auxiliar as crianças a construírem significado para as atividades propostas.

Assim, do ponto de vista educacional, nossos resultados sugerem a importância de expor a criança a uma variedade de representações de um mesmo conceito, ampliando a compreensão dos conceitos estudados. Lampert (1989) salienta que o uso de múltiplas representações de um conceito proporciona que novas questões matemáticas sejam levantadas pelos próprios estudantes contribuindo para uma compreensão mais consistente e para um uso mais abrangente do conhecimento. Um caminho didático, conforme sugerido aqui, seria criar situações que favorecessem a conexão entre diferentes representações. O que temos observado muitas vezes em escolas em relação aos problemas de estrutura aditiva, por exemplo, é uma proposição de módulos isolados: primeiro o concreto, algumas vezes o desenho e por fim, o algoritmo. Gráficos, quando enfocados, aparecem desconectados, como atividades isoladas. Também nossos resultados mostraram que representações gráficas podem ser trabalhadas desde a Educação Infantil, desde que a partir de situações propícias que ajudem as crianças a estabelecerem relações com outras representações mais familiares. Um tipo de trabalho que também consideramos bastante pertinente consiste no uso das representações gráficas espontâneas produzidas pelas crianças como ponto de partida para a reflexão, como proposto por diSessa e colegas (1991).

Também devemos enfatizar a importância da reflexão sobre algumas características específicas do gráfico (por exemplo, linha de base, unidade de representação). Tal reflexão foi estimulada a partir de atividades específicas com blocos e do contraste entre diferentes representações.

Outro aspecto que devemos mencionar consiste na importância de certos recursos auxiliares para o trabalho com gráfico com crianças pequenas, tal como, o papel quadriculado para as atividades com gráficos, tal como observado por Selva & da Rocha Falcão (2003). Gráficos com linhas de grade e, principalmente, sem linhas de grade mostraram-se mais difíceis para as crianças. Os quadrados e as linhas de grade servem como auxiliares não só para leitura do valor das barras, mas no caso de crianças menores, para o uso de estratégias de contagem das unidades. Também no primeiro estudo, a apresentação da escala já desenhada nas atividades com gráficos visou evitar dificuldades geradas pela construção da escala, possibilitando às crianças pequenas se concentrarem sobre a representação e análise dos dados solicitados, tal como sugerido por Ainley (1994).

Para concluir, gostaríamos de enfatizar o *prazer* que ambos estudos proporcionaram às crianças que participaram e ao pesquisador que os conduziu. Buscar a construção de um conhecimento sobre gráficos mais consistente e amplo foi o tempo todo um desafio imenso. Foi essa a motivação que impulsionou a construção de um ambiente informatizado para apresentação dos problemas que, embora ainda necessitando de aperfeiçoamentos, constituiu-se em um recurso didático fascinante para ser usado em sala de aula.

Sugestões para novos estudos

Esse tópico está sendo apresentado em separado porque considero que uma tese nunca responde por completo uma área do conhecimento, acho que ela abre imensas perspectivas de estudo a partir das questões que investiga. Assim, é que diversas portas parecem se abrir frente aos resultados obtidos nos dois estudos realizados.

Além do aprimoramento do ambiente de apresentação de problemas que foram desenvolvidos, consideramos que seria interessante a inserção de problemas de mesmo tipo dos trabalhados, mas com variações no lugar da incógnita. Outra mudança metodológica possível nesse mesmo estudo seria a realização de entrevistas individuais com algumas crianças após o pós-teste para investigar mais profundamente o processo de raciocínio utilizado. Também a presença de um grupo de intervenção resolvendo apenas problemas verbais-pictóricos seria esclarecedora para os nossos resultados relativos, principalmente, às crianças menores.

Diversos aspectos que investigamos no primeiro estudo e que não foram relatados por "margearem" nosso principal objetivo também merecem ser objeto de análise futura (função da escala para as crianças, uso das legendas, título do gráfico, representações iniciais solicitadas às crianças, análise das interações entre crianças e experimentador e entre criança-criança, questões relativas aos valores máximo e mínimo, etc). Outra pretensão nossa seria desenvolver um estudo com o grupo classe completo usando algumas atividades com blocos utilizados em nosso primeiro estudo. Tal como discutido por Brown (1992) consideramos que nosso movimento tem sido usar diferentes modelos metodológicos na investigação dos fenômenos. É um risco, mas que parece valer à pena, para uma compreensão maior acerca do processo ensino-aprendizagem.

