Mestrado
Engenharia de Produção

Carteira de Investimento Usando a Teoria da Decisão

Aluno: Diogo de Carvalho Bezerra
Orientador: Fernando Menezes Campello de Souza, PhD

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção

Recife - Pernambuco
Janeiro/2003

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

Carteira de Investimento Usando a Teoria da Decisão

Elaborada por: Diogo de Carvalho Bezerra

Orientada por: Fernando Menezes Campello de Souza (PhD)

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Francisco de Souza Ramos (Docteur - UFPE)

Prof. Fernando Menezes Campello de Souza (PhD - UFPE)

Prof. Alexandre Stamford da Silva.(Doutor - UFPE)

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

Recife - Pernambuco

Janeiro/2003

"Eu agradeço à minha sorte por isso, meus empreendimentos não estão confiados a um só fundo, nem num único lugar; nem está o total das minhas propriedades na sorte do presente ano: portanto meu comércio não me faz triste ."

SHAKESPEARE,

O Mercador de Veneza, Ato I, Cena I.

"Esta dissertação é dedicada a:

minha Mãe, Vera Lúcia, minha Avó, Lucidalva, meu Pai, Expedito, pela saudade dos momentos felizes;

a meu irmão, Sérgio, pelo encorajamento e companheirismo;

a minha família, pelo amor e carinho e a
Líbia Fernanda, por ser quem você é."

Agradecimentos

Agradeço:

- a Deus, senhor meu eterno agradecimento pela oportunidade de viver, pelos meus familiares, amigos, mas acima de tudo, meu agradecimento por poder trabalhar para uma vida melhor de todos os meus irmãos;
- a minha mãe, símbolo de luta, são nesses momentos que eu vejo que os seus ensinamentos e cobranças,eram para que eu busca-se sempre o melhor para mim, não estavam errados em nenhum momento, obrigado;
- a meu Pai, por ter me ajudado em toda a minha vida, em cada passo que eu dei senti a sua presença;
- a minha avó, se há um símbolo, em minha mente, de uma pessoa que viveu e se dedicou as pessoas que amava, não tenho dúvida em lembrar da senhora, obrigado pelo seu amor, carinho, dedicação e por seus ensinamentos;
- a minha família, meus tios e tias, obrigado pelo apoio e carinho de vocês;
- ao professor Adiel Texeira, companheiro nas decisões mais incertas desses últimos anos, o senhor é um exemplo de dedicação a um sonho, obrigado pelos conselhos;
- ao professor Alexandre Stamford, o senhor é a ponte para uma das maiores transformação da minha vida, como o senhor mesmo falou “poucos tem essa oportunidade”, meu muito obrigado por um dia ter aceitado um jovem aluno como discípulo;
- a meus amigos: Alane, Alessandra, Joel, Rafael, Paulo e Marcílio, no caminho de uma pós-graduação não poderia existir amigos tão presentes quanto vocês, obrigado pelas discussões

e pelas risadas;

- tenho o prazer de agradecer, a várias pessoas, as quais não posso citar aqui pois não teria espaço nesta página, meus amigos que me acompanharam por toda a minha vida meu muito obrigado;
- a Erica, brasileira apaixonada pelas letras, você que leu boa parte do texto, que ajudou a corrigir algumas das minhas deficiências na arte de escrever, muito obrigado;
- as pessoas que foram pacientes e compreensivas na resposta dos questionários;
- a Sérgio, meu irmão, há muitas coisas que não são ditas entre nós porque na maioria das vezes sabemos o que outro quer dizer e o que outro sente, companheiro, exemplo de tudo na minha vida, muito obrigado por ser meu irmão;
- a CAPES - Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo financiamento do meu curso de pós-graduação. Um país sem ciência nunca terá liberdade. Estará ele sempre preso as correntes da ignorância. Projetos financiados pela CAPES e fundações privadas que incentivassem o desenvolvimento da ciência deveriam existir aos milhares no Brasil;
- Maria, minha amiga, você sonhou tanto quanto eu por esse dia. Obrigado, pelo maior presente da minha vida.
- não tenho palavras para agradecer a você Líbia, companheira, amiga, mulher, batalhadora, são muitas qualidades, mas a maior de todas é a sinceridade, você é capaz de mover montanhas pelos seus amigos, e a mim dedicas uma vida. Líbia meu amor, acho às vezes que você é um sonho, talvez um *presente*, obrigado e perdoe me por várias vezes não esta ao seu lado, sinto sua falta, da mesma forma que sente a minha, toda hora, todo momento, que as incertezas de uma vida sejam vencidas juntas, obrigado;
- não é comum, mas deixei para agradecer por último ao professor Fernando Campello, nesses anos aprendi alguns teoremas, o mais importantes deles é que apreender doí e como doí. Você se resguarda da família, dos amigos mais próximos em fim das coisas da vida que são feitas pelo menos a dois. E tudo isso você faz por um prazer único,

aquele prazer mental, que às vezes você pensa que só você sente, mas isso não é verdade, o prazer e alegria que o senhor tem quando encontra-se junto de todos nós ao alcançar um resultado novo é algo que contamina todos de um prazer que ninguém vai entender, por que só nós vivemos aquele momento, de ver os brilhos nos seus olhos. Para o senhor ver como esse brilho vai longe, um aluno ao conversar com os amigos passava esse brilho ao falar de um professor fantástico, alguns anos depois eu consegui ver de onde vinha esse brilho, obrigado por tudo.

Resumo

O presente trabalho, faz uso da teoria da decisão estatística no mercado financeiro. Foram formulados e resolvidos três problemas de decisões na escolha de fundos de investimentos. Os problemas foram montados de tal forma a estruturar uma maneira prática de se entender a aplicação da teoria da decisão no mercado financeiro. Apresentou a formulação proposta por (Campello de Souza, 2002), para edução da função utilidade e do conhecimento *a priori* do especialista. Alguns dos problemas forma resolvidos com o uso das medidas eduzidas. Por último, foi formulado é resolvido um modelo analítico para tomada de decisão no mercado financeiro, o modelo foi formulado de tal forma, a permitir à aplicação do modelo impreciso de Dirichlet.

