Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Matemática

Transformação Potência em EDO e Aplicações a Sistemas Hamiltonianos

Adson Mota Rocha

Orientador:
Prof. Claudio Vidal Diaz

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

UFPE - Agosto de 2003

À minha família

e minha noiva Fernanda Souza.

Agradecimentos

À Deus, pelos ensinamentos fundamentais e incidentes na vida, minha eterna gratidão .

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

Agradeço também as seguintes pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para esta fase de minha vida. No âmbito acadêmico agradeço:

- Ao prof. Claudio Vidal, à sua orientação, sua dedicação, seus conselhos e principalmente sua amizade;
- Aos professores de matemática que me incentivaram nessa jornada: Hildete, Haroldo e Carloman (UEFS);
- Ao prof. Letterio Gatto (Polito/IT) um exemplo de pessoa humana;
- As funcionárias Tânia (UFPE) e Andiara (UEFS), pela amizade, pelo empenho e pela compreensão.

No âmbito pessoal, serei eternamente grato:

- Às cinco mulheres na minha vida: minha mãe - minha primeira mestra; minha irmã pelo carinho, fraternidade e dedicação; minhas duas sobrinhas lindas - as minhas alegrias; e minha companheira, minha noiva, minha namorada, minha mulher, ... , meu amor Fernanda;

- À meu pai, que não está presente neste fase, mas com certeza está pulando de alegria onde estiver;

- Aos meus irmãos: Alex e Cesar, ótimos companheiros;

- Aos amigos que proporcionaram ajuda direta ou indiretamente nessa etapa, e seria desastroso omitir o nome de algum deles. Para não correr este risco registro aqui minha profunda gratidão a todos eles;

- Em especial ao casal Ricardo e Renata que são realmente novos irmãos de coração;

Resumo

Este trabalho visa entender a teoria de transformações potências, cuja referência principal foi o livro "Power Geometry in Algebraic and Differential Equation"do autor Alexander D. Bruno, e os resultados obtidos em sistemas de equações diferenciais ordinárias, tendo como objetivo achar soluções assintóticas tendendo para um ponto de equilíbrio de um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Para alcançar este objetivo, o conteúdo desta Tese consta de seis capítulos. Nos três primeiros capítulos consideramos os conceitos de determinados objetos geométricos importantes na teoria de transformações potências, de curvas assintóticas, de truncamento de funções e da transformação potência introduzindo diversos exemplos. No quarto capítulo é desenvolvido o relacionamento entre os capítulos anteriores, obtendo resultados que essencialmente determinam processos computacionais para achar soluções assintóticas do sistema completo a partir de soluções assintóticas de seus sistemas truncados. No quinto capítulo faz-se uso da teoria desenvolvida em sistemas hamiltonianos de equações diferenciais ordinárias, determinando quando o sistema hamiltoniano truncado é um sistema hamiltoniano, e reciprocamente, quando um sistema hamiltoniano com a função hamiltoniana truncada determina um sistema hamiltoniano truncado. Por fim no capítulo desenvolvemos as aplicações deste método, em alguns sistemas hamiltonianos importantes. A saber, o problema de Henon-Heiles, estudamos a instabilidade de sistemas hamiltonianos com dois graus de liberdade no caso de freqüência zero e também os diferentes truncamentos do problema restrito de três corpos.

Abstract

This work aims to understand the theory of powers transformations, whose main reference was the book "Power Geometry in Algebraic and Differential Equation" by Alexander D. Bruno. Where we study the results about Ordinary Differential Equations, having as objective to find asymptotic solutions tending for a equilibrium point of a system of Ordinary Differential Equations.

To reach our objective, the content of this Thesis consists of six chapters. In the first three chapters we considered the concepts of certain important geometric objects in the theory of powers transformations, of asymptotic curves, truncation of functions and the power transformation introducing several examples. In chapter four, the relationship between the previous chapters is developed, getting resulted that essentially they determine computational processes to find asymptotic solutions of the complete system from asymptotic solutions of its truncated systems. In the fifth chapter use of the theory developed in Hamiltonian systems of systems ordinary asymptotic equations, determining when truncated Hamiltonian system is a Hamiltonian system, and reciprocally, when a Hamiltonian system with the truncated Hamiltonian function is a truncated Hamiltonian system. Finally, in chapter six we developed the applications of this method, in some important Hamiltonian systems. Namely, the Henon-Heiles problem; we studied the stability of Hamiltonian systems with two degrees of freedom in the case of zero frequencies, and also we analysis the different truncations of the restricted three body problem.

Conteúdo

Introdução

O conteúdo deste trabalho tem como base principal o livro "Power Geometry in Algebraic and Differential Equations"de Alexander D. Bruno, onde visamos compreender o que o próprio Bruno descreve como um novo cálculo: "Power Geometry", que é uma ferramenta a mais para o desenvolvimento do cálculo diferencial, especialmente para problemas não-lineares.

O conceito principal de Power Geometry (Geometria de potências) é estudar as propriedades das soluções de uma equação, através dos expoentes potências dos seus monômios. O termo "Power Geometry"apareceu pela primeira vez em 1997, colocado como título de um artigo publicado por Bruno na revista "J. Dynamical and Control Systems"[2]. Apesar de ser uma teoria nova, suas bases estão formuladas nos trabalhos de Newton, aproximadamente nos anos de 1670, onde sugeriu o uso de um lado do "polígono de Newton"do polinômio $f(x, y)$ para achar soluções aproximadas para a equação $f(x, y) = 0$ na vizinhança da origem $x = y = 0$.

Em geral, desenvolveremos as ferramentas básicas da teoria de "Power Geometry": poliedro de Newton, transformações potências, transformações logarítmicas, truncamentos de funções e potências assintóticas; que permitirão achar soluções assintóticas tendendo para um ponto de equilíbrio de um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Este trabalho consta de cinco capítulos. A teoria geométrica relacionada com inequações lineares é desenvolvida no primeiro capítulo, onde são expostos vários exemplos e figuras a fim de facilitar o entendimento. Temos também no capítulo 1, os conceitos de curvas assintóticas e truncamento de funções. Ao capítulo 2 ficou reservado o estudo da forma normal e de soluções assintóticas de sistemas de equações diferenciais. No capítulo 3 apresentamos a definição de transformação potência e suas propriedades em sistemas de equações, onde com a ajuda da transformação potência generalizada mostra-se que alguns sistemas podem ser simplificados. No quarto capítulo tem-se o resultado mais importante desta Tese dado pelo Teorema 4.3.1, o qual expressa uma forma de determinar soluções potências assintóticas do sistema completo a partir de soluções potências assintóticas de sistemas truncados associados e vice-versa. No capítulo cinco trabalhamos com sistemas Hamiltonianos de equações diferenciais ordinárias com m graus de liberdade. Verificaremos que um sistema truncado pode não ser um sistema Hamiltoniano, e reciprocamente, um sistema Hamiltoniano com a função Hamiltoniana truncada pode não ser um sistema Hamiltoniano truncado. Para achar todos os sistemas truncados que são sistemas Hamiltonianos apresentamos um algoritmo. O algoritmo é utilizado no capítulo 6, no qual estudamos três problemas da Mecânica, a saber, o problema de Henon-Heiles, sistemas Hamiltonianos de dois graus de liberdade e todas as frequências nulas e por último no problema restrito de três corpos. Essencialmente nestas três aplicações usamos a teoria desenvolvida e o algoritmo do capítulo cinco, principalmente, nos permitindo descrever todos os sistemas Hamiltonianos truncados admissíveis.

No caso das aplicações aos sistemas Hamiltonianos com frequências nulas, a existência de soluções potências assintóticas, sob certas condições, nos permitem provar a instabilidade da solução de soluções de equilíbrio em dois casos (onde a parte linear do sistema associado ao sistema Hamiltoniano tem *posto* três e dois). Tal problema já tinha sido abordado por Sokol'skii em seu artigo [9], no qual usou o Teorema de Chetaev para concluir instabilidade. Bruno faz uma crítica ao trabalho de Sokol'skii, mostrando que seus resultados são mais gerais e no paper de Sokol'skii existem incoerências.

Ressaltamos que esta técnica estudada neste trabalho é de bastante importância no estudo de Hamiltonianos a partir de Hamiltonianos truncados e na análise da instabilidade de soluções de equilíbrio em sistemas Hamiltonianos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Inequações lineares

1.1.1 Definições básicas

Trataremos nesta seção de dois objetos geométricos bem conhecidos: do conjunto *convexo* e do *cone*.

Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é dito *convexo* se dado quaisquer dois pontos, Q_1 e Q_2, de C, o segmento de reta que une Q_1 a Q_2 está inteiramente contido em C.

Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é um *cone*, se satisfaz: para todo $P \in K$ então K contém o raio que passa por P, isto é, o conjunto formado pelos elementos cP onde $c \in \mathbb{R}^+ \quad (c > 0)$. Assim, os cones em $\mathbb{R}^2$ são a origem $P = 0$, um raio (uma semi-reta partindo da origem que pode não conter a origem), um setor, uniões destes conjuntos e o próprio plano.

Um cone K que é convexo é dito *cone convexo*. Segundo Goldman e Tucker [7], um conjunto K é um cone convexo se satisfaz:

1. $cQ \in K$ se $c \geq 0$ e $Q \in K$

2. $Q_1 + Q_2$ pertencem a K se Q_1 e Q_2 pertencem a K.

Definição 1.1.1 *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$. A envoltória linear de S, denotada por $LinS$, é o conjunto*

$$LinS = \{Q \in \mathbb{R}^n / \ Q = \lambda_1 Q_1 + \ldots + \lambda_s Q_s, \ Q_j \in S \quad e \quad \lambda_j \in \mathbb{R}\} \tag{1.1}$$

(a) *Quando em (1.1) os escalares λ_j satisfazem $\lambda_j \geq 0$, dizemos que o conjunto é uma envoltória cônica, representado por $ConS$;*

(b) *Quando em (1.1) os escalares λ_j satisfazem $\lambda_j \geq 0$ e $\sum_{j=1}^{s} \lambda_j = 1$, dizemos que o conjunto é uma envoltória convexa, denotado por $CnvS$.*

Observa-se que

$$CnvS \subset ConS \subset LinS.$$

Pela definição, a envoltória cônica $ConS$ e a envoltória convexa $CnvS$, são respectivamente, um cone convexo e um conjunto convexo, além disso, temos que a envoltória convexa e a envoltória cônica são os menores conjuntos, respectivamente, convexo e cone convexo que contém S. No plano, a envoltória cônica é o menor setor determinado pelos raios que passam por Q_1 e Q_2 enquanto a envoltória convexa é o segmento que liga estes dois pontos.

Exemplo 1.1.1 *:* Se $S = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$, sua envoltória cônica vai depender das coordenados dos pontos, por exemplo, quando $Q_1 = (1,0)$, $Q_2 = (0,1)$ e $Q_3 = (0,0)$, neste caso são não colineares, o $ConS$ é o primeiro quadrante. Mas, se $S = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$, com Q_1, Q_2 e Q_3 pontos colineares, temos dois casos, quando os pontos estão em uma reta que passa pela origem, neste caso sua envoltória cônica pode ser uma reta ou um raio, por exemplo, quando $Q_1 = (1,1)$, $Q_2 = (1/2, 1/2)$ e $Q_3 = (0,0)$ então o $ConS$ é a bissetriz do primeiro quadrante. E quando os pontos

Q_1, Q_2 e Q_3 são colineares, mas estão numa reta que não passa pela origem, então a envoltória cônica de S é o menor setor no plano que contem os raios que passam pelos pontos Q_1, Q_2 e Q_3. Já a envoltória convexa de $S = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$ é o triângulo determinado pelos três pontos quando este pontos são não colineares, e quando este pontos são colineares, a envoltória reduz-se a um segmento de reta.

Sempre que S é um conjunto finito, sua envoltória convexa será um conjunto fechado, em geral, um poliedro cujos vértices são pontos de S. Mas se S for infinito $CnvS$ pode não ser um conjunto fechado. Vejamos os seguintes exemplos.

Exemplo 1.1.2 *:* Seja

$$S = \{Q \in \mathbb{R}^2 \backslash \ q_1 = 1/m, \ q_2 = 0, \ m = 1, 2, \ldots\}. \tag{1.2}$$

Para $Q \in CnvS$, temos que

$$Q = \lambda_1 Q_1 + \ldots + \lambda_m Q_m,$$

onde $Q_i = (1/i, 0)$ e $\lambda_i \geq 0$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$. Daí

$$Q = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{j}, 0 \right).$$

Como $0 < \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{j} \leq 1$ temos que $CnvS = (0, 1] \times \{0\}$ o qual não é fechado.

Exemplo 1.1.3 *:* Seja S é o interior do disco unitário, ou seja,

$$S = \{Q; \ q_1^2 + q_2^2 < 1\} \tag{1.3}$$

neste caso $CnvS = S$, que é aberto.

Definição 1.1.2 *Seja $P = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n_*$, onde $\mathbb{R}^n_*$ é o espaço dual de $\mathbb{R}^n$. Definimos uma aplicação bilinear de $\mathbb{R}^n_* \times \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ dada por*

$$\langle P, Q \rangle = P(Q) = p_1 q_1 + \ldots + p_n q_n, \tag{1.4}$$

onde $Q = (q_1, \ldots, q_n) \in I\!R^n$.

Pelo isomorfismo entre $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n_*$, podemos associar à cada aplicação (1.4) com o produto escalar canônico em $\mathbb{R}^n$, devido a isto dizemos que a aplicação (1.4) é o *produto escalar de P com Q.*

Quando fixamos um vetor $P \in \mathbb{R}^n_*$ e uma constante $c \in \mathbb{R}$, a equação

$$\langle P, Q \rangle = c \tag{1.5}$$

define em $\mathbb{R}^n$ um hiperplano ortogonal a P. Em particular quando $n = 2$ a equação (1.5) é

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = c$$

cuja solução está ao longo de uma reta em $\mathbb{R}^2$ perpendicular ao vetor $P = (p_1, p_2)$. Se $c = 0$ então a reta passa pela origem; se $c > 0$ a reta é transladada no mesmo sentido do vetor P de incremento c; por último, quando $c < 0$, a reta é transladada no sentido oposto ao vetor P (figura (1.1)).

Figura 1.1: Solução da equação $\langle P, Q \rangle = c$.

Definição 1.1.3 *Sejam $S \subset I\!R^n$, $P \in I\!R^n_*$ um vetor não-nulo fixo, e $c^* = \sup\limits_{Q \in S} \langle P, Q \rangle$. O hiperplano determinado pela equação (1.5) para $c = c^*$ é chamado suporte de S com respeito a P, que denotaremos por H_P, isto é*

$$H_P = \{Q \in I\!R^n /\ \langle P, Q \rangle = c^*\}$$

E a inequação

$$\langle P, Q \rangle \leq c^* \tag{1.6}$$

determina um subespaço correspondente, que chamaremos de semiespaço suporte de S, e será denotado por H_P^-.

Quando S consiste de um número finito de pontos então $c^* = \sup_{Q \in S} \langle P, Q \rangle \equiv \max_{Q \in S} \langle P, Q \rangle$, daí algum $Q \in S$ está em H_P. Se S for um conjunto infinito, não necessariamente algum $Q \in S$ pertence a H_P, por exemplo, se S é o conjunto (1.2) do exemplo 1.1.1 e $P = (-1, 0)$, então $c^* = 0$ e para qualquer $Q \in S$, $\langle P, Q \rangle = -1/m < 0$.

Notemos que por definição sempre $S \subset H_P^-$. Denotemos por Γ a intersecção de todos os semiespaços suportes de S, i.e.,

$$\Gamma = \bigcap_{P \neq 0} H_P^-, \ \ P \in \mathbb{R}_*^n. \tag{1.7}$$

Afirmamos que Γ é um conjunto convexo que contém $CnvS$. De fato, como $S \subset H_P^-$ e cada H_P^- é fechado, segue que $S \subset \Gamma$ e Γ é fechado, assim falta mostrarmos que Γ é um conjunto convexo, já que $CnvS$ é o menor conjunto convexo que contém S. Sejam $Q_1, Q_2 \in \Gamma$ então $Q_1, Q_2 \in H_P^-$, para todo $P \neq 0$. Tome Q_{12} um ponto do segmento de reta que une Q_1 a Q_2, logo

$$Q_{12} = \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2,$$

com $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Para qualquer $P \in \mathbb{R}_*^n$, temos

$$\langle P, Q_{12} \rangle = \lambda_1 \langle P, Q_1 \rangle + \lambda_2 \langle P, Q_2 \rangle.$$

Utilizando (1.6) e as propriedades dos $\lambda_i's$ acima, segue

$$\langle P, Q_{12} \rangle \leq \lambda_1 c^* + \lambda_2 c^* \leq c^*$$

logo $Q_{12} \in H_P^-$, para todo P, conseqüentemente $Q_{12} \in \Gamma$, e portanto Γ é um conjunto convexo.

Teorema 1.1.1 *Seja $S \subset I\!R^n$, então Γ dado por (1.7) coincide com o fecho da envoltória convexa de S, i.e.,*

$$\Gamma = \overline{CnvS}.$$

Demonstração: Seja (R_n) uma sequência de pontos em $CnvS$ convergente. Cada termo da sequência $R_n = \lambda_{n1}R_1 + \ldots + \lambda_{ns}R_s$, onde $R_j \in S$, é escrito como combinação linear de termos de S, desde que $\lambda_{nj} \geq 0$ e $\sum_{j=1}^{s} \lambda_{nj} = 1$.

Suponha que $\lim_{n\to\infty} R_n = Q$. Devemos mostrar que Q é um ponto de Γ. Tomando $P \in I\!R_*^n$, não-nulo, tem-se que

$$\lim_{n\to\infty} \langle P, R_n \rangle = \langle P, Q \rangle,$$

donde

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{s} \lambda_{nj} \langle P, R_j \rangle = \langle P, Q \rangle.$$

Mas $\langle P, R_j \rangle \leq \sup_{R\in S} \langle P, R \rangle$, assim

$$\begin{aligned} \langle P, Q \rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{s} \lambda_{nj} \langle P, R_j \rangle &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{s} \lambda_{nj} \sup_{R\in S} \langle P, R \rangle \\ &= \sup_{R\in S} \langle P, R \rangle, \end{aligned}$$

logo, $Q \in H_P^-$, como P foi tomado arbitrariamente, temos que $Q \in \Gamma$. $\square$

Comentário 1.1.1 *Pela relação obtida no Teorema 1.1.1, do conjunto Γ ser o fecho da envoltória convexa de S, chamaremos o conjunto Γ de envoltória convexa externa de S. Quando $S = \{Q_1, \ldots, Q_s\}$ (S finito) temos que $CnvS$ é fechado, logo $\Gamma = CnvS$.*

O conceito de *dimensão* da envoltória convexa de S coincide com a dimensão do subespaço linear $LinS$, que é igual ao número de vetores linearmente independentes sobre $I\!R$ em $LinS$ no seguinte sentido. Toma-se um ponto fixo Q_j em S a dimensão

d da envoltória convexa é a quantidade de vetores linearmente independentes no conjunto $\{Q_i - Q_j,\ Q_i \in S\}$.

Definição 1.1.4 *Seja Γ a envoltória convexa externa de S. Uma face é a intersecção do conjunto Γ com um suporte H_P, para algum $P \neq 0$.*

Pela igualdade (1.7), as faces de um conjunto Γ estão na $\partial\Gamma$, inversamente a $\partial\Gamma$ é composta das faces de Γ.

Denotamos as faces de Γ por $\Gamma_j^{(d)}$, onde d é a dimensão da face (o conceito de dimensão é utilizado no sentido acima, uma vez que a face é uma envoltória convexa dos pontos que estão em S) e j é uma forma de enumerá-las. Temos que $\Gamma_j^{(d)} = \Gamma \cap H_P$, para algum $P \in \mathbb{R}_n^*$. No caso 2-dimensional em que Γ é um polígono as faces são para $d = 0$ os vértices, para $d = 1$ os lados e para $d = 2$ o próprio polígono.

Definição 1.1.5 *A interseção*

$$S_P = S \cap H_P,$$

que consiste de todos pontos de S tal que o produto escalar $\langle P, Q\rangle$ tem valor máximo é chamado de subconjunto fronteira de S.

Para cada face, determinamos o seguinte subconjunto

$$S_j^{(d)} = \Gamma_j^{(d)} \cap S.$$

Como cada face $\Gamma_j^{(d)} = H_P \cap S$, então $S_P = S_j^{(d)}$, assim todos os subconjuntos fronteiras S_P coincidem com $S_j^{(d)}$, os quais estão sobre uma face de Γ. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.1.4 *:* Seja $n = 2$, $S \subset \mathbb{R}^2$ e $S = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$, onde $Q_1 = (1, 0)$, $Q_2 = (0, 1)$ e $Q_3 = (1, 1)$. Sejam $P_1 = (-1, -1)$, $P_2 = (-1, 0)$ e $P_3 = (1, 1)$, calculemos os respectivos hiperplanos suporte de S (figura 1.2).

Figura 1.2: Representação gráfica da envoltória convexa do conjunto S do exemplo (1.1.4).

Para P_1 o suporte é dado pela equação

$$\langle P_1, Q\rangle = -1, \quad \text{pois} \quad \langle P_1, Q_1\rangle = \langle P_1, Q_2\rangle = -1, \langle P_1, Q_3\rangle = -2 < -1,$$

assim o semiplano suporte $H^-_{P_1}$ é determinado pela equação $-q_1 - q_2 \leq -1$. Para P_2, H_{P_2} é dado por $q_1 = 0$, visto que $\langle P_2, Q_2\rangle = 0$ e $\langle P_2, Q_1\rangle = \langle P_2, Q_3\rangle = -1 < 0$ e, conseqüentemente

$$H^-_{P_2} = \{Q = (q_1, q_2),\ -q_1 \leq 0\}.$$

Analogamente, obtemos H_{P_3} e $H^-_{P_3}$, dados por

$$H_{P_3} = \{q_1 + q_2 = 2\} \text{ e } H^-_{P_3} = \{q_1 + q_2 \leq 2\}.$$

Notemos que os suportes H_{P_j} são ortogonais aos P_j, $j = 1, 2, 3$. Temos que a envoltória convexa de S, $CnvS$, é o triângulo hachurado na figura (1.2), cujos vértices são os pontos Q_1, Q_2 e Q_3. As faces associadas aos suportes calculados, são

$$\begin{aligned}
\Gamma_2^{(0)} &= \Gamma \cap H_{P_2} = Q_2 \\
\Gamma_3^{(0)} &= \Gamma \cap H_{P_3} = Q_3 \\
\Gamma_1^{(1)} &= \Gamma \cap H_{P_1} = \text{ segmento conectando } Q_1 \text{ a } Q_2 = \overline{Q_1 Q_2}.
\end{aligned}$$

As outras faces são $\Gamma_2^{(0)}$, $\Gamma_2^{(1)}$ e $\Gamma_3^{(1)}$, representado na figura (1.2). Correspondentemente as faces de Γ determinamos os subconjuntos fronteiras

$$S_{P_1} = S_1^{(1)} = \{Q_1, Q_2\};\ S_2^{(1)} = \{Q_2, Q_3\};\ S_3^{(1)} = \{Q_1, Q_3\};$$
$$S_1^{(0)} = Q_1;\ S_{P_2} = S_2^{(0)} = Q_2;\ S_{P_3} = S_3^{(0)} = Q_3.$$

Exemplo 1.1.5 *:* Seja S o conjunto (1.3) do exemplo (1.1.3). Como $CnvS = S$ e pelo Teorema 1.1.1, $\Gamma = \overline{Cnv}S$, assim

$$\Gamma = \{Q;\ q_1^2 + q_2^2 \leq 1\} \Longrightarrow \partial\Gamma = \{Q;\ q_1^2 + q_2^2 = 1\},$$

logo cada ponto de $\partial\Gamma$ é uma face $\Gamma_j^{(0)}$, mas $\partial\Gamma \cap S = \emptyset$, daí $S_j^{(0)} = \emptyset$. Observemos que neste exemplo, não temos faces $\Gamma_j^{(1)}$ de dimensão um, pois a fronteira $\partial\Gamma$ é consiste de pontos que formam a circunferência, logo não contém nenhum segmento.

Exemplo 1.1.6 *:* Seja $n = 3$ e S o conjunto formado pelos pontos:

$$Q_1 = (1,1,1), Q_2 = (4,0,0), Q_3 = (0,4,0), Q_4 = (0,0,4) \text{ e } Q_5 = (2,0,2).$$

A envoltória convexa Γ do conjunto S é um tetraedro como mostra a figura (1.3), tendo como vértices os pontos Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. Visto que o ponto Q_5 está na aresta que liga os vértices Q_2 e Q_4.

Determinemos os hiperplanos suportes de S para os seguintes pontos de $\mathbb{R}^3_*$: $P_1 = (1,0,0)$, $P_2 = (2,0,2)$ e $P_3 = (+1,+1,+1)$. Temos

$$\begin{aligned} H_{P_1} &: \ q_1 = 4 \\ H_{P_2} &: \ q_1 + q_3 = 4 \\ H_{P_3} &: \ q_1 + q_2 + q_3 = 4 \end{aligned}$$

donde segue que

$$\begin{aligned} \Gamma_2^{(0)} &= \Gamma \cap H_{P_1} = Q_2, \\ \Gamma_5^{(1)} &= \Gamma \cap H_{P_2} = \overline{Q_2 Q_4}, \\ \Gamma_4^{(2)} &= \Gamma \cap H_{P_3} = Cnv\{Q_2, Q_3, Q_4\}. \end{aligned}$$

Figura 1.3: Tetraedro do exemplo (1.1.6).

As outras faces de Γ, $\Gamma_i^{(0)}$, $i = 1, 3$; $\Gamma_j^{(1)}$, $j = 1, 2, 3, 4, 6$; $\Gamma_k^{(2)}$, $k = 1, 2, 3$, são obtidas de forma análoga, para isto é necessário determinar os prováveis $P \in \mathbb{R}^3_*$. Correspondemos os seguintes subconjuntos fronteiras

$$S_j^{(0)} = \{Q_j\}\ j = 1, \ldots, 4;\ S_{k-1}^{(1)} = \{Q_1, Q_k\}\ k = 2, 3, 4$$

$$S_4^{(1)} = \{Q_2, Q_3\};\ S_5^{(1)} = \{Q_2, Q_4, Q_5\};\ S_6^{(1)} = \{Q_3, Q_4\};$$

$$S_1^{(2)} = \{Q_1, Q_2, Q_3\};\ S_2^{(2)} = \{Q_1, Q_2, Q_4, Q_5\};$$

$$S_3^{(2)} = \{Q_1, Q_3, Q_4\};\ S_4^{(2)} = \{Q_2, Q_3, Q_4, Q_5\}.$$

Observemos que $S_{P_1} = Q_2 = S_2^{(0)}$, $S_{P_2} = \{Q_2, Q_3, Q_4, Q_5\} = S_4^{(2)}$, $S_{P_3} = \{Q_2, Q_4, Q_5\} = S_5^{(1)}$, verificando a propriedade de que os subconjuntos estão sobre alguma face.

As faces $\Gamma_j^{(d)}$ de um conjunto poliedral Γ, formam uma estrutura no seguinte sentido: se $\Gamma_j^{(d)} \cap \Gamma_k^{(e)}$ simboliza a intersecção usual entre conjuntos; $\Gamma_j^{(d)} \cup \Gamma_k^{(e)}$ significa a maior face que contém $\Gamma_j^{(d)}$ e $\Gamma_k^{(e)}$ simultaneamente. A unidade da estrutura é o próprio Γ e o zero corresponde ao conjunto vazio. Para traçar um diagrama estrutural das faces (figura 1.4), consideremos as seguintes regras:

Figura 1.4: Diagrama estrutural das faces de um conjunto poliedral Γ.

(a) As faces de mesma dimensão são colocadas na mesma linha do diagrama.

(b) As faces $\Gamma_i^{(d)}$ estão conectadas às faces $\Gamma_j^{(d+1)}$, se $\Gamma_i^{(d)} \subset \Gamma_j^{(d+1)}$.

(c) Cada face é a intersecção de algumas hiperfaces $\Gamma_j^{(l-1)}$, onde $l = \dim \Gamma$.

Exemplo 1.1.7 *:* Vejamos o diagrama estrutural do conjunto poliedral do exemplo (1.1.4), e procuramos fazer um diagrama estrutural para o conjunto S considerando os subconjuntos $S_j^{(d)}$ utilizando a correspondência biunívoca de $\Gamma_j^{(d)}$ e $S_j^{(d)}$

Figura 1.5: Diagrama estrutura das faces e dos subconjuntos fronteiras para o exemplo (1.1.4).

Do mesmo modo para o exemplo (1.1.6), temos

Figura 1.6: Diagrama estrutura dos subconjuntos fronteiras do exemplo (1.1.6).

1.1.2 Cone normal e cone tangente

Nesta seção trataremos de dois cones associados às faces do poliedro Γ, o cone normal e o cone tangente, bastante usados nas aplicações posteriores.

Definição 1.1.6 *Sejam $S \subset \mathbb{R}^n$ e um subconjunto fronteira $S' = S_{P'}$ para algum $P' \in \mathbb{R}^n_*$ não nulo. O conjunto de todos $P \in \mathbb{R}^n_*$ tal que $S_P = S'$ é chamado cone normal do subconjunto fronteira S', o qual denotaremos por $U(S, S')$.*

O conjunto $U(S, S')$, definido acima, é um cone. De fato, se tomarmos $P \in U(S, S')$, desde que $H_P = H_{cP}$ para todo c real positivo, então

$$S' = S_P = H_P \cap S = H_{cP} \cap S = S_{cP} \;\Rightarrow\; cP \in U(S, S').$$

Obviamente, temos que cones normais diferentes não se interceptam, isto é, se $U(S, S') \neq U(S, S'')$ então $U(S, S') \cap U(S, S'') = \emptyset$, pois caso contrário, se existe $P \in U(S, S') \cap U(S, S'')$, então $S' = S_P = S''$, e portanto $U(S, S') = U(S, S'')$

Segue da definição que o cone normal $U(S,S')$ do subconjunto fronteira é determinado pela seguinte relação

$$\begin{aligned} U(S,S') = \{P \in \mathbb{R}^n_* \ : \ & \langle P,Q'\rangle = \langle P,Q''\rangle,\ Q',Q'' \in S'; \\ & \langle P,Q'\rangle > \langle P,Q\rangle,\ Q \in S \backslash S'\}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Definição 1.1.7 *Seja* $\Gamma_j^{(d)}$ *uma face de* Γ*. O conjunto*

$$U_j^{(d)} = \{P \in \mathbb{R}^n_* \ : \ \Gamma_j^{(d)} = H_P \cap \Gamma\} \ \equiv \ U(\Gamma, \Gamma_j^{(d)}) \tag{1.9}$$

é chamado cone normal associado à face $\Gamma_j^{(d)}$*.*

Proposição 1.1.1 *Se* $\Gamma_j^{(d)} = H_P \cap \Gamma$*, então* $U(\Gamma,\Gamma_j^{(d)}) = U(S,S_P)$*.*

Demonstração: Vimos no comentário acima do exemplo (1.1.4) que existe uma correspondência entre os subconjuntos fronteiras S_P de S e as faces $\Gamma_P = \Gamma_j^{(d)}$ de Γ, a qual para cada $\Gamma_j^{(d)} = H_P \cap \Gamma$ faz corresponder o subconjunto fronteira $S_P = S_j^{(d)} = H_P \cap S$, donde segue-se a proposição. □

Temos pela proposição anterior que $U_j^{(d)}$ pode ser obtido pela relação (1.8). Sendo determinado, desta forma, por

$$\begin{aligned} U_j^{(d)} = \{P \in \mathbb{R}^n_* \ : \ & \langle P,Q'\rangle = \langle P,Q''\rangle,\ Q',Q'' \in S_j^{(d)}; \\ & \langle P,Q'\rangle > \langle P,Q\rangle,\ Q \in S \backslash S_j^{(d)}\}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Observe que pela primeira equação do sistema (1.10), fixado $P \in U_j^{(d)}$, a equação $\langle P,Q\rangle$ é constante para todo $Q \in \Gamma_j^{(d)}$. Se tomarmos um vetor em $\Gamma_j^{(d)}$, da forma $Q' - Q''$ e um vetor em $U_j^{(d)}$, da forma $P' - P''$, então

$$\langle P' - P'', Q' - Q''\rangle = \langle P',Q'\rangle - \langle P'',Q''\rangle = 0,$$

pois $\langle P'',Q''\rangle = \langle P'',Q'\rangle = \langle P',Q''\rangle = \langle P',Q'\rangle$, logo o cone $U_j^{(d)}$ é normal à face $\Gamma_j^{(d)}$.

Um *cone* $K^* \subset \mathbb{R}^n_*$ é chamado o *dual* do cone $K \subset \mathbb{R}^n$, se $\langle P, Q\rangle \leq 0$ para todo $P \in K^*$ e todo $Q \in K$. Em particular estes cones são normais, desta forma diremos que dois cones são normais se são duais um do outro.

Definição 1.1.8 *Seja* $\Gamma_j^{(d)}$ *uma face de* Γ. *Um cone* $T_j^{(d)}$ *é dito cone tangente associado à face* $\Gamma_j^{(d)}$ *se é normal ao cone* $U_j^{(d)}$.

Podemos determinar o cone tangente $T_j^{(d)}$, pelo seguinte

$$T_j^{(d)} = \{Q : \ \langle P, Q\rangle \leq 0, \ P \in U_j^{(d)}\}. \tag{1.11}$$

O cone tangente é um cone convexo. Com efeito, usando a descrição de Goldman e Tucker, vista na seção anterior, temos para $c > 0$ e $Q \in T_j^{(d)}$ que

$$\langle P, cQ\rangle = c\langle P, Q\rangle \leq 0, \ \forall P \in U_j^{(d)},$$

e se $Q_1, Q_2 \in T_j^{(d)}$ segue-se que

$$\langle P, Q_1 + Q_2\rangle = \langle P, Q_1\rangle + \langle P, Q_2\rangle \leq 0, \ \forall P \in U_j^{(d)}.$$

Exemplo 1.1.8 *:* Seja $n = 3$ e $S = \{Q_1 = (0,0,-1), Q_2 = (0,-1,0), Q_3 = (-1,0,0), \ Q_4 = (0,0,0), Q_5 = (1,0,0), Q_6 = (0,1,0)\}$. A envoltória convexa Γ é mostrada na figura (1.7). Sua fronteira $\partial\Gamma$ consiste de cinco vértices, oito lados e cinco faces.