Para finalizar, gostaria de dizer que aprendi muito no decorrer desse trabalho. Amadureci reflexões de natureza teóricas e metodológicas. Caminhei com a psicologia e a educação de mãos dadas, buscando minhas referências psicológicas mas preocupada com o fenômeno didático. O artigo de Ann Brown, citado acima, foi marcante exatamente por descrever o processo pessoal dela de sair do laboratório em busca dos ruídos da sala de aula, considerando os ganhos e perdas desse processo. De certa forma trilhei esse caminho, de um estudo ainda com duplas fora de sala de aula, caminhei para um experimento de ensino com a classe toda. Por outro lado, dados qualitativos que demandaram um exaustivo processo de seleção do que analisar foram combinados com informações oriundas de estudo experimental, onde foram estudadas relações controladas entre variáveis. Este exercício metodológico mostrou-se frutífero, tanto em termos de produção de um quadro mais rico de informações, como em termos do adensamento do diálogo com o quadro teórico de que nasce, e para onde finalmente conflui toda e qualquer pesquisa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AINLEY, J. (1994). Building on children's intuitions about line graphs. XVIII Proceedings of de Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), Portugal, Lisboa.

AINLEY, J. (2000). Exploring the transparence of graphs and graphing. XXIV Proceedings of de Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), Japão.

BELL, A. & JANVIER, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. For the Learning of Mathematics, 2, 1 , FLM Publishing Association, Montreal, Quebec, Canadá.

BORBA, R. (2002). The effect of number meanings, conceptual invariants and symbolic representations on children's reasoning about directed numbers. Tese de Doutorado. Oxford Brookes University, Inglaterra.

BRANDÃO, A.C.P. & SELVA, A.C.V. (1999). O livro didático na educação infantil: reflexão versus repetição na resolução de problemas matemáticos. Educação e Pesquisa, v.25, n.2, p 69-83.

BRASIL. (1997). Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF.

BRASIL (2000). Programa Nacional do Livro Didático. Brasília: MEC/SEF.

BROSSEAU, G. (1996). Os diferentes papéis do professor. Em: PARRA, C. & SAIZ, I. (ORGs.) Didática da Matemática – Reflexões Pedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas.

BROUSSEAU, G. (1982) Ingeníere didactique. D'un problème à l'etude à priori d'une situation didactique. Deuxième École d'Été de Didactique des mathématiques, Olivet.

BROWN, A. L. (1992). Design experiments: theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. The journal of the learning sciences, 2 (2), 141-178.

BRUNER, J. (1976). Uma nova teoria de aprendizagem. Rio de Janeiro: Edições Bloch.

CARPENTER, T.P. & MOSER, J.M. (1982) .The development of addition and subtraction problem-solving skills. In: T.P. CARPENTER, J.M. MOSER & T. A.

ROMBERG (Eds.), Addition and Subtraction: a cognitive perspective. Hillsdale: Erbaum.,

CARRAHER, D., SCHLIEMANN, A., & NEMIROVSKY, R. (1995). Understanding graphs without schooling. Hands on! TERC: Cambridge, MA

CARRAHER, T., CARRAHER, D. & SCHLIEMANN, A. (1988) Na vida dez, na escola zero. São Paulo: Cortez.

CLEMENT, J. (1985). Misconceptions in graphing, Proceedings of the 9th International Conference Psychology of Mathematics Education, Vol. 1, pp.369-75.

COBB, P. (1987). Information-processing psychology and mathemaics education – a construtivist perspective. Journal of Mathemaical Behavior. 6-1, 4-40.

CURCIO, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs, Journal for Research in mathematics Education, 18, 382-393.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. (1999). Relações entre pensamento e linguagem: explorações teóricas no contexto da educação matemática. Manuscrito não publicado. Pós-graduação em Psicologia: Departamento de Psicologia, UFPE, Recife.

DA ROCHA FALCÃO, J.; BRITO LIMA, A. P.;ARAÚJO, C.R.; LINS LESSA, M. & OSÓRIO, M. (2000). A didactic sequence for the introduction of algebraic activity in early elementary school. XXIV Proceedings of de Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), Japão.