Abstract

The present work uses the statistics decision theory in the financial market. Three problems of decisions in the choice of investment fund had been formulated and solved . The problems had been mounted of such form to make up a practical way of if understanding the application of the decision theory in the financial market. It shows the (Campello de Souza, 2002)'s formularization proposal , for elicitation of the utility function and the *a priori* knowledge of the specialist. Some of the problems were solved with the use of the elicit measures. Finally, it was formulated and solved an analytical model for taking of decision in the financial market, the model was formulated of such way, to allow the application of the inexact model of Dirichlet

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 INTRODUÇÃO

"Embora isso seja loucura, ainda assim há método nela".

SHAKESPEARE, em Hamlet.

Esta dissertação tem um caráter técnico. Pretende-se resolver uma classe de problemas ligados a decisões no mercado financeiro. Para se chegar a este objetivo passa-se por uma breve apresentação dos principais conceitos do mercado financeiro e da base teórica dos modelos usados nas decisões de escolha de *portfolio*. A classe de problemas a ser resolvido faz uso da ferramenta conhecida como Teoria da Decisão Estatística, que será também apresentada. Dessa forma, a dissertação é técnica, pois usa-se de uma ferramenta para resolver certos problemas.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivos Gerais

1. Analisar a escolha de uma carteira de investimento usando a Teoria da Decisão;
2. Desenvolver um modelo analítico à luz da Teoria da Decisão para tomadas de decisões no mercado financeiro.

1.1.2 Objetivos Específicos

1. Introduzir a distribuição de probabilidade subjetiva (conhecimento do especialista) sobre a incerteza do estado da economia em problemas de decisão no mercado de capitais.
2. Usar o método de Bayes empírico para obter uma distribuição *a priori* sobre os estados da natureza.
3. Eduzir a função utilidade para o dinheiro e aplicá-la aos modelos propostos.

1.2 A Importância do Assunto

Esta classe de problemas tem sido relevante por ter impacto direto na situação econômica de empresas, países, ou seja, a população como um todo. Dessa forma, o assunto é de alta importância para que as empresas possam realizar a sua gestão financeira.

1.2.1 Perspectivas Sobre o Futuro Econômico

Analistas do mercado financeiro e economistas, no início de cada ano, dão seus palpites sobre o que vai ocorrer com a economia ao longo do ano. Na maioria das vezes, os cenários colocados pelos economistas são muitos parecidos e sempre condicionados a um outro acontecimento que não altere o cenário de uma forma drástica.

Segundo a revista, *Conjuntura Econômica* de Janeiro de 2002, da Fundação Gertúlio Vargas - FGV, a maioria dos economistas era unânime em afirmar que o ano de 2002 seria bem melhor do que o ano de 2001. As perspectivas para 2002, eram que os juros iriam cair, a balança comercial iria deslanchar e as necessidades de financiamento externo iriam reduzir em até 13%. Alertavam porém que o ano era um ano eleitoral e a política econômica não poderia ser mudada apenas para fins eleitorais. Na maioria das vezes os economistas usam de acontecimentos passados para compor suas opiniões.

Há uma necessidade de medir essas opiniões para que esta possa ser incorporada aos problemas de decisão e este será um dos objetivos desta dissertação.

1.2.2 O Investidor na Decisão

Na maioria das vezes o mercado financeiro não consulta as preferências do investidor. O uso da única teoria que mede a utilidade de um investidor é necessária para decisões com incerteza, que são as únicas que existe.

1.3 Os Instrumentos Analíticos

Serão usados os métodos e técnicas da:

1. Teoria da Decisão:

  - Regra de Bayes;
  - Bayes Empírico;

2. Estatística:

  - Regressão Linear e Não Linear;
  - O Modelo Impreciso de Dirichlet.

3. Programação Linear;

1.4 Interação com Outras Áreas

A aplicação da Teoria da Decisão vem ocorrendo nas seguintes áreas:

- Em medicina, mais precisamente na área de cardiologia;
- Em tratamento de imagem;
- Em gestão de manutenção;
- Em sistemas de comunicação;
- Radar, reconhecimento de voz;
- No uso da energia solar;
- Em segurança de centrais nucleares;
- Qualidade de produtos e serviços
- etc. ...

A dissertação interage diretamente com os estudos e análises da edução da função utilidade e do conhecimento *a priori*(Berenguer, 2003).

1.5 Composição da Dissertação

A dissertação é dividida em 8 capítulos cada um com os seguintes conteúdos:

1. **Primeiro Capítulo:** é o que está sendo apresentado no momento e tem como objetivo esclarecer ao leitor, os objetivos desta dissertação e como se encontra a composição da dissertação;

2. **Segundo Capítulo:** tem como principal objetivo orientar o leitor sobre conceitos básicos do mercado financeiro; entre eles tem-se: fatores determinantes para se investir, análise de investimento, etc.

3. **Terceiro Capítulo:** trata-se de questões do tipo: onde se situa o mercado financeiro na economia? O que é risco? Apresenta-se também o método de Markowitz para seleção de carteiras.

4. **Quarto Capítulo:** apresenta os principais conjuntos e funções da teoria da decisão e como usá-la em decisões no mercado financeiro.

5. **Quinto Capítulo:** apresenta a teoria da utilidade cardinal fraca e como se faz a edução da função utilidade para dinheiro.

6. **Sexto Capítulo:** aborda a questão da edução do conhecimento do especialista para uso em decisões no mercado financeiro.

7. **Sétimo Capítulo:** apresenta um modelo analítico de tomada de decisão no mercado financeiro e também usa do modelo impreciso de Dirichlet na formulação de problemas de escolha de carteira de investimento.