O cone normal correspondente a face $\Gamma_1^{(2)}$ com vértices Q_1, Q_3, Q_6 é

$$\begin{aligned} U_1^{(2)} &= \{P : \ \langle P, Q_1\rangle = \langle P, Q_3\rangle = \langle P, Q_6\rangle, \ \langle P, Q_1\rangle > \langle P, Q_2\rangle, \ \langle P, Q_1\rangle > \langle P, Q_5\rangle\} \\ &= \{P : \ -p_3 = -p_1 = p_2, \ -p_3 > -p_2, \ -p_3 > p_1\} \\ &= \{P : \ -p_3 = -p_1 = p_2 > 0\} \end{aligned}$$

que é o raio $U_1^{(2)} = c(-1,1,-1), \ c > 0$. O cone tangente $T_1^{(2)}$ é o semi-espaço $\langle P_1, Q\rangle \leq 0$, onde $P_1 = (-1,1,-1)$, isto é

$$T_1^{(2)} = \{Q : \ q_1 - q_2 + q_3 \geq 0\}.$$

Figura 1.7: Envoltória convexa de S do Exemplo (1.1.8)

O cone normal da face $\Gamma_1^{(1)}$ com vértices Q_1 e Q_6 é

$$\begin{aligned} U_1^{(1)} &= \{P : \langle P, Q_1 \rangle = \langle P, Q_6 \rangle, \\ &\qquad \langle P, Q_1 \rangle > \langle P, Q_3 \rangle,\ \langle P, Q_1 \rangle > \langle P, Q_2 \rangle,\ \langle P, Q_1 \rangle > \langle P, Q_5 \rangle\} \\ &= \{P : -p_3 = p_2,\ -p_3 > -p_1,\ -p_3 > -p_2, -p_3 > p_1\} \\ &= \{P : -p_3 = p_2 > 0, p_3 < p_1, p_3 < -p_1\} \end{aligned}$$

Assim, o cone normal $U_1^{(1)}$ é um setor no plano $p_3 = -p_2$ e limitado pelos raios que passam pelos vetores $P_1 = (-1, 1, -1)$ e $P_2 = (1, 1, -1)$. Desta forma, o cone tangente $T_1^{(1)}$ é definido pelas inequações

$$\langle P_1, Q \rangle \leq 0, \qquad \langle P_2, Q \rangle \leq 0,$$

isto é, $T_1^{(1)} = \{Q : -q_1 + q_2 - q_3 \leq 0,\ q_1 + q_2 - q_3 \leq 0\}$.

Exemplo 1.1.9 *:* (Continuação do exemplo (1.1.4)). Temos que o cone normal U de S está em $\mathbb{R}^2_*$, mostraremos que $U = \mathbb{R}^2_*$. Para a face $\Gamma_1^{(1)}$, temos que o cone normal é

$$\begin{aligned} U_1^{(1)} &= \left\{ \begin{array}{ccc} P = (p_1, p_2) & : & \langle P, Q_1 \rangle = \langle P, Q_2 \rangle \\ & & \langle P, Q_1 \rangle > \langle P, Q_3 \rangle \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} P = (p_1, p_2) & : & p_1 = p_2 \\ & & p_2 > p_1 + p_2 \end{array} \right\} \\ &= \{P = (p_1, p_2) : p_1 = p_2 < 0\}. \end{aligned}$$

Assim, o cone normal $U_1^{(1)}$ é o raio da bissetriz do terceiro quadrante. Este raio é perpendicular ao lado $\Gamma_1^{(1)}$. Analogamente encontramos os outros cones normais

$$\begin{aligned} U_2^{(1)} &= \left\{ \begin{array}{lcr} P=(p_1,p_2) & : & \langle P,Q_3\rangle = \langle P,Q_2\rangle \\ & & \langle P,Q_2\rangle > \langle P,Q_1\rangle \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{lcr} P=(p_1,p_2) & : & p_1+p_2=p_2 \\ & & p_2>p_1 \end{array} \right\} \\ &= \{P=(p_1,p_2)\ :\ p_1=0,\ p_2>0\}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} U_3^{(1)} &= \left\{ \begin{array}{lcr} P=(p_1,p_2) & : & \langle P,Q_1\rangle = \langle P,Q_3\rangle \\ & & \langle P,Q_1\rangle > \langle P,Q_2\rangle \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{lcr} P=(p_1,p_2) & : & p_1=p_1+p_2 \\ & & p_1>p_2 \end{array} \right\} \\ &= \{P=(p_1,p_2)\ :\ p_2=0,\ p_1>0\}. \end{aligned}$$

Acharemos agora os cones normais associados aos vértices, i.e., as faces de dimensão zero. Sabemos que os vértices $\Gamma_j^{(0)}$ contém um único ponto de S, assim são definidos somente por inequações. Temos que

$$\begin{aligned} U_1^{(0)} &= \{P=(p_1,p_2)\ :\ \langle P,Q_1\rangle > \langle P,Q_2\rangle;\ \langle P,Q_1\rangle > \langle P,Q_3\rangle\} \\ &= \{P=(p_1,p_2)\ :\ p_1>p_1+p_2,\ p_1>p_2\} \\ &= \{P=(p_1,p_2)\ :\ p_1>p_2,\ p_2<0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2^{(0)} &= \{P=(p_1,p_2)\ :\ \langle P,Q_2\rangle > \langle P,Q_1\rangle;\ \langle P,Q_2\rangle > \langle P,Q_3\rangle\} \\ &= \{P=(p_1,p_2)\ :\ p_2>p_1,\ p_1<0\}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} U_3^{(0)} &= \{P=(p_1,p_2)\ :\ \langle P,Q_3\rangle > \langle P,Q_1\rangle;\ \langle P,Q_3\rangle > \langle P,Q_2\rangle\} \\ &= \{P=(p_1,p_2)\ :\ p_1>0,\ p_2>0\}. \end{aligned}$$

Observamos que a união deste cones com a origem, é o próprio plano (ver figura (1.8)).

Figura 1.8: Cone normal associados às faces do poliedro Γ.

Exemplo 1.1.10 *:* (Continuação do Exemplo (1.1.6)). Para cada face $\Gamma_j^{(d)}$ do tetraedro Γ (Figura (1.3)) seus correspondentes cones normais $U_j^{(d)}$ estão definidos pelas inequações (1.8) tomando-se Q, Q' e Q'' os vértices do tetraedro Γ. Assim, a face $\Gamma_2^{(0)} = Q_2$ tem o cone normal:

$$\begin{aligned}
U_2^{(0)} &= \{P = (p_1, p_2, p_3) \ : \ \langle P, Q_2 \rangle > \langle P, Q_j \rangle, \ j = 1, 3, 4\} \\
&= \{P = (p_1, p_2) \ : \ \langle P, Q_j - Q_2 \rangle < 0\} \\
&= \{P = (p_1, p_2, p_3) \ : \ -3p_1 + p_2 + p_3 < 0, \ -4p_1 + 4p_2 < 0, \ -4p_1 + 4p_3 < 0\} \\
&= \{P = (p_1, p_2, p_3) \ : \ p_2 + p_3 < 3p_1, \ p_2 < p_1, \ p_3 < p_1\}.
\end{aligned}$$

A face $\Gamma_5^{(1)} \supset \{Q_2, Q_4\}$ tem cone normal

$$\begin{aligned}
U_5^{(1)} &= \{P = (p_1, p_2, p_3) \ : \ \langle P, Q_2 \rangle = \langle P, Q_4 \rangle, \\
&\qquad \langle P, Q_4 \rangle > \langle P, Q_1 \rangle, \ \langle P, Q_4 \rangle > \langle P, Q_3 \rangle\} \\
&= \{P = (p_1, p_2, p_3) \ : \ 4p_1 = 4p_3 = 0, \ -3p_3 + p_2 + p_1 < 0, \ -4p_3 + 4p_3 < 0\} \\
&= \{P = (p_1, p_2, p_3) \ : \ p_1 = p_3, \ p_2 < 2p_3, \ p_2 < p_3\}.
\end{aligned}$$

A face $\Gamma_4^{(2)} \supset \{Q_2, , Q_3, Q_4\}$ tem cone normal

$$\begin{aligned} U_4^{(2)} &= \{P = (p_1, p_2, p_3) \ : \ \langle P, Q_2\rangle = \langle P, Q_3\rangle = \langle P, Q_4\rangle > \langle P, Q_1\rangle\} \\ &= \{P = (p_1, p_2, p_3) \ : \ 4p_1 = 4p_2 = 4p_3 > p_1 + p_2 + p_3\} \\ &= \{P = (p_1, p_2, p_3) > 0\}. \end{aligned}$$

Para um melhor entendimento das disposições dos cones normais $U_j^{(d)}$ em $\mathbb{R}^3_*$, tomamos os dois planos

$$\mathbf{H}_\pm = \{P : \ \langle P, H\rangle = \pm 1\}$$

e traçamos sobre eles as intersecções com os cones normais. Supondo-se, por exemplo, $H = (1, 1, 1)$ as intersecções com os planos $\mathbf{H}_-$ e $\mathbf{H}_+$, mostrada nas figuras (1.9) (a) e (b) respectivamente.

Figura 1.9: Intersecção dos cones normais $U_j^{(d)}$ do Exemplo (1.1.10) com os planos $p_1 + p_2 + p_3 = -1$ (a) e $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ (b) nas coordenadas $p_2 p_3$.

Uma maneira prática de identificarmos um cone C, quando este é a envoltória cônica de um número finito de vetores $Q_1, \ldots, Q_s$, é associar ao cone C um número mínimo de vetores $Q_1, \ldots, Q_l$ que determinam a envoltória cônica, neste caso dizemos que os vetores $Q_1, \ldots, Q_l,\ l < s$, formam o *esqueleto* do cone C. Por exemplo, sabemos que no plano as envoltórias cônicas são: a origem, um raio, um setor e o próprio plano; temos que os esqueletos são respectivamente: $Q_1 = (0,0)$; qualquer ponto Q pelo qual o raio passa; os pontos Q_1 e Q_2 que pertencem aos raios distintos da fronteira do setor; e para o plano o esqueleto pode ser dado por $Q_1 = (1,0); Q_2 = (0,1); Q_3 = (-1,0); Q_4 = (0,-1)$ e $Q_5 = (0,0)$.

Como o cone normal $U_j^{(d)}$ trata-se de um cone convexo, segue-se que pode ser definido por um esqueleto $N_1, \ldots, N_l$. Conseqüentemente o cone tangente é dado pelas inequações

$$T_j^{(d)} = \{Q :\ \langle N_i, Q\rangle \leq 0, i = 1, \ldots, l\}.$$

Reciprocamente, se um cone $T_j^{(d)}$ é determinado pelo esqueleto $\{B_1, \ldots, B_k, R_1, \ldots, R_l\}$, onde $B_1, \ldots, B_k$ forma uma base de vetores de um subespaço linear contido em $T_j^{(d)}$, então

$$U_j^{(d)} = \{P :\ \langle P, B_i\rangle = 0, i = 1, \ldots, k,\ \langle P, R_j\rangle < 0, j = 1, \ldots, l\}.$$

Vejamos um método para determinar estes esqueletos no caso em que S é um conjunto finito.

Suponhamos $S = \{Q_1, \ldots, Q_s\},\ s < \infty$. Os vértices de $\Gamma(S)$ tem um papel especial: toda face $\Gamma_j^{(d)}$ é a envoltória convexa dos seus vértices. Se

$$\dim \Gamma = n,$$

então os vetores normais $N_i \in \mathbb{R}_*^n$ às hiperfaces $\Gamma_i^{(n-1)}$ tem um papel semelhante: o esqueleto de cada cone normal consiste de vetores normais N_i. Os cones normais $U_j^{(n-1)}$ das hiperfaces são raios ortogonais as faces saindo da envoltótria convexa de S, os cones normais $U_j^{(n-2)}$ são os setores limitados pelos raios $U_l^{(n-1)}$ e $U_m^{(n-1)}$ se $\Gamma_j^{(n-1)} = \Gamma_l^{(n-1)} \cap \Gamma_m^{(n-1)}$, etc.

Exemplo 1.1.11 *:* Seja o conjunto

$$\begin{aligned} S \;\; = \;\; & \{Q_1 = (2,0,0); Q_2 = (0,2,0); Q_3 = (-2,2,2); \\ & Q_4 = (0,0,2); Q = (-2,2,3); Q_6 = (0,0,3)\}, \end{aligned}$$

A envoltória convexa Γ é um poliedro de cinco faces, nove lados e seis vértices, mostrado na figura (1.10).

Figura 1.10: O poliedro Γ para o conjunto S do exemplo (1.1.11).

A Tabela 1.1.2 indica todos os subconjuntos fronteiras $S_j^{(d)}$, onde a primeira coluna indica a dimensão d da face, a segunda coluna é o seu número j e a terceira coluna indica os números i dos pontos Q_i que pertencem ao subconjunto fronteira $S_j^{(d)}$.

Para a hiperface $\Gamma_1^{(2)} \supset \{Q_3, Q_4, Q_5, Q_6\}$ obtém-se um vetor normal $N_1 = (-1,-1,0)$, que, como sabemos, determina o esqueleto do cone normal $U_1^{(2)}$. Temos, também as correspondências, devidamente calculadas

$$\begin{aligned} \Gamma_2^{(2)} \supset \{Q_1, Q_2, Q_5, Q_6\} \;\; & \longleftrightarrow \;\; N_2 = (3,3,2) \subset U_2^{(2)}, \\ \Gamma_3^{(2)} \supset \{Q_1, Q_4, Q_6\} \;\; & \longleftrightarrow \;\; N_3 = (0,-1,0) \subset U_3^{(2)}, \\ \Gamma_4^{(2)} \supset \{Q_2, Q_3, Q_5\} \;\; & \longleftrightarrow \;\; N_4 = (0,1,0) \subset U_4^{(2)}, \\ \Gamma_5^{(2)} \supset \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\} \;\; & \longleftrightarrow \;\; N_5 = (-1,-1,-1) \subset U_5^{(2)}. \end{aligned}$$

d	j	i
2	1	3 4 5 6
2	2	1 2 5 6
2	3	1 4 6
2	4	2 3 5
2	5	1 2 3 4
1	1	5 6
1	2	4 6
1	3	3 5
1	4	3 4
1	5	1 6
1	6	2 5
1	7	1 2
1	8	1 4
1	9	2 3
0	1	6
0	2	5
0	3	4
0	4	3
0	5	1
0	6	2

Tabela 1.1: Subconjuntos fronteiras de S.

1.1.3 O problema do cone

Problema: Para um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ achar todos os subconjuntos S_P e seus cones normais.

Vejamos como solucionar este problema, primeiramente para uma caso mais simples, que é S finito, após veremos a solução quando S for infinito.

Quando S finito os subconjuntos fronteiras S_P coincidem com os subconjuntos $S_j^{(d)}$ e seus cones normais $U(S, S_P) \equiv U_j^{(d)}$ que podem ser calculados pela fórmula (1.10). Logo temos solucionado o **Problema**. Além disso, os cones normais podem ser identificados pelos os esqueletos, sendo determinado usando o método apresentado no final da seção anterior, facilitando nos cálculos.

Quando S é infinito o **Problema** reduz-se a um problema análogo de um conjunto finito. Para isto, vejamos as seguintes definições.

Definição 1.1.9 *Seja um cone convexo $C \subset \mathbb{R}^n$. Se existe um esqueleto $N_1, \ldots, N_l$ do cone convexo C, tal que $N_i \in \mathbb{Z}^n$, $i = 1, \ldots, l$, então C é dito cone inteiro. E se além disso, C não contém nenhuma reta, dizemos que C é um cone para frente.*

Suponhamos que o cone convexo C é um cone inteiro para frente. O subconjunto S' do conjunto S é dito *dominante com respeito ao cone C*, se $S \subset S' + C$. Um subconjunto dominante S' é dito *minimal* se nenhum dos seus subconjuntos próprios é dominante para o conjunto S, e o denotaremos por S/C.

Duas conseqüências da definição é que o conjunto minimal S/C é único e se $S \subset S_1 \cup S_2$, então $S/C \subset S_1/C \cup S_2/C$. A primeira conseqüência é facilmente verificada por absurdo, ou seja, se existissem dois minimais S' e S'', como $S' \subset S$ então $S' \subset S'' + C$, assim $\widetilde{S}''$ é um subconjunto dominante para S', o que uma contradição. Para a segunda conseqüência, notemos que

$$S_1 \subset S_1/C + C \ \text{ e } \ S_2 \subset S_2/C + C,$$

implica que

$$S \subset S_1 \cup S_2 \subset S_1/C \cup S_2/C + C,$$

como o minimal S/C é único e pela equação acima $S_1/C \cup S_2/C$ é dominante de S, logo $S/C \subset S_1/C \cup S_2/C$.

Lembremos as seguintes notações:

- $\mathbb{R}^n_+ = \{Q \in \mathbb{R}^n;\ Q \geq 0\}$;
- $\mathbb{Z}^n_+ = \mathbb{R}^n_+ \cap \mathbb{Z}^n$;
- Se $R \in \mathbb{R}^n$, então o conjunto $R + \mathbb{Z}^n$ é dado por

$$R + \mathbb{Z}^n = \{Q \in \mathbb{R}^n;\ Q = R + N,\ N \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Lema 1.1.1 *Seja $R \in \mathbb{Z}^n$ e $S \subset R + \mathbb{Z}_+^n$, então o subconjunto minimal $S/\mathbb{R}_+^n$ consiste de um número finito de pontos.*

Demonstração: A prova será por indução sobre a dimensão n. Para $n = 1$, temos que $R = m \in \mathbb{Z}$, logo $S \subset m + \{1, 2, 3, \ldots\} = \{m + 1, m + 2, m + 3, \ldots\}$. Então $S/\mathbb{R}_+^n = \min\{S\}$ que é finito. Assumimos que o Lema é verdadeiro para dimensões menores que n. Seja $Q = (q_1, \ldots, q_n) \in S$. Dividiremos o conjunto $R + \mathbb{Z}^n$ em um número finito de partes da seguinte maneira

$$R + \mathbb{Z}^n = M_0 \bigcup \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=r_i}^{q_i - 1} M_j^i \right\},$$

onde $M_0 = Q + \mathbb{Z}^n$ e $M_j^i = (R + \mathbb{Z}^n) \cap \{P;\ p_i = j\}$ com r_i a i-ésima coordenada de R.

Escrevemos $Q_0 = S \cap M_0$ e $Q_j^i = S \cap M_j^i$. Então

$$S = Q_0 \bigcup \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=r_i}^{q_i - 1} Q_j^i \right\}.$$

Observemos que $Q_0/\mathbb{R}_+^n = \{Q\}$. Como M_j^i difere de $\mathbb{R}_+^{n-1}$ por uma translação paralela ao longo do vetor $R + (j - r_i)e_i$, logo $Q_j^i/\mathbb{R}_+^n$ tem um número finito de pontos, de acordo com hipótese indutiva. Portanto o total de pontos de todos os conjuntos

$$Q_0/\mathbb{R}_+^n,\ Q_j^i/\mathbb{R}_+^n,\ j = r_i, \ldots, q_i - 1,\ i = 1, \ldots, n$$

é finito. Pela segunda conseqüência comentada acima, o conjunto $S/\mathbb{R}_+^n$ está contido na união, logo $S/\mathbb{R}_+^n$ é finito, como queríamos demonstrar. $\square$

Corolário 1.1.1 *Seja o conjunto $R = \{R_1, \ldots, R_s\}$ em $\mathbb{Z}^n$ e $S \subset R + \mathbb{Z}^n$, então $S/\mathbb{R}_+^n$ é finito.*

Demonstração: Observemos que

$$R + \mathbb{Z}^n = \bigcup_{j=1}^{s} (R_j + \mathbb{Z}^n).$$

Seja $S_j = S \cap (R_j + \mathbb{Z}^n)$. Logo

$$S = \bigcup_{j=1}^{s} S_j.$$

Pelo Lema 1.1.1 cada $S_j/\mathbb{R}^n_+$ é finito, conseqüentemente $S/\mathbb{R}^n_+ \subset \bigcup_{j=1}^{s} S_j/\mathbb{R}^n_+$ é finito. $\square$

Exemplo 1.1.12 : Seja $S = \{Q \in \mathbb{Z}^n_+;\ q_1 + \ldots + q_n \geq m\},\ m \in \mathbb{Z}_+$. Então o subconjunto dominante

$$S/\mathbb{R}^n_+ = \{Q \in \mathbb{Z}^n_+;\ q_1 + \ldots + q_n = m\},$$

que se trata de um conjunto finito de pontos.

Teorema 1.1.2 *Seja* $\mathbf{R} \subset \mathbb{Z}^n$ *finito,* C *um cone convexo inteiro para frente e* $S \subset (\mathbf{R} + C) \cap \mathbb{Z}^n_+$. *Então o subconjunto minimal* S/C *consiste de um número finito de pontos.*

Demonstração: Denotemos $d = \dim C$ e $C^* \subset \mathbb{R}^n_*$ o dual do cone C. Se os vetores inteiros $B_1, \ldots, B_{n-d}$ e $C_1, \ldots, C_\sigma$ formam uma base do subespaço linear e o esqueleto do cone C^* então o cone C é determinado pelas equações $\langle B_i, Q \rangle = 0$ e inequações $\langle C_j, Q \rangle \leq 0,\ i = 1, \ldots, n-d,\ j = 1, \ldots, \sigma$.

Formemos a matriz

$$\mathcal{C} = (B_1 \ldots B_{n-d}\ C_1 \ldots C_\sigma)$$

determinada sendo B_i e C_j vetores-colunas, e tomemos a mudança de coordenadas

$$\widetilde{Q} = \mathcal{C}^* Q,$$

onde $\mathcal{C}^*$ é a matriz transposta de $\mathcal{C}$, assim $\widetilde{Q} \in \mathbb{R}^\rho$, sendo $\rho = n - d + \sigma$. Com esta mudança o espaço $\mathbb{R}^n$ torna-se um subespaço $\mathbf{L} \subset \mathbb{R}^\rho$, o conjunto $\mathbf{R}$ torna-se um conjunto $\widetilde{\mathbf{R}} \subset \mathbb{Z}^\rho \cap \mathbf{L}$, o cone C torna-se $\mathbb{R}^\rho_+ \cap \mathbf{L}$, o conjunto $S \subset (\mathbf{R} + C) \cap \mathbb{Z}^n$ torna-se $\widetilde{S} \subset (\widetilde{\mathbf{R}} + \mathbb{R}^\rho_+ \cap \mathbf{L}) \cap \mathbb{Z}^\rho$ e, por fim, o conjunto minimal S/C torna-se o conjunto $\widetilde{S}/\mathbb{R}^\rho_+ \cap \mathbf{L}$.

Observemos que a matriz $\mathcal{C}$ é injetiva para os pontos $\widetilde{Q} \in \mathbf{L}$. Logo $\widetilde{S} \subset \mathbf{L}$ e assim $\widetilde{S}/\mathbb{R}^\rho_+ \cap \mathbf{L} = \widetilde{S}/\mathbb{R}^\rho_+$. Mas pelo Lema 1.1.1, segue-se que este subconjunto dominante consiste de um número finito de pontos. Portanto tem-se o mesmo para o subconjunto S/C, pois a mudança é injetiva. $\square$

Consideremos S nas hipóteses do Teorema 1.1.2. Tomamos um vetor fixo $K \in \mathbb{R}^n_*$ tal que $\langle P, Q \rangle > 0$ para todo $Q \in C/\{0\}$. O subconjunto S_c de S dado por

$$S_c = S \cap \{Q : \langle K, Q \rangle = c\}, \quad c \in \mathbb{R},$$

tem as seguintes **propriedades**:

1. Os subconjuntos S_c são diferentes de vazio, somente para um conjunto discreto $\{c_0 < c_1 < c_2 < \ldots\}$;
2. Cada subconjunto S_{c_k} é finito;
3. O primeiro conjunto $S_{c_0} \subset S/C$.

A verificação destas propriedades é simples para a primeira e a segunda propriedade, bastando notarmos que $S \subset \mathbb{Z}^n$ e o conjunto $\{Q : \langle K, Q \rangle = c\}$ tem estas propriedades quando restringimos a $Q \in \mathbb{Z}^n$. Para provar a terceira propriedade, vejamos que pela propriedade 1, $S = \bigcup\limits_{c_k} S_{c_k}$, assim, se $Q \in S_{c_0}$ e $Q \notin S/C$ teríamos que

$$Q = Q_k + \widetilde{C}, \text{ onde } Q_k \in S_{c_k},\ k \neq 0, \text{ e } \widetilde{C} \in C,$$

aplicando o vetor K, temos

$$\langle K, Q\rangle = c_0 = \langle K, Q_k\rangle + \langle K, \widetilde{C}\rangle = c_k + \rho,\ \rho > 0,$$

o que é uma contradição, pois $c_0 < c_k$.

Com base no conjunto S_c expressemos um **algoritmo** para o cálculo do subconjunto dominante S/C:

A) Determinamos o conjunto S_{c_0}. Suponhamos que $S_{c_0}/C = S_{c_0}$ consiste dos pontos $Q_1, \ldots, Q_l$.

B) Para cada $Q \in S_{c_1}$, consideramos as diferenças

$$Q - Q_j, \quad j = 1, \ldots, l. \tag{1.12}$$

Se pelo menos uma delas está no cone C, então Q não está no conjunto S/C. Se nenhuma está no cone C, então $Q \in S/C$.

C) $S_{c_1} \not\subset S/C$, então S/C é o conjunto S_{c_0} complementado dos elementos de S_{c_1} tal que as diferenças (1.12) não está no cone C. Se $S_{c_1} \subset S/C$, então repetimos os passos **A** e **B** para S_{c_2}.

D) Seja S_{c_k} o subconjunto de S tal que $S_{c_k} \subset S/C$ e $S_{c_{k+1}} \not\subset S/C$. Logo S/C é o conjunto $(S_{c_0} \cup \ldots \cup S_{c_{k+1}})/C$, complementado dos elementos de $S_{c_{k+1}}$ tal que as diferenças (1.12), com $Q_j \in (S_{c_0} \cup \ldots \cup S_{c_{k+1}})/C$, não está no cone C.

Exemplo 1.1.13 *:* Consideremos o conjunto S de pontos inteiros $Q = (q_1, q_2) \geq 0$ satisfazendo a inequação $2q_1 + 3q_2 \geq 0$ e $C = \mathbb{R}^2_+$, mostrado na figura (1.11).

Tomando $K = (2, 3)$, temos que $c_0 = 12$, daí

$$S_{12} = \{Q_1 = (0, 4), Q_2 = (6, 0), Q_3 = (3, 2)\}.$$

Figura 1.11: O subconjunto dominante $S/\mathbb{R}^2_+$ e $\Gamma/\mathbb{R}^2_+$ para o exemplo (1.1.13) e (1.1.14).

Já $S_{13} = \{Q_4 = (2,3), Q_5 = (5,1)\}$. Observemos que nenhum dos vetores

$$Q_k - Q_j,\ \ k = 1,2,\ \ j = 1,2,3,$$

logo $S_{13} \subset S/\mathbb{R}^2_+$. Como $S_{14} = \{Q_6 = (4,2), Q_7 = (1,4)\}$ e pelo menos um dos vetores

$$Q_l - Q_j,\ \ l = 6,7,\ \ j = 1,2,3,4,5$$

pertence a $\mathbb{R}^2_+$ para cada l, concluímos que

$$S/C = S_{12} \cup S_{13} = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5\}.$$

Este algoritmo é particularmente simples para $C = \mathbb{R}^n_+$. Neste caso, podemos supor $k = (1,1,\ldots,1)$, e um ponto $Q \in S_{c_{k+1}}$ está em S/C somente se cada diferença (1.12) contém pelo menos uma componente negativa.

A determinação do subconjunto dominante da envoltória convexa Γ de S é também conveniente. O subconjunto dominante Γ/C é a parte da fronteira $\partial\Gamma$ cujas faces tem reta normal inserida no interior do cone C^*, dual do cone C. O cone C^* consiste dos pontos $P \in \mathbb{R}^n_*$ tal que $\langle P, Q\rangle \leq 0$, para todo $Q \in C$.

Exemplo 1.1.14 *:* Para o conjunto S do exemplo (1.1.13) sua envoltória convexa $\Gamma = \{Q \in \mathbb{R}^n;\ q_1, q_2 \geq 0,\ 2q_1 + 3q_2 \geq 12\}$. Notemos que $C^* = \mathbb{R}^n_-$ e que $\partial\Gamma$ consiste do segmento que une os pontos Q_1 a Q_2, e dos raios $\{(0, 4\lambda),\ \lambda \geq 1\}$ e $\{(6\lambda, 0),\ \lambda \geq 1\}$. Logo o subconjunto dominante $\Gamma/\mathbb{R}^n_+$ é somente o segmento $\{Q \in \mathbb{R}^n;\ q_1, q_2 \geq 0,\ 2q_1 + 3q_2 = 12\}$.

1.2 Transformações Lineares

Buscaremos nesta seção solucionar problemas relacionados com transformações lineares sobre $\mathbb{R}^n_*$ e $\mathbb{R}^n$, dadas respectivamente, por

$$P' = \alpha P, \quad P \in \mathbb{R}^n_*, \tag{1.13}$$

$$Q' = \alpha^{*-1} Q, \quad Q \in \mathbb{R}^n, \tag{1.14}$$

onde α é uma matriz não singular com $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, e α^* é a transposta de α.

O produto escalar $\langle P, Q \rangle$ com $P \in \mathbb{R}^n_*$ e $Q \in \mathbb{R}^n$ é preservado pelas transformações (1.13) e (1.14) em $\mathbb{R}^n_*$ e $\mathbb{R}^n$ respectivamente. De fato,

$$\langle P', Q' \rangle = \langle \alpha P, \alpha^{*-1} Q \rangle = \langle P, \alpha^* \alpha^{*-1} Q \rangle = \langle P, Q \rangle.$$

Observemos que as transformações (1.13) e (1.14) são aplicações injetivas dos espaços $\mathbb{R}^n_*$ e $\mathbb{R}^n$ neles próprio, respectivamente, isto porque a matriz α é não-singular. Desta forma, subespaços e variedades lineares são levados a subespaços e variedades lineares de mesma dimensão, em particular, as envoltórias cônica e convexa. Donde segue a seguinte proposição

Proposição 1.2.1 *Sejam $S \subset \mathbb{R}^n$, e os conjuntos Γ, U, $\Gamma^{(d)}_j$, $S^{(d)}_j$ e $U^{(d)}_j$. Seja S' o conjunto obtido do conjunto S pela transformação (1.14), i.e. $S' = \alpha^{*-1} S$, e os correspondentes conjuntos Γ', U', $\Gamma'^{(d)}_j$, $S'^{(d)}_j$ e $U'^{(d)}_j$ determinados à partir de S'. Então $\Gamma' = \alpha^{*-1}\Gamma$, $\Gamma'^{(d)}_j = \alpha^{*-1}\Gamma^{(d)}_j$, $S'^{(d)}_j = \alpha^{*-1} S^{(d)}_j$; $U' = \alpha U$, $U'^{(d)}_j = \alpha U^{(d)}_j$.*

Portanto todas as construções geométricas, vistas na seção 1 deste capítulo, são invariantes pelas transformações (1.13) e (1.14).

Sejam $L^{(d)}$ um subespaço linear de dimensão d em $\mathbb{R}^n$ e $S = \{Q_1, \ldots, Q_d\}$ uma base de $L^{(d)}$. Todo vetor $Q \in L^{(d)}$ é expresso, de modo único, como combinação linear $Q = \lambda_1 Q_1 + \ldots + \lambda_d Q_d$ de elementos $Q_1, \ldots, Q_d$ da base S. Os números reais $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ são chamados *as coordenadas* do vetor Q na base S.

Lema 1.2.1 *Seja um subespaço linear $L^{(d)}$ em $\mathbb{R}^n$ de dimensão $d < n$, então existe uma transformação linear (1.14) tal que o subespaço linear $\alpha^{*-1}L^{(d)}$ tem as mesmas coordenadas, i.e., para todo $Q \in L^{(d)}$ o vetor $\alpha^{*-1}Q$ tem as mesmas coordenadas que o vetor Q.*

Demonstração: Suponha que $L^{(d)}$ é a envoltória linear dos vetores $Q_1, \ldots, Q_d$, i.e., estes vetores formam uma base do subespaço $L^{(d)}$. Completemos com os vetores $R_{d+1}, \ldots, R_n$ para formar uma base de $\mathbb{R}^n$. Basta, agora, tomarmos a matriz da transformação (1.14) da forma

$$\alpha^* = (Q_1 \ \ldots \ Q_d \ R_{d+1} \ \ldots \ R_n)$$

onde os vetores Q_j e R_k são vetores colunas. Com efeito, temos que

$$\alpha^* e_j = Q_j \ \Rightarrow \ e_j = \alpha^{*-1} Q_j, \ j = 1, \ldots, d,$$

onde os vetores e_j's são os j-ésimos vetores unitários de $\mathbb{R}^n$. $\square$

Consideremos, agora, em $\mathbb{R}^n$ uma translação paralela de $S \subset \mathbb{R}^n$ ao longo de um vetor fixo $T \in \mathbb{R}^n$, ou seja, o conjunto $S' = \{Q' \in \mathbb{R}^n;\ Q' = Q+T,\ Q \in S\} = S+T$. Seja um conjunto finito em $\mathbb{R}^n$

$$S = \{Q_1, \ldots, Q_s\}, \tag{1.15}$$

e seja $d = \dim CnvS$, então existe um vetor T e uma matriz α tal que o conjunto

$$\alpha^{*-1}(S + T) \tag{1.16}$$

está no subespaço linear de dimensão d com as mesmas coordenadas. Esta afirmação é consequentemente obtida do Lema 1.2.1 tomando o vetor $T = -Q_j$ para algum j, pela definição de dimensão vista na seção 1.

Definamos que um vetor $X = (x_1, \dots, x_n) \geq 0$, quando cada $x_i \geq 0$. Vejamos um resultado mais forte do que o visto acima no seguinte lema.

Lema 1.2.2 *Dado o conjunto (1.15), existe um vetor T e uma matriz α tal que o conjunto (1.16) está no ortogonal não-negativo de um subespaço de dimensão d, i.e.*

$$Con\{e_1, \dots, e_d\} \supset \alpha^{*-1}(Q_j + T) \geq 0, \ j = 1, \dots, s. \tag{1.17}$$

Demonstração: Pelo comentário acima podemos obter T_1 e uma matriz α tal que os pontos $Q'_j = \alpha^{*-1}(Q_j + T_1), \ j = 1, \dots, s$ estão no subespaço gerado pelos vetores $e_1, \dots, e_d$, onde e_j é o j-ésimo vetor unitário de $\mathbb{R}^n$. Sejam $r_k = \min q'_{kj}$ com $j = 1, \dots, s, \ k = 1, \dots, d$ e $R = (r_1, \dots, r_d, 0, \dots, 0)$; então $Q'_j - R \geq 0, \ j = 1, \dots, s$. Tomando $T = T_1 - \alpha^* R$, temos

$$\alpha^{*-1}(Q_j + T) = \alpha^{*-1}Q_j + \alpha^{*-1}(T_1 - \alpha^* R) = \alpha^{*-1}(Q_j + T_1) - R,$$

como R está subespaço gerado por $e_1, \dots, e_d$ e $Q_j - R \geq 0 \subset Con\{e_1, \dots, e_d\}$, assim completamos a demonstração. $\square$

Lema 1.2.3 *Sejam um subconjunto finito $\widetilde{S} = S \cup \{Q_{s+1}, \dots, Q_t\}$ onde S é o subconjunto fronteira (1.15), existem um vetor $\widetilde{T}$ e uma matriz $\widetilde{\alpha}$ tal que*

$$\widetilde{\alpha}^{*-1}(Q_j + \widetilde{T}) \geq 0, \ j = 1, \dots, t, \tag{1.18}$$

e o conjunto $\widetilde{\alpha}^{*-1}(S + \widetilde{T}) \subset Con\{e_1, \dots, e_d\}$.