DiSESSA, A., HAMMER, D., SHERIN, B. & KOLPAKOWSKI, T. (1991). Inventing graphing: metarepresentational expertise in children. Journal of Mathematical Behavior, 10, 117-160.

FIGUEIREDO, R. B. (2002). Crianças, máscaras, eleições municipais e gráficos... tudo a ver?. Em: MOURA, A R. L. & LOPES, C.A.E. (Orgs.) Encontro das crianças com o acaso, as possibilidades, os gráficos e as tabelas. Campinas: Cempem.

FRIEL, S. N.; CURCIO, F. R. AND BRIGHT, G. W. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. Journal for Research in Mathematics Education, vol.32, nº 2, 124-158.

FRYDMAN, O. & BRYANT, P. (1988). Sharing and understanding of number equivalence by young children. Cognitive Development, 3, 323-39.

GINSBURG, H. (1977) Children's Arithmetic. New Jersey: D.Van Nostrand Company,.

GOLDENBERG, E. P. (1988). Mathematics, metaphors, and human factors: mathematical, technical, and pedagogical challenges in the educational use of graphical representation of functions. Journal of mathematical behavior, 7, 135-173.

GOMES FERREIRA, V. (1997). Exploring Mathematical functions through dynamic microworlds, Tese de Doutoramento, Institute of Education, London University.

GRAVEMEIJER, K.P.E. (1994). Development realistic mathematics education, Utrecht CD B Press.

GROEN, G. & RESNICK, L. (1977). Can Children invent addition algorithms? Journal of Educational Psychology, n.69, p. 645-652.

GUIMARÃES, G. L. (2002). Interpretando e construindo gráficos de barras. Tese de doutoramento, Pós-graduação em Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco.

HART , K.M. (1987). Practical work and formalisation, too great a gap. Proceedings of the 11th International Conference Psychology of Mathematics Education. Montreal.

HART, K. M. & SINKINSON, A. (1988), Forging the link between practical and formal mathematics. Proceedings of the 12th International Conference Psychology of Mathematics Education. Veszprem.

HEALY, L., HOYLES, C. AND POZZI, S. (1994). Designing group tasks: a home for X22yp, Micromath, Summer.

HIEBERT, J. & CARPENTER, T. P. (1992). Leraning and teching with understanding. In: Grouws, D. A. (ed.) Handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics, New York: Macmillan Publishing Company.

HUGHES, M. (1986). Children and Number. Oxford: Blackwell.

KARMILOFF-SMITH, A. (1998). Auto-Organização e Mudança Cognitiva. Substratum, vol. 1, n.3.

KOUBA, V.L. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. Journal for Research in Mathematics Education, vol.20, 2, 147-158.

LAKOFF, G. & NÚÑEZ, R.E. (2000) Where mathematics comes from: how the embodied mind brings mathematics into being. New York, Basic Books.

LAMPERT, M. (1989). Choosing and using mathematical tools in classroom discourse. Advances in research on teaching, v.1, 223-264.

LEINHARDT, G., ZALAVSKY, O. , & STEIN, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching, Review of Educational Research 60, 1-64.

LEITÃO, S., DA ROCHA FALCÃO, J. T., ARAÚJO, C., LINS LESSA, M. & OSÓRIO, M. (2001). Argumentation in the context of a didactic sequence in elementary algebra. Proceedings of the 26th meeting of PME, vol. 1, p.272.

LEMOS. M.P.F. (2002). Professorandos analisando atividades com gráficos de barras. Dissertação de Mestrado. Mestrado em Educação, UFPE.

LESH, R.; POST, T. & BEHR, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning an problem solving. In: C. Janvier (Ed.) Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 33-40). Hillsdale, NJ.: Lawrence Erlbaum.

LIMA, A. M. T. (2000). Tratamento de informações na Educação Infantil: abordando gráficos pictóricos e de barras. Monografia apresentada no Curso de Especialização em Educação Infantil. Fundação de Ensino Superior de Olinda (Funeso), Olinda, Pernambuco.

LIMA, L. M. T. (1998). Interpretação de gráficos de quantidades veiculados pela mídia impressa: um estudo exploratório. Dissertação de mestrado, Pós-graduação em Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco.

MARTÍ, E. (1994). Em busca de um marco teórico para o estudo contextualizado do desenvolvimento. Infância e aprendizagem, 66, p.5-10.