8. **Oitavo Capítulo:** por último, apresenta-se as principais conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

1.6 Um Guia Para o Leitor

O autor acredita que há basicamente quatro tipos de leitores desta dissertação. A diferença entre os leitores será dada pelo conhecimento prévio do mesmo sobre finanças e também sobre teoria da decisão. Apresenta-se aqui um guia para os leitores:

1. Ao leitor sem base em finanças: a dissertação apresenta uma rápida introdução dos conceitos de finanças. O capítulo 2 e 3 devem ser lidos com acompanhamento de um livro texto de finanças, como por exemplo: (Ross, 1995) e (Assaf Neto, 2001). É importante que o leitor entenda que o conteúdo desses capítulos são muito abrangentes e se o leitor deseja ter uma formação mais completa sobre o assunto é necessário uma leitura paralela.

2. Ao leitor sem base em teoria da decisão: a apresentação dos conceitos de teoria da decisão dá-se de tal forma que o leitor tenha uma compreensão de como se aplicar o método em finanças. Porém a teoria da decisão tem outros métodos e também para uma compreensão teórica da metodologia aconselha-se o uso de um livro texto mais aprofundado na área, como por exemplo: (Campello de Souza, 2002) e (Berger, 1985). Um *survey* sobre aplicações de probabilidades imprecisas na economia e em finanças é o de (**?**), outros artigos interessantes na área são: (**?**) e (Simonsen & Werlang, 1991).

3. Ao leitor com base em finanças: a dissertação tem uma finalidade de apresentar uma nova metodologia de tomadas de decisão no mercado financeiro. É bom lembrar porém que alguns vícios do mercado podem ser retirados com a leitura dos capítulos 2 e 3 como por exemplo, o conceito de risco.

4. Ao leitor com base em teoria da decisão: a dissertação tem um caráter de apresentar a aplicação da teoria da decisão. O oitavo capítulo também usa o conceito de probabilidade *a posteriori* superior e inferior em problemas de decisão. Apesar do contexto está sendo o de finanças a dissertação apresenta aplicações de métodos de eduções do conhecimento *a priori* e da utilidade.

1.7 Um Lembrete ao Leitor

Antes que o leitor pense que esta dissertação apresenta uma nova teoria da escolha de carteiras de investimento, o autor deixa bem claro e reforça durante o texto que apenas se está apresentado uma nova metodologia. Este lembrete deve acompanhar o leitor durante a sua leitura.

2 FINANÇAS

2.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é o de orientar o leitor sobre conceitos básicos do mercado financeiro, como:

- fatores determinantes para se investir;
- ativo financeiro, fundos de investimento e índice de bolsa de valores;
- certeza e incerteza no mercado financeiro;
- análise de investimento;
- utilidade esperada máxima e etc.

Para alcançar este objetivo, o capítulo encontra-se dividido em quatro seções. A primeria é uma introdução, que está sendo feita no momento. A seção seguinte trata dos fatores que influenciam em que os investidores devem investir. Na terceira seção serão apresentados conceitos e exemplos dos ativos financeiros, como também, fundos de investimento e índices de bolsa de valores. Na última seção há uma rápida apresentação de alguns critérios básicos para a análise de investimento, além de uma discussão sobre o conceito de certeza e incerteza nos retornos dos ativos.

2.2 Fatores Determinantes

Quando um indivíduo, ou grupos de indivíduos, decide realizar um investimento, a sua decisão sobre qual o ativo a se investir depende de fatores como:

- o objetivo do investimento;
- a idade do investidor;
- o prazo da aplicação;

- o Volume de Recursos disponíveis para aplicação;
- o perfil de tolerância ao risco do investidor e
- o retorno.

Na decisão é necessário que o investidor saiba por que está investindo. O objetivo do investimento definirá as estratégias de investimento. Alguns exemplos ajudarão o leitor a entender por que o objetivo do investimento é um fator determinante. Quando se decide poupar para que o investidor tenha uma garantia no futuro, como a aposentadoria, ou mesmo que possa pagar a educação dos filhos e netos, os fundos de ações podem receber parte dos recursos. Neste caso, o investidor terá mais tempo para recuperar possíveis perdas. No caso de alguma viagem ao exterior, os fundos cambiais são os mais indicados. Para a compra de um imóvel, os fundos de renda fixa tendem a ser uma melhor aplicação.

Em relação à idade, sabe-se que investimentos no mercado volátil, como os das bolsas de valores, deve ser inversamente proporcionais à idade do investidor, já que o tempo para recuperar perdas é menor. Diferentemente da idade, quanto maior for o tempo disponível para o investimento, maior deve ser a quantidade de recursos em ativos de renda variável (ações). O último fator decisivo para um investidor está ligado a sua tolerância ao risco. O perfil de tolerância serve como um fator determinante na estratégia do decisor. Os bancos têm muitas informações que podem ajudar a classificar um indivíduo em determinado perfil. Perguntas simples, como:

- "Qual o esporte que você pratica?";
- "Você gosta de carros esportes?".

podem ajudar a classificar estes indivíduos.

Os fatores que acabaram de ser explicados são importantes para se analisar o comportamento do investidor. Porém veja que confusão logo de início já se falar de fundos de investimento, fundo de renda variável, fundo de renda fixa, mercado volátil e etc. O número dos chamados "produtos financeiros" são imensos; pense no número possível de aplicações nas bolsas de valores, nos fundos de investimento de vários bancos, nos títulos e prazos diferentes do banco central, do governo federal, das empresas privadas e até dos governos estaduais e municipais. O mercado financeiro é um verdadeiro labirinto de jargões e procedimentos. O autor aconselha que, melhor do que esta dissertação, para apresentar todos esses conceitos e como se comportar diante de tantos ativos, o leitor deve procurar livros que tratam somente da administração financeira de títulos e fundos de investimento, o que já é uma verdadeira arte, pois a explicação de tantos detalhes não é uma tarefa fácil; entre esses textos, há: (Ross, 1995) e (Assaf Neto, 2001). Todavia, este trabalho não seria auto contido se não fossem explicados alguns conceitos e jargões do mercado financeiro, como também o que vem a ser o próprio mercado financeiro. Para se alcançar tal objetivo, na próxima seção apresentam-se os tipos de ativos financeiros, os fundos de investimento e os índices de bolsas de valores.