Demonstração: Pelo Lema 1.2.2 existem um vetor T e uma matriz α satisfazendo as inequações (1.17). Seja $U(\widetilde{S}, S)$ o cone normal do subconjunto fronteira S do conjunto $\widetilde{S}$. A aplicação da transformação $Q' = \alpha^{*-1}(Q+T)$ no conjunto $\widetilde{S}$ denotamos por $\widetilde{S}'$ e no conjunto S por S', assim

$$U' = U(\widetilde{S}', S') = \alpha U(\widetilde{S}, S).$$

Se $R' = (r'_1, \ldots, r'_n) \in U'$, pela relação (1.8), obtemos

$$r'_1 = \ldots = r'_n = 0,\ \langle R', Q'_k \rangle < 0,\ k = s+1, \ldots, t. \tag{1.19}$$

No hiperplano $\langle R', Q' \rangle = 0$ escolhemos uma base $V_i, \ldots, V_{n-1}$ com $V_j = e_j,\ j = 1, \ldots, d$. Então para cada ponto Q' existem únicos $\omega_j,\ j = 1, \ldots, n-1$, tal que $Q' = \sum_{j=1}^{n-1} \omega_j V_j$. No hiperplano $H' = \{Q' :\ \langle R', Q' \rangle = -1\}$ tomamos o ponto Q'_0 como a origem. Daí, cada ponto $Q' \in H$ tem a forma

$$Q' = Q'_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \omega_j V_j. \tag{1.20}$$

Agora através de cada ponto $Q'_k \in \widetilde{S}' \backslash S'$ traçamos o raio $\lambda Q'_k,\ \lambda \geq 0$. De acordo com (1.19), o raio $\lambda Q'_k$ intercepta o hiperplano H' nos pontos que

$$\lambda = \lambda_k = -\langle R', Q'_k \rangle^{-1} > 0,\ k = s+1, \ldots, t.$$

Notemos que o conjunto $\widetilde{S}'$ está na envoltória cônica dos vetores $e_1, \ldots, e_d, \lambda_{s+1} Q'_{s+1}, \ldots, \lambda_t Q'_t$. Mas $\lambda_k Q'_k \in H'$, por (1.20) temos

$$\lambda_k Q'_k = Q'_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{kj} V_j,\ k = s+1, \ldots, t.$$

Tomando

$$\tau_j \leq \min_{s<k\leq t} \omega_{kj},\ j = 1, \ldots, n-1,$$

e

$$V_n = Q'_0 - \sum_{j=1}^{n-1} \tau_j V_j,$$

segue-se que o conjunto $\widetilde{S}'$ está na envoltória cônica de $V_1, \dots, V_n$. Sejam a matriz e a transformação linear

$$\beta^* = (V_1 \dots V_n), \quad Q'' = \beta^{*-1} Q',$$

e considerando

$$\widetilde{\alpha} = \beta\alpha \text{ e } \widetilde{T} = \beta^* T,$$

obtemos a solução do Lema. □

1.3 Curvas assintóticas

Sejam ξ e η duas curvas em $\mathbb{R}^n$ parametrizadas por um parâmetro τ, i.e.,

$$\xi(\tau) = (\xi_1(\tau), \dots, \xi_n(\tau)) \text{ e } \eta(\tau) = (\eta_1(\tau), \dots, \eta_n(\tau)).$$

Definição 1.3.1 *Dizemos que as curvas ξ e η são assintóticas uma da outra numa vizinhança do ponto $X^0 \in \mathbb{R}^n$, se $\xi_i(\tau) \to x_i^0$ e $\xi_i(\tau) = \eta_i(\tau)(1 + o(1)),\ i = 1, \dots, n$, quando $\tau \to \infty$, i.e., $\lim\limits_{\tau\to\infty} \dfrac{\xi_i(\tau)}{\eta_i(\tau)} = 1,\ i = 1, \dots, n$.*

O termo $o(1)$ está definido no Apêndice A. Temos da definição que as curvas tendem uma para outra quando uma delas tende para X^0 (ver a figura (1.12)).

Definição 1.3.2 *A ordem de uma função escalar $\xi(\tau),\ \tau \in (\tau_0, \infty)$ é o número*

$$p = \lim_{\tau\to\infty} \frac{\log|\xi(\tau)|}{\log\tau}$$

se o limite existe e é finito.

Figura 1.12: Comportamento de curvas assintóticas.

Quando a ordem p é positivo ($p > 0$), temos que $|\xi(\tau)| \to \infty$ e quando $p < 0$ a função $|\xi(\tau)|$ tende para zero.

De mesmo modo, definimos a ordem de uma curva vetorial $\Xi(\tau) = (\xi_1(\tau), \cdots, \xi_n(\tau))$ sendo o vetor $P = (p_1, \ldots, p_n)$ onde p_i é a ordem de $\xi_i(\tau)$.

Exemplo 1.3.1 *:* A função dada por $\xi(\tau) = b\tau^{\mu}$ (e também $\xi(\tau) = b\tau^{\mu}(1 + o(1))$) tem ordem $p = \mu$, visto que

$$p = \lim_{\tau\to\infty} \frac{\log|b\tau^{\mu}|}{\log\tau} = \lim_{\tau\to\infty}\left(\frac{\log|b|}{\log\tau} + \mu\frac{\log|\tau|}{\log\tau}\right) = \mu.$$

1.4 Truncamentos de funções

Chamaremos o vetor $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, onde $q_i \in \mathbb{R}$, o *(vetor) expoente ou potência* do monômio

$$X^Q = x_1^{q_1} x_2^{q_2} \ldots x_n^{q_n}.$$

Consideraremos sempre que $X \in \mathbb{R}^n$.

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto discreto. Consideremos a função dada por

$$f(X) = \sum f_Q X^Q, \quad Q \in S, \tag{1.21}$$

onde os coeficientes f_Q da soma são números reais ou complexos. Assumimos que cada vetor potência Q corresponde a um único termo $f_Q X^Q$ com $f_Q \neq 0$. Desta forma, dizemos que o conjunto S é o *suporte da função (1.21).*

Definição 1.4.1 *A envoltória convexa externa do conjunto S é dita poliedro de Newton da função f, e denotaremos por $\Gamma(f)$.*

De acordo com a definição (1.1.4) vimos que a fronteira $\partial\Gamma$ consiste de faces $\Gamma_j^{(d)}$; e que para cada face $\Gamma_j^{(d)}$ corresponde um subconjunto fronteira $S_j^{(d)}$, um cone tangente $T_j^{(d)}$ e um cone normal $U_j^{(d)}$. Se $P \in U_j^{(d)}$, então $S_P = S_j^{(d)}$. Para cada subconjunto fronteira $S_j^{(d)}$ do conjunto S existe uma correspondente subsoma

$$\widehat{f}_P = \hat{f}_j^{(d)} = \sum f_Q X^Q, \quad Q \in S_j^{(d)} \tag{1.22}$$

da função (1.21), que chamaremos de *truncamento da função (1.21) com respeito a ordem P.*

Exemplo 1.4.1 *:* Seja

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 x_3.$$

Temos que o suporte da função f é dado por $S = \{Q_1 = (2,0,0), Q_2 = (0,2,0), Q_3 = (0,0,2), Q_4 = (1,1,1)\}$ e que o poliedro de Newton da função f é o tetraedro, cujos vértices são os pontos de S. Para $P_1 = (1,1,1)$, obtemos que

$$S_{P_1} = Q_4 = S_4^{(0)},$$

assim

$$\widehat{f}_{P_1} = x_1 x_2 x_3.$$

Para $P_2 = (-1,-1,-1)$, obtemos que

$$S_{P_2} = \{Q_1, Q_2, Q_3\} = S_1^{(2)},$$

assim

$$\widehat{f}_{P_2} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

De modo análogo, temos também que

$$\widehat{f}_{P_3} = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2x_3, \text{ se } P_3 = (1,0,0).$$

Tomando $x_i = \tau^{p_i},\ i = 1, \ldots, n$, na potência X^Q, tem-se

$$X^Q = \tau^{p_1q_1+\ldots+p_nq_n} = \tau^{\langle P,Q\rangle},$$

logo a função (1.21) toma a forma

$$f(\tau^{p_1}, \ldots, \tau^{p_n}) = \sum f_Q \tau^{\langle P,Q\rangle},\ Q \in S. \tag{1.23}$$

Comentário 1.4.1 *Os truncamentos no Exemplo (1.4.1) são diferentes para duas ordens $P_1 = (-1,-1,-1)$ e $P_2 = (1,1,1)$ que diferem apenas pelo sinal. Esta diferença se dá, pois se tomarmos a curva assintótica da forma*

$$x_1 = b_1\tau(1 + o(1)), \quad x_2 = b_2\tau(1 + o(1)), \quad x_3 = b_3\tau(1 + o(1))$$

cuja ordem é o vetor P_2, temos que quando $\tau \to \infty$, implica $x_1, x_2, x_3 \to \infty$. Porém o vetor P_1 corresponde a curva

$$x_1 = b_1\tau^{-1}(1 + o(1)), \quad x_2 = b_2\tau^{-1}(1 + o(1)), \quad x_3 = b_3\tau^{-1}(1 + o(1))$$

e $x_1, x_2, x_3 \to 0$, quando $\tau \to \infty$.

Propriedades 1.4.1 *(i) $\widehat{f}_P$ é homogênea com respeito a ordem P, i.e.,*

$$\widehat{f}_P(b_1\tau^{p_1}, \ldots, b_n\tau^{p_n}) = \widehat{f}_P(b_1, \ldots, b_n)\tau^{c_P},$$

onde $c_P = \sup\limits_{Q\in S}\langle P, Q\rangle$.

(ii) Se $\widehat{f}_P(b_1, \ldots, b_n) \neq 0$ *então*

$$\widehat{f}_P(b_1\tau^{p_1}(1+o(1)), \ldots, b_n\tau^{p_n}(1+o(1))) = \widehat{f}_P(b_1, \ldots, b_n)\tau^{c_P} + o(1)\tau^{c_P}.$$

(iii) $f_P(b_1\tau^{p_1}(1+o(1)), \ldots, b_n\tau^{p_n}(1+o(1))) = \widehat{f}_P(b_1, \ldots, b_n)\tau^{c_P} + o(1)\tau^{c_P}.$

Demonstração: *(i)* Basta observar que para $Q \in S_P$ tem-se $\langle P, Q\rangle = c_P$.

(ii) Usando as propriedades B e C do Apêndice A, segue que $o(1)^\mu \equiv o(1)$, para todo $\mu > 0$ e $\mu o(1) \equiv o(1)$, para todo $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, e como

$$\begin{aligned}\widehat{f}_P(b_1\tau^{p_1}(1+o(1)), \ldots, b_n\tau^{p_n}(1+o(1))) &= \widehat{f}_P(b_1\tau^{p_1}, \ldots, b_n\tau^{p_n}) + \\ &+ \widehat{f}_P(b_1\tau^{p_1}o(1), \ldots, b_n\tau^{p_n}o(1)),\end{aligned}$$

tem-se o resultado por *(i)*.

(iii) Pela equação (1.23), temos que

$$f(b_1\tau^{p_1}(1+o(1)), \ldots, b_n\tau^{p_n}(1+o(1))) = \sum_{Q\in S} f_Q B^Q \tau^{\langle P,Q\rangle}(1+o(1)), \tag{1.24}$$

dividindo o somatório do lado direito da equação (1.24), de tal forma que um somatório tenha $Q \in S_P$ e o outro $Q \in S/S_P$, assim

$$\begin{aligned}f(b_1\tau^{p_1}(1+o(1)), \ldots, b_n\tau^{p_n}(1+o(1))) &= \sum_{Q\in S_P} f_Q B^Q \tau^{\langle P,Q\rangle}(1+o(1)) + \\ &\quad \sum_{Q\in S/S_P} f_Q B^Q \tau^{\langle P,Q\rangle}(1+o(1)).\end{aligned}$$

Afirmamos que $\displaystyle\sum_{Q\in S/S_P} f_Q B^Q \tau^{\langle P,Q\rangle}(1+o(1)) = o(1)\tau^{c_P}$. Com efeito,

$$\sum_{Q\in S/S_P} f_Q B^Q \tau^{\langle P,Q\rangle} = o(1)(\tau^{c_P} - \sum_{Q\in S/S_P} f_Q B^Q \tau^{\langle P,Q\rangle}),$$

o que equivale a dizer

$$o(1) = \frac{\displaystyle\sum_{Q\in S/S_P} f_Q B^Q \tau^{\langle P,Q\rangle}}{\tau^{c_P} - \displaystyle\sum_{Q\in S/S_P} f_Q B^Q \tau^{\langle P,Q\rangle}} = \frac{\displaystyle\sum_{Q\in S/S_P} f_Q B^Q \tau^{\langle P,Q\rangle - c_P}}{1 - \displaystyle\sum_{Q\in S/S_P} f_Q B^Q \tau^{\langle P,Q\rangle - c_P}},$$

lembrando que $c_P = \sup\limits_{R\in S}\langle P, R\rangle > \langle P, Q\rangle$ para todo $Q \in S/S_P$, verifica-se a afirmação.

Desta forma, segue-se da equação (1.24),

$$\begin{aligned}
f(b_1\tau^{p_1}(1+o(1)),\ldots,b_n\tau^{p_n}(1+o(1))) &= \sum_{Q\in S_P} f_Q B^Q \tau^{\langle P,Q\rangle}(1+o(1)) + o(1)\tau^{c_P} \\
&= \widehat{f}_P(b_1\tau^{p_1}(1+o(1)),\ldots,b_n\tau^{p_n}(1+o(1))) \\
&\quad +o(1)\tau^{c_P} \\
&= \widehat{f}_P(b_1,\ldots,b_n)\tau^{c_P} + o(1)\tau^{c_P} + o(1)\tau^{c_P} \\
&= \widehat{f}_P(b_1,\ldots,b_n)\tau^{c_P} + o(1)\tau^{c_P}.
\end{aligned}$$

$\square$

Observemos que a propriedade *(iii)* expressa a essência do truncamento: a partir de $\widehat{f}$ determinamos o comportamento assintótico da função f sobre uma curva de ordem P.

Teorema 1.4.1 *Se a curva*

$$x_i = b_i\tau^{p_i}(1+o(1)), \quad i = 1,\ldots,n, \tag{1.25}$$

com $P = (p_1,\ldots,p_n) \neq 0$ é uma solução da equação $f(X) = 0$, então

$$x_i = b_i\tau^{p_i}, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{1.26}$$

é uma solução da equação truncada correspondente $\widehat{f}_P(X) = 0$.

Demonstração: A prova segue das propriedades do truncamento. $\square$

Do Teorema 1.4.1 obtemos que o vetor coeficiente $B = (b_1,\ldots,b_n)$ de uma solução da equação $f(X) = 0$ deve ser uma raiz da equação $\widehat{f}_P(B) = 0$. Isto sugere uma condição na procura de soluções assintóticas expandidas (1.25) (ou locais (1.26)) para a equação $f(X) = 0$.

Capítulo 2

Soluções assintóticas para sistemas de EDOs

2.1 Definições e forma normal

Consideremos o sistema autônomo de n-equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &\equiv \dot{x}_1 = \varphi_1(x_1, \cdots, x_n) \\
\frac{dx_2}{dt} &\equiv \dot{x}_2 = \varphi_2(x_1, \cdots, x_n) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &\equiv \dot{x}_n = \varphi_n(x_1, \cdots, x_n),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

onde φ_i são funções reais analíticas numa vizinhança da origem. Tomando-se $X = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\Phi(X) = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, temos o sistema (2.1) na forma vetorial

$$\dot{X} = \Phi(X), \tag{2.2}$$

Definição 2.1.1 *Uma solução do sistema é uma função vetorial $X(t)$ que satisfaz (2.2) com curva integral $X = \Xi(\tau)$ onde τ é a parametrização da curva. A curva integral satisfaz o sistema (2.2) com a substituição de variável $\tau = \tau(t)$.*

Uma curva integral $X = \Xi(\tau)$ é dita trivial se $\Phi(\Xi(\tau)) = 0$, curvas integrais que não satisfazem esta propriedade são ditas não triviais.

Se $\Phi(X^0) \neq 0$ então X^0 é dito um ponto simples ou regular do sistema (2.2), se $\Phi(X^0) = 0$ então X^0 é dito um ponto singular ou de equilíbrio.

Nosso estudo será realizado numa vizinhança de um equilíbrio X^0, visto que numa vizinhança de um ponto regular (ou ponto simples) pelo Teorema do Fluxo Tubular existe uma mudança de variáveis

$$x_i = \xi_i(Y), \qquad \xi_i^0(0) = X^0, \qquad Y = (y_1, \cdots, y_n)$$

tal que o sistema (2.1) é transformado em

$$\dot{y}_1 = 1, \qquad \dot{y}_j = 0 \qquad j = 2, \cdots, n,$$

e desta forma o fluxo é bastante simples.

Quando X^0 é um ponto de equilíbrio do sistema (2.2) então pela translação $X = X^0 + \widetilde{X}$ próximo do ponto X^0 e desenvolvendo em série de Taylor a função $\Phi(X)$ nos dá

$$\begin{array}{rcl} \Phi(X) & = & \Phi(X^0) + D\Phi(X^0)(X - X^0) + \widetilde{\Phi}(\widetilde{X}) \\ & = & D\Phi(X^0)\widetilde{X} + \widetilde{\Phi}(\widetilde{X}), \end{array}.$$

Assim o sistema (2.2) numa vizinhança do equilíbrio X^0 é equivalente ao sistema

$$\dot{\widetilde{X}} = D\Phi(X^0)\widetilde{X} + \widetilde{\Phi}(\widetilde{X}) \tag{2.3}$$

onde $\lim\limits_{|\widetilde{X}| \to 0} \dfrac{\widetilde{\Phi}(\widetilde{X})}{|\widetilde{X}|} = 0$, isto é, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta_\epsilon > 0$, tal que $|\widetilde{\Phi}(\widetilde{X})| < \epsilon|\widetilde{X}|$ sempre que $|\widetilde{X}| < \delta_\epsilon$.

Seja $chapeu\Phi(\widetilde{X}) = \widetilde{\Phi}(\widetilde{X})|\widetilde{X}|$, então $\widehat{\Phi} = o(|\widetilde{X}|^2)$, visto que

$$\left|\frac{\widehat{\Phi}(\widetilde{X})}{|\widetilde{X}|^2}\right| < \left|\frac{\widetilde{\Phi}(\widetilde{X})}{|\widetilde{X}|}\right| < \epsilon \text{ sempre que } |\widetilde{X}| < \delta_\epsilon.$$

Fazendo $A = D\Phi(X^0)$ e escrevendo simplesmente X ao invés de $\widetilde{X}$ para não sobrecarregar a notação, temos que o sistema (2.2), para X próximo de X^0, assume a forma (2.3) ou simplesmente

$$\dot{X} = AX + \widetilde{\Phi}(X). \tag{2.4}$$

Uma pergunta natural surge: se é possível simplificar o sistema (2.4) através de uma mudança invertível de coordenadas que aplica o equilíbrio nele próprio? Ou seja, é possível obter um sistema de equações diferenciais ordinárias mais simples do que (2.4) na forma

$$\dot{Y} = CY + \Psi(Y), \quad \text{com} \quad \Psi(0) = 0 \tag{2.5}$$

por uma mudança de coordenadas da forma

$$X = BY + \Xi(Y), \quad \text{com} \quad \Xi(0) = 0 \tag{2.6}$$

onde B é uma matriz inversível $n \times n$ e Ξ consiste de uma série de potência somente com termos não lineares.

Vejamos como responder a questão no caso, consideravelmente mais simples, quando o sistema (2.1) é linear.

Sabemos que qualquer matriz é semelhante a uma matriz de Jordan J, isto é, existe uma matriz não-singular P tal que $J = P^{-1}AP$. Toda matriz de Jordan J é escrita da forma $J = diag(J_1, \cdots, J_s)$ onde

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma_i & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_i & \lambda_i \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

onde $\lambda_1, \cdots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ são os autovalores de A e $\sigma_i = 1$ ou 0.

Assim, tomando a mudança em (2.6) por

$$X = PY$$

temos

$$\dot{X} = P\dot{Y} \Longrightarrow \dot{Y} = P^{-1}\dot{X} = P^{-1}AX = P^{-1}APY = JY \Longrightarrow \dot{Y} = JY.$$

Logo

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1 \\ \dot{y}_i &= \lambda_i y_i + \sigma_i y_{i-1} \qquad\qquad i = 2, \cdots, n, \end{aligned}$$

o qual é relativamente simples em relação ao sistema inicial $\dot{X} = AX$.

Supondo que a matriz A da equação (2.4) está na forma de Jordan, adotemos as seguintes notações :

(a) $\Lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ com λ_i elementos da diagonal de A, i.e., os autovalores de A;

(b) $\psi_j = y_j g_j(Y) \ \equiv \ y_j \sum_{Q \in N_j} g_{jQ} Y^Q, \quad j = 1, \cdots, n$ onde $Q = (q_1, \cdots, q_n)$ e $Y^Q = y_1^{q_1}, \cdots, y_n^{q_n}$. Sendo

$$N_j = \{Q \in \mathbb{Z}^n;\ q_j \geq -1,\ q_k \geq 0\ (k \neq j),\ ||Q|| \geq 0\}$$

com $||Q|| = q_1 + \cdots + q_n$. Então $y_j g_j$ são séries de potência sem termos constantes e lineares;

(c) $\varphi_i(X) = x_i f_i \ \equiv \ x_i \sum f_{iQ} X^Q$;

(d) $\xi_i(Y) = y_i h_i \ \equiv \ y_i \sum h_{iQ} Y^Q$.

Definição 2.1.2 *O sistema formal (2.5) é dito que está na forma normal se* $g_{iQ} = 0$ *para todo* $\langle Q, \Lambda \rangle \neq 0$, *i.e.,*

$$\psi_j = y_j \sum_{\langle Q, \Lambda \rangle = 0} g_{jQ} Y^Q, \qquad\qquad j = 1, \cdots, n$$

Dizemos que os termos $y_j g_{jQ} Y^Q$ com $\langle Q, \lambda \rangle = 0$ são termos resonantes. Assim, a forma normal é um sistema (2.5), onde a parte não -linear consiste somente dos termos resonantes.

Teorema 2.1.1 *Existe uma transformação formal de coordenadas*

$$x_i = y_i + \xi_i(Y), \qquad i = 1, \cdots, n \tag{2.8}$$

tal que o sistema de equações diferenciais formal

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + \sigma_i x_{i-1} + \varphi_i(X), \qquad i = 1, \cdots, n \tag{2.9}$$

torna-se num sistema na forma normal

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + \sigma_i y_{i-1} + \psi_i(Y), \qquad i = 1, \cdots, n \tag{2.10}$$

onde $g_{iQ} = 0$ se $\langle Q, \Lambda \rangle \neq 0$. E se os coeficientes h_{iQ} para os quais $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$ são dados arbitrariamente, então h_{iQ} e g_{iQ} estão unicamente determinados.

Demonstração: Derivando (2.8) e igualando a (2.9) obtemos

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (y_i + \xi_i)}{\partial y_j} \dot{y}_j = \lambda_i x_i + \sigma_i x_{i-1} + \varphi_i(X).$$

Levando em conta (2.10) segue que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (y_i + \xi_i)}{\partial y_j} [\lambda_j y_i + y_{j-1} + \psi_j(Y)] = \lambda_i (y_i + \xi_i(Y)) + \sigma_i [y_{i-1} + \varepsilon_{i-1}(Y)] + \varphi_i(Y + \Xi(Y)).$$

Daí

$$\begin{aligned} \lambda_i y_i + \sigma_i y_{i-1} \quad &+ \quad \psi_i(Y) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial y_j} [\lambda_j y_j + \sigma_j y_{j-1} + \psi_j(Y)] = \\ &\lambda_i y_i + \lambda_i \xi_i(Y) + \sigma_i y_{i-1} + \sigma_i \varepsilon_{i-1}(Y) + \varphi_i(Y + \Xi(Y)) \end{aligned}$$

então

$$\lambda_i y_i + \sigma_i y_{i-1} \quad + \quad y_i g_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(y_i h_i)}{\partial y_j}[\lambda_j y_j + \sigma_j y_{j-1} + y_j g_j] =$$
$$\lambda_i y_i + \lambda_i y_i h_i + \sigma_i y_{i-1} + \sigma_i y_{i-1} h_{i-1} + \varphi_i(y_1 + y_1 h_1, \cdots, y_n + y_n h_n).$$

Agrupando e reorganizando os termos, obtemos

$$y_i g_i + y_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial y_j}\lambda_j y_j \quad = \quad -h_i\sigma_i y_{i-1} - h_i y_i g_i - y_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial y_j} y_j g_j - y_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial y_j}\sigma_j y_{j-1}$$
$$+ \quad \sigma_i y_{i-1} h_{i-1} + \varphi_i(y_1 + y_1 h_1, \cdots, y_n + y_n h_n). \qquad (2.11)$$

Considerando os coeficientes de $y_i Y^Q$ na i-ésima equação (2.11), temos

$$g_{iQ} + h_{iQ}\langle Q, \Lambda\rangle \quad = \quad -\sigma_i h_{i(Q-e_{i-1})} - \sum_{P+R=Q} h_{iP} g_{iR} - \sum_{P+R=Q} h_{iP} \sum_{j=1}^{n} p_j g_{jR} -$$
$$- \quad \sum_{j=1}^{n} h_{i(Q-e_{i-1})}(q_j + 1)\sigma_j + \sigma_i h_{(i-1)(Q-e_{i-1})} + \{\varphi_i\}_Q, \qquad (2.12)$$
$$Q \in N_i, \quad i = 1, \cdots, n,$$

onde e_{i-1} é o $(i-1)$-ésimo vetor unitário e $\{\varphi_i\}_Q$ são os coeficientes de $y_i Y^Q$ na série $\varphi_i(Y + \Xi)$.

Podemos colocar uma ordem sobre os vetores reais n-dimensionais da seguinte forma: um vetor P precede um vetor Q, $''P < Q''$ se a primeira diferença não nula do seguinte conjunto $\{||Q|| - ||P||,\ q_1 - p_1, \cdots, q_{n-1} - p_{n-1}\}$ é positiva.

Lembrando que $||Q|| = q_1 +, \cdots, +q_n$ e que $N = N_1 \cup \ldots \cup N_n$ com $N_j = \{Q \mid q_j \geq -1,\ q_k \geq 0\ (k \neq j),\ ||Q|| \geq 0\}$, observa-se que para cada $Q \in N$, existe somente um número finito de elementos em N que precede Q. Assim, no lado direito da equação (2.12), h_{iP} e g_{jR} são tomados apropriados tal que os vetores P e R precedem o vetor Q. Isto é sempre correto para a primeira, quarta e quinta parcela da soma do lado direto de (2.12), pois $Q - e_{(i-1)}$ precede Q, já a segunda e terceira parcelas basta que

$||P|| + ||R|| = ||Q||$ e $||P||, ||R|| > 0$, assim $||P||, ||R|| < ||Q||$, logo P e R precedem Q. Finalmente, a sexta parcela, $\{\varphi_i\}_Q$ contem somente h_{jP} tais que, $||P|| < ||Q||$, pois a série não contém termos lineares.

Seja c_{iQ} o lado direito da equação (2.12). Pela ordem implantada temos que

$$g_{iQ} + h_{iQ}\langle Q, \Lambda\rangle = c_{iQ}, \qquad Q \in N_i \tag{2.13}$$

são unicamente determinados.

Podemos resolver a equação (2.13) assim:

Se $\langle Q, \Lambda\rangle \neq 0$, então $g_{iQ} = 0$ e $h_{iQ} = c_{iQ}/\langle Q, \Lambda\rangle$;

Se $\langle Q, \Lambda\rangle = 0$, então $g_{iQ} = c_{iQ}$ e h_{iQ} é arbitrário.

Isto é, os coeficientes g_{iQ} são diferentes de zero somente para os vetores resonantes a Q, justamente como o teorema sugere. □

Exemplo 2.1.1 (Caso unidimensional $n = 1$) *:* Consideremos a equação

$$\dot{x} = \lambda x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots \tag{2.14}$$

com $\lambda \neq 0,\ x \in \mathbb{R}$. Introduzimos uma transformação formal

$$x = y + \alpha_2y^2 + \alpha_3y^3 + \ldots \tag{2.15}$$

onde $\alpha_2 = \dfrac{a_2}{\lambda}$ e $\alpha_3 = \dfrac{a_2^2}{\lambda} + \dfrac{a_3}{2\lambda}$. Diferenciando (2.15) e substituindo em (2.14), segue

$$\dot{y}(1 + 2\alpha_2y + 3\alpha_3y^2 + \ldots) = \lambda y + (\lambda\alpha_2 + a_2)y^2 + (\lambda\alpha_3 + 2\alpha_2a_2 + a_3)y^3 + \ldots$$

Donde

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \lambda y + (a_2 - \lambda\alpha_2)y^2 + (a_3 + 2\lambda\alpha_2^2 - 2\lambda\alpha_3)y^3 + \ldots \\ &= \lambda y + \ldots \end{aligned}$$

logo é obtido uma normalização de 3^o grau para a equação (2.14).

2.2 Soluções assintóticas para sistemas de EDOs

Consideremos os sistemas autônomo de equações diferenciais ordinárias (2.1) na forma vetorial (2.4) definido na vizinhança de um ponto de equilíbrio X_0.

Seja o número inteiro d, $0 \leq d < n$. Suponhamos, agora, que o sistema (2.1) é da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \varphi_i(X), & i &= 1, \cdots, d \\ \dot{x}_j &= x_j f_j(X), & j &= d+1, \cdots, n. \end{aligned} \tag{2.16}$$

onde φ_i e f_j são funções num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$.

Comentário 2.2.1 *Este sistema tem $(n-d)$-hiperplanos invariantes*

$$x_j = 0, \quad j = d+1, \ldots, n. \tag{2.17}$$

Sua intersecção

$$x_{d+1} = \ldots = x_n = 0 \tag{2.18}$$

é também um subespaço invariante.

Deste comentário escrevemos a segunda equação de (2.16), na forma logarítmica, isto é

$$\frac{d}{dt}(\log x_j) = f_j(X), \qquad j = d+1, \cdots, n.$$

Tomando $X = (X', X'')$, com $X' = (x_1, \ldots, x_d)$ e $X'' = (x_{d+1}, \ldots, x_n)$ e denotando $\log X = (\log x_1, \ldots, \log x_n)$ o sistema vetorial (2.16) assume a forma

$$\begin{aligned} \dot{X}' &= \Phi'(X) \\ \frac{d}{dt}(\log X'') &= F''(X) \end{aligned} \tag{2.19}$$

onde $F'' = (f_{d+1}, \cdots, f_n)$ e $\Phi(X) = (\Phi'(X), \Phi''(X)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ com $\Phi'(X) = (\varphi_1(X), \ldots, \varphi_d(X))$ e $\Phi''(X) \equiv 0$.

Notemos que quando $X'' = 0$ os pontos da forma $X = (X', 0)$ estão no subespaço invariante (2.18), denotemos $X = (X', 0) \equiv X'$ e também

$$\begin{aligned} \dot{X}' &= \Phi'(X', 0) \equiv \widehat{\Phi}'(X') \\ \frac{d}{dt}(\log X'') &= F''(X', 0) \equiv \widehat{F}''(X'). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Pela substituição $X = X^0 + \widetilde{X}$, escrevemos a primeira equação do sistema (2.19) na seguinte forma

$$\dot{x}_i = D\varphi_i(X^0)X + \widetilde{\varphi}_i(X) \qquad i = 1, \cdots, d \tag{2.21}$$

onde $\widetilde{\varphi}_i(X)$ é o resto da fórmula de Taylor. Sendo $\widetilde{\Phi}(X) = \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}_1(X) \\ \vdots \\ \widetilde{\varphi}_d(X) \end{pmatrix}$ o sistema (2.21) é equivalente a

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(X^0) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_d}(X^0) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{d+1}}(X^0) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(X^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_d}{\partial x_1}(X^0) & \dots & \frac{\partial \varphi_d}{\partial x_d}(X^0) & \frac{\partial \varphi_d}{\partial x_{d+1}}(X^0) & \dots & \frac{\partial \varphi_d}{\partial x_n}(X^0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \\ x_{d+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
$$+ \quad \widetilde{\Phi}(X),$$

fazendo $D_{X'}\varphi_i(X^0) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_d}\right)$ e $D_{X''}\varphi_i(X^0) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{d+1}}, \cdots, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n}\right)$, $\quad i = 1, \cdots, d$, o sistema acima é equivalente a

$$\dot{X}' = \begin{pmatrix} D_{X'}\varphi_1(X^0) & D_{X''}\varphi_1(X^0) \\ \vdots & \vdots \\ D_{X'}\varphi_d(X^0) & D_{X''}\varphi_d(X^0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ \\ X'' \end{pmatrix} + \widetilde{\Phi}(X).$$

Das outras $n - d$ equações do sistema (2.19), desenvolvendo a função $F''(X)$, definida na equação (2.20), em série de Taylor em torno do ponto X^0, tem-se

$$\frac{d}{dt}\log X'' = F''(X^0) + DF''(X^0)(X - X^0) + \dots$$

fazendo-se $\widetilde{F}''(X) = DF''(X^0)(X - X^0) + \ldots$ e $\Lambda'' = F''(X^0)$ e introduzindo as notações

$$A_{11} = \begin{pmatrix} D_{X'}\varphi_1(X^0) \\ \vdots \\ D_{X'}\varphi_d(X^0) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_{12} = \begin{pmatrix} D_{X''}\varphi_1(X^0) \\ \vdots \\ D_{X''}\varphi_d(X^0) \end{pmatrix},$$

segue-se que o sistema (2.19) numa vizinhança do ponto X^0 é equivalente ao sistema

$$\begin{aligned} \dot{X}' &= A_{11}X' + A_{12}X'' + \widetilde{\Phi}(X), \\ \frac{d}{dt}\log X'' &= \Lambda'' + \widetilde{F}''(X). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Comparando os sistema (2.1) com (2.19) e suas equações vetoriais, respectivamente (2.4) com (2.22), temos

$$A = D\Phi(X^0) = \begin{pmatrix} & A_{11} & & & A_{12} & \\ \frac{\partial \varphi_{d+1}}{\partial x_1}(X^0) & \ldots & \frac{\partial \varphi_{d+1}}{\partial x_d}(X^0) & \frac{\partial \varphi_{d+1}}{\partial x_{d+1}}(X^0) & \ldots & \frac{\partial \varphi_{d+1}}{\partial x_n}(X^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(X^0) & \ldots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_d}(X^0) & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{d+1}}(X^0) & \ldots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(X^0) \end{pmatrix}$$

Mas,

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(X^0) = \begin{cases} x_j \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X^0), & 1 \leq i \leq d \\ f_j(X^0) + x_j \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X^0), & i = j \\ x_j \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X^0), & i \neq j \quad \text{e} \quad d+1 \leq j \leq n \end{cases}$$

quando $X^0 = (X^{0'}, 0)$, isto é, $x_{d+1} = \ldots = x_n = 0$ temos

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ & \\ f_j(X^0), & i = j \end{cases} \quad d+1 \leq j \leq n$$

portanto $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ onde $A_{22} = \operatorname{diag}\left(f_{d+1}(X^0), \cdots, f_n(X^0)\right)$.

Notemos que os valores $\lambda_j = f_j(X^0),\ j = d+1, \cdots, n$ são autovalores da matriz A.

Definição 2.2.1 *Uma curva integral $X = \Xi(\tau)$ do sistema (2.22) que tende para o ponto de equilíbrio $X^0 = 0$ quando $\tau \to +\infty$ e tal que as $(n-d)$-últimas componentes de $\Xi(\tau)$ são diferentes de zero para todo $\tau \geq \tau_0$, a chamaremos de curva h-assintótica.*

Pelo Comentário 2.2.1, se alguma componente $x_i(\tau) = 0$, para algum $i = d+1, \ldots, n$ e algum τ, então a curva estará no hiperplano invariante (2.17), isto é, $x_i(\tau) \equiv 0$, para todo $\tau \geq \tau_0$. Conseqüentemente uma curva integral h-assintótica $X = \Xi(\tau)$ não intercepta o subespaço invariante (2.18), mas se aproxima infinitesialmente dele.