MEIRA, L. (1995). The microevolution of mathematical representations in children's activity. Cognition and Instruction, 13(2): 269-313.

MEIRA, L. (1997). Gráficos de quantitades na vida diária e na mídia impressa. Anais da II Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática, Departamento de Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.

MEIRA, L. (1998). Making sense of instructional devices: the emergence of transparence in mathematical activity, Journal for Research in Mathematics Education, 29(2), 121-142.

MEVARECH, Z. & KRAMARSKY, B. (1997). From Verbal Descriptions to Graphic Representations: Stability and Change in Students' Alternative Conceptions. Educational Studies in Mathematics, 32, . Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

MONTEIRO, C. E. F. (1998). Interpretação de gráficos sobre economia veiculados pela mídia impressa. Dissertação de Mestrado. Departamento de Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil.

MONTEIRO, C. E. F., SELVA, A. C. V. & FERREIRA, J. C. S. (2000). Tratamento de Informações: Investigando o processo de interpretação de gráficos. Anais da 52ª Reunião Anual da Sociedade Brasileira pelo Progresso da Ciência (CD-ROM), Brasília.

MOYER, P. S. (1998). Using mathematics manipulatives: Control- versus autonomy-oriented middle grades teachers (Doctoral dissertation, The university of North Carolina at Chapel Hill, 1998), Dissertation Abstracts International, 59-07A, 2406.

MOYER, P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. Educational Studies in mathematics, vol. 47, nº 2, 175-197.

NESHER, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems. In: T.P. CARPENTER, J.M. MOSER & T. A. ROMBERG (Eds.), Addition and Subtraction: a cognitive perspective. Hillsdale: Erbaum

NUNES, T. (1994). O papel da representação na resolução de problemas. Dynamis, v.1, n.7. p.19-27.

NUNES, T. (1997). Systems of signs and mathematical reasoning. In: NUNES, T. & BRYANT, P. (Ed.) Learning and teaching mathematics: na international perspective. London: Psychology Press.

NUNES, T. & BRYANT, P. (1991). Correspondência: um esquema quantitativo básico. Psicologia: Teoria e Pesquisa, v.7,n.3, pp.273-284.

NUNES, T. & BRYANT, P. (1997). Crianças fazendo matemática. Porto Alegre: Artes Médicas.

NUNES, T., BRYANT, P., HURRY, J. & PRETZLIK, U. (2002). The role of awareness in the teaching and learning of literacy and numeracy. ESRC project, Teaching and Learning Research Porgramme, Numeracy CD 01. Oxford Brookes University.

NUNES, T.; LIGHT, P. & MASON, P. (1995). What does a ruler look like? Manuscrito não publicado.

PESSOA, C. & DA ROCHA FALCÃO (1999). Estruturas aditivas: conhecimentos do aluno e do professor. Anais do IV EPEM – Encontro Pernambucano de Educação Matemática, Recife.

PESSOA, C.A.S. (2000). O papel da interação social na resolução de problemas matemáticos. Dissertação de Mestrado. Mestrado em Educação da Universidade de Pernambuco, Recife.

PIAGET, J. (1965). Logical operations and social life. In: PIAGET, J. Sociological Studies. London and New York, Routledge. (Trabalho original publicado em 1945).

PIAGET, J. (1987). O nascimento da inteligência na criança. Rio de Janeiro: Editora Guanabara. (Trabalho original publicado em 1966).

PIAGET, J. (1995). Abstração Reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas. (Trabalho original publicado em 1977).

PRATT, D. (1994). Active graphing in a computer-rich environment. XVIII Proceedings of de Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), Lisboa, Portugal.

PRATT, D. (1995). Passive and active graphing: a study of two learning sequences. XIX Proceedings of de Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), Recife, Brasil.

RAPHAEL, D. & WAHLSTROM, M. (1989). The influence of instructional aids on mathematics achievement. Journal for research in mathematics education, 20, nº 2, 173-190.

RESNICK, L. B. & OMANSON, S. F. (1987). Learning to understanding arithmetic. In: GLASER, R. Advances in Instructional Psychology, New Jersey: LEA.

RILEY, M.S.; GREENO, J.G. & HELLER, J.I. (1982). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In: H.P. GINSBURG (Ed.), The development of mathematical thinking. New York: Academic Press.