2.3 Ativo Financeiro e Fundos de Investimento

O conceito de ativo vem da contabilidade e se emprega tanto para empresas, como para o mercado financeiro, ou seja, ativos são bens tanto concretos (imóveis, máquinas, véiculos, etc), como também são direitos de valores que formam o patrimônio de uma empresa (contas a receber, etc). Um ativo financeiro compreende todo tipo de aplicação financeira. Como exemplos tem-se:

- títulos de renda fixa públicos e privados;
- caderneta de poupança;
- ações;
- ouro;
- moedas estrangeiras;
- fundos de investimento etc.

Uma outra divisão que se faz dos tipos de ativos é em relação à renda, que pode ser fixa ou variável.

2.3.1 Ativo de Renda Fixa

Em resumo, ativos de renda fixa são ativos que pagam taxa de juros. A idéia de mercado vai ajudar no entendimento dos conceitos; pense que na economia há pessoas ou grupos que precisam de dinheiro, e do outro lado, encontra-se o investidor que tem o dinheiro, porém que não necessita do dinheiro imediatamente, podendo emprestá-lo em troca de alguma remuneração que é medida pela taxa de juros. O conceito de **títulos de renda fixa** é formalizado por esta relação de empréstimo. Em troca do dinheiro, o tomador oferece um papel como comprovante da operação; neste, encontram-se os prazos e as condições para devolução do capital (dinheiro), como também estabelece os juros que serão pagos. O rendimento de um título de renda fixa pode ser classificado de três formas:

- prefixado;
- pós-fixado e
- misto.

Em títulos prefixados a taxa de juros, percentual que será pago pelo empréstimo, é conhecida. Nos pós-fixados, o título será corrigido por um índice de inflação ou taxa de juros. No caso dos títulos mistos tem-se as duas formas de rendimento, ou seja, parte do rendimento já é garantido por uma taxa fixa, supõe-se que o devedor pague, e a outra parte do rendimento será corrigida de acordo com um índice pré-determinado.

A escolha entre um dos títulos dependerá da expectativa que o investidor tem sobre a taxa de juros. Se o investidor acreditar que a taxa de juros será mais baixa no futuro, então ele escolhe os títulos prefixados. Caso contrário, ou seja, se a expectativa em relação à taxa de juros é que a mesma seja mais alta no futuro, o investidor escolherá os títulos pós-fixados.

Como regra geral, o investidor, ao escolher um ativo de renda fixa, terá que observar a instituição emissora do título. Títulos públicos no âmbito nacional são considerados de menor risco, como também títulos de empresas e bancos estáveis. Quando uma instituição declara uma moratória, a exemplo do Brasil na década de 80, o mercado considera que esta instituição não é tão merecedora de confiança, cobrando, assim, um prêmio maior pela compra de um dos seus ativos. Em abril de 2002, bancos internacionais aconselharam os seus investidores a não investir nos ativos do Brasil, visto que o candidato à presidência da oposição encontrava-se em alta nas pesquisas; meses depois os próprios bancos voltaram a aconselhar os investidores a investir nos títulos do Brasil; é a velha estratégia do mercado de comprar na baixa e vender na alta.

Títulos Privados e Públicos

Os títulos de renda fixa de empresas e instituições financeiras são considerados privados e representa a dívida das empresas e instituições financeiras aos investidores.

Em instituições financeiras (Bancos Comerciais), os títulos de renda fixa mais comum são os **Certificados de Depósitos Bancários (CDBs)** e os **Recibos de Depósito Bancários (RDBs)**; a diferença entre os dois é que o primeiro pode ser resgatado a qualquer momento pelos bancos caso o cliente deseje e o segundo deve ser resgatado apenas no seu vencimento. O risco desses títulos encontra-se na possibilidade de o banco "quebrar" e não pagar seus compromissos.

Nas empresas os títulos mais comuns são as *debêntures*, simples e conversíveis, e os *commercial papers*. Estes títulos podem ser, tanto prefixados, como pós-fixados e o dinheiro captado é usado pelas empresas para novos investimentos, como também para o financiamento do capital de giro. O risco desses títulos encontra-se também no fato das empresas não honrarem suas dívidas; dessa forma, é importante fazer uma avaliação de crédito da empresa.

Outro título de renda fixa é o **título de capitalização** e este é uma mistura de poupança com uma possibilidade de ganhar um prêmio através de sorteio.

Um exemplo de título de capitalização usado pelos bancos é o de que, a partir de depósitos mensais de R$ 20,00 (vinte reais), o cliente concorre a um sorteio por dia de R$ 20.000,00 (vinte mil reais) durante um ano; caso o cliente não seja sorteado, o mesmo recebe apenas R$ 200,00 (duzentos reais) no final de um ano. Os R$ 40,00 (quarenta reais) perdidos no fim da aplicação justificam-se pelo benefício dado ao cliente de concorrer ao sorteio. Alguns analistas acreditam que a avaliação de que a aplicação em títulos de capitalização é rentável, ou não, mude, caso o cliente seja sorteado. Isso não é verdade; a avaliação de se investir num título de capitalização ocorre antes do sorteio, ou seja, o fato de ser sorteado não pode mudar a avaliação do título na hora de se decidir se vai comprar ou não o título, já que o mesmo não sabe o resultado e se soubesse não teria problema de decisão. O pensamento aqui pode ser traduzido da seguinte forma:

O cliente possuiria R$ 240,00 (duzentos e quarenta reais) no final de um ano; ele pode ficar com esse valor ou entrar em um jogo em que terá uma probabilidade p de ganhar R$ 20.000,00 (vinte mil reais) ou uma probabilidade $1 - p$ de ficar com R$ 200,00 (duzentos reais).

Outros fatores como:

- prazo de resgate,
- carência,
- resgate antecipado e parcial

intervêm na decisão de investir ou não num título de capitalização.

Por último, tem-se o título público de renda fixa, e o mesmo é considerado um direito emitido pelo governo, podendo ser na esfera federal, estadual ou municipal, com finalidade de captar recurso dos investidores privados para cobrir o déficit dos gastos do governo. Esses títulos são emitidos na esfera federal pelo banco central e pelo tesouro nacional. Os juros podem ser prefixados, pós-fixados e mistos. Com relação ao risco, o mercado considera esse ativo o de menor risco, já que, como se sabe, o governo pode ser considerado um bom pagador de seus débitos.