Teorema 2.2.1 *Seja $\Lambda'' = F''(X^0) \neq 0$ no sistema (2.22) e $X = \Xi(\tau)$ uma curva integral h-assintótica não-trivial, que tem a parte $\Xi''(\tau)$ com ordem vetorial $P'' \neq 0$. Então existe $\kappa \in I\!R \backslash \{0\}$, tal que*

$$\Lambda'' = \kappa P''.$$

Demonstração: Sendo $\Lambda'' \neq 0$ então um dos números $\lambda_{d+1}, \cdots, \lambda_n$ é diferente de zero, sem perda de generalidade suponha que $\lambda_n \neq 0$. Seja $\Xi = (\xi_{d+1}, \ldots, \xi_n)$ e p_j a ordem de $\xi_j,\ j = d+1, \cdots, n$. Temos, por definição

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\log|\xi_j(\tau)|}{\log|\xi_n(\tau)|} = \frac{\lim\limits_{\tau\to\infty} (\log|\xi_j(\tau)|/\log\tau)}{\lim\limits_{\tau\to\infty} (\log|\xi_n(\tau)|/\log\tau)} = \frac{p_j}{p_n}, \qquad j = d+1, \cdots, n. \tag{2.23}$$

Por outro lado, como Ξ é uma curva integral não-trivial do sistema (2.23), então

$$\frac{d}{dt}\log|\xi_j| = \lambda_j + \widetilde{f}_j(\Xi)$$

onde $\widetilde{f}_j$ é uma componente da função vetorial $\widetilde{F}''$, mas

$$\widetilde{F}''(\Xi) \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad \Xi \to 0.$$

Assim $\widetilde{f}_j(\Xi) \longrightarrow 0$ quando cada $\xi_j \to 0$. Como $\lim_{\tau\to\infty} \xi_j = 0$, pois a curva integral é h-assintótica, tem-se

$$\frac{d}{dt}\log|\xi_j| = \lambda_j + \widetilde{f}_j(\Xi) \longrightarrow \lambda_j \quad \text{quando} \quad \tau \to \infty.$$

Usando L'Hôpital em (2.23), temos

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\log|\xi_j|}{\log|\xi_n|} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{d(\log|\xi_j|)/dt}{d(\log|\xi_n|)/dt} = \frac{\lambda_j}{\lambda_n}, \qquad j = d+1, \cdots, n,$$

isto é, $\dfrac{p_j}{p_n} = \dfrac{\lambda_j}{\lambda_n}$, $\qquad j = d+1, \cdots, n$ o que implica

$$\lambda_j = \frac{\lambda_n}{p_n} p_j, \qquad j = d+1, \cdots, n$$

tomando $\kappa = \dfrac{\lambda_n}{p_n}$ tem-se o resultado. $\square$

Corolário 2.2.1 *Seja o sistema (2.22) com $\Lambda'' \neq 0$ e uma curva integral h-assintótica não-trivial que tem a parte $\Xi''(\tau)$ com ordem vetorial $P \neq 0$, então $\Lambda'' \leq 0$ ou $\Lambda'' \geq 0$.*

Demonstração: De fato, como a curva integral h-assintótica tende para zero quando $\tau \to \infty$, isto é, $\lim_{\tau\to\infty} \xi_j(\tau) = 0$. Assim a razão

$$\frac{\log|\xi_j|}{\log \tau} \leq 0, \quad \forall j = d+1, \cdots, n$$

para τ suficientemente grande, logo

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\log|\xi_j|}{\log \tau} \leq 0, \quad j = d+1, \cdots, n.$$

Por definição , $P'' \leq 0$ e pelo Teorema 2.2 $\Lambda'' = \kappa P''$ então ou $\Lambda'' \leq 0$ ou $\Lambda'' \geq 0$, ou seja, tem sempre o mesmo sinal. $\square$

Consideremos os seguintes quatro casos do vetor $\Lambda'' = (\lambda_{d+1}, \cdots, \lambda_n)$.

$H_1)$ $\lambda_{d+1}, \cdots, \lambda_n$ são não nulos e possuem o mesmo sinal, i.e., $\Lambda'' > 0$ ou $\Lambda'' < 0$;

$H_2)$ Existem $\lambda_i \neq 0$ e $\lambda_j \neq 0$ $(i \neq j)$ de sinais diferentes, i.e., $\lambda_i = -sinal(\lambda_j)$;

$H_3)$ Existe pelo menos um $\lambda_i = 0$ e um $\lambda_j \neq 0$, porém todos $\lambda_j \neq 0$ tem o mesmo sinal, i.e., $\Lambda'' \neq 0$ e cada $\Lambda'' \geq 0$ e $\Lambda'' \not> 0$ ou $\Lambda'' \leq 0$ e $\Lambda'' \not< 0$;

$H_4)$ $\Lambda'' = 0$.

Teorema 2.2.2 *No caso H_1 o sistema (2.22) tem pelo menos uma família de $(n-d-1)$-parâmetros de curvas h-assintóticas não-trivial $X = \Xi(\tau)$ com*

$$\xi_j(\tau) = b_j \tau^{p_j}(1 + o(1)), \quad b_j \neq 0, \quad p_j = -\lambda_j/\lambda_n, \quad j = d+1, \cdots, n. \tag{2.24}$$

onde $b_n = \pm 1$ e $b_{d+1}, \cdots, b_{n-1}$ podem ser tomados como os parâmetros da família.

Demonstração: Consideremos $\Lambda'' > 0$, o que pode ser sempre obtido pela mudança de sinal no tempo t, pois na equação (2.19), $\dfrac{dx_j}{dt} = x_j f(X)$, fazendo $t = -s$ e utilizando a regra da cadeia temos

$$\frac{dx_j}{dt} = -\frac{dx_j}{ds} = x_j(s) f(X) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_j}{ds} = x_j(s)(-f(X)).$$

Tome $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ os autovalores da matriz A_{11}, reorganizados de tal forma que

$$Re\lambda_i \leq 0, \qquad i = 1, \cdots, l;$$
$$Re\lambda_j > 0, \qquad j = l+1, \cdots, d.$$

Aplicando a transformação de Jordan $X' \longrightarrow Y'$, reduzimos A_{11} para sua forma de Jordan. Temos que a matriz A do sistema (2.22) com coordenadas (Y', X'') é diagonal superior, cujos autovalores satisfazem $Re\lambda_i \leq 0$, $i = 1, \cdots, l$ e $Re\lambda_j > 0$, $j = l+1, \cdots, n$. Utilizando o Teorema de Dulak [6] o sistema (2.22) tem soluções da forma

$$y_i = \psi_i(y_{l+1}, \cdots, y_d, x_{d+1}, \cdots, x_n), \qquad i = 1, \cdots, l \tag{2.25}$$

onde a série de Taylor para ψ_i não contém constantes nem termos lineares.

Utilizando o Teorema 2.1.1, existe uma mudança de coordenadas normal

$$\begin{aligned} y_j &= z_j + \zeta_j(z_{l+1}, \cdots, z_n), \quad j = l+1, \cdots, d \\ x_k &= z_k[1 + h_k(z_{l+1}, \cdots, z_n)], \quad k = d+1, \cdots, n, \end{aligned} \tag{2.26}$$

que reduz o sistema (2.22) para a forma normal

$$\begin{aligned} \dot{z}_j &= \lambda_j z_j + \sigma_j z_{j-1} + \omega_j(z_{l+1}, \cdots, z_n), \quad j = l+1, \cdots, d \\ \dot{z}_k &= z_k[\lambda_k + p_k(z_{l+1}, \cdots, z_n)], \quad k = d+1, \cdots, n, \end{aligned} \tag{2.27}$$

onde ω_j e p_k são polinômios nas variáveis $z_{l+1}, \cdots, z_n$, sendo que p_k é o somatório de termos da forma $C_k z_{l+1}^{q_{l+1}} \ldots z_n^{q_n}$, tal que

$$q_{l+1}\lambda_{l+1} + \ldots + q_n\lambda_n = 0 \tag{2.28}$$

com $q_{l+1}, \cdots, q_n$ inteiros tal que $q_j \geq -1$ e $q_{l+1} + \ldots + q_n \geq 1$. Como todo $Re\lambda_{l+1}, \ldots, Re\lambda_n > 0$, então a equação (2.27) não tem solução , i.e., $p_k \equiv 0$.

Portanto o sistema (2.27) tem solução da forma

$$z_j = z_j(t), \quad j = l+1, \cdots, d; \quad z_k(t) = c_k e^{\lambda_k t}, \quad k = d+1, \cdots, n$$

onde c_k são constantes arbitrárias. Observe que esta solução tende para zero quando $t \to -\infty$, com efeito, $Re\lambda_k > 0, \quad k = d+1, \cdots, n$. Definimos a curva integral dada pela parametrização

$$\tau = \frac{1}{|z_n(t)|} \;\Rightarrow\; t = t(\tau) = -\frac{1}{\lambda_n} log(c_n\tau)$$

o que implica

$$\begin{aligned} z_j = z_j(t(\tau)) = z_j\left(-\frac{1}{\lambda_n} log(c_n\tau)\right) \equiv \eta_j(\tau), \quad j = l+1, \cdots, d, \\ z_k = c_k e^{\lambda_k t(\tau)} = c_k e^{-\frac{\lambda_k}{\lambda_n} log(c_n\tau)} \equiv b_k\tau^{p_k}, \quad p_k = -\lambda_k/\lambda_n, \quad k = d+1, \cdots, n, \end{aligned} \tag{2.29}$$

onde $b_n = \pm 1$ e $b_{d+1}, \cdots, b_{n-1}$ são constantes arbitrárias.

Note que a curva integral (2.29) tende para zero quando $\tau \to +\infty$. Retornando para as coordenadas Y', X'' por meio das fórmulas (2.26) e (2.25), e então para as coordenadas X por meio da inversa da transformação de Jordan $Y' \longrightarrow X'$, a curva integral (2.29) é transformada para a curva (2.24) com os mesmos valores ρ_j e b_j. $\square$

Capítulo 3

Transformações Potências

3.1 Definição e Propriedades

Definição 3.1.1 *Seja $\alpha = (\alpha_{ij})$ uma matriz quadrada de dimensão n com elementos reais α_{ij} e $\det \alpha \neq 0$. A transformação*

$$y_i = x_1^{\alpha_{i1}} \dots x_n^{\alpha_{in}}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.1}$$

é chamada transformação potência com matrix α.

A transformação inversa

$$x_i = y_1^{\beta_{i1}} \dots y_n^{\beta_{in}}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.2}$$

é também uma transformação potência com matrix $\beta = (\beta_{ij}) = \alpha^{-1}$. Se introduzirmos os vetores $\log X = (\log x_1, \dots, \log x_n)$ e $\log Y = (\log y_1, \dots, \log y_n)$, onde $X = (x_1, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, \dots, y_n)$, então as transformações potências (3.1) e (3.2) são transformações lineares destes vetores, i.e.,

$$\log Y = \alpha \log X \text{ e } \log X = \beta \log Y. \tag{3.3}$$

Propriedades 3.1.1 *Sejam as transformações (3.1) e (3.2),* *(i) Se* $X^Q = Y^{\widetilde{Q}}$*, então*

$$\widetilde{Q} = \beta^* Q \tag{3.4}$$

onde β^* *é a matriz transposta de* β.

(ii) A curva

$$x_i(\tau) = b_i \tau^{p_i}(1 + o(1)),\ b_i \neq 0,\ i = 1, \ldots, n,\ \tau \to \infty, \tag{3.5}$$

com ordem vetorial $P = (p_1, \ldots, p_n)$ *é transformada na curva*

$$y_i(\tau) = \widetilde{b}_i \tau^{\widetilde{p}_i}(1 + o(1)),\ \widetilde{b}_i \neq 0,\ i = 1, \ldots, n, \tag{3.6}$$

tal que

$$\widetilde{P} = (\widetilde{p}_i, \ldots, \widetilde{p}_n) = \alpha P \text{ e } \log \widetilde{B} = \alpha \log B \tag{3.7}$$

onde $\widetilde{P}$ *é a ordem vetorial de (3.6).*

(iii) A transformação (3.1) é uma aplicação injetiva do conjunto $\{X : 0 < |x_i| < \infty,\ i = 1, \ldots, n\}$ *sobre o conjunto* $\{Y : 0 < |y_i| < \infty,$ $i = 1, \ldots, n\}$.

(iv) Seja a transformação potência

$$z_i = y_1^{\gamma_{i1}} y_2^{\gamma_{i2}} \ldots y_n^{\gamma_{in}},\ i = 1, \ldots, n, \tag{3.8}$$

com matriz $\gamma = (\gamma_{ij})$*. Então as coordenadas* Z *são obtidas das coordenadas* X *pela transformação potência com matriz* $\gamma\alpha$*, i.e., as transformações potências formam um grupo.*

Demonstração: *(i)* Com efeito,

$$X^Q = \exp\langle \log X, Q \rangle = \exp\langle \beta \log Y, Q \rangle = \exp\langle \log Y, \beta^* Q \rangle = Y^{\beta^* Q}.$$

(ii) Aplicando logaritmo em (3.5), temos

$$\log X = \log B + (P + o(1)) \log \tau$$

e em (3.6), temos

$$\log Y = \log \widetilde{B} + (\widetilde{P} + o(1)) \log \tau,$$

por outro lado

$$\log Y = \alpha \log X = \alpha \log B + (\alpha P + o(1)) \log \tau$$

donde segue as transformações lineares (3.7).

(iii) Segue da linearidade das equações (3.3).

(iv) Substituindo a transformação (3.1) em (3.8), temos que

$$\begin{aligned}
z_i &= (x_1^{\alpha_{11}} \dots x_n^{\alpha_{1n}})^{\gamma_{i1}} (x_1^{\alpha_{21}} \dots x_n^{\alpha_{2n}})^{\gamma_{i2}} \dots (x_1^{\alpha_{n1}} \dots x_n^{\alpha_{nn}})^{\gamma_{in}}, \\
&= (x_1^{\alpha_{11}\gamma_{i1}} \dots x_n^{\alpha_{1n}\gamma_{i1}})(x_1^{\alpha_{21}\gamma_{i2}} \dots x_n^{\alpha_{2n}\gamma_{i2}}) \dots (x_1^{\alpha_{n1}\gamma_{in}} \dots x_n^{\alpha_{nn}\gamma_{in}}), \\
&= x_1^{(\alpha_{11}\gamma_{i1} + \alpha_{21}\gamma_{i2} + \dots + \alpha_{n1}\gamma_{in})} \dots x_n^{(\alpha_{1n}\gamma_{i1} + \alpha_{2n}\gamma_{i2} + \dots + \alpha_{nn}\gamma_{in})}, \\
&= x_1^{(\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}\alpha_{k1})} \dots x_n^{(\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}\alpha_{kn})}, \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Considerando $c = \gamma\alpha$, assim $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}\alpha_{kj}$, logo

$$z_i = x_1^{c_{i1}} \dots x_n^{c_{in}}, i = 1, \dots, n,$$

o que prova a propriedade. □

3.2 Transformação potência e truncamento de funções

Veremos algumas relações entre transformações potências e truncamento de funções para funções desenvolvidas em séries de potências. Notemos que pela propriedade (i) acima, sob a transformação potência (3.1), os vetores expoentes são submetidos a transformações lineares. Assim, segue o seguinte lema

Lema 3.2.1 *A série*

$$f(X) = \sum f_Q X^Q,\ Q \in S, \tag{3.9}$$

pela transformação (3.2), torna-se a série

$$g(Y) = \sum g_{\widetilde{Q}} Y^{\widetilde{Q}},\ \widetilde{Q} \in \widetilde{S}, \tag{3.10}$$

onde $\widetilde{Q} = \beta^* Q,\ \widetilde{S} = \beta^* S,$ *e* $g_{\widetilde{Q}} = f_Q$.

Demonstração: Segue da propriedade *(i)* da seção anterior. $\square$

Definição 3.2.1 *Seja* f *definida por (3.9) e* $\Gamma = \Gamma(f)$ *a envoltória convexa do suporte* $S = \{Q;\ f_Q \neq 0\}$. *Dizemos que o número* $d(f) = \dim(\Gamma(f))$ *é a dimensão da série (3.9).*

Lembrando que se $S = \{Q_1, \ldots, Q_s\},\ s < \infty$, então d é igual ao número de vetores linearmente independentes entre $Q_j - Q_s,\ j = 1, \ldots, s-1$.

Teorema 3.2.1 *Seja a função* f *dada pela série (3.9). Se a dimensão da soma (3.9) é* $d < n$. *Então existe uma matriz* α *e um vetor* $T \in I\!R^n$ *tal que pela transformação potência (3.1)*

$$X^T f(X) = g(y_1, \ldots, y_d), \tag{3.11}$$

onde $g : I\!R^d \longrightarrow I\!R$ *é uma função analítica.*

Demonstração: Como

$$X^T f(X) = \sum f_Q X^{(Q+T)},$$

aplicando o Lema 3.2.1 nesta equação, obtemos

$$g(Y) = \sum g_{\widetilde{Q}} Y^{\widetilde{Q}},\ \widetilde{Q} \in \alpha^{*-1}(S+T), \tag{3.12}$$

de acordo com o Lema 1.2.2 do capítulo 1, existe uma matriz α e um vetor T tal que o conjunto

$$\alpha^{*-1}(S+T)$$

está no subespaço gerado por $e_1, \ldots, e_d$, onde e_j são vetores de $\mathbb{R}^n$ cuja j-ésima coordenada é igual a um e todas as outras são zero, logo todos os vetores $\widetilde{Q}$ tem as componentes $\widetilde{q}_{d+1}, \ldots, \widetilde{q}_n$ iguais a zero. Portanto, a soma (3.12) possui coordenadas $y_{d+1}, \ldots, y_n$ somente com potências zero, i.e., elas são absorvidas. $\square$

Teorema 3.2.2 *Seja $f_j^{(d)}(X)$ o truncamento da soma finita (3.9). Existe uma matriz α e um vetor T tal que pela transformação potência (3.1)*

$$X^T f_j^{(d)}(X) = g_j^{(d)}(y_1, \ldots, y_d), \tag{3.13}$$

$$X^T f(X) = g(Y) \equiv \sum g_{\widetilde{Q}} Y^{\widetilde{Q}},\ \widetilde{Q} \in \widetilde{S}. \tag{3.14}$$

Aqui $g(Y)$ é um polinômio, i.e. em $\widetilde{S}$ todos $\widetilde{Q} \geq 0$.

Demonstração: Segue do Lema 1.2.3, considerando $S = S_j^{(d)} \cup \{Q_{d+1}, \ldots, Q_s\}$, onde $S_j^{(d)}$ é o subconjunto fronteira do suporte S. $\square$

3.3 Transformações potência em EDO

Consideremos o sistema de equações diferenciais (2.1) onde as funções $\varphi_i(X) = \sum \varphi_{iQ} X^Q$ com φ_{iQ} constantes reais, onde a soma de monômios pode ser finita ou finita. Façamos $\varphi_i(X) = x_i f_i(X)$, onde $f_i(X) = x_i^{-1}\varphi_i(X)$, $i = 1, \cdots, n$. Do sistema (2.1), obtemos

$$\frac{d}{dt}\log x_i = f_i(X) \equiv \sum f_{iQ} X^Q,\ i = 1 \ldots, n$$

e na forma vetorial

$$\frac{d}{dt}(\log X) = F(X) \equiv \sum F_Q X^Q,\ Q \in S, \tag{3.15}$$

onde $F = (f_1, \ldots, f_n)$, $F_Q = (f_{1Q}, \ldots, f_{nQ})$ e o conjunto $S = \{Q;\ F_Q \neq 0\}$, que é chamado de *suporte do sistema (3.15)* e é denotado por $S(F)$.

Lema 3.3.1 *Pela transformação potência (3.1) o sistema (3.15) torna-se o sistema*

$$\frac{d}{dt}(\log Y) = G(Y) = \sum G_R Y^R,\ R \in \widetilde{S} = S(G), \tag{3.16}$$

onde $R = \alpha^{*-1}Q$, $\widetilde{S} = \alpha^{*-1}S$, *e* $G_R = \alpha F_Q$.

Demonstração: Pelo Lema (3.2.1), obtemos que $R = \beta^* Q = \alpha^{*-1}Q$ e conseqüentemente $\widetilde{S} = \alpha^{*-1}S$ e a última igualdade segue da primeira igualdade das equações (3.3). □

Lema 3.3.2 *Seja a transformação potência (3.1) que transforma a curva integral, com ordem P, do sistema (3.15) $X = \Xi(\tau)$, na curva $Y = \mathcal{H}(\tau)$ com ordem $\widetilde{P}$. Então $\widetilde{P} = \alpha P$.*

Demonstração: Consideremos $\Xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ e $\mathcal{H} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Sabemos que $\log y_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \log x_i$, daí

$$\frac{\log|\eta_i(\tau)|}{\log \tau} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \frac{\log|\xi_i(\tau)|}{\log \tau},$$

fazendo τ tender para infinito, temos o resultado

$$\widetilde{p}_i = \lim_{\tau \to \infty} \frac{\log|\eta_i(\tau)|}{\log \tau} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \lim_{\tau \to \infty} \frac{\log|\xi_i(\tau)|}{\log \tau} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} p_i,$$

o que implica

$$\widetilde{P} = \alpha P.$$

□

Definição 3.3.1 *Seja $T = (t_1, \ldots, t_n) \in I\!R^n$, chamamos de mudança potência no tempo a equação*

$$dt_1 = X^T dt. \tag{3.17}$$

Observemos que o tempo t é transformado para o tempo t_1 da primeira coordenada do vetor T. A mudança potência no tempo (3.18) transforma o sistema (3.16) no sistema

$$\frac{d}{dt_1}(\log X) = X^{-T}F(X) \equiv \sum F_Q X^{Q-T}, \; Q \in S, \tag{3.18}$$

i.e., todos os vetores expoentes Q do sistema (3.15) são transladados paralelamente pelo vetor T.

Definimos, agora, o conceito de *dimensão do sistema (3.15)* analogamente à definição 3.2.1, sendo o número $d(F) = \dim(\Gamma(F))$, onde $\Gamma(F)$ é a envoltória convexa de $S(F)$.

Teorema 3.3.1 *Se o sistema (3.15) tem dimensão $d < n$, então existem uma transformação potência (3.1) e uma mudança potência no tempo (3.18), que reduz o sistema (3.15) para a forma*

$$\frac{d}{dt_1}\log Y = G(y_1, \ldots, y_d). \tag{3.19}$$

Demonstração: Pela mudança no tempo, o sistema torna-se

$$\frac{d}{dt_1}\log X = \sum F_Q X^{Q-T}, \; Q \in S,$$

utilizando-se a transformação potência (3.1), pelo Lema 3.3.1, tem-se

$$\frac{d}{dt_1}\log Y = \sum G_R Y^R, \; R \in \alpha^{*-1}(S - T),$$

mas pelo Lema 1.2.2 podemos obter α e T tal que

$$0 \leq \alpha^{*-1}(Q - T) \subset Con(e_1, \ldots, e_d),$$

Logo $r_{d+1} = \ldots = r_n = 0$, o que completa a prova. $\square$

Observemos que o sistema (3.1) é simplificado ao subsistema de ordem d

$$\frac{dy_i}{dt_1} = y_i g_i(y_1, \ldots, y_d),\ \ i = 1, \ldots, d, \tag{3.20}$$

pois as outras variáveis $y_{d+1}, \ldots, y_n$ são obtidas por quadraturas ao longo das soluções para o subsistema (3.20), donde segue o seguinte corolário.

Corolário 3.3.1 *Nas hipóteses do teorema acima, quando $d = 1$ o sistema (3.15) é resolúvel por quadraturas.*

Demonstração: De fato, neste caso o sistema (3.19) tem a forma

$$\frac{dy_i}{dt} = y_i g_i(y_1),\ \ i = 1, \ldots, n,$$

o que implica

$$y_i = y_i^0 e^{\int g_i(y_1)dt} = y_i^0 e^{\int \frac{g_i(y_1)}{g_1(y_1)} \frac{dy_1}{y_1}},\ \ i = 2, \ldots, n.$$

Utilizando a transformação potência inversa de Y para X obtemos x_i como função de y_1. $\square$

Quando S é um conjunto finito de pontos $Q_1, \ldots, Q_s$, podemos utilizar o método apresentado no Lema 1.2.1 para construir a matriz α do Teorema 3.3.1. Com efeito, tomamos do conjunto, $\{Q_j - Q_s,\ j = 1, \ldots, s-1\}$, d vetores linearmente independentes e os nomeamos de $U_1, \ldots, U_d$ que formarão as d primeiras colunas da matriz α e as outras $n-d$ colunas $U_{d+1}, \ldots, U_n$ são determinadas de tal forma que $U_1, \ldots, U_n$ sejam linearmente independentes. De modo análogo, em vez de $U_1, \ldots, U_n$ serem tomados como vetores colunas, podemos tomá-los como vetores linhas.

Exemplo 3.3.1 *:* Seja a equação de Emden-Fowler $\ddot{x} = at^\sigma x^\mu$, onde $a = \pm 1$, σ e μ são constantes reais. Considerando $x = x_1$ e $t = x_3$, escrevemos a equação na seguinte forma

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & x_2 = x_1(x_1^{-1}x_2) \\ \dot{x}_2 & = & ax_3^{\sigma}x_1^{\mu} = x_2(ax_1^{\mu}x_2^{-1}x_3^{\sigma}) \\ \dot{x}_3 & = & 1 = x_3(x_3^{-1}). \end{array}\right.$$

Donde

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{d}{dt}\log x_1 & = & f_1(X) = x_1^{-1}x_2 \\ \dfrac{d}{dt}\log x_2 & = & f_2(X) = ax_1^{\mu}x_2^{-1}x_3^{\sigma} \\ \dfrac{d}{dt}\log x_3 & = & f_3(X) = x_3^{-1}. \end{array}\right.$$

Comparando com o sistema (3.15), obtemos o suporte $S = \{Q_1 = (-1,1,0),\ Q_2 = (\mu,-1,\sigma),\ Q_3 = (0,0,-1)\}$. Calculemos agora a matriz α. Temos que

$$\begin{array}{lcl} U_1 & = & Q_1 - Q_3 = (-1,1,1), \\ U_2 & = & Q_2 - Q_3 = (\mu,-1,\sigma+1), \end{array}$$

que são linearmente dependentes quando $\sigma = -2$ e $\mu = 1$, assim $d(F) = 1$ e pelo corolário 3.3.1 é explicitamente integrável por quadraturas. Mas se $(\sigma,\mu) \neq (-2,1)$, então U_1 e U_2 são linearmente independentes e a dimensão do sistema (3.3) é igual a dois. Desde que U_1 e U_2 são as duas linhas primeiras linhas da matriz α, tomamos a última linha sendo dada pelo vetor $U_3 = (0,0,1)$. Desta forma, obtemos a seguinte transformação potência com matriz α

$$\begin{array}{lcl} y_1 & = & x_1^{-1}x_2x_3, \\ y_2 & = & x_1^{\mu}x_2^{-1}x_3^{\sigma+1}, \\ y_3 & = & x_3 \end{array} \quad \alpha = \left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 1 \\ \mu & -1 & \sigma+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

pela escolha de U_3, temos que necessariamente $\mu \neq 1$, pois $\det\alpha = 1-\mu$. A matriz inversa e transformação potência inversa são

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{1-\mu}\left(\begin{array}{ccc} -1 & -1 & \sigma+2 \\ -\mu & -1 & \sigma+\mu+1 \\ 0 & 0 & 1-\mu \end{array}\right), \quad \begin{array}{lcl} x_1 & = & (y_1^{-1}y_2^{-1}y_3^{\sigma+2})^{1/(1-\mu)}, \\ x_2 & = & (y_1^{-\mu}y_2^{-1}y_3^{\sigma+\mu+1})^{1/(1-\mu)}, \\ x_3 & = & y_3. \end{array}$$

Fazendo a mudança no tempo (3.17) com $T = Q_3$, obtemos

$$dt_1 = x_3^{-1}dt.$$

Portanto, usando esta mudança no tempo e a matriz α calculada anteriormente, o sistema (3.3) é transformado no sistema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt_1}\log y_1 &=& g_1(Y) = 1 - y_1 + ay_2, \\ \dfrac{d}{dt_1}\log y_2 &=& g_2(Y) = \sigma + 1 + \mu y_1 - ay_2, \\ \dfrac{d}{dt_1}\log y_3 &=& g_3(Y) = 1, \end{cases} \tag{3.21}$$

o qual é um sistema em que a última equação é resolúvel por quadraturas, ficando o sistema reduzido ao estudo no plano formado pelas duas primeiras equações do sistema (3.21).

Exemplo 3.3.2 *:* Consideremos o sistema (2.1) com as seguintes propriedades:

- As funções φ_i são polinômios homogêneos de grau $l+1$, l fixo, ou seja, $\varphi_i(x_iX) = x_i^{l+1}\varphi_i(X)$, assim, os polinômios homogêneos $f_i(X) = x_i^{-1}\varphi_i(X)$, do sistema na forma (3.15), tem grau l;
- A dimensão do sistema (3.15) é $d = n-1$ e o suporte S é o conjunto normal ao vetor $(1, \ldots, 1)$;
- A matriz da transformação potência (3.1) é

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & -1 \\ 0 & 1 & \ldots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que $\det\alpha = 1 \neq 0$, segue-se que a correspondente transformação potência é dada por

$$y_i = x_i x_n^{-1},\ i = 1\ldots, n-1, \quad y_n = x_n. \tag{3.22}$$

Donde a matriz e transformação inversa são, respectivamente

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} x_i = y_i y_n, \ i = 1 \dots, n-1, \\ x_n = y_n. \end{array}$$

Apliquemos o logaritmo na transformação (3.22)

$$\log y_i = (\log x_i x_n^{-1}) = \log x_i - \log x_n, \ i = 1, \dots, n-1,$$

o que implica

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\log y_i) &= f_i(X) - f_n(X), \ i = 1, \dots, n, \\ \frac{d}{dt}(\log y_n) &= f_n(X). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Como as funções f_i são homogêneas de grau l, então

$$\begin{aligned} f_i(X) &= f_i(x_1, \dots, x_n) = f_i(y_1 y_n, \dots, y_{n-1} y_n, y_n) \\ &= y_n^l f_i(y_1, \dots, y_{n-1}, 1), \ i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Tomando a mudança no tempo $dt_1 = y_n^l dt = x_n^l dt$ em (3.23) obtemos o sistema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_1}(\log y_i) &= f_i(y_1, \dots, y_{n-1}, 1) - f_i(y_1, \dots, y_{n-1}, 1), \ i = 1, \dots, n-1, \\ \frac{d}{dt_1}(\log y_n) &= f_n(y_1, \dots, y_{n-1}, 1). \end{aligned}$$

Notemos que a última equação é resolúvel por quadratura, sendo que depende somente das $n-1$ primeiras variáveis.

3.4 Transformação potência generalizada

Nesta seção consideramos a simplificação do sistema (3.15), onde o suporte $S = \{Q_1, \dots, Q_s\}$ é finito. Para simplificar denotamos por F_j os coeficientes F_{Q_j}, assim o sistema (3.15) é escrito na forma

$$\frac{d}{dt}(\log X) = \sum_{j=1}^{s} F_j X^{Q_j} \tag{3.24}$$

Definição 3.4.1 *O subespaço linear* $\mathbf{F} \subset I\!R^n_*$ *gerado pelos vetores* $F_1, \ldots, F_s$ *é chamado subespaço dos coeficientes do sistema (3.24). O número* r *é chamado posto do sistema (3.24), se o conjunto dos vetores* $\{F_1, \ldots, F_s\}$ *possui* r *vetores linearmente independentes. Claramente,* $1 \leq r \leq n$ *e* $r = \dim \mathbf{F}$.

Teorema 3.4.1 *Se o sistema (3.24) tem posto* $r < n$*, então existe uma matriz* α *tal que a transformação potência (3.1) reduz o sistema (3.24) para a forma*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\log y_i) &= g_i(Y), \; i = 1, \ldots, r, \\
\frac{d}{dt}(\log y_j) &= 0, \; j = r+1, \ldots, n,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Demonstração: A prova é análoga a do Teorema 3.3.1, só que o Lema 1.2.2, que descreve no Capítulo 1 o método da construção da matriz α, é utilizado sobre o conjunto dos elementos F_j ao invés dos elementos $Q_j - T$. □

Conseqüentemente, temos os corolários.

Corolário 3.4.1 *O sistema (3.24) de posto* r *é reduzido para um sistema com* r *variáveis e* $n - r$ *constantes arbitrárias.*

Corolário 3.4.2 *Se o posto do sistema (3.24) é igual a um, então o sistema é resolúvel por quadraturas.*

Demonstração: Se o posto $r = 1$, pelo corolário anterior, temos que $y_j = y_j^0 = const, \; j = 2, \ldots, n$, e o sistema (3.24) é reduzido a equação

$$\frac{d}{dt}(\log y_1) = g_1(y_1, y_2^0, \ldots, y_n^0) \;\Rightarrow\; t - t_0 = \int \frac{dy_1}{y_1 g_1(y_1, y_2^0, \ldots, y_n^0)},$$

o que verifica o corolário. $\square$

A transformação potência (3.1) introduzida na seção 1 deste capítulo, preserva o número n de coordenadas. Introduziremos agora a transformação

$$y_j = X^{R_j}, \; j = 1, \ldots, m, \tag{3.26}$$

com m arbitrário, que é chamada *transformação potência generalizada,* a qual transforma uma sistema de n equações num sistema de m equações.

Podemos definir o sistema (3.24) por duas matrizes $s \times n$,

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} F_{11} & \ldots & F_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{s1} & \ldots & F_{sn} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & \ldots & q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{s1} & \ldots & q_{sn} \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

onde as linhas da matriz $\mathcal{F}$ são formadas pelos coeficientes $F_j = (F_{j1}, \ldots, F_{jn}), \; j = 1, \ldots, s$ e de modo análogo, as linhas da matriz $\mathcal{Q}$ são os vetores expoentes $Q_j = (q_{j1}, \ldots, q_{jn})$.

Para que a dimensão do sistema seja igual ao posto da matriz $\mathcal{Q}$ suponharemos efetuada a mudança no tempo (3.18) com $T = Q_S$, assim, redefinindo uma matriz $\mathcal{Q}'$ cujas linhas são $T - Q_j$, temos $Q_s = 0$ e portanto posto$(\mathcal{Q}') = d$. Consideremos no teorema seguinte já feita esta transformação no tempo. Neste teorema conseguiremos uma redução do sistema de n equações (3.24) para um sistema de s equações através de uma potência generalizada (3.26) com $R_j = Q_j, \; j = 1, \ldots, s$.

Teorema 3.4.2 *A transformação potência generalizada*

$$y_j = X^{Q_j}, \; j = 1, \ldots, s, \tag{3.28}$$

reduz as soluções do sistema (3.24) de dimensão d para as soluções do sistema

$$\frac{d}{dt}(\log Y) = \mathcal{B}Y, \quad \mathcal{B} = \mathcal{Q}\mathcal{F}^*, \tag{3.29}$$

e para $n-d$ quadraturas. Onde $Y=(y_1,\ldots,y_s)$ e $y_s\equiv 1$.

Demonstração: Seja $\mathcal{F}$ a matriz definida em (3.27). O sistema (3.24) pela transformação (3.28) torna-se

$$\frac{d}{dt}(\log X)=\sum_{j=1}^{s}F_jX^{Q_j}=\sum_{j=1}^{s}F_jy_j=\mathcal{F}^*Y. \tag{3.30}$$

Por outro lado, tomando o logaritmo de (3.28), obtemos

$$\log Y=\mathcal{Q}\log X,$$

tomando a derivada nesta equação com respeito a t e substituindo (3.30), segue-se que

$$\frac{d}{dt}(\log Y)=\mathcal{Q}\frac{d}{dt}(\log X)=\mathcal{Q}\mathcal{F}^*Y=\mathcal{B}Y,$$

assim, obtemos o sistema (3.29).