SANTOS, B. S. (1997). Interacción entre iguales y processos de aprendizage mediatizados por ordenador. Análisis e intervención em contexto escolar. Tesis doctoral. Universidad de Barcelona.

SANTOS, M. & GITIRANA, V. (1999) A interpretação de gráficos de barra, com variáveis numéricas, em um ambiente computacional de manipulação de dados. XIV Encontro de Pesquisa em Educação do Nordeste (CD-ROM), Salvador.

SANTOS, R.; PESSOA, C. & BORBA, R. (1999). Livro didático: uma análise dos problemas aditivos. Anais do XIV Encontro de Pesquisa Educacional do Nordeste – EPEN, Salvador, p.269 (também em CD-ROM).

SCHUBAUER-LEONI, L. M. & PERRET-CLEMONT, A. M. (1997). Social Interations and Mathematics Learning. In: NUNES, T. & BRYANT, P. (Orgs.)

Learning and Teaching Mathematics – An International Perspective. East Sussex: Psychology Press.

SELVA, A. C. V. & DA ROCHA FALCÃO, J. T. (2002). A compreensão de coordenadas espaciais por crianças de 6 a 8 anos: um estudo exploratório. Estudos de Psicologia, v.7, n.2, p.281-88.

SELVA, A. C. V. (1998). Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas de divisão. In: SCHLIEMANN, A. D. & CARRAHER, D. (orgs.) A compreensão de conceitos aritméticos: ensino e pesquisa. São Paulo: Papirus.

SELVA, A. C. V. (1999). Número com o sabor das letras. AMAE educando, Belo Horizonte, n.282, p.12-15.

SELVA, A.C.V. & BRANDÃO, A.C. P. (1998). Reflexões sobre a aprendizagem de matemática na Pré-escola. Revista Psicologia: Teoria e Pesquisa, Brasília, v.14, n.1, p.67-75.

SOWELL, E. J. (1989).Effects of manipulative material in mathematics instruction. Journal for research in mathematics education, vol. 20, nº 5, 498-505.

STACEY, K.; HELME, S.; ARCHER, S. & CONDON, C. (2001). The effect of epistemic fidelity and accessibility on teaching with physical materials: a comparison of two models for teaching decimal numeration. Educational studies in mathematics, vol. 47, nº 2, 199-221.

STEFFE, L. (1994). Children's multiplying schemes. In G. Harel and J. Confrey (eds.): The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics, pp. 3-40. Albany, N.Y.: State University of New York Press.

SUYDAM, M. N. & HIGGINS, J. L. (1977). Activity-based learning in elementary school mathematics: recommendations from research. Columbus: ERIC Center for Science, mathematics, and Environmental Education.

SWANN, J. (1992). Girls, boys and language. London: Blackwell.

THOMPSON, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In: Harel, G. & Confrey, J. (eds.) The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics. State university of New York Press.

TIERNEY, C. AND NEMIROVSKY, R. (1991). Children's Spontaneous Representations of Changing Situations. Hands on! Volume 14, number 2.

TIERNEY, C., WEINBERG, A. & NEMIROVSKY, R. (1992). Telling Stories Plant Growth: Fourth Grade Students Interpret Graphs. XVI Proceedings of de Annual

Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), N. H., USA.

VASCONCELOS, L. (1998). Problemas de adição e subtração: modelos teóricos e práticas de ensino. . In: SCHLIEMANN, A. D. & CARRAHER, D. (orgs.) A compreensão de conceitos aritméticos: ensino e pesquisa. São Paulo: Papirus.

VERGNAUD, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In: CARPENTER, T.P.; MOSER, J.M.; ROMBERG, T.A. (Eds.), Addition and Subtract: a Cognitive Perspective. New Jersey: LEA.

_______________ (1987). Conclusion. In: JANVIER, C. (Org.) Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. New Jersey: Lawrence Erbaulm Associates.

________________ (1990). La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques. 10-23, 133-170.

_______________ (1997). The nature of mathematical concepts. In: NUNES, T. & BRYANT, P. (Ed.) Learning and teaching mathematics: na international perspective. London: Psychology Press.

VYGOTSKY, L. S. (1984). A formação social da mente. São Paulo: Martins Fontes.

WAINER, H. (1992). Understanding graphs and tables, Educational Researcher 21, 14-23.

ZAWOJEWSKI, J. S. (1991). Dealing with data and chance. Virgínia: The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).