2.3.2 Ativo de Renda Variável

A diferença básica entre títulos de renda fixa e títulos de renda variável encontra-se no fato de que a renda variável é definida de acordo com os resultados (lucro ou prejuízo) obtidos pela instituição emissora do título, enquanto no título de renda fixa, como já foi explicado, a renda é determinada por uma taxa de juros fixa.

Quando a emissora do título de renda variável é uma sociedade anônima, o título recebe o nome de "ações", a menor fração de capital da empresa emitente. Dessa forma, o investidor de ações é um co-proprietário da sociedade anônima. Existem dois tipos de ações que um investidor pode comprar, que são:

- ordinária ou

- preferenciais.

O primeiro tipo de ação dá o direito de voto ao acionista, além de possibilitar-lhe participação nos resultados da empresa. No caso das ações preferenciais, o acionista não tem direito ao voto, porém garante o direito do recebimento de dividendos, que geralmente são maiores do que os atribuídos às ações ordinárias.

Comum a qualquer uma das ações é o fato de que as ações podem ser transferíveis em dinheiro, a qualquer tempo, por negociação em bolsas de valores ou no mercado de balcão.

Quanto à forma, uma ação pode ser normativa ou escritural. As normativas são cautelas ou certificados, as quais apresentam o nome do acionista. Neste tipo de ação, a transferência é feita com a entrega da cautela, além da averbação de termo, no livro próprio da empresa emitente. As ações escriturais também são representadas por certificados ou cautelas, porém funcionam como uma conta corrente; dessa forma, não ocorre a movimentação física dos documentos.

A questão agora é o saber: “como investir?” No mercado de ações, há duas formas de se investir. A mais comum delas é através dos fundos de investimento, os quais são carteiras de ações e também de outros títulos (os fundos de investimento serão assunto da Seção 2.3.3). A outra forma é pela compra direta de ações específicas. Nessa segunda opção, ser um pequeno investidor torna-se uma restrição, pois as corretoras, que são instituições financeiras autorizadas a realizar a compra e a venda de ações numa determinada bolsa de valores, não aceitam operações de pequeno volume. O dinheiro disponível do pequeno investidor só permite que o mesmo entre no mercado fracionário, em que o preço das ações é maior, tendo uma liquidez menor. Além desses problemas, o custo de operações do pequeno investidor é maior. No caso das pessoas com maior recursos, a possibilidade da compra direta das ações permite que o mesmo componha sua própria carteira. Este indivíduos podem usar do método apresentado aqui para compor sua carteira.

São diversos os fatores que influenciam a escolha de uma ação. Como exemplo:

- o potencial de valorização do preço da ação;
- o dividendo que é pago pela empresa emitente;
- o horizonte (prazo) de investimento;

- a necessidade de se ter uma maior liquidez do papel;
- o risco que o papel traz na composição da carteira, ou mesmo em termos absolutos.

No mercado de ações, há um fenômeno interessante. Muitos investidores compram ações observando o desempenho passado das empresas, enquanto outros compram ações de uma empresa em função da expectativa do preço futuro da ação. No primeiro caso, o problema ocorre no fato de que, a compra de ações quando os preços já subiram demais torna menor a chance de repetir o ganho extraordinário: – É o conhecido fenômeno de regressão a média. No segundo caso, pensar apenas em função da expectativa do preço futuro de uma ação desperdiça toda uma base de informação que possa ser utilizada para tomar uma decisão. Esses dois pensamentos distinguem duas escolas:

- Fundamentalistas;
- Grafistas.

Fundamentalistas

Os fundamentalistas se preocupam com os dados reais de uma empresa, como:

- produtividade da empresa;
- modernidade da planta;
- mercado de seus produtos;
- a inserção na economia internacional;
- o nível de endividamento da empresa;
- a capacidade de crescimento da empresa.

Todos esses indicadores devem ser quantificados e devem refletir, além do comportamento de receita e despesa da empresa, o crescimento esperado. Tendo em mãos esses indicadores, os fundamentalistas avaliam de forma subjetiva, acreditando, porém ser de uma forma metodológica, qual o preço da ação num dado período, ou seja, eles estimam o preço da ação. Para se ter um entendimento maior sobre esses indicadores, é necessário fazer algumas observações:

1. Há vários indicadores que ajudam os fundamentalistas a verificar a qualidade de uma ação; tais indicadores tanto consideram o desempenho passado da empresa, quanto as projeções de resultados futuros.

2. Os fundamentalistas têm como principal interesse o futuro da empresa. Do passado obtêm-se apenas um indicador que permite identificar as tendências, porém a decisão de investir ou não deve ser baseada principalmente nas expectativas de resultados futuros.

3. Indicadores isolados dizem pouco sobre o desempenho da empresa, podendo, assim, induzir o avaliador ao erro.

4. Risco é uma palavra chave na decisão de se investir. O rendimento por si só não deve ser utilizado como indicador.

5. O analista não deve prender sua decisão apenas nos indicadores. Ele deve conhecer a empresa, a vida da empresa, de que forma é feita a sua gestão e etc.

O último item observado passa um pouco de insegurança, no sentido de que, mesmo os indicadores da empresa apontando para a compra das ações de uma empresa, essa compra pode não ser uma boa opção, a compra vai depender também do conhecimento geral do analista sobre a empresa, que não é fácil de se obter; o que falta é também medir esse conhecimento e usá-lo na hora da decisão. A informação subjetiva deve ser usada!

Grafistas

A escola grafista é mais fácil de se entender. A decisão dos grafistas se baseia na avaliação do desempenho passado do preço do ativo, e, supondo uma repetição do comportamento de qualquer que seja o ativo, o analista toma a sua decisão. O mesmo decide qual será o ativo a ser comprado ou vendido apenas olhando para o gráfico. Os fundamentalistas criticam bastante essa escola, afirmando que a decisão parece mais uma profecia. Porém se essa profecia é aceita e todos acreditam na sua realização, o mercado acaba aceitando e ela ocorre. Exemplo: se os gráficos indicam que o preço de um ativo subirá e é bom comprá-lo agora, todos irão comprar, e realmente o preço subirá, e ninguém sabe ao certo se a subida dos preços iria ocorrer mesmo ou se o mercado a forçou.