Seja $Y=Y(t)$ uma solução do sistema (3.29). Como o posto da matriz $\mathcal{Q}$ é d, então existe na matriz $\mathcal{Q}$ pelo menos um menor de ordem d cujo determinante é diferente de zero. Supomos, sem perda de generalidade, que este menor é a matriz quadrada $\mathcal{Q}'$ formada pelas primeiras d-linhas e d-colunas. Temos que

$$\begin{pmatrix}\log y_1\\ \vdots\\ \log y_d\\ \vdots\\ \log y_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_{11}&\cdots&q_{1d}&\cdots&q_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\ q_{d1}&\cdots&q_{dd}&\cdots&q_{dn}\\ \vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\ q_{s1}&\cdots&q_{sd}&\cdots&q_{sn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\log x_1\\ \vdots\\ \log x_d\\ \vdots\\ \log x_s\\ \vdots\\ \log x_n\end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

Pelas d primeiras equações do sistema (3.31), obtemos

$$\begin{aligned}\log y_i &= q_{i1}\log x_1+\ldots+q_{id}\log x_d+\\ &\quad q_{i(d+1)}\log x_{d+1}+\ldots+q_{in}\log x_n,\ i=1,\ldots,d,\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{d1} & \dots & q_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log x_1 \\ \vdots \\ \log x_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -q_{1(d+1)} & \dots & -q_{1n} \\ I_{d\times d} & \vdots & \ddots & \vdots \\ & -q_{d(d+1)} & \dots & -q_{dn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log y_1 \\ \vdots \\ \log y_d \\ \log x_{d+1} \\ \vdots \\ \log x_n \end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

Como $\det \mathcal{Q}' \neq 0$, então $\log x_1, \dots, \log x_d$ são expressos linearmente através de $\log y_1, \dots, \log y_d$ e $\log x_{d+1}, \dots, \log x_n$, i.e.,

$$\log x_i = \alpha_{i1} \log y_1 + \dots + \alpha_{id} \log y_d + \alpha_{i(d+1)} \log x_{d+1} + \dots + \alpha_{in} \log x_n,$$

o que implica

$$x_i = y_1^{\alpha_{i1}} \dots y_d^{\alpha_{id}} x_d^{\alpha_{i(d+1)}} \dots x_n^{\alpha_{in}}, \ i = 1, \dots, n, \tag{3.33}$$

onde α_{ij} são obtidos de tal forma à satisfazer a equação (3.32). Da equação (3.30), obtemos

$$\frac{d}{dt}(\log x_j) = \sum_{k=1}^{s} F_{kj} y_k, \ j = d+1, \dots, n,$$

então

$$x_j = x_j^0 \exp\left\{ \int \left(\sum_{k=1}^{s} F_{kj} y_k \right) dt \right\}, \ j = d+1, \dots, n. \tag{3.34}$$

Desta forma obtemos uma expressão de $x_j, \ j = d+1, \dots, n$ por quadraturas. Conseqüentemente, pela equação (3.33) e como $d < s$, obtemos expressões para $x_k, \ k = 1, \dots, d$ o que conclui a demonstração. $\square$

Notemos que a matriz $\mathcal{B}$ é uma matriz $s \times s$ cujos elementos são $b_{ij} = \langle Q_i, F_j \rangle$.

Exemplo 3.4.1 *:* Seja $\mathcal{B} = 0$, i.e., todos Q_i são ortogonais aos F_j. Assim o sistema (3.29) é da forma

$$\frac{d}{dt}(\log Y) = 0 \ \Rightarrow \ y_i = y_i^0 = const, \ i = 1, \dots, s.$$

Utilizando a expressão (3.30), obtemos a solução

$$x_i = x_i^0 e^{\displaystyle\int \left(\sum_{k=1}^{s} F_{ki} y_i^0\right) dt}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

onde $y_k^0 = (X^0)^{Q_k}, \ k = 1, \ldots, s$.

Exemplo 3.4.2 : Consideremos a equação

$$\frac{d^3x}{dt^3} + x\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Fazendo $x_1 = x, \ x_2 = \dot{x}$ e $x_3 = \ddot{x}$, escrevemos esta equação na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = x_1(x_1^{-1}x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_3 = x_2(x_2^{-1}x_3) \\ \dot{x}_3 &= -x_1x_3 = x_3(-x_1). \end{aligned} \tag{3.35}$$

Assim, $n = 3$ e

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathcal{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Fazendo-se a mudança $T = Q_3 = (1, 0, 0)$, então temos a matriz $\mathcal{Q}'$ composta das linhas $Q_j - T$

$$\mathcal{Q}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daí

$$\mathcal{B} = \mathcal{Q}'\mathcal{F}^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tomando a mudança no tempo $dt_1 = x_1 dt$ e a transformação potência generalizada dada por $\mathcal{Q}'$, segue-se

$$y_1 = x_1^{-2}x_2, \quad y_2 = x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}, \quad y_3 = 1.$$

Pelo Teorema 3.4.2 o estudo do sistema (3.35) é reduzido ao estudo do sistema

$$\frac{d}{dt_1}(\log y_1) = -2y_1 + y_2$$
$$\frac{d}{dt_1}(\log y_2) = -y_1 - y_2 - 1.$$

Lembramos que a dimensão d do sistema (3.24) é o posto da matriz $\mathcal{Q}$ e o posto r do sistema é o posto da matriz $\mathcal{F}$. Se denotarmos o posto da matriz $\mathcal{B}$ por b, então $0 \leq b \leq d \leq s$ e $0 \leq b \leq r \leq s$.

Teorema 3.4.3 *Seja o sistema (3.24), com d =posto($\mathcal{Q}$) e b =posto($\mathcal{B}$). Então existe uma transformação potência generalizada (3.28), na forma do Teorema 3.4.2, e uma transformação potência*

$$\log z_i = \langle L_i, \log Y\rangle, \;\; i = 1, \ldots, s, \tag{3.36}$$

sobre os sistema (3.29), onde $L_i = (L_{i1}, \ldots, L_{is})$ e $Y = (y_1, \ldots, y_s)$, que reduz as soluções do sistema (3.24) às soluções do sistema

$$\frac{d}{dt}(\log Z) = \sum_{j=1}^{s} F_j Z^{Q_j}, \tag{3.37}$$

com b variáveis, $d-b$ constantes arbitrárias e $n-d$ equações resolúveis por quadraturas.

Demonstração: Utilizando os resultados do Teorema 3.4.2 é suficiente mostrarmos que o sistema (3.29), obtido pela substituição (3.28) no sistema (3.24), pode ser reduzido a um sistema de b variáveis e $d-b$ constantes arbitrárias.

Notemos que as variáveis X do sistema (3.24) não corresponde ao espaço das variáveis Y, mas somente para uma variedade de dimensão d. Com efeito, consideremos o subespaço linear $\mathbf{L} = \{L : \;\mathcal{Q}^* L = 0\}$ em $\mathbb{R}^s$. Como *posto*($\mathcal{Q}$) $= d$, então $\dim \mathbf{L} = s - d$. Sabemos que

$$\log Y = \mathcal{Q} \log X,$$

logo para $L \in \mathbf{L}$ temos

$$\langle \log Y, L\rangle = \langle \mathcal{Q}\log X, L\rangle = \langle \log X, \mathcal{Q}^* L\rangle = 0 \;\Rightarrow\; Y^L = 1 \qquad (3.38)$$

Consideremos, agora o subespaço linear $\mathbf{L_1} = \{L : \ \mathcal{B}^* L = 0\}$. Como o posto da matriz $\mathcal{B}$ é $b \leq d$, então $\dim \mathbf{L_1} = s - b \geq s - d$. Além disso, $\mathbf{L_1} \supset \mathbf{L}$, pois se $\mathcal{Q}^* L = 0$ então $\mathcal{B}^* L = \mathcal{F}\mathcal{Q}^* L = 0$.

Podemos, desta forma, selecionar uma base $L_{d+1}, \ldots, L_s$ em $\mathbf{L}$ e completarmos a uma base de $\mathbf{L_1}$ pelos vetores $L_{b+1}, \ldots, L_d$, e completarmos esta base em $\mathbf{L_1}$ para uma base em $\mathbb{R}^s$ pelos vetores $L_1, \ldots, L_b$. A transformação potência (3.36) transforma o sistema (3.29) no sistema

$$\frac{d}{dt}(\log z_i) = \langle \frac{d}{dt}(\log Y), L_i\rangle = \langle \mathcal{B}Y, L_i\rangle = \langle Y, \mathcal{B}^* L_i\rangle \equiv g_i(Z), \ i = 1, \ldots, s. \quad (3.39)$$

Pela escolha dos vetores L_i's temos $\mathcal{B}^* L_j = 0$ para $j > b$, isto é,

$$\frac{d}{dt}(\log z_j) = \langle Y, \mathcal{B}^* L_j\rangle = 0 \;\Rightarrow\; z_j = const,$$

pela equação (3.38) temos que

$$\log z_k = 0 \;\Rightarrow\; z_k = 1, \ \text{para } k > d.$$

Conseqüentemente, o sistema (3.39) obtido da transformação do sistema (3.29) é

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\log z_i) &= g_i(z_1, \ldots, z_d), \ i = 1, \ldots, b, \\ \frac{d}{dt}(\log z_j) &= 0, \ j = b+1, \ldots, d, \\ z_k &= 1, k = d+1, \ldots, s. \end{aligned}$$

Donde, obtemos

$$\begin{aligned} z_j &= z_j^0 = const, \ j = b+1, \ldots, d, \\ \frac{d}{dt}(\log z_i) &= g_i(z_1, \ldots, z_b, z_{b+1}^0, \ldots, z_d^0), \ i = 1, \ldots, b. \end{aligned} \qquad (3.40)$$

Assim, a solução do sistema (3.29) é reduzido para a solução do sistema (3.40), obtendo o que queríamos demonstrar. □

Lema 3.4.1 *Seja* $\mathbf{F}$ *o subespaço coeficiente do sistema (3.24). Se uma curva integral não-trivial* $X = \Xi(\tau)$ *do sistema (3.24) tem ordem vetorial* P *quando* $\tau \to \infty$*, então* $P \in \mathbf{F}$.

Demonstração: Seja r o posto do sistema (3.24). Se $r = n$, então $\mathbf{F} = \mathbb{R}^n_*$, logo $P \in \mathbf{F}$.

Se $r < n$, então existem $n - r$ vetores linearmente independentes $R_1, \ldots, R_{n-r} \in \mathbb{R}^n$, que formam uma base de $\mathbf{F}^{\perp}$, assim

$$\langle F_i, R_j \rangle = 0, \text{ para } i = 1, \ldots, s, \; j = 1, \ldots, n - r.$$

Lembrando que $F(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} F_i X^{Q_i}$, temos que

$$\langle F(X), R_j \rangle = 0, \; j = 1, \ldots, n - r,$$

logo, para toda solução $X(t)$ do sistema (3.24), tem-se

$$\left\langle \frac{d}{dt}(\log X), R_j \right\rangle = \frac{d}{dt}\langle \log X, R_j \rangle = 0, \; j = 1, \ldots, n - r.$$

Se integrarmos sobre t a equação acima, obtemos

$$\langle \log X, R_j \rangle = const = c_j, \; j = 1, \ldots, n - r,$$

portanto,

$$\langle \log \Xi(\tau), R_j \rangle = c_j \;\Rightarrow\; \left\langle \frac{\log \Xi(\tau)}{\log \tau}, R_j \right\rangle = \frac{c_j}{\log \tau}, \; j = 1, \ldots, n - r.$$

Fazendo τ tender para infinito, obtemos da expressão acima que

$$\langle P, R_j \rangle = 0, \; j = 1, \ldots, n - r.$$

Mas isto significa que $P \in \mathbf{F}$. □

Exemplo 3.4.3 *:* A condição de que a curva integral seja não trivial, no Lema 3.4.1, é essencial. Consideremos o sistema

$$\frac{d}{dt}(\log x_1) = x_1 - x_2^2, \ \frac{d}{dt}(\log x_2) = 0,$$

com $x_i(t) > 0$ para todo t.

Temos que $\mathbf{F} = \lambda(1,0), \ \lambda \in \mathbb{R}$. Notemos que

$$x_1 = \tau^2, \ x_2 = \tau,$$

é uma curva integral trivial do sistema, mas sua ordem é $P = (2,1)$ e P não pertence ao subespaço $\mathbf{F}$.

Capítulo 4

Poliedro de Newton e Sistemas Truncados

4.1 Introdução

Consideremos o sistema logarítmico

$$\frac{d}{dt}\log X = F(X) = \sum F_Q X^Q, \quad Q \in S = S(F) = \{Q \in \mathbb{R}^n : \ F_Q \neq 0\}. \tag{4.1}$$

Definição 4.1.1 *A envoltótia convexa externa do suporte S é chamada poliedro de Newton do sistema (4.1), e a denotaremos por $\Gamma(F)$.*

Para cada face $\Gamma_j^{(d)}$, do poliedro de Newton $\Gamma(F)$, faz-se corresponder o seguinte *sistema logarítmico truncado*

$$\frac{d}{dt}\log X = \widehat{F}_j^{(d)}(X) = \sum F_Q X^Q, \quad Q \in S_j^{(d)} = S \cap \Gamma_j^{(d)}. \tag{4.2}$$

Definição 4.1.2 *O número d é chamado dimensão do truncamento (4.2). A envoltória linear dos vetores F_Q, $Q \in S_j^{(d)}$, i.e., dos vetores coeficientes de (4.2), é chamada subespaço dos coeficientes do sistema truncado (4.2), e será denotado por $\mathbf{F_j^{(d)}}$.*

Fazendo a transformação potência (3.1) no sistema (4.1) temos

$$\frac{d}{dt}\log Y = G(Y) = \sum G_R Y^R, \quad R \in \widetilde{S} = S(G), \tag{4.3}$$

cujo truncamento (4.2) é dado pelo sistema

$$\frac{d}{dt}\log Y = \widehat{G}_j^{(d)}(Y) = \sum G_R Y^R, \quad R \in \widetilde{S}_j^{(d)}. \tag{4.4}$$

Consideremos $\widetilde{\Gamma} = \Gamma(G)$ o poliedro de Newton do sistema (4.3) e a cada poliedro Γ e $\widetilde{\Gamma}$ associamos as faces $\Gamma_j^{(d)}$ e $\widetilde{\Gamma}_j^{(d)}$, os subconjuntos fronteiras $S_j^{(d)}$ e $\widetilde{S}_j^{(d)}$, os cones normais $U_j^{(d)}$ e $\widetilde{U}_j^{(d)}$ e os cones tangentes $T_j^{(d)}$ e $\widetilde{T}_j^{(d)}$, respectivamente.

Propriedades 4.1.1 **1)** $\widetilde{\Gamma}_j^{(d)} = \alpha^{*-1}\Gamma_j^{(d)}$;

2) $\widetilde{S}_j^{(d)} = \alpha^{*-1}S_j^{(d)}$;

3) $\widetilde{U}_j^{(d)} = \alpha U_j^{(d)}$;

4) $\widetilde{T}_j^{(d)} = \alpha^{*-1}T_j^{(d)}$;

5) $\mathbf{G}_j^{(d)} = \alpha \mathbf{F}_j^{(d)}$.

Demonstração: Para verificar as propriedades 1,2,3 e 4 basta utilizar a Proposição 1.2.1 do Capítulo 1. A propriedade 5, obtém-se do Lema 3.3.1 do Capítulo 3. □

Comentário 4.1.1 *Pelo Lema 3.3.2, visto na seção 3 do Capítulo anterior, uma curva $X = \Xi(\tau)$ de ordem P é transformada numa curva $Y = \mathcal{H}(\tau)$ de ordem $\widetilde{P}$, tal que $\widetilde{P} = \alpha P$. Em particular, as curvas*

$$x_i(\tau) = b_i\tau^{p_i}(1 + o(1)), \quad b_i \neq 0, \ i = 1, \ldots, n, \tag{4.5}$$

$$x_i(\tau) = b_i\tau^{p_i}, \quad b_i \neq 0, \ i = 1, \ldots, n, \tag{4.6}$$

pela transformação potência (3.1) tornam-se as curvas

$$y_i(\tau) = \widetilde{b}_i \tau^{\widetilde{p}_i}(1+o(1)), \quad \widetilde{b}_i \neq 0, \ i = 1, \ldots, n, \tag{4.7}$$

$$y_i(\tau) = \widetilde{b}_i \tau^{\widetilde{p}_i}, \quad \widetilde{b}_i \neq 0, \ i = 1, \ldots, n, \tag{4.8}$$

onde

$$\widetilde{P} = \alpha P \quad \text{e} \quad \log \widetilde{B} = \alpha \log B.$$

Logo, se a curva $X = \Xi(\tau)$ é uma integral do sistema (4.1) (resp. (4.2)), então sua imagem pela transformação potência (3.1) é uma curva integral do sistema (4.3) (resp. (4.4)).

Teorema 4.1.1 *Sejam o sistema (4.1) e seu truncamento (4.2). Então existe uma matriz α e um vetor T tal que a transformação potência (3.1) e a mudança no tempo (3.17) reduz os sistemas (4.1) e (4.2) para os sistemas, respectivamente, (4.3) e (4.4), com as seguintes propriedades:*

1) $\widehat{G}_j^{(d)}(Y) \equiv \widehat{G}_j^{(d)}(y_1, \ldots, y_d)$, i.e., não depende das variáveis $y_{d+1}, \ldots, y_n$;

2) o suporte $\widetilde{S} = S(G) \geq 0$, i.e., $R_j \geq 0$ em (4.3).

Demonstração: A prova segue do Lema 3.3.1 e do Lema 1.2.3 do Capítulo 1.□

Comentário 4.1.2 *Da propriedade 1 do Teorema acima, temos que $\widehat{G}_j^{(d)}(Y)$ não depende das variáveis $y_{d+1}, \ldots, y_n$, então o suporte $\widetilde{S}_j^{(d)}$ do truncamento (4.4) está no subespaço de $I\!R^n$ tal que $r_{d+1} = \ldots = r_n = 0$. Utilizando a fórmula (1.9) que determina o cone normal, vista no Capítulo 1, obtemos que $\widetilde{P} \in \widetilde{U}_j^{(d)}$ se satisfaz:*

$$(i) \qquad \langle \widetilde{P}, R_i - R_j \rangle = 0, \ R_i, R_j \in \widetilde{S}_j^{(d)};$$

$$(ii) \qquad \langle \widetilde{P}, R_i - R_k \rangle < 0, \ R_k \in \widetilde{S}/\widetilde{S}_j^{(d)}.$$

De (i), temos que o cone normal $\widetilde{U}_j^{(d)}$ está no subespaço de $I\!R^n_*$ tal que $\widetilde{p}_1 = \ldots = \widetilde{p}_d = 0$. Pelo item 2 do Teorema acima e utilizando (ii), obtemos que o cone normal

$\widetilde{U}_j^{(d)}$ contem o subespaço em que $\widetilde{p}_k < 0,\ k = d+1, \ldots, n$. Utilizando a fórmula (1.11), obtemos que o cone tangente está no subespaço $r_j \geq 0,\ j = d+1, \ldots, n$.

Consideremos um vetor $Y \in \mathbb{R}^n$ da forma $Y = (Y', Y'')$, onde $Y' = (y_1, \ldots, y_d)$ e $Y'' = (y_{d+1}, \ldots, y_n)$. Se denotarmos o cone normal por $U'' = \widetilde{U}_j^{(d)}$ e o cone tangente por $T'' = \widetilde{T}_j^{(d)}$, temos de acordo com o comentário acima, que $\{P'' < 0\} \subset U'' \subset \{P' = 0\}$ e $\{R' = 0\} \subset T'' \subset \{R'' \geq 0\}$.

Tomando-se o sistema (4.3), obtido do Teorema 4.1.1, e fazendo $g_i(Y) = \sum g_{iR} Y'^{R'} Y''^{R''}$ podemos reescrever o sistema (4.3), da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{dt_1} &= \psi_i(Y) \equiv \sum \psi_{iR''}(Y') Y''^{R''},\ i = 1, \ldots, d, \\ \frac{d}{dt_1} \log y_j &= g_j(Y) \equiv \sum g_{jR''}(Y') Y''^{R''},\ j = d+1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{4.9}$$

onde os expoentes R'' estão no cone T'', $\psi_i(Y) = y_i g_i(Y)$, $\psi_{iR''}(Y') = y_i g_{iR} Y'^{R'}$ e $g_{jR''}(Y') = g_{jR} Y'^{R'}$.

Substituindo $Y'' = 0$ no sistema (4.9) temos que o sistema se restringe ao estudo para $R \in \widetilde{S}_j^{(d)}$, para algum j, pois as $(n-d-1)$-ultimas coordenadas de R podem ser quaisquer restando somente o estudo para as d primeiras coordenadas. Assim, obtemos para o sistema (4.9) o truncamento equivalente ao sistema truncado (4.4) sob a forma

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{dt_1} &= \psi_{i0}(Y'),\ i = 1, \ldots, d, \\ \frac{d}{dt_1} \log y_j &= g_{j0}(Y'),\ j = d+1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{4.10}$$

onde $\psi_{i0} = y_i \widehat{g}_i$ e $g_{j0}(Y') = \widehat{g}_j$.

4.2 Soluções assintóticas

O sistema (4.9) é definido em $\mathcal{U}(T'', \varepsilon) = \{Y;\ |Y|^{T_i} \leq \varepsilon\}$, onde T_i pertence ao esqueleto de T'', pois as séries contidas no sistema (4.9) são convergentes. Para estudar soluções para o sistema (4.9) para Y'' pequeno faz-se necessário o estudo das soluções do sistema (4.10).

Seja $Y'^0 = (y_1^0, \ldots, y_d^0)$ um ponto de equilíbrio do primeiro subsistema de (4.10) com $y_i^0 \neq 0$, i.e., $\psi_{i0}(Y'^0) = 0$. Para cada ponto de equilíbrio Y'^0 fazemos corresponder uma família de $(n-d-1)$-parâmetros de curvas integrais potências não-triviais do sistema truncado (4.10):

$$y_i = y_i^0,\ 1, \ldots, d, \qquad y_j = b_j \tau^{p_j},\ j = d+1, \ldots, n, \tag{4.11}$$

onde $p_j = -\lambda_j/\lambda_n,\ \lambda_j = g_{i0}(Y'^0),\ b_{d+1}, \ldots, b_{n-1}$ são constantes arbitrárias e $b_n = \pm 1$.

Desenvolveremos, a seguir, argumentos para determinar as curvas integrais do sistema (4.9) que são assintóticas à curva (4.11). Primeiramente, notemos que os sistemas (4.9) e (2.19) provéns, respectivamente, dos sistemas (4.1) e (2.16) que são análogos e como os sistemas (4.10) e (2.22) obtém-se fazendo $Y'' = 0$ e $X'' = 0$ nos sistemas (4.9) e (2.19), temos também uma relação entre estes sistemas, assim o par de sistemas (4.9) e (4.10) são análogos ao par de sistemas (2.19) e (2.22) definidos no Capítulo 2. A diferença é que o truncamento (2.22) do sistema (2.19) tem cone normal fixo

$$\{P :\ P' = 0,\ P'' < 0\}, \tag{4.12}$$

pois, de acordo com a demonstração do Corolário 2.2.1, tem-se sempre que a ordem $P'' < 0$ de uma curva h-assintótica $X = \Xi(\tau)$ do sistema (2.22) e, conseqüentemente, o cone tangente é fixo e igual a $\{Q :\ Q'' \geq 0\}$. Porém o cone normal U'' e o cone tangente T'' do truncamento (4.10), pelo Comentário 4.1.2 são cones duais arbitrários com a propriedade $U'' \supset \{P'' < 0\}$ e $T'' \subset \{Q'' \geq 0\}$.

Definição 4.2.1 *Seja Y'^0 um ponto de equilíbrio do primeiro subsistema no sistema (4.10). A curva integral $Y = \mathcal{H}(\tau)$ do sistema (4.9) é dita g-assintótica, se satisfaz*

a) $\mathcal{H}'(\tau) \to Y'^0$ *quando* $\tau \to +\infty$*;*

b) $\mathcal{H}''(\tau) \in \mathcal{U}(T'', \varepsilon)$ *para todo* $\varepsilon > 0$ *quando* $\tau \in (\tau_0(\varepsilon), +\infty)$*;*

c) *todas as componentes* $\eta_j(\tau)$ *do vetor* $\mathcal{H}''(\tau)$ *são diferentes de zero;*

d) *o vetor* $\mathcal{H}''(\tau)$ *tem ordem vetorial* $P'' \in \overline{U}''$*.*

As curvas *h-assintóticas* definidas no Capítulo 2 são casos especiais de curvas *g-assintóticas*, quando o cone tangente $T'' = \mathbb{R}_+^{(n-d)} \equiv \{Q'' \geq 0\}$ e o cone normal é dado por (4.12). De fato, as propriedades a) e c) coincidem com a definição de h-assintótica. Numa curva h-assintótica $X = \Xi(\tau) = (\xi_1(\tau), \ldots, \xi_n(\tau))$ sabemos que $\Xi(\tau) \to 0$ quando $\tau \to +\infty$, em particular $\Xi''(\tau) \to 0$ quando $\tau \to +\infty$, o que verifica b). A propriedade d) é satisfeita para curvas integrais do sistema (2.19) com $\Xi''(\tau) \to 0$.

Denotemos $\lambda_j = \widehat{g}_j(Y'^0),\ j = d+1, \ldots, n$ e o vetor $\Lambda'' = (\lambda_{d+1}, \ldots, \lambda_n)$.

Teorema 4.2.1 *Seja* $\Lambda'' \neq 0$ *no sistema (4.9) e* $Y = \mathcal{H}(\tau)$ *uma curva g-assintótica não-trivial cuja parte* $\mathcal{H}''(\tau)$ *tem ordem vetorial* $P'' \neq 0$*. Então existe um número* $\kappa \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *tal que*

$$\Lambda'' = \kappa P''.$$

Demonstração: De acordo com a propriedade d) da curva g-assintótica $Y = \mathcal{H}(\tau)$, tem-se que $P'' \in \overline{U}''$.

Seja $B''_{d+1}, \ldots, B''_n$ o esqueleto do cone normal $\overline{U}''$. Logo, existem $\mu_j \geq 0,\ j = d+1, \ldots, n$ tal que

$$P'' = \mu_{d+1} B''_{d+1} + \ldots + \mu_n B''_n.$$

Definimos a matriz $\beta = -(B''_{d+1}\ \ldots\ B''_n)$ onde os vetores B''_j são vetores colunas e façamos $\gamma = \beta^{-1}$. Tomando-se a transformação potência $\log Z'' = \gamma \log Y''$, o sistema (4.9) torna-se um sistema nas variáveis Y' e Z'' da mesma forma que (4.9).

Pelo Lema 3.3.2, a curva integral $Y = \mathcal{H}(\tau)$ com ordem vetorial $P = (P', P'')$ transforma-se em uma curva integral

$$\widetilde{Y} = (\mathcal{H}'(\tau), \widetilde{\mathcal{H}}''(\tau)), \tag{4.13}$$

cuja ordem vetorial é $\widetilde{P} = (P', \widetilde{P}'')$ tal que $\widetilde{P}'' = \gamma P''$. Assim

$$\begin{aligned} \widetilde{P}'' &= \beta^{-1}(\mu_{d+1}B''_{d+1} + \ldots + \mu_n B''_n) \\ &= \mu_{d+1}\beta^{-1}B''_{d+1} + \ldots + \mu_n\beta^{-1}B''_n \\ &= -(\mu_{d+1}e_{d+1} + \ldots + \mu_n e_n), \end{aligned}$$

onde $e_j,\ j = d+1, \ldots, n$ são os j-ésimos vetores unitários e a última igualdade tem-se da relação $\beta^{-1}B_j = -e_j$, obtida da definição da matriz β. Temos que $\widetilde{P}' \leq 0$ pois $\mu_j \geq 0$. Portanto, a curva (4.13) é uma curva integral para o sistema na forma (2.22), que é equivalente a (4.9) e $P'' \leq 0$.

Como $Y = \mathcal{H}(\tau)$ é g-assintótica, então pela propriedade a) e c) temos que $\mathcal{H}'(\tau) \to Y'^0$ e todas as componentes do vetor $\widetilde{\mathcal{H}}''(\tau)$ são diferentes de zero. Além disso, $\widetilde{\mathcal{H}}'(\tau) \to 0$ pela propriedade b) de curvas g-assintóticas.

Portanto, a curva integral (4.13) é h-assintótica e pelo Teorema 2.2.1 existe um número $\kappa \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tal que

$$\widetilde{\Lambda}'' = \kappa\widetilde{P}'' \implies \gamma\Lambda'' = \kappa\gamma P'' \implies \Lambda'' = \kappa P'',$$

onde a última implicação é obtida pelo fato de γ ser injetiva. $\square$

Vejamos as disposições dos vetores $\pm\Lambda''$ com respeito ao cone U'':

G_1) Um dos vetores $\pm\Lambda''$ está no cone normal U'', o qual denotaremos por $\sigma\Lambda$;

G_2) Nenhum dos vetores $\pm\Lambda''$ está no fecho $\overline{U}''$ do cone normal U'';

G_3) Um dos vetores $\pm\Lambda''$ está na fronteira $\partial U''$ do cone normal U'';

$G_4)$ $\Lambda'' = 0$.

Observa-se que para $U'' = \{P'' < 0\}$ os casos G_1, G_2, G_3 e G_4 são equivalentes aos casos H_1, H_2, H_3 e H_4 respectivamente, definidos na Seção 2 do Capítulo 2. Com efeito, para $U'' = \{P'' < 0\}$ o sistema (4.9) é análogo ao sistema (2.22) e o resultado segue do Teorema 4.2.1.

O Teorema abaixo indica as condições para determinar as curvas integrais do sistema (4.9) que são assintóticas às curvas (4.11).

Teorema 4.2.2 *No caso G_1 o sistema (4.9) tem uma família de $(n-d-1)$-parâmetros de curvas integrais g-assintóticas com potências assintótica (4.11).*

Demonstração: Esta prova utiliza o mesmo raciocínio da prova do Teorema 4.2.1, i.e., procura-se reduzir o estudo da curva g-assintótica para uma curva h-assintótica para aplicar um Teorema do Capítulo 2, que nesta demonstração faz-se uso do Teorema 2.2.2. Se $\sigma\Lambda'' \in U''$, do mesmo modo que o Teorema 4.2.1 obtemos uma transformação potência $\log Z'' = \gamma \log Y''$ do sistema com o vetor $\sigma\widetilde{\Lambda}'' = \gamma\sigma\Lambda'' < 0$, onde a desigualdade é restrita, pois $\mu_j > 0$ já que não estamos no fecho $\overline{U}''$ do cone normal U''. Desta forma, obtemos um sistema com coordenadas Y', Z'' da forma (2.22) que satisfaz H_1. Logo pelo Teorema 2.2.2 o sistema (4.9) tem uma família de (n-d-1)-parâmetros de curvas h-assintóticas. Usando a transformação potência inversa sobre as curvas h-assintóticas nas coordenas Y', Z'' tornam-se curvas integrais g-assintóticas do sistema (4.9) com coordenadas Y', Y'', como queríamos demonstrar. $\square$

4.3 Potências assintóticas

Lema 4.3.1 *Seja o sistema truncado (4.2). Se a curva (4.6) é uma curva inte-*

gral do sistema (4.2) e também o vetor P é normal à face $\Gamma_j^{(d)}$ correspondente ao truncamento (4.2). Então

$$\widehat{F}(B) = \kappa P, \ \kappa \in \mathbb{R}. \tag{4.14}$$

Demonstração: Seja $X = \Xi(\tau)$ uma parametrização da curva integral (4.6) do sistema (4.2), segue por definição

$$\frac{d}{dt}\log \Xi(\tau) = \widehat{F}(\Xi(\tau)) = \sum F_Q \Xi(\tau)^Q, \ Q \in S_j^{(d)},$$

com $\Xi(\tau) = (b_1\tau^{p_1}, \ldots, b_n\tau^{p_n})$, como P é normal a face $\Gamma_j^{(d)}$, expandindo a propriedade (1.4.1) (i) da Seção de truncamentos de funções no Capítulo 1 para funções vetoriais, tem-se que

$$\widehat{F}(\Xi(\tau)) = \widehat{F}(B)\tau^{c_P}, \tag{4.15}$$

onde $c_P = \sup\limits_{Q \in S_j^{(d)} = S_P} \langle P, Q \rangle$.

Por outro lado, quando $\widehat{F}(\Xi(\tau)) \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\log(b_1\tau^{p_1}, \ldots, b_n\tau^{p_n}) &= \frac{d}{dt}(p_1 \log\tau + \log b_1, \ldots, p_n\log\tau + \log b_n) \\ &= P\frac{d}{dt}\log\tau. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Portanto

$$P\frac{d}{dt}\log\tau \equiv \widehat{F}(B)\tau^{c_P}.$$

Como $P \neq 0$ e $\widehat{F}(\Xi(\tau)) \neq 0$, então $\frac{d}{dt}\log\tau \neq 0$, tomando-se

$$\kappa = \tau^{-c_P}\frac{d}{dt}\log\tau = const \neq 0,$$

obtemos a fórmula (4.14).

Quando $\widehat{F}(X) = 0$, logo $\widehat{F}(B) = 0$, pela equação (4.15), assim a fórmula é válida para $\kappa = 0$. $\square$

Corolário 4.3.1 *Na situação do Lema 4.3.1*

$$\langle \widehat{F}(B), R_i \rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, d, \tag{4.17}$$

onde os vetores $R_1, \ldots, R_d$ formam uma base d-dimensional de um subespaço linear que é paralelo à face $\Gamma_j^{(d)}$.

Demonstração: Segue da condição "P é normal a face $\Gamma_j^{(d)}$"que

$$\langle P, R_i \rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, d. \tag{4.18}$$

Utilizando o Lema 4.3.1 tem-se o resultado (4.17). □

Lema 4.3.2 *Seja o sistema truncado (4.2). Se os vetores P e B satisfazem (4.14) e (4.18), então a curva (4.6) é uma curva integral do sistema (4.2).*

Demonstração: Temos que sobre a curva (4.6)

$$\frac{d}{dt}\log X = P\frac{d}{dt}\log\tau \text{ e } \widehat{F}(\Xi(\tau)) = \widehat{F}(B)\tau^{c_P},$$

já que da equação (4.17), P é normal à face $\Gamma_j^{(d)}$.