Qual escola seguir? Para alguns analistas, devem-se usar as duas análises. Nesse caso, a escola grafista é usada para decisões de curto prazo e a escola dos fundamentalistas é usada em decisões que envolvem longo prazo.

2.3.3 Fundos de Investimento

A composição de uma carteira de investimento tanto pode ser feita pelo próprio investidor, por instituições financeiras ou por administradores de recursos. Nos dois últimos casos, dá-se o nome de "carteira de investimento", ou "fundo mútuo de investimento", o qual funciona como uma sociedade de investidores. Nessa sociedade, cada um dos participantes entra com o seu dinheiro, comprando, assim, cotas da carteira e depois sai do investimento, vendendo tais cotas. O ganho ou prejuízo é expresso na diferença de preço entre a compra e a venda das cotas. Entre as principais vantagens de comprar do fundo destacam-se:

- diversificação da aplicação, tendo assim uma redução do risco;
- facilidade da compra, podendo ser feita até pelo telefone, etc.

Na avaliação de fundos de investimento, deve-se sempre analisar a rentabilidade passada do fundo, como também o desvio dos retornos passados em relação ao retorno médio do ativo; esse último entra na avaliação como medida de risco. No mercado são formulados algumas classificações (*raking*, guias). De acordo com os guias se pode decidir qual o fundo a ser comprado. Há *raking* que considera apenas a rentabilidade, deixando de fora qualquer medida de risco, não sendo, portanto, aconselhado de forma alguma. O investidor deve escolher o fundo que tiver a maior rentabilidade por unidade de risco. A composição do fundo é de responsabilidade do gestor, e este deve se preocupar em garantir um retorno compatível como o nível de risco que o investidor aceitou. Dessa forma, o administrador do fundo deve sempre informar qual o nível de risco que a carteira está correndo. No mercado é comum o uso da palavra alavancagem para explicar o nível de risco que uma carteira estás correndo. Se um fundo está alavancando 100%, significa que ele no máximo, pode perder todo o seu patrimônio. Outra importante função do gestor encontra-se no fato de que o mesmo deve sempre estar atento a mudanças no mercado, e, assim, poder realizar mudanças de aplicações dos fundos no tempo certo. Em resumo, um fundo pode ser considerado:

- conservador ou
- agressivo.

Os títulos conservadores são compostos basicamente por aplicações em títulos privados e públicos, podendo ter também uma parcela em aplicações com um pouco de risco, para que possa aumentar a rentabilidade; em alguns casos o fundo pode conter até derivativos, nome genérico dado ao um gurpo extenso de operações financeiras, neste grupo encontra-se operações no mercado futuro e no mercado de opção. O valor mínimo de investimento depende da administradora, mas valores como R$ 100,00 (cem reais) são aceitos. O pensamento aqui é semelhante ao dos ativos de renda fixa. Apesar de ter um risco menor do que os ativos de renda variável, há a possibilidade de se perder dinheiro; então, da mesma forma, quando se comprar um ativo de renda fixa, cujo emitente é importante, a escolha da administradora também é, pois é dela a responsabilidade de escolher o nível de risco que o investidor está disposto a correr.

Os fundos agressivos, também chamados de fundos de renda variáveis, ou fundo de investimento em ações, são compostos em sua maioria por ativos de renda variável, porém podem conter tanto ativos de renda fixa como também derivativos. A classificação dos fundos depende do nível de risco a que ele está exposto, mas não existe uma classificação formal.

Pode-se considerar como um tipo de carteira de investimento os índices das bolsas de valores.

2.3.4 Índice das Bolsa de Valores

Índice Bovespa – IBOVESPA

No Brasil, o Índice da Bovespa (IBOVESPA) representa o mais importante indicador do desempenho médio das cotações do mercado de ações. Um fato interessante que colabora para que o índice seja importante é que desde a sua criação, em 1968, não houve mudanças na sua metodologia. Mas o que vem a ser o IBOVESPA? Em 02/01/1968, foi criada uma carteira teórica de ações, e a partir de uma aplicação hipotética, o IBOVESPA representa o valor atual dessa carteira teórica, em valores correntes, supondo-se que não ocorreu nenhuma outra aplicação, apenas os ajustes de uma distribuição de proventos pelas empresas emissoras. O índice não só representa a variação de preço das ações, mas também o impacto ocasionado pela distribuição de proventos, sendo, assim, um indicador que avalia o retorno total de suas ações. A divulgação do índice é feita em tempo real e o mesmo tem como finalidade representar o comportamento do mercado de ações. (Para maiores detalhes da forma de cálculo das empresas que compõem o IBOVESPA ver o site: http://www.bovespa.com.br/)

A variação do índice não ocorre apenas de um dia para outro, mas também durante as negociações segundo a segundo, tendo, assim, uma cotação máxima e miníma no dia, como também o valor da abertura e o valor de fechamento da bolsa. O retorno do índice bovespa, r, ou de qualquer outro índice, pode ser calculado pela seguinte formula:

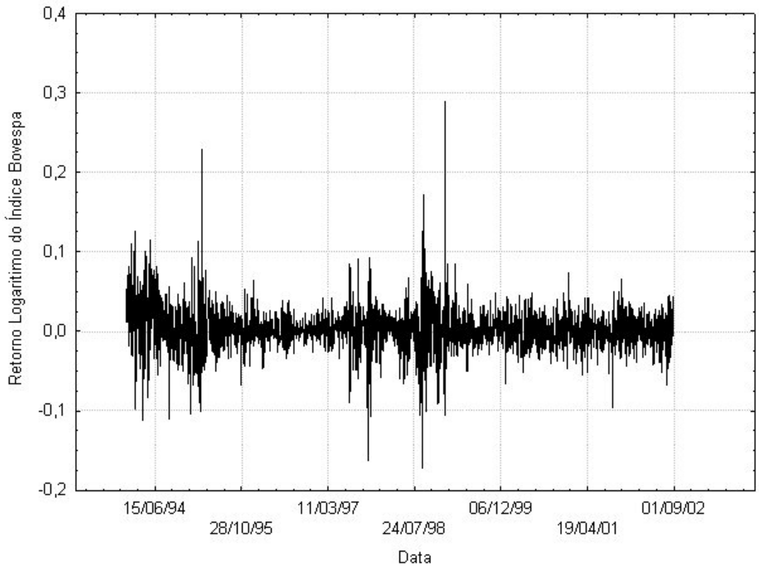
$$P_t = P_{t-1}e^{r_t} \tag{2.3.1}$$

onde: r_t é o retorno do índice no instante t; P_t e P_{t-1} são os preços (valor) do índice nos períodos t e $t-1$.

No gráfico da Figura 2.1, apresenta-se r_t para o período de 1994 até agosto de 2002. O retorno médio,r_m, para n dias pode ser expresso por:

$$r_m(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i=n-1} r_{t-i} = \frac{ln(P_t) - ln(P_{t-n+1})}{n}$$

Figura 2.1: Retorno Logarítmico do Índice Bovespa de janeiro/94 a agosto/2002



Dow Jones Index

O índice *Dow Jones* é mantido pelos editores do jornal de *Wall Street*. Como no caso do índice bovespa no Brasil, o *Dow Jones* também representa o mais importante índice de desempenho do mercado de ações americano, negociados na bolsa de Nova Iorque, sendo assim considerado o indicador de desempenho do mercado de ações mais importante do mundo. Para poder ter uma continuidade, raramente há mudanças na metodologia de cálculo, essas mudanças geralmente ocorrem quando há aquisição ou incorporações de alguma empresa. Outras carteiras teóricas no mercado de ações são:

- *Fund. Inv. S.&.P 500 Index*;
- *STAR Comp Aver*;
- *Russell 1000 Gr Index*;
- *Wellington Comp Index*;

Diante de tantos ativos financeiros, qual se deve escolher? Onde se iniciar a análise de investimento?

2.4 Análise de Investimento

São várias as formas de avaliar um investimento. A primeira divisão encontra-se no tipo de investimento, pois o mesmo terá taxa de juros, prazo, sem falar no tipo de tributação, que são diferentes para cada ativo. No caso do investimento em ações, o investidor levará em conta as expectativas de a firma ter possibilidade de ganhos no futuro. Esta expectativa deve ser baseada em duas partes: a primeira relacionada ao desempenho passado e a segunda nas previsões de desempenho futuro. Tanto o desempenho passado, como o desempenho futuro podem ser medidos por variáveis fundamentalistas, como exemplo:

- o valor de mercado;
- o índice valor patrimonial da ação dividido pelo preço;

- a relação entre o capital de terceiros e o capital próprio da empresa, ou seja, alavacagem financeira;
- o índice de lucro por ação, dividido pelo preço.

O fato é que as previsões de desempenho futuro são mais subjetivas do que uma estimação de valores passados. A conseqüência é que o decisor raramente tem uma precisão nas expectativas do lucro futuro de um investimento em particular. Dessa forma, vai-se distinguir dois estados de expectativa: certeza e incerteza.

2.4.1 Certeza e Incerteza

Há dois tipos de certeza. A certeza perfeita em que existe apenas um valor que representa os lucros futuros. **E será que esses ativos existem?** E há uma certeza intervalar, em que as expercativas dos lucros futuros são expressas dentro de um intervalo estreito.

No caso da incerteza, o gráfico da Figura 2.1 parece ser bem apropriado para representar o quanto pode ser incerto o retorno de um investimento. Uma outra forma de observar a dispersão dos retornos é através de um histograma; na Figura 2.2 por exemplo, pode-se observar o histograma dos retornos do índice bovespa. A Tabela 2.1 mostra os dados da distribuição de freqüência dos valores observados.

Figura 2.2: Histograma do Retorno Logarítmico do Índice Bovespa de janeiro/94 a agosto/2002. Fonte: *Site do Banco Central*

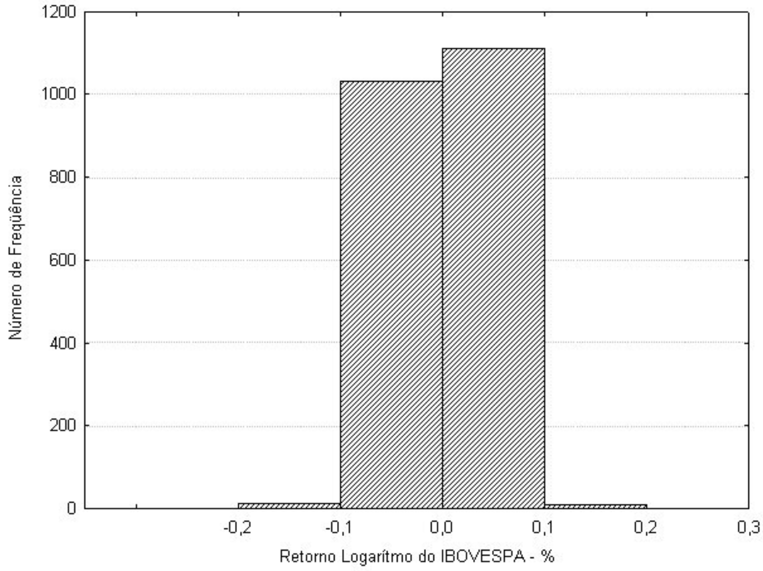


Tabela 2.1: Distribuição de Freqüência do Índice BOVESPA - Cotação Diária de 08/07/2002 a 16/08/2002.