Se $\kappa = 0$ na equação (4.14) tem-se que $\widehat{F}(B) = 0$, conseqüentemente, $\widehat{F}(X)$ e assim, a curva (4.6) é uma curva integral trivial do sistema (4.2). Se $\kappa \neq 0$ na equação (4.14), utilizando (4.16) e (4.18), temos sobre a curva (4.6) que o sistema (4.2) fica sob a forma

$$P\frac{d}{dt}\log\tau = \kappa P\tau^{c_P} \implies \frac{d}{dt}\log\tau = \kappa\tau^{c_P}.$$

A solução $\tau = \tau(t)$ do sistema acima nos dá uma relação de τ com t, conseqüentemente a curva (4.6) com esta relação é uma curva integral do sistema (4.2). □

Lema 4.3.3 *Seja o sistema truncado (4.2). Se os vetores P e B satisfazem (4.14) com $\kappa \neq 0$ e (4.17), então a curva (4.6) é uma curva integral do sistema (4.2).*

Demonstração: De acordo com (4.16) segue-se que o vetor $\widehat{F}(B)$ é normal à face $\Gamma_j^{(d)}$, conseqüentemente, para $\kappa \neq 0$ temos que P é normal à face $\Gamma_j^{(d)}$, logo valem as equações (4.15) e (4.16). O conclusão da prova é análoga ao do lema anterior. $\square$

Comentário 4.3.1 *Se uma curva (4.6) satisfaz a equação (4.14) com $\kappa \neq 0$, então podemos obter $|\kappa| = 1$, para isto, basta fazermos o parâmetro $\tau = \widetilde{\tau}^{|\kappa|}$. Com efeito, como $\widetilde{c} = \sup\langle |\kappa| P, Q\rangle = |\kappa| c$ e pela equação (4.17) temos que*

$$\widetilde{\kappa} = \widetilde{\tau}^{-c|\kappa|} \frac{d}{dt} \log \widetilde{\tau},$$

utilizando a substituição $\widetilde{\tau} = \tau^{\frac{1}{|\kappa|}}$, temos

$$\widetilde{\kappa} = \tau^{-\frac{1}{|\kappa|} c|\kappa|} \frac{d}{dt} \log \tau^{\frac{1}{|\kappa|}} = \frac{1}{|\kappa|} \tau^{-c} \frac{d}{dt} \log \tau = \frac{\kappa}{|\kappa|}.$$

Teorema 4.3.1 *Se o sistema (4.1) tem uma curva integral (4.5) com $P \in U_j^{(d)}$, então a curva (4.6) é uma curva integral para o sistema truncado (4.2).*

Reciprocamente, se o sistema truncado (4.2) com cone normal $U_j^{(d)}$ tem uma curva integral não-trivial (4.6) com $P \in U_j^{(d)}$, então o sistema completo (4.1) tem uma curva integral da forma (4.5).

Demonstração: Temos que P é normal à face $\Gamma_j^{(d)}$, pois $P \in U_j^{(d)}$. Se $\widehat{F}(B) = 0$, pela equação (4.15) $\widehat{F}(X) = 0$, logo a curva (4.6) é uma curva integral trivial do sistema truncado (4.2).

Suponhamos $\widehat{F}(B) \neq 0$. Vimos que os sistemas (4.1) e (4.2) através da transformação potência do Teorema 4.1.1, tornam-se nos sistemas (4.9) e (4.10), as curvas (4.5) e (4.6) tornam-se nas curvas (4.7) e (4.8), o vetor $\widehat{F}(B)$ no vetor $\widehat{G}(\widetilde{B})$ e o cone normal $U_j^{(d)}$ no cone $\widetilde{U}_j^{(d)} \equiv U''$. Como por uma transformação potência as relações entre os vetores em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n_*$ são preservadas, então a curva (4.7) é uma curva integral de (4.9).

Como $P \in U_j^{(d)}$, então $\widetilde{P} \in U'' \subset \{P' = 0\}$, logo $\widetilde{P}' = 0$. Fazendo-se $\tau \to \infty$, temos

$$y_i = \widetilde{b}_i(1 + o(1)) \longrightarrow \widetilde{b}_i, \quad i = 1, \ldots, d.$$

Logo as d-primeiras coordenadas da curva integral (4.7) tende para a constante $\widetilde{B}' \equiv Y'^0$, onde todas as coordenadas são diferentes de zero ou infinito.

Sabemos que o sistema (4.10) é obtido substituindo $Y'' = 0$ em (4.9), daí podemos supor que Y'^0 é um ponto de equilíbrio do primeiro subsistema no sistema (4.10). Por definição, $\widehat{G}''(\widetilde{B}') = \Lambda'' = \kappa\widetilde{P}''$, $\kappa \neq 0$, isto significa que satisfaz a equação (4.14), tomando a transformação potência inversa. Como P é normal à face $\Gamma_j^{(d)}$, segue-se pelo Lema 4.3.2 que a curva (4.6) é uma integral do sistema truncado (4.2).

Reciprocamente, se uma curva (4.6) é uma curva integral não-trivial do sistema (4.2), então da relação (4.15) obtemos que $\widehat{F}(B) \neq 0$ e de acordo com o Lema 4.3.1, a equação (4.14) para $\kappa \neq 0$ é satisfeita. Conseqüentemente, $\pm\widehat{F}(B) \in U_j^{(d)}$, pois $P \in U_j^{(d)}$ e pelo Comentário 4.3.1.

A transformação potência do Teorema 4.1.1, torna o sistema (4.1) no sistema (4.3), que tem ponto de equilíbrio $Y'^0 = \widetilde{B}'$, como já vimos. Mas, também, o sistema truncado (4.4) o tem como ponto de equilíbrio, já que $\widetilde{P}' = 0$ e é limite da curva integral (4.8), i.e.,

$$y_i = \widetilde{b}_i \tau^{\widetilde{p}_i} = \widetilde{b}_i \longrightarrow \widetilde{b}_i, \; i = 1, \ldots, d.$$

O sistema (4.4) na vizinhança do ponto Y'^0 satisfaz o caso G_1, sendo que os valores $\pm\Lambda'' = \pm\widehat{G}''(\widetilde{B}') \in U''$. Logo pelo Teorema 4.2.2, na vizinhança do ponto Y'^0 o sistema (4.3) tem uma família de soluções da forma (4.7), com $\widetilde{b}_{d+1}, \ldots, \widetilde{b}_n$ constantes arbitrárias. Em particular, a curva (4.7) com as mesmas constantes da curva (4.8) é solução para o sistema (4.2).

Retornando, para as variáveis X, pela transformação potência inversa, a solução (4.7) do sistema (4.2) torna (4.5) sendo uma curva integral do sistema (4.1), o que completa a demonstração. $\square$

Seja um vetor $B \in \mathbb{R}^n$ com todos as componentes não nulas ($b_i \neq 0$) que satisfaz o sistema (4.16) correspondente ao sistema truncado (4.2). Como, para cada face $\Gamma_j^{(d)}$, o sistema (4.16) consiste de d equações em n variáveis $b_1, \ldots, b_n$, logo resolúvel, assim é possível obter sempre um vetor B, satisfazendo (4.16). Denotamos $\Lambda = \widehat{F}(B) = F_j^{(d)}(B)$. Distinguiremos quatro casos para F:

F_1) $\Lambda \neq 0$ e um dos vetores $\pm\Lambda$ está no cone normal $U_j^{(d)}$ do truncamento (4.2);

F_2) $\Lambda \neq 0$ e $\pm\Lambda \notin \overline{U}_j^{(d)}$, onde $\overline{U}_j^{(d)}$ é o fecho do cone normal $\overline{U}_j^{(d)}$;

F_3) $\Lambda \neq 0$ e um dos vetores $\pm\Lambda$ está na fronteira $\partial U_j^{(d)}$ do cone normal $U_j^{(d)}$;

F_4) $\Lambda = 0$.

Enunciaremos a seguir um processo computacional para determinar soluções potências assintóticas da forma (4.6) do sistema (4.1) no seguinte sentido:

Primeiramente, calculamos o poliedro de Newton do sistema (4.1), i.e., todas as faces $\Gamma_j^{(d)}$ e seus cones normais $U_j^{(d)}$.

Para cada face fazemos corresponder um sistema truncado da forma (4.2). Calculamos as soluções do sistema (4.17) e para cada solução deste sistema $B = B^0$ calculamos o vetor $\Lambda = \widehat{F}(B^0)$.

Agora, de acordo com o Teorema 4.3.1, tem-se as seguintes conclusões:

1. Se Λ está no caso F_1, então o valor $B = B^0$ e $P = \pm\Lambda$ gera uma curva potência assintótica (4.6), com correspondente solução (4.5) para o sistema (4.1);

2. Se Λ está no caso F_2, então este valor B^0 não pode dar uma potência assintótica;

3. Se Λ está no caso F_3, então para os valores $B = B^0$ e $P = \pm\Lambda$ nada poderemos afirmar, de acordo com o Teorema 4.3.1;

4. Se $\Lambda = 0$, então nada poderemos concluir com o valor $B = B^0$.

Outro forma de se obter as soluções potências assintótica da forma (4.6) é utilizando os critérios que veremos à seguir. A vantagem deste método é na simplificação dos cálculos.

Recordemos que o sistema truncado (4.2) tem um subespaço de coeficientes $F_j^{(d)}$. Pelo Lema 3.4.1 a solução para o sistema truncado (4.2) tem ordem vetorial $P \in F_j^{(d)}$. Desde que estamos interessados somente em soluções tal que $P \in U_j^{(d)}$ ou $P \in \partial\overline{U}_j^{(d)}$, vejamos os critérios:

Critério 1: Se $U_j^{(d)} \cap F_j^{(d)} = \emptyset$, então qualquer curva não trivial tal que a ordem está no cone normal $U_j^{(d)}$ não é uma curva integral do truncamento (4.2);

Critério 2: Se $\partial\overline{U}_j^{(d)} \cap F_j^{(d)} = \emptyset$, então o truncamento (4.2) não tem solução não trivial cuja ordem P está em $\partial\overline{U}_j^{(d)}$;

Critério 3: Se o sistema $\widehat{F}(B) = 0$ não tem solução para todo $b_i \neq 0$, então o sistema truncado (4.2) não tem solução trivial.

Notemos que para existir uma curva integral não trivial do truncamento (4.2), cuja ordem está em $U_j^{(d)}$, somente quando $U_j^{(d)} \cap F_j^{(d)} \neq \emptyset$.

Vejamos o uso do **Critério 1** no caso em que S é finito.

Supondo
$S = \{Q_1, \ldots, Q_s\}$, $s < \infty$. Determinamos o vetor B, como solução do sistema (4.16). Suponhamos que o subconjunto fronteira é $S_j^{(d)} = \{Q_1, \ldots, Q_l\}$, $l \leq s$.

Temos que o subespaço $F_j^{(d)}$ é a envoltória linear do vetores $F_1, \ldots, F_l$, onde $F_k = F_{Q_k}$. Se $P \in F_j^{(d)}$ então $P = v_1 F_1 + \ldots + v_l F_l$, com $v_i \in \mathbb{R}$, logo

$$\langle P, Q_i \rangle = \sum_{j=1}^{l} v_j \langle F_j, Q_i \rangle, \quad i = 1, \ldots, s.$$

Lembrando (1.10), o vetor $P \in U_j^{(d)}$, quando

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{l} v_j \langle F_j, Q_1 \rangle = \ldots = \sum_{j=1}^{l} v_j \langle F_j, Q_l \rangle, \\ \sum_{j=1}^{l} v_j \langle F_j, Q_i \rangle < \sum_{j=1}^{l} v_j \langle F_j, Q_1 \rangle, \ i = l+1, \ldots, s. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Como o produto escalar $\langle F_j, Q_i \rangle = b_{ij}$ é unicamente determinado pelos sistema (4.1) e o truncado (4.2), então as relações (4.19) são sistemas de equações e inequações lineares em $v_1, \ldots, v_l$. Quando este sistema não tem solução, tem-se que $U_j^{(d)} \cap F_j^{(d)} = \emptyset$.

De maneira análogo obtemos uma relação no caso do **Critério 2**, onde em (4.19) a desigualdade não é estrita.

Conseguido P, para calcular B que satisfaça (4.16) é mais conveniente resolver o sistema $\widehat{F}(B) = \kappa P$. Portanto, temos duas maneiras computacionais para o cálculo de curvas integrais potências assintóticas. O primeiro usando o processo computacional em que obtém-se as conclusões 1,2,3,4 a partir do Teorema 4.3.1. O segundo fazendo o uso dos **critérios 1,2 e 3**.

Exemplo 4.3.1 *:* Neste exemplo usaremos o método computacional (dado pelos **critérios**) para acharmos condições para determinar potências assintóticas (4.6) do sistema (3.3) com $a = 1$. De (3.3) temos

$$F = (x_1^{-1} x_2, x_1^{\mu} x_2^{-1} x_3^{\sigma}, x_3^{-1}),$$

assim $S = \{Q_1 = (-1, 1, 0); Q_2 = (\mu, -1, \sigma); Q_3 = (0, 0, 1)\}$ e o poliedro de Newton $\Gamma(F)$ é um triângulo, cujos vértices são Q_1, Q_2, Q_3. Sejam $B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ e $F = (f_1, f_2, f_3)$, note que $f_i(B) = 0$ quando pelo menos um $b_i = 0$ ou infinito. Segue do **Critério 3**, que nenhum truncamento possui solução trivial.

Considerando as faces $\Gamma_j^{(d)}$ do poliedro Γ, obtemos os subconjuntos fronteiras

$$\begin{aligned} S_j^{(0)} &= Q_j, \ j = 1, 2, 3, \\ S_1^{(1)} &= \{Q_1, Q_2\}, \ S_2^{(1)} = \{Q_2, Q_3\} \text{ e } S_3^{(1)} = \{Q_1, Q_3\}. \end{aligned}$$

Notemos que $F_j^{(d)} = Lin\{F_1 = (1, 0, 0), F_2 = (0, 1, 0), F_3 = (0, 0, 1)\}$. Para o sistema truncado (4.2) correspondente à face $\Gamma_1^{(0)}$, temos

$$F_1^{(0)} = \{P; \ P = v_1 F_1\} \text{ e } U_1^{(0)} = \{P; \ \langle P, Q_i \rangle < \langle P, Q_1 \rangle, \ i = 1, 2\},$$

logo

$$\begin{aligned} F_1^{(0)} \cap U_1^{(0)} &= \{P = v_1 F_1; \ v_1 \langle F_1, Q_i \rangle < v_1 \langle F_1, Q_1 \rangle, \ i = 1, 2\} \\ &= \{P = (v_1, 0, 0); \ v_1 \mu < -v_1, \ 0 < -v_1\} \end{aligned}$$

que tem solução quando $v_1 < 0$ e $\mu + 1 > 0$, e pelo critério 1, o sistema (3.3) tem solução assintótica com ordem no cone $U_1^{(0)}$.

Para o critério 2, obtemos dois sistemas

$$v_1 = 0, \ v_1(\mu + 1) < 0;$$
$$v_1 < 0, \ v_1(\mu + 1) = 0,$$

o primeiro deles não tem solução e o segundo tem solução quando $v_1 < 0$ e $\mu = -1$.

De modo análogo, para $S_2^{(0)}$, obtemos

$$\begin{aligned} F_2^{(0)} \cap U_2^{(0)} &= \{P = v_2 F_2; \ v_2 \langle F_2, Q_i \rangle < v_2 \langle F_2, Q_2 \rangle, \ i = 1, 2\} \\ &= \{P = (0, v_2, 0); \ v_2 < 0\}. \end{aligned}$$

E para $S_3^{(0)}$, $F_3^{(0)} \cap U_3^{(0)}$ tem solução $P = (0, 0, v_3)$ quando

$$v_3 < 0 \text{ e } \sigma > -1.$$

Agora, vejamos o processo nas faces de dimensão 1. Com base na equação (4.19), para a face $\Gamma_1^{(1)}$ cujo subconjunto fronteira é $S_1^{(1)}$, obtemos que $P \in F_1^{(1)} \cap U_1^{(1)}$, se $P = v_1F_1 + v_2F_2 = (v_1, v_2, 0)$ e

$$-v_1 + v_2 = \mu v_1 - v_2 \text{ e } -v_1 + v_2 > 0, \quad \text{i.e.,}$$

$$v_2 = \frac{\mu + 1}{2} v_1 \text{ e } v_1 < v_2.$$

Para o truncamento (4.2) associado a face $\Gamma_2^{(1)} \supset S_2^{(1)}$. Pela equação (4.19) temos $P = v_2F_2 + v_3F_3$ que deve satisfazer

$$-v_2 + v_3\sigma = -v_3 > v_2, \implies v_2 = v_3(\sigma + 1) \text{ e } v_3(\sigma + 2) < 0.$$

E o sistema tem solução em $\overline{U}_2^{(1)}$ quando

$$v_2 = v_3(\sigma + 1) \text{ somente quando } \sigma + 2 = 0, \text{ i.e., } \; v_2 = -v_3.$$

Para $S_3^{(1)}$, temos que $F_3^{(1)} \cap U_3^{(1)}$ é dado pela relação $P = (v_1, 0, v_3)$ tal que

$$-v_1 = -v_3 > v_1\mu + v_3\sigma \text{ ou } v_1 = v_3, \; 0 > v_3(\mu + \sigma + 1).$$

E o sistema tem solução em $\overline{U}_3^{(1)}$ quando

Para $U_3^{(1)}$, pelo critério 2,

$$-v_1 = -v_3 = v_1\mu + v_3\sigma$$

e tem solução

$$v_1 = v_3 \neq 0, \text{ quando } \mu + \sigma + 1 = 0.$$

O sistema completo (3.3), i.e., a face é o próprio Γ, o sistema (4.19) consiste somente da equação

$$-v_1 + v_2 = v_1\mu - v_2 + v_3\sigma = -v_3,$$

assim,

$$v_2 = v_1\frac{(\mu+\sigma+1)}{(\sigma+2)},\ v_3 = v_1\frac{(1-\mu)}{(\sigma+2)},\ \text{se } \sigma+2 \neq 0.$$

Como temos os possíveis P para cada sistema truncado (4.2), determinaremos o B, usando a equação (4.14) com $|\kappa| = 1$.

Antes restringiremos a nossa procura para soluções potências assintóticas nas quais seja possível ter $x_3 \to 0$ ou $x_3 \to +\infty$, i.e., $P = (p_1, p_2, p_3)$ com $p_3 \neq 0$. Assim descartamos o estudo do sistema truncado (4.2) correspondente as faces $\Gamma_1^{(0)}$, $\Gamma_2^{(0)}$ e $\Gamma_1^{(1)}$.

Observamos primeiro que em todos os casos a equação (4.14) implica que $\widehat{f}_3(B) = \kappa p_3$ e neste exemplo

$$b_3 = \kappa v_3,\ p_3 = v_3 = \pm 1 \text{ assim } b_3 = \pm 1.$$

Consideremos o subconjunto fronteira $S_3^{(0)}$. Temos que $\widehat{F} = (0, 0, x_3^{-1})$, $P = (0, 0, -1)$ quando $\sigma + 1 > 0$, logo $X = (b_1, b_2, \pm\tau^{-1})$ com b_1, b_2 constantes arbitrárias, é potência assintótica do sistema truncado (4.2). Quando $\sigma + 1 = 0$ o mesmo vetor B satisfaz (4.14), já o vetor P é ortogonal ao lado $\Gamma_2^{(1)}$, pois $P \in U_2^{(1)}$.

Para $S_3^{(1)}$, $P = (v_3, 0, v_3)$, onde $v_3(\mu+\sigma+1) < 0$, tomando-se $v_3 = -(\mu+\sigma+1)$, da equação (4.14) segue-se as equações

$$\widehat{f}_1(B) = \kappa p_1 \ \Rightarrow\ b_1^{-1}b_2 = \kappa v_3,$$

logo $X = (b_1\tau^{v_3}, \pm b_1, \pm\tau^{v_3})$, portanto as potências assintóticas são

$$X = (b_1\tau^{-(\mu+\sigma+1)}, \pm b_1, \pm\tau^{-(\mu+\sigma+1)}).$$

Quando $\mu + \sigma + 1 = 0$ o mesmo vetor B satisfaz o sistema (4.14) e o vetor P é ortogonal ao triângulo Γ.

Para $S_2^{(1)}$, $P = (0, v_3(\sigma+1), v_3)$, onde $v_3(\sigma+2) < 0$, supondo-se $v_3 = -(\mu+\sigma+1)$, tem-se da equação (4.14)

$$\widehat{f}_2(B) = \kappa p_2 \;\Rightarrow\; b_1^{\mu} b_2^{-1} b_3^{\sigma} = \kappa v_3(\sigma + 1),$$

logo $b_2 = \dfrac{\kappa^{\sigma-1} v_3^{\sigma-1} b_1^{\mu}}{(\sigma + 1)}$. As potências assintóticas são

$$X = (b_1, (\pm 1) b_1^{\mu} (\sigma + 1)^{-1} \tau^{v_3(\sigma+1)}, \pm \tau^{v_3}).$$

Quando $\sigma + 2 = 0$ o mesmo vetor B satisfaz o sistema (4.14) e o vetor P também é ortogonal ao poliedro Γ.

Agora determinaremos B quando $\widehat{F} = F$. Das relações que tínhamos de P, obtemos

$$P = ((\sigma + 2)(1 - \mu^{-1}) v_3, (\mu + \sigma + 1)(1 - \mu^{-1}) v_3, v_3).$$

O sistema (4.14), neste caso, é

$$b_1^{-1} b_2 = \frac{\sigma + 2}{1 - \mu} v_3, \quad b_1^{\mu} b_2^{-1} (\kappa v_3)^{\sigma} = \frac{\mu + \sigma + 1}{1 - \mu} v_3,$$

que tem solução

$$b_1 = \left[\frac{(\sigma + 2)(\mu + \sigma + 1)}{(1 - \mu)^2 (\kappa v_3^{\sigma})} \right]^{\frac{1}{(\mu-1)}}, \quad b_2 = \frac{\sigma + 2}{1 - \mu} b_1 v_3,$$

quando

$$\sigma + 2 \neq 0, \quad \mu + \sigma + 1 \neq 0, \quad 1 - \mu \neq 0.$$

As potências assintóticas são

$$X = (b_1 \tau^{\sigma+2}, b_2 \tau^{\mu+\sigma+1}, \pm \tau^{1-\mu}).$$

Como o sistema truncado coincide com o completo, esta potência assintótica coincide com a solução para o sistema original.

Capítulo 5

Truncamentos Hamiltonianos de sistemas Hamiltonianos

5.1 Resultados Gerais

Seja a função Hamiltoniano dada pelo polinômio ou a série de potência

$$h(Z) = \sum h_R Z^R, \quad R \in S_1, \tag{5.1}$$

onde $Z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $R = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ com $|R| = r_1 + \ldots + r_n \geq 0$, $h_R \in \mathbb{C}$ e assumiremos que na soma os termos similares são agrupados e que $S_1 = \{R : \ h_R \neq 0\}$, que chamaremos de *suporte da função* $h(Z)$. Sabemos, do Capítulo 1 e Seção 4, que a esta série pode-se associar uma função Hamiltoniana truncada $\widehat{h}_j^{(d)}$ dada por

$$\widehat{h}_j^{(d)}(Z) = \sum h_R Z^R, \ R \in S_{1j}^{(d)},$$

onde $S_{1j}^{(d)}$ é um subconjunto fronteira de S_1. Tomando-se $n = 2m$ (n é par), $Z = (X, Y)$ e $R = (P, Q)$ onde é $X, Y \in \mathbb{C}^m$ e $P, Q \in \mathbb{R}^m$. A função Hamiltoniana (5.1) se re-escreve na forma

$$h(X, Y) = \sum h_{PQ} X^P Y^Q, \quad R = (P, Q) \in S_1 \subset \mathbb{R}^{2m}. \tag{5.2}$$

Associado a função Hamiltoniana (5.2), encontramos o sistema Hamiltoniano

$$\dot{x}_i = \frac{\partial h}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial h}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{5.3}$$

Escrevemos o sistema Hamiltoniano (5.3) na forma logarítmica (3.15), i.e.,

$$\frac{d}{dt} \log Z = F(Z) = \sum F_R Z^R, \quad R \in S_2, \tag{5.4}$$

onde o vetor coeficiente $F_R \in \mathbb{C}^n$ e S_2 correspondemos ao *suporte do sistema (5.3)*. Ao sistema (5.4) também podemos determinar os sistemas truncados $\widehat{F}_j^{(d)}$

$$\frac{d}{dt} \log Z = \widehat{F}_j^{(d)}(Z) = \sum F_R Z^R, \quad R \in S_{2j}^{(d)}, \tag{5.5}$$

onde $S_{2j}^{(d)}$ é um subconjunto fronteira de S_2.

Exemplo 5.1.1 *:* Neste exemplo verificaremos que um sistema Hamiltoniano truncado pode não ser um sistema Hamiltoniano, e reciprocamente, um sistema Hamiltoniano com a função Hamiltoniana truncada pode não ser um sistema Hamiltoniano truncado.

Consideremos a função Hamiltoniana

$$h(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1 x_2 y_1 y_2 + x_1^2 x_2 y_1^2 y_2 + x_1 x_2^2 y_1 y_2^2, \tag{5.6}$$

temos que o suporte de h é $S_1 = \{R_1 = (1,1,1,1), R_2 = (2,1,2,1), R_3 = (1,2,1,2)\}$. O poliedro de Newton Γ_1 de S_1 é um triângulo com três lados, três vértices, que junto com o triângulo Γ_1 formam todas as faces $\Gamma_{1j}^{(d)}$, aos quais podemos determinar os truncamentos $h_j^{(d)}$ da função Hamiltoniana h. A figura (5.1)(a) mostra a projeção do suporte S_1 e do triângulo Γ_1 no plano $\widetilde{q}_1 = p_1 + q_1$, $\widetilde{q}_2 = p_2 + q_2$. Considerando $\rho_i = x_i y_i$, $i = 1, 2$, obtemos o sistema Hamiltoniano (5.3) na forma

$$\dot{x}_i = \frac{\partial h}{\partial \rho_i} x_i, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial h}{\partial \rho_i} y_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Assim a função F do sistema (5.4) é

$$F = \left(\frac{\partial h}{\partial \rho_1}, \frac{\partial h}{\partial \rho_2}, -\frac{\partial h}{\partial \rho_1}, -\frac{\partial h}{\partial \rho_2} \right),$$

onde

$$\frac{\partial h}{\partial \rho_1} = \rho_2 + 2\rho_1\rho_2 + \rho_2^2, \quad \frac{\partial h}{\partial \rho_2} = \rho_1 + 2\rho_1\rho_2 + \rho_1^2.$$

Conseqüentemente, o conjunto S_2 consiste dos cinco pontos

$$R_4 = (0,1,0,1),\ R_1,\ R_5 = (0,2,0,2),\ R_6 = (1,0,1,0),\ R_7 = (2,0,2,0).$$

O poliedro Γ_2 é um trapézio onde os vértices são R_4, R_5, R_6, R_7, visto que R_1 está na reta que conecta R_5 e R_7, que é paralela a reta que conecta R_4 e R_6. A figura (5.1)(b) mostra a projeção do suporte S_2 e do trapézio Γ_2 no plano $\widetilde{q}_1, \widetilde{q}_2$.

Figura 5.1: O poliedro de Newton Γ_1 para a função h do exemplo (5.1.1) (a) e Γ_2 para o correspondente sistema Hamiltoniano (b) nas coordenadas $\widetilde{q}_1, \widetilde{q}_2$. O número j representa o ponto R_j.

Para o lado $\Gamma_{21}^{(1)}$ conectando os vértices R_6 e R_7, obtemos o sistema truncado $\widehat{F}_{12}^{(1)}$, dado por

$$\widehat{F}_{12}^{(1)} = (0, \rho_1 + \rho_1^2, 0, -\rho_1 + \rho_1^2),$$

donde, associamos o sistema

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = 0, & \dot{y}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = (\rho_1 + \rho_1^2)x_2, & \dot{y}_2 = -(\rho_1 + \rho_1^2)y_2, \end{array}$$

que não é um sistema Hamiltoniano , pois não pode ser escrito na forma (5.3) da função h. Assim, nem todo truncamento do sistema Hamiltoniano é um sistema Hamiltoniano de algum truncamento da função h.

Por outro lado, para a face $\Gamma_{11}^{(1)}$ conectando os vértices R_1 e R_2 do triângulo Γ_1, correspondemos a função truncada $\widehat{h} = \rho_1\rho_2 + \rho_1^2\rho_2$ da função Hamiltoniano h. O sistema Hamiltoniano associado a $\widehat{h}$ é

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = (\rho_2 + 2\rho_1\rho_2)x_1, & \dot{y}_1 = (\rho_1 + \rho_1^2)y_1, \\ \dot{x}_2 = -(\rho_2 + 2\rho_1\rho_2)x_2, & \dot{y}_2 = -(\rho_1 + \rho_1^2)y_1, \end{array}$$

daí, na forma (5.4) temos

$$\widehat{F} = (\rho_2 + 2\rho_1\rho_2, \rho_1 + \rho_1^2, -(\rho_2 + 2\rho_1\rho_2), -(\rho_1 + \rho_1^2)),$$

que tem suporte formado pelos quatro ponto R_4, R_1, R_6, R_7. Sua envoltória convexa é um paralelogramo que não é uma face do trapézio Γ_2.

Conseqüentemente, nem todo truncamento $\widehat{h}$ da função Hamiltoniana h tem o correspondente sistema Hamiltoniano

$$\dot{x}_i = \frac{\partial \widehat{h}}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial \widehat{h}}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, m \tag{5.7}$$

como um truncamento do sistema (5.4).

Vejamos como obter os truncamentos $\widehat{h}$ da função Hamiltoniano h que satisfaz (5.7).

Definamos a aplicação linear $\Pi : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{m+1}$, dada por $\Pi(P, Q) = (P', q')$ onde $P' = (p'_1, \ldots, p'_m)$ e

$$\begin{array}{ll} p'_i = p_i - q_i, & i = 1, \ldots, m-1, \\ p'_m = p_m + \sum_{i=1}^{m-1} q_i, & q = q_m + \sum_{i=1}^{m-1} q_i. \end{array} \tag{5.8}$$

Sejam e_i o i-ésimo vetor unitário em $\mathbb{R}^{2m}$ e f_i o i-ésimo vetor unitário em $\mathbb{R}^m$.

Temos que

$$\Pi(e_i) = \begin{cases} (f_i, 0), & i = 1, \ldots, m-1, \\ (f_m, 0), & i = m, \\ (-f_{i-m} + f_m, 1), & i = m+1, \ldots, 2m-1, \\ (0, 1), & i = 2m. \end{cases}$$

Assim

$$\Pi(e_i + e_{i+m} - e_m - e_{2m}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m-1,$$

o que implica que esta aplicação Π é uma projeção de $\mathbb{R}^{2m}$ sobre $\mathbb{R}^{m+1}$ ao longo dos vetores

$$e_i + e_{i+m} - e_m - e_{2m}, \quad i = 1, \ldots, m-1. \tag{5.9}$$

Denotemos por $\mathbf{L}$ o subespaço linear de $\mathbb{R}^{2m}$ gerado pelos vetores (5.9), assim a imagem da projeção (5.8) está sobre o subespaço linear $\mathbf{L}$.

Consideremos em $\mathbb{R}^{m+1}$ as projeções S_1' e S_2' dos conjuntos S_1 e S_2, que são os suportes da função Hamiltoniano (5.2) e do sistema Hamiltoniano (5.3), respectivamente, i.e.,

$$S_k' = \Pi S_k, \; \Gamma_k' = \Pi \Gamma_k, \; \partial \Gamma_k' = \partial \Pi S_k, \quad k = 1, 2,$$

onde Γ_k é a envoltória convexa de S_k.

Notemos que Γ_k' é a envoltória convexa de S_k', pois Π é uma aplicação linear. Para cada face ${\Gamma'}_{kj'}^{(d')}$ do poliedro Γ_k' em $\mathbb{R}^{m+1}$ fazemos corresponder a uma face maximal $\Gamma_{kj}^{(d)}$ do poliedro Γ_k em $\mathbb{R}^n$, tal que $\Pi\Gamma_{kj}^{(d)} = {\Gamma'}_{kj'}^{(d')}$, o termo maximal significa que se existir duas faces $\Gamma_{ki}^{(e)}$ e $\Gamma_{kl}^{(f)}$, tal que $\Pi\Gamma_{ki}^{(e)} = \Pi\Gamma_{kl}^{(f)} = {\Gamma'}_{kj'}^{(d')}$ e $\Gamma_{ki}^{(e)} \subset \Gamma_{kl}^{(f)}$ então a face maximal será $\Gamma_{kl}^{(f)}$.

Se para cada $Q' \in \mathbb{R}^{m+1}$ fazemos corresponder em $\mathbb{R}^{2m}$ a variedade determinada por

$$V(Q') \equiv \Pi^{-1}(Q') = \{Q \in \mathbb{R}^{2m}; \;\; \Pi(Q) = Q'\},$$

e para cada $Q' \in \Gamma_k'$ associamos o subconjunto

$$\Gamma_k(Q') \equiv \Gamma_k \cap V(Q')$$

do conjunto Γ_k. Abrangendo esta definição para um subconjunto de Γ'_k, em particular $\Gamma'^{(d')}_{kj'}$, temos

$$\Gamma_k(\Gamma'^{(d')}_{kj'}) = \Gamma_k \cap V(\Gamma'^{(d')}_{kj'}).$$

Notemos que, pela construção, a face maximal de $\Gamma'^{(d')}_{kj'}$ é justamente $\Gamma^{(d)}_{kj} = \Gamma_k(\Gamma'^{(d')}_{kj'})$. Analogamente para cada subconjunto fronteira $S'^{(d')}_{kj'}$ de S'_k em $\mathbb{R}^{m+1}$ corresponde um subconjunto maximal $S^{(d)}_{kj}$ de S_k em $\mathbb{R}^{2m}$.

Tomemos o subespaço $\mathbf{L}_*$ em $\mathbb{R}^{2m}_*$ o dual de $\mathbf{L}$, assim a intersecção do cone normal $S^{(d)}_{kj}$ com $\mathbf{L}_*$ é unicamente determinado pelo cone normal $U'^{(d')}_{kj'} \subset \mathbb{R}^{m+1}_*$, onde $\mathbb{R}^{m+1}_*$ é o dual de $\mathbb{R}^{m+1}$.

Exemplo 5.1.2 *:* (Consideremos o exemplo (5.1.1)). Calculamos os conjuntos S'_1 e S'_2 para a função Hamiltoniana (5.6) usando a fórmula (5.8), onde $m = 2$. Para o conjunto S_1, temos

$$\Pi(1,1,1,1) = (0,2,2), \quad \Pi(2,1,2,1) = (0,3,3), \quad \Pi(1,2,1,2) = (0,3,3),$$

logo, $S'_1 = \{(0,2,2),(0,3,3)\}$ e o poliedro Γ'_1 é o segmento $\{(0,\lambda+2,\lambda+2),\ 0 \leq \lambda \leq 1\}$ no plano p'_2, q', mostrado na figura (5.2)(a).

Projetando S_2, temos

$$\Pi(0,1,0,1) = (0,1,1), \quad \Pi(1,1,1,1) = (0,2,2), \quad \Pi(0,2,0,2) = (0,2,2),$$
$$\Pi(1,0,1,0) = (0,1,1), \quad \Pi(2,0,2,0) = (0,2,2).$$

Assim, $S'_2 = \{(0,1,1),(0,2,2)\}$ e o poliedro Γ'_2 é o segmento $\{(0,\lambda+1,\lambda+1),\ 0 \leq \lambda \leq 1\}$ no plano p'_2, q', mostrado na figura (5.2)(b).

Denotando-se as faces $\Gamma'^{(0)}_{11} = (0,2,2)$, $\Gamma'^{(0)}_{12} = (0,3,3)$, e $\Gamma'^{(1)}_{11} = \Gamma'_1$ do poliedro Γ'_1 e as faces $\Gamma'^{(0)}_{21} = (0,1,1)$, $\Gamma'^{(0)}_{22} = (0,2,2)$, e $\Gamma'^{(1)}_{21} = \Gamma'_2$ do poliedro Γ'_2, notemos que a face $\Gamma'^{(0)}_{12} = (0,3,3)$ corresponde a face maximal $\Gamma_1(\Gamma'^{(0)}_{12}) = \Gamma^{(1)}_{11} \supset \{(1,2,1,2),(2,1,2,1)\}$ de Γ_1, do mesmo modo para cada face de Γ'_1 obtemos uma

Figura 5.2: Poliedro Γ_1' (a) e $\Gamma_2'(b)$ nas coordenadas q', p_2' para a função Hamiltoniana (5.6) do exemplo (5.1.1).

face de Γ_1, mas a recíproca é falsa, pois para a face $\Gamma_{12}^{(1)} \supset \{(1,1,1,1),(2,1,2,1)\}$ não existe nenhuma face ${\Gamma'}_{1j'}^{(d')}$ de Γ_1' tal que $\Pi\Gamma_{12}^{(1)} = {\Gamma'}_{1j'}^{(d')}$.

Suponhamos sempre que $R = 0$ não esta no conjunto S_1, para facilitar os estudos posteriores.

Lema 5.1.1 $S_1' = S_2' + (f_m, 1)$, *i.e., o conjunto* S_1' *é obtido pela translação paralelo do conjunto* S_2' *ao longo do vetor* $(f_m, 1)$.

Demonstração: Seja $R = (P, Q) \in S_1$, $R \neq 0$, i.e., a função Hamiltoniana (5.2) não tem termos constantes em sua expansão. Temos que o sistema Hamiltoniano (5.3) correspondente é

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \dfrac{\partial h}{\partial y_i} \\[2ex] \dot{y}_i = -\dfrac{\partial h}{\partial x_i} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_i = y_i \widetilde{h}_{x_i}(X, Y) \\[2ex] \dot{y}_i = -x_i \widetilde{h}_{y_i}(X, Y) \end{cases}, i = 1, \dots, m,$$

onde as funções $\widetilde{h}_{x_i}(X, Y)$ e $\dot{y}_i = -x_i \widetilde{h}_{y_i}(X, Y)$ possuem o mesmo suporte que a função Hamiltoniana h. Logo, o suporte S_2 consiste dos pontos

$$(P,Q)-(f_i,f_i), \quad i=1,\ldots,m, \quad (P,Q)\in S_1. \tag{5.10}$$

Seja $\Pi(P,Q)=(P',q')$, $(P,Q)\in S_1$, então a projeção

$$\Pi((P,Q)-(f_i,f_i))=(P',q')-(f_m,1), \quad i=1,\ldots,m. \tag{5.11}$$

Conseqüentemente, o conjunto suporte S'_1 da função Hamiltoniana h, formada pelos elementos (P',q'), é obtida pela translação paralela do conjunto S'_2 ao longo do vetor $(f_m,1)$. $\square$

Desta translação e pela linearidade da projeção Π dada por (5.9), tem-se que

$$\Gamma'_1=\Gamma'_2+(f_m,1).$$

Como as faces $\Gamma'^{(d')}_{1j'}$ são obtidas pela intersecção de Γ'_1 com algum hiperplano H_P, segue-se que

$$\Gamma'^{(d)}_{1j}=\Gamma'^{(d')}_{2j'}+(f_m,1).$$

Donde obtemos o corolário:

Corolário 5.1.1 *Os conjuntos $\Gamma'^{(d')}_{1j'}$ e $S'^{(d')}_{1j'}$ são obtidos pela translação paralela dos conjuntos $\Gamma'^{(d')}_{2j'}$ e $S'^{(d')}_{2j'}$, respectivamente, ao longo do vetor $(f_m,1)$. Além disso, seus cones normais $U'^{(d')}_{1j'}$ e $U'^{(d')}_{2j'}$ coincidem.*

Lema 5.1.2 *Para cada face $\Gamma'^{(d')}_{2j'}$ do poliedro Γ'_2, existe uma correspondente função Hamiltoniano truncada $\widehat{h}^{(d)}_j(X,Y)$ que satisfaz o sistema (5.7) com sistema Hamiltoniano*

$$\dot{x}_i=\frac{\partial\widehat{h}^{(d)}_j}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i=\frac{\partial\widehat{h}^{(d)}_j}{\partial x_i}, \quad i=i\ldots,m, \tag{5.12}$$

tal que $\Pi\Gamma^{(d)}_{2j}=\Gamma'^{(d')}_{2j'}$.

Demonstração: Para cada face ${\Gamma'}^{(d')}_{2j'}$ do poliedro Γ'_2, vimos que existe uma correspondente face $\Gamma^{(d)}_{2j}$ do poliedro Γ_2, bastando tomar a face maximal $\Gamma^{(d)}_{2j} = \Gamma_2({\Gamma'}^{(d')}_{2j'})$. Nesta face $\Gamma^{(d)}_{2j}$ obtemos o sistema truncado na forma (5.3). Mostraremos que este é o sistema Hamiltoniano (5.12) desejado.

Observemos que para algum i, $(1 \leq i \leq m)$, tem-se que $(P,Q)-(f_i,f_i) \in S^{(d)}_{2j}$, onde $(P,Q) \in S^{(d_1)}_{1j_1}$, isto é claro pela demonstração do Lema 5.1.1. Então se $\Pi(P,Q) = (P',q') \in {S'}^{(d'_1)}_{1j'_1}$, então $(P,Q)-(f_m,1) \in {S'}^{(d')}_{2j'}$. Pelo Corolário 5.1.1 à face ${\Gamma'}^{(d')}_{2j'}$ do poliedro Γ'_2 corresponde uma face ${\Gamma'}^{(d')}_{1j'}$ do poliedro Γ'_1, obtida da translação paralela ao longo do vetor $(f_m,1)$. Afirmamos que $\Pi(\Gamma^{(d_1)}_{1j_1}) = {\Gamma'}^{(d')}_{1j'}$. De fato, seja $(P,Q) \in S^{(d_1)}_{1j_1}$, então

$$\Pi(P,Q) = (P',q') = (P',q') - (f_m,1) + (f_m,1).$$

Como $(P',q')-(f_m,1) \in {S'}^{(d')}_{2j'}$ e $\Pi(P,Q)$ é uma translação paralela ao longo do vetor $(f_m,1)$, segue-se que $\Pi(P,Q) \in {S'}^{(d')}_{1j'}$. Logo $\Pi(\Gamma^{(d_1)}_{1j_1}) \subset {\Gamma'}^{(d')}_{1j'}$, a outra implicação se prova de forma análoga e segue a afirmação. Portanto, a função truncada $\widehat{h}^{(d_1)}_{j_1}$ da função Hamiltoniana h, é a solução do Lema. □

Notemos que ao subespaço linear $\mathbf{L}$, gerado pelos vetores (5.9), podemos associar o subespaço linear $\mathbf{L}_*$ em $\mathbb{R}^{2m}_*$, dual de $\mathbf{L}$, que pela nossa definição é o conjunto formado pelos vetores ortogonais aos vetores (5.9).

Lema 5.1.3 *Para cada sistema Hamiltoniano truncado (5.7) existe uma correspondente face ${\Gamma'}^{(d')}_{1j'}$ do poliedro Γ'_2.*

Demonstração: Suponha que $\widehat{h}^{(d)}_j$ uma função Hamiltoniano truncada tal que o sistema (5.12) tem um correspondente truncamento (5.5). Se $R = (P,Q) \in S^{(d)}_{1j}$, então os pontos $(P,Q)-(f_i,f_i)$, $i = 1\ldots,m$, estão no suporte $\widetilde{S}_2$ do sistema (5.12). Notemos que

$$(P,Q)-(f_i,f_i) = (P,Q)-(f_m,f_m) - e_i - e_{i+m} + e_m + e_{2m}, \; i = 1,\ldots,m-1,$$

e como $\mathbf{L}$ é o espaço gerado pelos vetores (5.9), temos que $\widetilde{S}_2$ é paralelo a $\mathbf{L}$.

Por outro lado, $\widetilde{S}_2$ determina uma face $\widetilde{\Gamma}_2$ do poliedro Γ_2, pela definição de $\widehat{h}_j^{(d)}$. Como a projeção (5.8) da face $\widetilde{\Gamma}_2$ é uma face ${\Gamma'}_{2j'}^{(d')}$ do poliedro Γ'_2. Logo $\Pi(\widetilde{\Gamma}_2) = {\Gamma'}_{2j'}^{(d')}$, o que conclui a prova. $\square$

Lema 5.1.4 *Seja $\Gamma_{2j}^{(d)}$ a face maximal do poliedro Γ_2 que é projetada na face ${\Gamma'}_{2j'}^{(d')}$ do poliedro Γ'_2. Sejam os vetores*

$$(U_1, v_1), \dots, (U_k, v_k) \tag{5.13}$$

que formam o esqueleto do cone normal ${U'}_{2j'}^{(d')}$ da face ${\Gamma'}_{2j'}^{(d')}$. Então os vetores

$$(U_1, V_1), \dots, (U_k, V_k) \tag{5.14}$$

onde

$$\begin{array}{l} V_l = (v_{1l}, \dots, v_{ml}), \quad l = 1, \dots, k, \\ v_{il} = v_l + u_{ml} - u_{il}, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad v_{ml} = v_l, \end{array} \tag{5.15}$$

formam o esqueleto do cone normal $U_{2j}^{(d)}$ da face $\Gamma_{2j}^{(d)}$.

Demonstração: Seja o subconjunto fronteira ${S'}_{2j'}^{(d')}$ correspondente a face ${\Gamma'}_{2j'}^{(d')}$. Pelo Corolário 5.1.1 sabemos que

$${S'}_{2j'}^{(d')} = {S'}_{1j'}^{(d')} - (f_m, 1).$$

Logo um ponto de ${S'}_{2j'}^{(d')}$ é da forma

$$(P', q') - (f_m, 1), \quad \text{com } (P', q') \in {S'}_{1j'}^{(d')}.$$

Seja $(P, Q) \in S_{1j}^{(d)}$ tal que $\Pi(P, Q) = (P', q')$, então de acordo com a igualdade (5.11) os pontos $(P, Q) - (f_i, f_i),\ i = 1, \dots, m-1$ estão em $S_{2j}^{(d)}$. Por outro lado,

$$(P, Q) - (f_i, f_i) = (P, Q) - (f_m, f_m) - (e_i + e_{i+m} - e_m - e_{2m}), \quad i = 1, \dots, m-1,$$

assim a face $\Gamma_{2j}^{(d)}$ é paralela ao subespaço linear $\mathbf{L}$, e como o cone normal $U_{2j}^{(d)}$ é ortogonal a $\Gamma_{2j}^{(d)}$, segue-se que $U_{2j}^{(d)}$ está no subespaço $\mathbf{L}_*$, ortogonal a $\mathbf{L}$.

Observemos que de acordo com aplicação Π, dada por (5.8), podemos tomar o esqueleto do cone $U_{2j}^{(d)}$ é formado por vetores da forma (5.14), preservando as primeiras m coordenadas. As outras m últimas coordenadas são obtidas da condição de ortogonalidade de $\Gamma_{2j}^{(d)}$ com $\mathbf{L}_*$ o que conclui que $U_{2j}^{(d)} \subset \mathbf{L}_*$. Logo

$$\langle (U_l, V_l), e_i + e_{i+m} - e_m - e_{2m} \rangle = 0, \quad l = 1, \ldots, k; \quad i = 1, \ldots, m-1,$$

tomando-se $U_l = (u_{1l}, \ldots, u_{ml})$ e $V_l = (v_{1l}, \ldots, v_{ml})$ segue a relação

$$u_{il} + v_{il} - u_{ml} - v_{ml} = 0, \quad l = 1, \ldots, k; \quad i = 1, \ldots, m-1,$$

o que determina o Lema. □

Lema 5.1.5 *Seja* $\Gamma_{1j}^{(d)}$ *uma face maximal do poliedro* Γ_1*, que é projetada na face* ${\Gamma'}_{1j'}^{(d')}$ *do poliedro* Γ'_1*. Se os vetores (5.13) formam o esqueleto do cone normal* ${U'}_{1j'}^{(d')}$ *da face* ${\Gamma'}_{1j'}^{(d')}$*. Então os vetores (5.14), satisfazendo (5.15) formam o esqueleto da intersecção* $U_{1j}^{(d)} \cap \mathbf{L}_*$*.*

Demonstração: A prova é análoga de Lema 5.1.4. □

Teorema 5.1.1 *Para cada face* ${\Gamma'}_{1j'}^{(d')}$ *do poliedro* Γ'_1 *existe uma correspondente função Hamiltoniana truncada* $\widehat{h}_j^{(d)}(X,Y)$ *tal que o sistema Hamiltoniano truncado (5.12) satisfaz (5.7) e* $\Pi\widetilde{\Gamma}_1 = {\Gamma'}_{1j'}^{(d')}$*, onde* $\widetilde{\Gamma}_1$ *é a face associada ao truncamento* $\widehat{h}_j^{(d)}(X,Y)$ *da função Hamiltoniana* h*.*

Reciprocamente, para cada sistema Hamiltoniano truncado (5.7) existe uma correspondente face ${\Gamma'}_{1j'}^{(d')}$ *do poliedro* Γ'_1*.*

Demonstração: A demonstração seguirá dos Lemas desta seção .

De acordo com o Lema 5.1.1 as faces ${\Gamma'}^{(d')}_{1j'}$ e ${\Gamma'}^{(d')}_{2j'}$ são obtidas uma da outra ao longo do vetor $(f_m, 1)$ e seus cones normais ${U'}^{(d')}_{1j'}$ e ${U'}^{(d')}_{2j'}$ coincidem. Sejam $\Gamma^{(d)}_{1j}$ e $\Gamma^{(e)}_{2k}$ as faces maximais dos poliedros Γ_1 e Γ_2, respectivamente, que são projetadas sobre ${\Gamma'}^{(d')}_{1j'}$ e ${\Gamma'}^{(d')}_{2j'}$. Pelo Lema 5.1.2 a função truncada associada à face $\Gamma^{(d)}_{1j}$ tem sistema Hamiltoniano na forma (5.12). A recíproca, utiliza o Lema 5.1.3, supondo-se que o sistema Hamiltoniano truncado (5.7) está determinado na face $\Gamma^{(e)}_{2k}$. De acordo com o Lema 5.1.4, o cone normal $U^{(e)}_{2k}$ da face $\Gamma^{(e)}_{2k}$ é unicamente determinado pelo cone ${U'}^{(d')}_{1j'}$, e de acordo com o Lema 5.1.5, a intersecção $U^{(d)}_{1j} \cap \mathbf{L}_* = U^{(e)}_{2k}$. □

Assim, temos obtido três poliedros:

Γ_1, que determina truncamentos $\widehat{h}$ da função Hamiltoniano h;

Γ_2, que determina truncamentos do sistema Hamiltoniano (5.3);

Γ_1', que determina os truncamentos Hamiltonianos (5.7) do sistema (5.5), i.e., a "intersecção"do poliedro Γ_1 e Γ_2.

O quarto poliedro Γ_2', pelo Lema 5.1, praticamente coincide com o poliedro Γ_1', a menos de uma translação .

Exemplo 5.1.3 :(Continuação do Exemplo (5.1.2)). Observemos que, de fato, o Lema 5.1.1 é satisfeita, pois vale a igualdade $S_1' = S_2' + (0, 1, 1)$. Da mesma forma verifica-se o Corolário 5.1.1.

Utilizando-se o Teorema 5.1.1 as faces ${\Gamma'}^{(0)}_{11}, {\Gamma'}^{(0)}_{12}$ e Γ_1' correspondem a três truncamentos $\widehat{h}_i$ da função Hamiltoniano h que satisfazem o sistema Hamiltoniano truncado (5.7). Observemos que a face $\Gamma^{(0)}_{11} = (1, 1, 1, 1)$ é a face maximal de ${\Gamma'}^{(0)}_{11}$, logo $\widehat{h}_1 = \rho_1\rho_2$ é a função Hamiltoniana truncada que satisfaz (5.7). De modo análogo, obtemos os outros dois truncamentos $\widehat{h}_2 = \rho_1^2\rho_2 + \rho_1\rho_2^2$ e $\widehat{h}_3 = h$.

Comentário 5.1.1 *Se o sistema Hamiltoniano depende de pequenos parâmetros*

$M = (\mu_1, \ldots, \mu_l)$, podemos fazer um estudo análogo, sendo que a expansão da função Hamiltoniana é dada neste caso por

$$h \equiv \sum h_{PQT} X^P Y^Q M^T$$

onde $P, Q \in I\!R^m$, $T \in I\!R^l$ com o suporte $S_1 = \{(P, Q, T) \in I\!R^{2m+l};\ h_{PQT} \neq 0\}$. Os pontos $P = Q = 0$ são excluídos do suporte S_1. A aplicação Π deverá ser considerada como uma aplicação $I\!R^{2m+l} \longrightarrow I\!R^{m+1+l}$ a qual associa (P, Q, T) à (P', q', T), onde P' e q' são obtidos da fórmula (5.8). Assim todas as construções geométricas deverão ser consideradas nos espaços $I\!R^{2m+l}$ e $I\!R^{m+1+l}$ nas coordenadas (P, Q, T) e (P', q', T), respectivamente.

Consideremos, agora, a aplicação $\pi : \mathbb{R}^{2m} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\pi(P, Q) = (p, q)$, tal que

$$p = \sum_{i=1}^{m} p_i \ \text{ e } \ q = \sum_{i=1}^{m} q_i. \tag{5.16}$$

No plano $\mathbb{R}^2$ determinamos a envoltória convexa $\pi\Gamma_1$ da projeção πS_1 do suporte S_1. Para cada face γ em $\pi\Gamma_1$, fazemos corresponder o subconjunto fronteira $\pi S_{1\gamma}$. A este subconjunto fronteira correspondemos o subconjunto maximal $S_{1\gamma}$ em S_1, o qual é projetado sobre $\pi S_{1\gamma}$.

Corolário 5.1.2 *O truncamento $\widehat{h}_\gamma$ associado ao subconjunto $S_{1\gamma}$ satisfaz o sistema Hamiltoniano (5.7).*

Demonstração: Com efeito, de acordo com a fórmula (5.8)

$$p = \sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{i=1}^{m} p'_i, \quad q = \sum_{i=1}^{m} q_i = q',$$

i.e., a projeção π é o resultado de duas projeções consecutivas

$$\Pi(P, Q) = (P', q'), \quad \Pi_1(P', q') = (p', q') = (p, q).$$

Conseqüentemente, para cada face γ a intersecção $\Gamma'_1 \cap \Pi_1^{-1}(\gamma)$ é uma face do poliedro Γ_1, que pelo Teorema 5.1.1 corresponde a um Hamiltoniano truncado (5.7). $\square$

5.2 Algoritmo

Seguindo o raciocínio utilizado no exemplo 5.1.3 podemos descrever o **algoritmo** para achar todos os truncamentos Hamiltonianos (5.12) do sistema (5.3), consistindo de quatro passos:

Passo 1. Usando o suporte S_1 da função Hamiltoniana (5.2) achamos os conjunto $S'_1 = \Pi S_1$ onde $\Pi : \mathbb{R}^{2m} \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ é a aplicação dada pela fórmula (5.8).

Passo 2. Achamos as faces, ${\Gamma'}_{1j'}^{(d')}$, seus subconjuntos fronteira, ${S'}_{1j'}^{(d')}$ e os cones normais, ${U'}_{1j'}^{(d')}$ correspondentes.

Passo 3. Determinamos os correspondentes subconjuntos fronteiras maximais $S_{1j}^{(d)} = S_1({S'}_{1j'}^{(d')})$ e fazemos corresponder os truncamentos $\widehat{h}_j^{(d)}$ da função Hamiltoniano h. Estes truncamentos formam todos os possíveis truncamentos Hamiltonianos (5.12) do sistema (5.3).

Passo 4. Usando os Lemas 5.1.4 e 5.1.5 achamos a intersecção do cone normal $U_{1j}^{(d)}$ com $\mathbf{L}_*$ a qual coincide com o cone normal $U_{2k}^{(e)}$.

Este algoritmo será usado nas funções Hamiltonianos das aplicações no próximo capítulo, simplificando o estudo das mesmas.

Capítulo 6

Aplicações à Mecânica

6.1 O sistema de Henon-Heiles generalizado

Nesta seção estaremos somente preocupados em determinar os sistemas Hamiltonianos truncados da forma do sistema de Henon-Heiles que satisfaz (5.7). Faremos uso do algoritmo nesta determinação.

Seja o sistema de Henon-Heiles generalizado

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = ay_1 + 2dy_1y_2, & \dot{y}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = by_2 + dy_1^2 - cy_2^2, & \dot{y}_2 = -x_2, \end{array} \tag{6.1}$$

onde $a, b, c, d \neq 0$. O problema de Henon-Heiles [5] é dado quando $a = b = -c = -d = 1$.

Observa-se que é um sistema Hamiltoniano com a função Hamiltoniano

$$h = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + ay_1^2 + by_2^2) + dy_1^2y_2 - \frac{1}{3}cy_2^3. \tag{6.2}$$

Comentário 6.1.1 *Quando $a, b > 0$, temos que a parte quadrática é definida positiva. Portanto, neste caso, a origem $(0,0,0,0)$ é estável, no sentido de Liapunov.*

A função Hamiltoniano (6.2) tem suporte

$$\begin{aligned} S_1 &= \{R_1 = (2,0,0,0); R_2 = (0,2,0,0); R_3 = (0,0,2,0); \\ &\qquad R_4 = (0,0,0,2); R_5 = (0,0,2,1); R_6 = (0,0,0,3)\}. \end{aligned}$$

Utilizemos, agora, o **algoritmo** descrito no capítulo anterior:

Passo 1. Neste caso $m = 2$, segue-se que o suporte S_1 é projetada no espaço $\mathbb{R}^3$. De acordo com a fórmula (5.8), tem-se que $S_1' = \Pi S_1$ é dado por

$$\begin{aligned} S_1' &= \{R_1' = (2,0,0); R_2' = (0,2,0); R_3' = (-2,2,2); \\ &\qquad R_4' = (0,0,2); R_5' = (-2,2,3); R_6' = (0,0,3)\}, \end{aligned}$$

sendo que

$$\Pi R_j = R_j', \quad j = 1,2,3,4,5,6.$$

Passo 2. Observe que o conjunto S_1' é idêntico ao conjunto S do exemplo (1.1.11) no Capítulo 1. Assim sua envoltória convexa Γ_1' é um poliedro de cinco faces, nove lados e seis vértices, mostrado na figura (1.10). São ao todo vinte faces ${\Gamma'}_{1j'}^{(d')}$ e, conseqüentemente, vinte subconjuntos ${S'}_{1j'}^{(d')}$. Estes indicados na tabela (1.1.2), onde o número j indicará os números $1j'$ e o número i corresponderá aos pontos R_j'.

Vimos também no exemplo (1.1.11) os esqueletos que determinam os cones normais ${U'}_{1j'}^{(2)}$ ou seja, para a face ${\Gamma'}_{11}^{(2)} \supset \{R_3', R_4', R_5', R_6'\}$ tem-se que o esqueleto de ${U'}_{11}^{(2)}$ consiste do vetor $N_1 = (-1,-1,0)$. Para a face ${\Gamma'}_{12}^{(2)} \supset \{R_1', R_2', R_5', R_6'\}$ tem-se que o vetor $N_2 = (3,3,2)$ é o esqueleto do cone normal ${U'}_{12}^{(2)}$. O cone normal ${U'}_{13}^{(2)}$ tem esqueleto $N_3 = (0,-1,0)$, o do cone normal ${U'}_{14}^{(2)}$ é o vetor $N_4 = (0,1,0)$ e o do cone normal $\subset {U'}_{15}^{(2)}$ é o vetor $N_5 = (-1,-1,-1)$.

Passo 3. Enumeramos as faces bidimensionais ${\Gamma'}_{1j'}^{(2)}$ do poliedro Γ_1' e pelo Teorema 5.1.1 correspondemos aos truncamentos $\widehat{h}_j$ da função Hamiltoniano h que satisfaz (5.7). Para a face ${\Gamma'}_{11}^{(2)} \supset \{R'_3, R'_4, R'_5, R'_6\}$, temos o correspondente função Hamiltoniano truncada

$$\widehat{h}_1 = \frac{1}{2}(ay_1^2 + by_2^2) + dy_1^2 y_2 - \frac{1}{3}cy_2^3.$$

Para a face ${\Gamma'}_{12}^{(2)} \supset \{R'_1, R'_2, R'_5, R'_6\}$, temos

$$\widehat{h}_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + dy_1^2 y_2 - \frac{1}{3}cy_2^3.$$

Para a face ${\Gamma'}_{13}^{(2)} \supset \{R'_1, R'_4, R'_6\}$ temos

$$\widehat{h}_3 = \frac{1}{2}(x_1^2 + by_2^2) - \frac{1}{3}cy_2^3.$$

Para a face ${\Gamma'}_{14}^{(2)} \supset \{R'_2, R'_3, R'_5\}$ temos

$$\widehat{h}_4 = \frac{1}{2}(x_2^2 + ay_1^2) + dy_1^2 y_2.$$

Para a face ${\Gamma'}_{15}^{(2)} \supset \{R'_1, R'_2, R'_3, R'_4\}$ temos

$$\widehat{h}_5 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + ay_1^2 + by_2^2).$$

Passo 4. No **Passo 2** foram indicados os vetores N_j que formam os esqueletos dos cones normais ${U'}_{1j}^{(2)}$. Estaremos somente preocupados em determinar os cones normais às faces maximais que são projetadas sobre as faces de dimensão dois.

Utilizando a fórmula (5.15) do Lema 5.1.4, temos que o vetor $N_1 = (-1, -1, 0)$ determina o vetor $P_1 = (-1, -1, 0, 0)$ que, segundo o Lema 5.1.4 é o esqueleto do cone normal correspondente a face maximal em Γ_1 da face ${\Gamma'}_{11}^{(2)}$. De modo análogo podemos obter todos os outros cones normais.

6.2 Sistemas Hamiltonianos autônomos com dois graus de liberdade e frequências nulas

Nesta seção, apresentamos um estudo feito por Bruno em [3] no problema de frequência nulas em sistemas Hamiltonianos autônomos com dois graus de liberdade. Tal problema foi também estudado por Sokol'skii em [9] (Ver apêndice B), por tal motivo algumas vezes chamaremos a este problema simplesmente como problema de Sokol'skii. Calcularemos, em dois casos dependendo do posto da parte linear, os truncamentos Hamiltonianos da função Hamiltoniano que satisfaz (5.7). Em alguns destes truncamentos acharemos curvas potências assintóticas e usaremos os resultados do Capítulo 5, para obter resultados de estabilidade da solução de equilíbrio $(0, 0, 0, 0)$ e tais resultados melhoram os obtidos por Sokol´skii em [9].

Vejamos os dois primeiros casos, citados no Apêndice B, para a função Hamiltoniano h:

Caso (I) O posto da parte linear é três. Neste caso a função Hamiltoniano h dada por

$$h = H_2 + H_3 + H_4 + \dots, \tag{6.3}$$

onde H_2 será considerada normalizada, assim

$$H_2 = -x_1x_2 + \frac{1}{2}\delta y_1^2, \quad \delta = \pm 1, \tag{6.4}$$

e a forma H_3 será considerada genérica.

Temos que o conjunto suporte S_1 da função Hamiltoniano h, trata-se de um conjunto infinito, assim usaremos os resultados da Seção 3, do Capítulo 1, em particular o algoritmo descrito naquela Seção, utilizado na determinação do subconjunto dominante $S_1/\mathbb{R}^4_+$.

Obviamente $S_1 \subset \mathbb{Z}^4_+$, assim de acordo com exemplo (1.1.12), o subconjunto dominante $S_1/\mathbb{R}^4_+$ está contido no conjunto dos pontos $R \in S_1$ com $\langle K, R\rangle \leq 3$, onde é suposto $K = (1,1,1,1)$. Desta forma, no algoritmo $c_0 = 2$ e, de acordo com a equação (6.4)

$$S_2 = \{R \in S_1;\ \langle K, R\rangle = 2\} = \{R_1 = (0,0,1,1), R_2 = (0,0,2,0)\}. \qquad (6.5)$$

Seguindo o algoritmo, os pontos $R \in \mathbb{Z}_+^4$ com $\langle K, R\rangle = 3$ tal que

$$R - R_1 \geq 0 \text{ ou } R - R_2 \geq 0, \qquad (6.6)$$

não estão em $S_1/\mathbb{R}_+^4$. Sabemos que existem vinte pontos $R \in \mathbb{Z}_+^4$ que satisfazem a equação $\langle K, R\rangle = 3$, mas com a restrição (6.6), este número reduz-se a doze pontos R_3 a R_{14}, colocados na segunda linha da Tabela (6.2). Nesta mesma tabela também constam, na terceira linha, as projeções obtidas da aplicação dada pela fórmula (5.8), finalizando o algoritmo, temos que

$$S_1'/\mathbb{R}_+^4 = \{R_1', \ldots, R_{14}'\}.$$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	1	0	0	1	0	2	0	0	1	0	2	0	3	0
R_j	1	0	0	0	1	0	2	0	0	1	0	2	0	0
	0	2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	2	1	1	0	0	3	2	2	1	1	0	3
	1	-2	-1	0	-1	1	-1	0	1	0	2	0	3	0
R_j'	1	2	1	1	2	1	3	0	0	1	0	2	0	0
	0	2	3	2	2	1	1	3	2	2	1	1	0	3

Tabela 6.1: Pontos R_j do subconjunto $S_1/\mathbb{R}_+^n$ e suas projeções R_j'.

Determinamos a envoltória convexa Γ_1' de $S_1'/\mathbb{R}_+^n$, que é o poliedro da Figura 6.3. Consistindo de oito faces, doze lados e sete vértices.

Lembremos que as faces ${\Gamma'}_{1j'}^{(2)}$ que nos interessam são as que contém a reta normal inserida no cone $\mathbb{R}_-^3$, assim são somente três: a face ${\Gamma'}_{11}^{(2)} \supset \{R_1', R_2', R_8'\}$, cuja normal é $N_1 = -(5,7,4)$; a face ${\Gamma'}_{12}^{(2)} \supset \{R_1', R_2', R_{14}'\}$, cuja normal é $N_2 = -(4,2,5)$ e a face ${\Gamma'}_{13}^{(2)} \supset \{R_1', R_8', R_9', R_{11}', R_{13}'\}$ cuja normal é $N_3 = -(1,2,1)$.

Figura 6.1: A envoltória convexa dos pontos R'_j.

Para a face ${\Gamma'}_{11}^{(2)}$ correspondemos a face maximal $\Gamma_{11}^{(2)} \supset \{R_1, R_2, R_8\}$ que por sua vez determina a função Hamiltoniano truncada

$$\widehat{h}_1 = -x_1 x_2 + \frac{1}{2}\delta y_1^2 + a y_2^3, \ a \neq 0, \tag{6.7}$$

e o correspondente sistema Hamiltoniano truncado

$$\dot{x}_1 = \delta y_1, \quad \dot{x}_2 = 3a y_2^2, \quad \dot{y}_1 = x_2, \quad \dot{y}_2 = x_1. \tag{6.8}$$

Pelo Lema 5.1.4, o esqueleto do cone normal $U_{1j}^{(2)}$ é determinado pelos vetores (5.14) que satisfazem as condições (5.15). No nosso caso é um vetor $N_j = (u_{1j}, u_{2j}, v_{1j}, v_{2j})$, onde

$$v_{1j} = v + u_{2j} - u_{1j}, \quad v_{2j} = v, \tag{6.9}$$

sendo que o vetor $N'_j = (u_{1j}, u_{2j}, v)$ é o vetor esqueleto de ${U'}_{1j}^{(2)}$. Assim a face $\Gamma_{11}^{(2)}$ tem o cone normal $U_{11}^{(2)}$ determinado pelo esqueleto que consiste do ponto $N_1 = -(5, 7, 6, 4)$.

Consideremos a curva potência assintótica na forma (4.6) de ordem N_1, ou seja,

$$x_1 = \alpha_1 t^{-5}, \quad x_2 = \alpha_2 t^{-7}, \quad y_1 = \beta_1 t^{-6}, \quad y_2 = \beta_2 t^{-4}, \tag{6.10}$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ coeficientes reais não nulos. Esta curva é considerada com o intuito de obtermos resultados com a Teoria desenvolvida nos capítulos anteriores.

Notemos que a curva (6.10) é uma curva integral não trivial do sistema (6.8), desde que

$$-5\alpha_1 = \delta\beta_1, \quad -7\alpha_2 = 3a\beta_2^2, \quad -6\beta_1 = \alpha_1,$$

ou melhor,

$$\alpha_2 = -6\beta_1 = 30\delta\alpha_1 = -120\delta\beta_2^2 \neq 0, \quad \beta_2 = 280\delta a^{-1} \neq 0. \tag{6.11}$$

Observe que reparametrizando a curva (6.10), por $\tau = \dfrac{1}{y_2(t)}$, obtemos

$$x_1(\tau) = \frac{\alpha_1}{|\beta|^4}\tau^{-5/4}, \quad x_2(\tau) = \frac{\alpha_2}{|\beta|^4}\tau^{-7/4}, \quad y_1(\tau) = \frac{\beta_1}{|\beta|^4}\tau^{-6/4}, \quad y_2(\tau) = \frac{\beta_2}{|\beta|}\tau^{-1}. \tag{6.12}$$

Verifica-se que esta curva (6.12) é uma curva potência assintótica do sistema hamiltoniano truncado (6.8), logo também será para o sistema logaritmo associado, cuja ordem está no cone normal $U_{11}^{(2)}$. Pelo Teorema 4.3.1 do Capítulo 4, temos que a primeira aproximação da curva (6.12) é uma curva potência assintótica do sistema logaritmo completo e consequentemente será para o sistema completo (5.3). Mas, quando τ decresce a curva (6.12) foge da origem, assim para toda vizinhança do equilíbrio $(0, 0, 0, 0)$ existe um τ^* em que a solução (6.12) não pertence a vizinhança. Assim o ponto de equilíbrio $(0, 0, 0, 0)$ é instável.

Comentário 6.2.1 *Para que a curva potência (6.10) e (6.11) seja solução do sistema (6.8) é necessário supor que $a \neq 0$. Quando $a = 0$ o monômio correspondente ao vértice da face $\Gamma'^{(2)}_{11}$ torna-se zero, assim o poliedro Γ'_1 é mudado e não contém a face $\Gamma'^{(2)}_{11}$.*

Em Sokol'skii [9] (Ver Apêndice B) os casos (B.4) e (B.5) correspondem a função Hamiltoniano truncada (6.7). Analogamente à solução (6.10) encontrada na nossa teoria corresponde a fórmula (B.6) obtida por Sokol'skii da também uma solução particular do sistema Hamiltoniano, onde as constantes $P_2(0)$ e $A\delta P_2(0)$ devem ser positivas, por (B.6) são tomados raízes de ordem quatro delas. Isto significa que a solução (B.7) em [9] existe somente quando $A\delta > 0$, mas Bruno através de (6.10) e (6.11) mostra que é necessário, somente que $a \neq 0$, como também afirma o Teorema B.0.1, devido a Sokol'skii.

Caso (II) O posto da parte linear é dois. Neste caso a forma quadrática normalizada é dada por

$$H_2 = \frac{1}{2}\delta_1 y_1^2 + \frac{1}{2}\delta_2 y_2^2 \tag{6.13}$$

onde $\delta_1 = \pm 1, \delta_2 = \pm 1$, e vamos considerar H_3 na forma genérica.

Novamente, $S_1 = S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup \ldots$, onde $S_c = \{R \in \mathbb{Z}^4;\ \langle K, R\rangle = c,\ K = (1,1,1,1)\}$. Logo, S_1 é infinito. Usando o **algoritmo**, citado **Caso I**, temos que

$$\langle K, R\rangle = 2 \text{ somente quando } \{R_1 = (0,0,2,0), R_2 = (0,0,0,2)\} \subset S_1/\mathbb{R}^4_+.$$

Dos elementos $R \in \mathbb{Z}^4_+$ tal que $\langle K, R\rangle = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 3$, excluímos os pontos que satisfazem pelo menos uma das inequações abaixo

$$R - R_1 \geq 0, \quad R - R_2 \geq 0. \tag{6.14}$$

Assim, obtemos o subconjunto dominante $S_1/\mathbb{R}^4_+ = \{R_1, R_2, R_3, \ldots, R_{13}\}$, onde R_3 a R_{13} são os pontos que não satisfazem as duas inequações (6.14). Todos estes pontos de $S_1/\mathbb{R}^4_+$, junto com suas projeções $R'_j = \Pi R_j,\ j = 1, \ldots, 13$ usando a aplicação (5.9), são dados na tabela 6.2

O conjunto poliedral Γ'_1, que é a envoltória convexa externa do conjunto S'_1, é determinado por sete faces bidimensionais, onze lados e oito vértices, mostrada na figura (6.2).

Para a face $\Gamma'^{(2)}_{11}$, temos que $P \in U'^{(2)}_{11}$ se

$$\langle P, R'_1\rangle = \langle P, R'_2\rangle = \langle P, R'_{10}\rangle = \langle P, R'_{13}\rangle = \langle P, R'_{11}\rangle = \langle P, R'_{12}\rangle;$$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	0	0	1	0	2	1	0	2	0	3	2	1	0
R_j	0	0	0	1	0	1	2	0	2	0	1	2	3
	2	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
	0	2	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
	-2	0	0	-1	1	0	-1	2	0	3	2	1	0
R'_j	2	0	1	2	1	2	3	0	2	0	1	2	3
	2	2	2	2	1	1	1	1	1	0	0	0	0

Tabela 6.2: Pontos R_j do subconjunto $S_1/\mathbb{R}^n_+$ e suas projeções R'_j no **Caso II**.

Figura 6.2: A envoltória convexa dos pontos $R'_j \subset S'_1$ no **Caso II**.

$$\langle P, R'_1\rangle > \langle P, R'_3\rangle;\ \langle P, R'_1\rangle > \langle P, R'_4\rangle;\ \langle P, R'_1\rangle > \langle P, R'_8\rangle,$$

o que implica

$$-2p_1 + 2p_2 + 2p_3 = 2p_3 = 3p_1 = 3p_2 = 2p_1 + p_2 = p_1 + 2p_2;$$

$$-2p_1 + 2p_2 + 2p_3 > p_2 + 2p_3; -2p_1 + 2p_2 + 2p_3 > -p_1 + 2p_2 + 2p_3;$$

$$-2p_1 + 2p_2 + 2p_3 > 2p_1 + p_3,$$

assim

$$3p_1 = 3p_2 = 2p_3 < 0.$$

Logo, $N'_1 = (-2, -2, -3)$ forma o esqueleto do cone $U'^{(2)}_{11}$. Analogamente, podemos obter para as outras faces,

$$
\begin{aligned}
\Gamma'^{(2)}_{12} &\sim N'_2 = (-1, 0, -1);\\
\Gamma'^{(2)}_{13} &\sim N'_3 = (0, -1, 0);\\
\Gamma'^{(2)}_{14} &\sim N'_4 = (0, 1, 1);\\
\Gamma'^{(2)}_{15} &\sim N'_5 = (0, 0, 1);\\
\Gamma'^{(2)}_{16} &\sim N'_6 = (1, 0, 2);\\
\Gamma'^{(2)}_{17} &\sim N'_7 = (1, 1, 1).
\end{aligned}
$$

Notemos que o poliedro $\Gamma'_1/\mathbb{R}^3_+$ é determinado pelo quadrilátero $\Gamma'^{(2)}_{11}$ de vértices $R'_1, R'_2, R'_{10}, R'_{13}$, pois é o único que o raio normal está totalmente inserida no interior do cone $\mathbb{R}^3_-$, dual de $\mathbb{R}^3_+$. Pelo Lema 5.1.4, e utilizando a fórmula (6.9) o vetor normal $N'_{11} = -(2, 2, 3)$ corresponde o vetor $N_{11} = -(2, 2, 3, 3)$ do esqueleto do cone normal $U^{(2)}_{11}$.

À face $\Gamma'^{(2)}_{11}$, podemos corresponder a seguinte função Hamiltoniana truncada

$$
\begin{aligned}
\widehat{h}_1 &= \tfrac{1}{2}\delta_1 y_1^2 + \tfrac{1}{2}\delta_2 y_2^2 + \widetilde{h}(x_1, x_2),\\
\widetilde{h}(x_1, x_2) &= a x_1^3 + b x_1^2 x_2 + c x_1 x_2^2 + d x_2^3.
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

De acordo com o Teorema 5.1.1, determina um sistema Hamiltoniano truncado

$$\dot{x}_i = \delta_i y_i, \qquad \dot{y}_i = -g_i(x_1, x_2), \quad i = 1, 2. \tag{6.16}$$

onde $g_i = \dfrac{\partial \widetilde{h}}{\partial x_i}$.

Como no caso anterior consideraremos uma curva potência assintótica na forma (4.6) cuja ordem é N_{11} que pertence ao cone normal $U'^{(2)}_{11}$, ou seja, uma curva da forma

$$x_1 = \alpha_1 t^{-2}, \quad x_2 = \alpha_2 t^{-2}, \quad y_1 = \beta_1 t^{-3}, \quad y_2 = \beta_2 t^{-3}, \tag{6.17}$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ coeficientes reais não todos nulos, a serem determinados.

Verifica-se facilmente que esta curva (6.17) é uma curva integral não trivial do sistema (6.16), desde que

$$\begin{aligned} 2\alpha_i &= \delta_i\beta_i, \\ 3\beta_i &= -g_i(\alpha_1, \alpha_2), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Portanto, determinaremos condições sobe α_i, β_i para que o sistema (6.18) seja satisfeito e para que a curva (6.17) seja uma curva integral não trivial do sistema (6.16).

Defina $f(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 g_2 - \delta_1\delta_2\alpha_2 g_1$. Afirmamos que as soluções da equação $f(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ são equivalentes as soluções do sistema (6.18). De fato, substituindo β_1 e β_2 das primeiras euqações em (6.18) nas últimas equações (6.18), obtemos o sistema de duas equações

$$-6\delta_i\alpha_i = g_i(\alpha_1, \alpha_2), \quad i = 1, 2. \tag{6.19}$$

Multiplicando-se a primeira equação de (6.19) por $\delta_1\alpha_2$ e a segunda por $\delta_1\alpha_1$, e subtraindo a primeira pela segunda, obtemos a relação

$$-6\alpha_1\alpha_2 + 6\alpha_1\alpha_2 = \alpha_2 g_1(\alpha_1, \alpha_2) - \delta_1\delta_2\alpha_1 g_2(\alpha_1, \alpha_2),$$

o que origina a afirmação.

Suponhamos que $\alpha_2 \neq 0$. Então a função f, definida acima, tem pelo menos uma raiz real $\kappa = \alpha_1/\alpha_2$, no seguinte sentido

$$\begin{aligned} f(\alpha_1, \alpha_2) &= b\alpha_1^3 + (2c - 3a\delta_1\delta_2)\alpha_1^2\alpha_2 + (3d - 2b\delta_1\delta_2)\alpha_1\alpha_2^2 - c\delta_1\delta_2\alpha_2^3 \\ &= \alpha_2^3\{b\kappa^3 + (2c - 3a\delta_1\delta_2)\kappa^2 + (3d - 2b\delta_1\delta_2)\kappa - c\delta_1\delta_2\} \\ &= \alpha_2^3 P(\kappa), \end{aligned} \tag{6.20}$$

onde $P(\kappa) = g_2(\kappa, 1) - \delta_1\delta_2 g_1(\kappa, 1)$ é uma equação cúbica que tem pelo menos uma raiz real.

Se $\alpha_2 = 0$, substituindo no sistema (6.18) obtém-se que $\alpha_1 = 0$, consequentemente, $\beta_i = 0$, $i = 1, 2$, assim a curva (6.17) é trivial, pela qual não estamos interessados. Analogamente deveremos supor que $\alpha_1 \neq 0$, logo $\kappa \neq 0$.

Lema 6.2.1 *Se $g_i(\kappa,1) \neq 0,\ i=1,2$, então o sistema (6.18) tem solução real não nula, dada por*

$$\alpha_1 = -6\delta_2/g_2(\kappa,1), \qquad \alpha_2 = -6\delta_1/g_1(\kappa,1), \qquad \beta_i = -2\delta_i\alpha_i, \quad i=1,2. \quad (6.21)$$

Demonstração: Basta verificar que os valores de α_1 e α_2 dado em (6.21) é raiz de f. □

Notemos que se algum $g_i(\kappa) = 0$ então o outro necessariamente também é igual a zero, pois estamos considerando $\alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 \neq 0$.

Lema 6.2.2 *Seja o conjunto de soluções comuns as equações*

$$g_1(\kappa,1) = 0, \quad g_2(\kappa,1) = 0. \quad (6.22)$$

Então este conjunto consiste de um único ponto, que é uma raiz dupla de cada equação.

Demonstração: Observemos que

$$\begin{aligned} g_1(\kappa,1) &= 3a\kappa^2 + 2b\kappa + c, \\ g_2(\kappa,1) &= b\kappa^2 + 2c\kappa + 3d. \end{aligned}$$

As soluções das equações (6.22) coincidem quando os coeficientes de ambas equações são proporcionais, i.e.,

$$g_1(\kappa,1) = vg_2(\kappa,1),$$

o que implica

$$3a = vb; \quad 2b = v2c; \quad c = v3d,$$

logo ,

$$a = v^3d; \quad b = 3v^2d; \quad c = 3vd.$$

Assim $g_1(\kappa,1) = 3dv(v\kappa+1)^2$ e $g_2(\kappa,1) = 3d(v\kappa+1)^2$, e $\kappa = -v^{-1}$ é a única raiz comum. $\square$.

Consideremos os polinômios dos coeficientes $a, b, c, d, \delta = \delta_1\delta_2$:

$$D_1 = 9d^2 + 8c^2\delta - 12ac, \quad D_2 = 9a^2 + 8b^2\delta - 12bd,$$

$$R = 27a^2d^2 - 4ac^3 + 4b^3d - b^2c^2 - 18abcd,$$

$$D_3 = 18ABCD + B^2C^2 - 4AC^3 - 4DB^3 - 27A^2D^2,$$

onde $A = b, \quad B = 2c - 3a\delta, \quad C = 3d - 2b\delta, \quad D = -c\delta.$

Teorema 6.2.1 *O sistema de equações (6.19) não tem solução real* $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$ *somente em dez casos:*

1) $b \neq 0, c \neq 0, R = 0, D_3 < 0$;
2) $\delta_1\delta_2 = -1, \pm 3a = b = \pm c = 3d \neq 0$;
3) $b = 0, 3a - 2c\delta_1\delta_2 \neq 0, D_1 < 0$;
4) $c = 0, 2b - 3d\delta_1\delta_2 \neq 0, D_2 < 0$;
5) $\delta_1\delta_2 = -1, b = 0, 3a = -2c, 2c^2 = 9d^2 \neq 0$;
6) $\delta_1\delta_2 = -1, c = 0, 3d = -2b, 2b^2 = 9a^2 \neq 0$;
7) $b = d = 0, 3a = 2c\delta_1\delta_2 \neq 0$;
8) $a = b = c = 0, d \neq 0$;
9) $b = c = d = 0, a \neq 0$;
10) $a = c = 0, 2b = 3d\delta_1\delta_2 \neq 0$.

A demonstração deste Teorema foi omitida, por constar de muitos termos técnicos. Qualquer interesse ver [3].

Para este **Caso II** temos o estudo feito por Sokol'skii em [9] (Ver apêndice B) determinando o Hamiltoniano (B.7) com truncamento $K^{(0)}$ equivalente a função Hamiltoniana truncada (6.15). Em contradição com o Teorema 6.2.1, em Sokol'skii o sistema Hamiltoniano truncado (6.16) tem sempre solução real do tipo (6.17) (equivalente a (B.9)), se

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0 \quad (\equiv h_{3000}^2 + h_{2100}^2 + h_{1200}^2 + h_{0300}^2 \neq 0). \tag{6.23}$$

Mas isto não é verdade. Por exemplo, quando $a = b = d = 0$ e $c \neq 0$ a equação toma a forma $f(\alpha_1, \alpha_2) = (2\alpha_1^2 - \delta_1\delta_2\alpha_2^2)\alpha_2 = 0$. Se $\delta_1\delta_2 = -1$, então a equação tem somente raiz real $\alpha_2 = 0$, assim $\alpha_1 = 0$, como já vimos. Pelo sistema (6.18) obtemos também que $\beta_1 = \beta_2 = 0$, portanto mesmo satisfazendo a condição (6.23) a única solução real é a trivial. Notemos que este caso $a = b = d = 0, c \neq 0, \delta_1\delta_2 = -1$ é considerado no caso 3 do Teorema 6.2.1.

6.3 O problema restrito circular de três corpos

6.3.1 Formulação do problema

Sejam três corpos pontuais P_1, P_2 e P_3 se movimentando num plano sob influência da lei gravitacional de Newton. Os corpos P_1 e P_2 tem massas m_1 e m_2, respectivamente, e a massa do corpo P_3 é tão pequena que sua influência sobre os movimentos dos corpos P_1 e P_2 podem ser desprezados; diremos que a massa do corpo P_3 é igual a zero. Então o corpo P_2 executa um movimento Kepleriano relativo ao corpo P_1. Se assumirmos que o corpo P_2 move-se num circulo, o problema do movimento do corpo P_3 é chamado *problema circular restrito dos três corpos no plano*, ou simplesmente *problema restrito*.

Assumiremos que as unidades da massa, o tempo, e a distância são obtidas de tal forma que a soma m_1+m_2, a constante gravitacional, a distância P_1P_2 e a velocidade angular de P_2 relativo ao corpo P_1 são iguais a um. Para isto parametrizamos $m_2 = \mu$. O problema é formulado por dois sistemas de coordenadas, um fixo e outro giratório, e consideraremos a origem em ambos os sistemas no corpo P_1.

Seja X_1, X_2 as coordenadas do ponto P_3 no sistema imóvel; as equações do movimento formam um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade com função Hamiltoniana

$$\begin{aligned} h_1 &= \tfrac{1}{2}(Y_1^2 + Y_2^2) - \frac{m_1}{r_1} + m_2 R, \\ R &= X_1 \cos t + X_2 \text{sen } t - \frac{1}{r_2}, \end{aligned} \tag{6.24}$$

onde r_1 e r_2 são as distâncias P_1P_3 e P_2P_3, respectivamente, $Y_i = \dot{X}_i$ e no tempo $t = 0$ o corpo P_2 tem coordenadas $(1, 0)$. Se introduzirmos um sistema de coordenadas x_1, x_2 "rotatório"com o corpo P_2, em que a posição do corpo P_2 será sempre $x_1 = 1$ e $x_2 = 0$, isto é, fazendo

$$(x_1 + ix_2)e^{it} = X_1 + iX_2$$

e nestas coordenadas o sistema de equações (6.24) do movimentos do corpo P_3 torna-se

$$\dot{x}_i = \frac{\partial h}{\partial y_i}, \qquad \dot{y}_i = -\frac{\partial h}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \tag{6.25}$$

onde

$$\begin{aligned} h &= h_0 + \mu R, \\ h_0 &= \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - \frac{1}{r_1}, \\ R &= \frac{1}{r_1} + x_1 - \frac{1}{r_2}, \end{aligned} \tag{6.26}$$

e

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}.$$

6.3.2 Estudo do problema

Consideraremos o problema descrito nas coordenadas x_1, x_2, dado pelo sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade e com um parâmetro μ, onde a função Hamiltoniana é (6.26), que pode ser da forma

$$h = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - \frac{1 - \mu}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}} + \mu x_1. \tag{6.27}$$

Quando $\mu = 0$ o problema torna um problema de dois corpos, P_1 e P_3. Quando $\mu > 0$, porém pequeno, o problema é análogo a uma pertubação singular do caso $\mu = 0$ próximo do corpo P_2. Assim para acharmos as primeiras aproximações para o problema restrito de três corpos é necessário introduzir coordenadas locais próximas do corpo P_2

$$\xi_1 = x_1 - 1, \qquad \xi_2 = x_2, \qquad \eta_1 = y_1, \qquad \eta_2 = y_2 - 1.$$

Expressando-se a função Hamiltoniana (6.27) nestas novas coordenadas temos,

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}[\eta_1^2 + (\eta_2+1)^2] + \xi_2\eta_1 - (\xi_1+1)(\eta_2+1) - \frac{1-\mu}{\sqrt{(\xi_1+1)^2+\xi_2^2}} \\ &\quad -\frac{\mu}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} + \mu(\xi_1+1) \\ &= \frac{1}{2}(\eta_1^2+\eta_2^2) + \xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2 + \frac{1}{2} - \left[1 + \xi_1 + \frac{1}{\sqrt{(\xi_1+1)^2+\xi_2^2}}\right] \\ &\quad +\mu\left[1+\xi_1+\frac{1}{\sqrt{(\xi_1+1)^2+\xi_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}\right]. \end{aligned}$$

Expandindo a raiz $\dfrac{1}{\sqrt{(\xi_1+1)^2+\xi_2^2}}$ em série de Maclaurin, obtemos

$$\begin{aligned} h + \frac{3}{2} - 2\mu &= \frac{1}{2}(\eta_1^2+\eta_2^2) + \xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2 - \xi_1^2 + \frac{1}{2}\xi_2^2 + f(\xi_1,\xi_2^2) \\ &\quad + \mu\left[\xi_1^2 - \frac{1}{2}\xi_2^2 - f(\xi_1,\xi_2^2) - \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}\right], \end{aligned} \tag{6.28}$$

onde f é uma série de potências convergentes, com termos de ordem maior que três.

O suporte S_1 da série (6.28) consiste dos pontos

$$\begin{aligned} S_1 = \{ & R_1 = (0,0,2,0,0); R_2 = (0,0,0,2,0); R_3 = (0,1,1,0,0); \\ & R_4 = (1,0,0,1,0); R_5 = (2,0,0,0,0); R_6 = (0,2,0,0,0); \\ & R_{7_{kl}} = (k,2l,0,0,0); R_8 = (2,0,0,0,1); R_9 = (0,2,0,0,1); \\ & R_{10} = (-1,0,0,1,0); R_{11} = (0,-1,0,0,1); R_{12_{kl}} = (k,2l,0,0,1)\} \cup J, \end{aligned}$$

onde $k, l \geq 0, k + 2l \geq 3$ e J é o segmento conectando os pontos R_{10} e R_{11}. Este segmento é o suporte da raiz $\dfrac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}$.

Fazendo a projeção (5.16), $\pi R = R'' = (p, q, s) \in \mathbb{R}^3$, usando o Comentário 5.1.1 e considerando $l = 1$, obtemos que o suporte S_1'' determinado por $\pi S_1 = S_1''$, consiste dos pontos

$$R_1'' = (0, 2, 0); R_2'' = (1, 1, 0); R_3'' = (2, 0, 0); R_{4_k}'' = (k + 2, 0, 0);$$

$$R_5'' = (2, 0, 1); R_6'' = (-1, 0, 1) \text{ e} R_{7_k}'' = (k + 2, 0, 1),$$

onde o número inteiro $k \geq 1$.

A envoltória convexa externa $\Gamma_1'' \subset \mathbb{R}^3$ do suporte S_1'' é um prisma triedral semi-infinito com base oblíqua, formada por quatro faces bidimensionais, seis lados e três vértices que determinam a base, R_1'', R_3'' e R_6''.

Figura 6.3: A envoltória convexa externa de Γ_1''.

À face $\Gamma''^{(2)}_{11}$, que é a base oblíqua do prisma Γ_1'', contém os vértices $(0, 2, 0), (1, 1, 0), (2, 0, 0)$ e o ponto $(1, 1, 0)$, e possui o cone normal determinado pelo esqueleto $N_1'' = -(-1, 1, 1/3)$. Para esta face $\Gamma''^{(2)}_{11}$, pelo Corolário 5.1.2 podemos corresponder a função Hamiltoniana truncada associada a face maximal em Γ

da face $\Gamma''^{(2)}_{11}$ em Γ''. Sua função Hamiltoniana truncada é

$$\widehat{h}_1^{(2)} = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2 - \xi_1^2 + \frac{1}{2}\xi_2^2 - \frac{\mu}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}. \tag{6.29}$$

O problema de Hill (ver em [8]) é descrito pela mesma função $\widehat{h}_1^{(2)}$, com $\mu = 1$. Mas, através de uma mundança de coordenadas podemos obter isto. Consideremos o correspondente sistema Hamiltoniano truncado da função Hamiltoniana truncada (6.29)

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \eta_1 + \xi_2\\
\dot{\xi}_2 &= \eta_2 - \xi_1\\
\dot{\eta}_1 &= \eta_2 + 2\xi_1 - \frac{\xi_1\mu}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{3/2}}\\
\dot{\eta}_2 &= -\eta_1 - \xi_2 - \frac{\xi_2\mu}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{3/2}},
\end{aligned} \tag{6.30}$$

o qual podemos determinar o sistema logaritmo associado

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\log \xi_1 &= \xi_1^{-1}\eta_1 + \xi_2\\
\frac{d}{dt}\log \xi_2 &= \xi_2^{-1}\eta_2 - \xi_2^{-1}\xi_1\\
\frac{d}{dt}\log \eta_1 &= \eta_1^{-1}\eta_2 + 2\xi_1\eta_1^{-1} - \frac{\xi_1\eta_1^{-1}\mu}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{3/2}}\\
\frac{d}{dt}\log \eta_2 &= -\eta_1\eta_2^{-1} - \xi_2\eta_2^{-1} - \frac{\xi_2\eta_2^{-1}\mu}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{6.31}$$

A transformação potência

$$\widetilde{\xi}_i = \xi_i\mu^{1/3}, \quad \widetilde{\eta}_i = \eta_i\mu^{1/3}, \quad i = 1, 2, \tag{6.32}$$

transforma o sistema logaritmo (6.31), onde as variáveis ξ_i, η_i, μ são substituídas por $\widetilde{\xi}_i, \widetilde{\eta}_i, 1$, respectivamente. Assim retornando para a função Hamiltoniana truncada (6.30), agora com as variáveis $\widetilde{\xi}_i, \widetilde{\eta}_i, 1$, tem-se o função que descreve o problema de Hill.

À face $\Gamma''^{(2)}_{12}$ contém os pontos R''_1, R''_2, R''_3 e R''_{4_k} e tem cone normal determinado pelo vetor $N''_2 = (0, 0, -1)$. Para esta face, da mesma forma que a face anterior, podemos corresponder a função Hamiltoniana truncada associada a sua face maximal que contém os pontos $R_1 = (0,0,2,0,0), R_2 = (0,0,0,2,0), R_3 = (0,1,1,0,0), R_4 = (1,0,0,1,0), R_5 = (2,0,0,0,0), R_6 = (0,2,0,0,0)$ e $R_{7_{kl}} = (k,2l,0,0,0)$, assim a função truncada é

$$\begin{aligned}\widehat{h}_2^{(2)} &= \frac{1}{2}(\eta_1^2+\eta_2^2)+\xi_2\eta_1-\xi_1\eta_2-\xi_1^2+\frac{1}{2}\xi_2^2+f(\xi_1,\xi_2^2)\\ &= \frac{1}{2}(\eta_1^2+\eta_2^2)+\xi_2\eta_1-\xi_1\eta_2+\frac{1}{\sqrt{(\xi_1+1)^2+\xi_2^2}}.\end{aligned} \tag{6.33}$$

Note que $\widehat{h}_2^{(2)}$ é obtida da função Hamiltoniana completa h (6.29) fazendo-se $\mu = 0$, segue que esta função descreve o problema de dois corpos P_1 e P_3, que é integrável. O lado $\Gamma''^{(1)}_{11}$ inclui os pontos R_1'' e R_6'' do conjunto S_1''. A correspondente função Hamiltoniana truncada é

$$\widehat{h}_1^{(1)} = \frac{1}{2}(\eta_1^2+\eta_2^2)-\frac{\mu}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}. \tag{6.34}$$

Fazendo a mesma transformação potência (6.32) transformamos o sistema Hamiltoniano com a função Hamiltoniana da forma (6.34), onde as variáveis ξ_i, η_i, μ são substituídas pela variáveis $\widetilde{\xi}_i, \widetilde{\eta}_i, 1$, respectivamente. Esta função (6.34) nas variáveis $\widetilde{\xi}_i, \widetilde{\eta}_i, 1$ descreve o problema dos dois-corpos P_2 e P_3.

Ao lado $\Gamma''^{(1)}_{12}$ inclui os pontos R_1'', R_2'' e R_3'' do conjunto S_1''. A correspondente função Hamiltoniana truncada é

$$\widehat{h}_2^{(1)} = \frac{1}{2}(\eta_1^2+\eta_2^2)+\xi_2\eta_1-\xi_1\eta_2,$$

que é a função (6.33) com $\mu = 0$. Este função descreve, o chamado, problema intermediário (entre o problema de Hill e o problema de dois corpos P_1 e P_3) que é integrável.

Apêndice A

Comportamento assintótico da ordem $\xi = O(\eta)$ e $\xi = o(\eta)$

Sejam duas funções ξ e η definidas de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

(1) Dizemos que ξ tem ordem não excedente a η, ou seja,

$$\xi(t) = O(\eta(t)), \text{ quando } t \to \infty,$$

se existe um número real positivo M e um tempo $t_0 < \infty$ tal que

$$|\xi(t)| \leq M|\eta(t)|, \; \forall \; t \geq t_0.$$

Temos que se $\xi(t) = O(\eta(t))$ quando $t \to \infty$, então $\left|\dfrac{\xi(t)}{\eta(t)}\right|$ é limitado para $t \geq t_0$.

(2) Se $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{\xi(t)}{\eta(t)} = 0$, então dizemos que

$$\xi(t) = o(\eta(t)), \text{ quando } t \longrightarrow \infty.$$

Vejamos algumas **propriedades**:

A. $o(\eta(t)) = \eta(t)o(1)$ quanto $t \to \infty$;

B. Se $\mu \in \mathbb{R}/\{0\}$, então $\mu o(\xi(t)) = o(\xi(t))$, quando $t \to \infty$;

C. Se $0 < \mu \in \mathbb{R}$, então $o(\xi(t))^{\mu} = o(\xi(t))$, quando $t \to \infty$;

D. $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\xi(t)}{\eta(t)} = 1$ se, e só se, $\xi(t) = \eta(t)[1 + o(1)]$.

Demonstração: Seja $\xi(t) = o(\eta(t))$ então

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\xi(t)}{\eta(t)} = 0$$

o que implica que $\dfrac{\xi(t)}{\eta(t)} = o(1)$, conseqüentemente $\xi(t) = \eta(t)o(1)$ quanto $t \to \infty$.
B. Seja $\phi(t) = \mu o(\xi(t))$, então

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{\mu}\phi(t)}{\xi(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\mu}\frac{\phi(t)}{\xi(t)} = \frac{1}{\mu}\lim_{t\to\infty}\frac{\phi(t)}{\xi(t)} = 0,$$

logo $\phi(t) = o(\xi(t))$.
C. Prova-se de modo análogo ao item **B**.
D. Temos que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\xi(t)}{\eta(t)} = 1 \implies \lim_{t\to\infty} \frac{\xi(t) - \eta(t)}{\eta(t)} = 0$$

o que equivale a fazer

$$\xi(t) - \eta(t) = o(\eta(t)) = \eta(t)o(1), \text{ quando } t \to \infty.$$

Portanto,

$$\xi(t) = \eta(t)[1 + o(1)], \text{ quando } t \to \infty.$$

□

Apêndice B

Sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade no caso de frequência zero

Neste apêndice expressaremos alguns resultados obtidos por Sokol'skii em [9] no estudo da estabilidade de sistemas Hamiltonianos autônomos da forma (5.3) com dois graus de liberdade ($m = 2$) com frequências nulas na vizinhança do ponto de equilíbrio $(0, 0, 0, 0)$. Estes resultados são colocados em dois teoremas que citaremos no decorrer do apêndice, mas não iremos demonstrar.

Consideremos a função Hamiltoniano analítica h na vizinhança do equilíbrio como uma série de potências nas variáveis $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2)$ da forma

$$h = H_2 + H_3 + H_4 + \dots \tag{B.1}$$

onde $H_i = H_i(X, Y)$ são polinômios homogêneos de grau $i,\ i \geq 2$, i.e.,

$$H_i = \sum_{|(P,Q)|=i} h_{PQ} X^P Y^Q, \quad i \geq 2, \tag{B.2}$$

onde $P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2)$ e $|(P, Q)| = p_1 + p_2 + q_1 + q_2$.

A estabilidade de Liapunov do sistema Hamiltoniano associado (5.3) tem uma formulação não linear de todos os possíveis casos, exceto quando a equação fundamental tem as quatro raízes igual a zero (i.e., o caso de duas frequências nulas).

Tomamos o sistema Hamiltoniano associado, linearizado na forma

$$\begin{aligned} &\frac{dZ}{dt} = JSZ, \quad Z = (X, Y)^T \\ &J = -J^T = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I \\ -I & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{B.3}$$

onde I é a matriz identidade de ordem 2 e $S = \dfrac{\partial^2 H_2}{\partial Z^2} = Hess\ H_2(0)$.

Quando todos autovalores de JS são zero, aplicando-se a forma normal apresentada por Sokol´skii em [9], obtém-se uma simplificação para a parte quadrática H_2. Esta simplificação depende do posto de JS, e tem-se os seguintes resultados:

(I) Se $postoJS = 3$, então

$$H_2 = -x_1x_2 + \frac{1}{2}\delta y_1^2, \quad \delta = \pm 1;$$

(II) Se $postoJS = 2$, então

$$H_2 = \frac{1}{2}\delta_1 y_1^2 + \frac{1}{2}\delta_2 y_2^2, \quad \delta_1 = \pm 1,\ \delta_2 = \pm 1;$$

(III) Se $postoJS = 1$, então

$$H_2 = \frac{1}{2}\delta y_1^2, \quad \delta = \pm 1;$$

(IV) Se $postoJS = 0$, então

$$H_2 = 0.$$

Consideremos o sistema completo com *posto* $JS = 3$. Uma nova forma normal $(X_k, Y_k) \to (Q_k, P_k)$ é apresentada para a função Hamiltoniana (a partir dos termos de terceira ordem) obtendo uma nova função Hamiltoniana $K = K_2 + K_3 + \ldots + K_m + \ldots$, assumindo-se a forma simples

$$
\begin{aligned}
K &= K^{(0)} + K^{(1)} && \text{(B.4)}\\
K^{(0)} &= \frac{1}{2}\delta P_1^2 - Q_1Q_2 + k_{0003}P_2^2 && \text{(B.5)}\\
K^{(1)} &= k_{0102}Q_2P_2^2 + k_{0012}P_1P_2^2 + K_4 + \dots.
\end{aligned}
$$

O resultado obtido por Sokol'skii neste caso é dado por

Teorema B.0.1 *Se $k_{0003} \neq 0$, o ponto de equilíbrio é instável.*

Para provar o teorema, utiliza primeiramente o sistema truncado com função Hamiltoniana (B.5) e a solução particular instável

$$
\begin{array}{l}
Q_1 = aP_2^{5/4}, \quad P_1 = bP_2^{6/4}, \quad Q_2 = cP_2^{7/4}, \quad P_2 = P_2(0)[1-At]^{-4}\\
a = 4A[P_2(0)]^{-1/4}, \quad b = 20\delta A^2[P_2(0)]^{-2/4}, \quad c = 120\delta A^3[P_2(0)]^{-3/4},\\
A = [\delta k_{0003}P_2(0)/280]^{1/4},
\end{array} \qquad \text{(B.6)}
$$

do sistema Hamiltoniano truncado $K^{(0)}$. Em segundo faz uso do Teorema de Chetaev.

No caso *posto* $JS = 2$, a forma normal para a função Hamiltoniana (a partir dos termos de terceira ordem) é:

$$
\begin{aligned}
K &= K^{(0)} + K^{(1)}, \quad K^{(0)} = K_2 + K_3^{(0)}, \quad K^{(1)} = K_3^{(1)} + K_4 + \dots && \text{(B.7)}\\
K_3^{(0)} &= h_{3000}Q_1^3 + h_{2100}Q_1^2Q_2 + h_{1200}Q_1Q_2^2 + h_{0300}Q_2^3 && \text{(B.8)}\\
K_3^{(1)} &= h_{1110}Q_1Q_2P_1 + h_{1101}Q_1Q_2P_2. && \text{(B.9)}
\end{aligned}
$$

Neste caso obtém-se

Teorema B.0.2 *Se $h_{3000}^2 + h_{2100}^2 + h_{1200}^2 + h_{0300}^2 \neq 0$, o ponto de equilíbrio é instável.*

Na prova deste teorema, utiliza-se do mesmo artifício do Teorema (B.0.1), em que o sistema é truncado com função Hamiltonina $K^{(0)}$, e considera-se uma solução particular, para o sistema truncado $K^{(0)}$ da forma

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{Q_1(0)}{(1-At)^2}, \quad Q_2 = \frac{Q_2(0)}{(1-At)^2}, \quad P_1 = \frac{2\delta_1 A Q_1(0)}{(1-At)^3}, \quad P_2 = \frac{2\delta_2 A Q_2(0)}{(1-At)^3}, \\ A &= \left\{ \frac{-\delta_1[3h_{3000}Q_1^2(0) + 2h_{2100}Q_1(0)Q_2(0) + h_{1200}Q_2(0)^2]}{6Q_1(0)} \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \frac{-\delta_2[h_{2100}Q_1^2(0) + 2h_{2100}Q_1(0)Q_2(0) + 3h_{0300}Q_2(0)^2]}{6Q_2(0)} \right\}^{1/2}, \end{aligned} \tag{B.10}$$

e sempre é solução desde que $h_{3000}^2 + h_{2100}^2 + h_{1200}^2 + h_{0300}^2 \neq 0$.

Bibliografia

[1] Bruno, A. D. 1979: *Local Method of Nonlinear Analysis of Differential Equations*. Nauka, Moucow.

[2] Bruno, A. D. 1997: *Power Geometry.* J. Dynamical and Control Sustems 3, $N^0 4$, 471-492.

[3] Bruno, A. D. 1999: *Power Geometry in Algebraic and Diferentian Equation.* Nauka, Moucow.

[4] Busemann, H., 1958: *Convex Surfaces.* New York: Wiley (Interscience).

[5] Churchill, R. C., Pecelli, G., Rod, D. L.,: *A survey of the Hénon-Heille Hamiltonian with aplications to related examples.*

[6] Dulac, M. H., 1912: *Solutions d'um système d'équations diférentielles dans le voisinage de valeurs singulières.* Bull. Soc. Math. France, 40, 324-384 (1912).

[7] Goldman, A., Tucker, A. 1956: *Polyhedral convex cones.* In: Linear Inequalities and Related Systems. Ann. Math. Stud. 38, 19-40.

[8] Meyer, K. R., Hall, G. R. 1937: *Introduction to Hamiltonian dynamical systemsn and the n-body problem.* Springer-Verlag, New York.

[9] Sokol´skii, A. G. 1981: *On stability of an autonomous Hanmiltonian system with two degrees of freedom in case of zero frequencies.* Prikl. Mat. Mekh. 45, $N^o 3$, 441-449.