Intervalo	Freqüência	Freq. Acumulada	Dist. de Probab.	Dist. de Probab. Acumulada
$-0,3 < r \leq -0,2$	0	0	$0,00$	$0,00$
$-0,2 < r \leq -0,1$	12	12	$0,55$	$0,55$
$-0,1 < r \leq 0,0$	1033	1045	$47,65$	$48,20$
$0,0 < r \leq 0,1$	1111	2156	$51,24$	$99,44$
$0,1 < r \leq 0,2$	10	2166	$0,46$	$99,90$
$0,2 < r \leq 0,3$	2	2168	$0,10$	$100,00$

Fonte: *Site do Banco Central*

A ação (ativo) de uma empresa nova não tem dados passados. Neste caso, o investidor deve basear sua decisão em probabilidades subjetivas, ou seja, a decisão é baseada em julgamentos pessoais referentes às chances de se perder ou de se ganhar com uma aplicação na nova empresa.

Qualquer medida da incerteza do retorno de um ativo pode ser interpretada como o risco do ativo. O conceito de risco de um ativo é muito amplo. No mercado financeiro inicialmente aceita-se a divisão de quatro tipos de riscos, que são:

- **Risco Operacional**: Está associado a falhas humanas. O mesmo estima as possíveis perdas de uma instituição, caso seu sistema, medidas controle e práticas não sejam capazes de resistir a falhas humanas.

- **Risco de Mercado**: Está associado à incerteza dos retonos do Ativo. Dessa forma, ele está associado com o preço dos ativos.

- **Risco de Crédito**: Discute-se bastante atualmente sobre o risco de crédito, entre os agentes, econômicos, os bancos são os que têm mais conhecimento do mesmo. Define-se risco de crédito como uma medida de incerteza decorrente da incapacidade do tomador de emprestímo de pagar a suas dívidas.

- **Risco Legal**: Está associado a questões da legislação de contrato entre os agentes econômicos. Pode-se definir o risco legal como a possibilidade de perda ocasionada pela impossibilidade de se executar os termos do contrato.

Quando a economia de um país é considerada aberta, ou seja, quando há a possibilidade de entrada de capitais e bens estrangeiros, há dois outros tipos de risco, ou seja, de incerteza quanto a eventos que influenciam o retorno de um ativo financeiro. Tais riscos são conhecidos como:

- **Risco País**: Após os anos 70, do século passado, começou uma abertura da movimentação de capitais. Dentre as possíveis maneiras de negociação entre países de mobilidade perfeita de capitais há a paridade coberta das taxas de juros, na qual as taxas de juros, denominadas em uma mesma moeda, são equalizadas entre os países atráves do fluxo de capitais. O diferencial da paridade coberta das taxas de juros é denominado risco país. Apliando o conceito, o risco país é um reflexo da situação econômica e financeira, refletindo também a estabilidade política de um país, além do desempenho histórico do cumprimento das obrigações financeiras do mesmo.
- **Risco Cambial**: Os investidores no mercado futuro de câmbio querem algo mais para vender uma moeda forte, no futuro, além da expectativa de desvalorização da moeda. Diferentemente do risco país, o risco cambial não é medido.

2.4.2 Como Escolher?

Sabe-se agora que se decide entre dois tipos de investimento dependendo, primeiramente, da expectativa do investidor em relação ao retorno do investimento. Como a certeza do retorno de um investimento é algo difícil de se aceitar, trata-se apenas dos critérios de elaboração de regras de decisão sobre expectativas de retornos arriscados. Como exemplo, tem-se:

1. **O Critério do Máximo Retorno**: O qual consiste na escolha do investimento que tem o maior retorno.
2. **O Critério do Máximo Retorno Esperado**: A decisão tem como base o lucro esperado, o qual é definido como a média dos retornos ponderados pelas probabilidades de ocorrência.
3. **O Critério da Máxima Utilidade Esperada**: Primeiro atribui-se ao lucro um valor subjetivo, chamado de utilidade ; a idéia da teoria da utilidade cardinal é que o importante é a satisfação que se tem da moeda, e não o valor da moeda.

Um exemplo ajudará a compreensão da aplicação dos critérios. Suponha quatro investimentos: A, B, C e D cujos os retornos e probabilidade de ocorrência encontram-se na Tabela 2.2. No uso do critério de máximo retorno, os investimentos C e D apresentam retornos certos; sendo assim, não é difícil de escolher o investimento C, pois o mesmo é o que apresenta o maior retorno; quando se compara o investimento C com os investimentos A e B, o critério de máximo retorno falha, pois o retorno dos investimentos A e B são incertos.

No caso do critério do máximo retorno esperado, considerando a escolha entre os investimentos A, C e D, deve-se escolher o investimento A, já que o mesmo apresenta o retorno esperado de 1.800, o qual é superior aos investimentos C e D. Mas, ao comparar o investimento A com o investimento B, o agente será indiferente aos dois investimentos, o que não é verdade pois para os dois investimentos, apesar de terem retornos esperados iguais, a probabilidade de uma economia ruim é maior no investimento A, tendo assim o investimento B uma maior probabilidade de ganhar um valor maior do que 1.000. Porém a chance de se ganhar 3.000 apostando no investimento A é maior do que a probabilidade de ganhar apenas 1.000 no investimento B; dessa forma, o critério do máximo retorno esperado falha para investimentos com o mesmo retorno esperado.

Tabela 2.2: Análise de Investimento.

Investimento	A		B		C		D	
Prob.&Ret.	Prob.	Ret.	Prob.	Ret.	Prob.	Ret.	Prob.	Ret.
Econ. Ruim	60%	1.000	20%	1.000	0	0	0	
Econ. Boa	40%	3.000	80%	2.000	100%	1.500	100%	1.000
Ret. Esp.		1.500		1.800		1.500		1.000

O critério da máxima utilidade esperada tem como base o valor de satisfação que o decisor atribui ao valor do dinheiro. Supondo que 3.000 seja o valor que dá a maior satisfação e que 0 seja o valor de menor satisfação, e, por hipótese, atribui-se 1 e 0 como utilidades para os 3.000 e 0, a 1.000, 1.500 e 2.000 tem-se 0,5, 0,6, e 0,9 como utilidades, respectivamente. As utilidades esperada de cada investimento será:

dessa forma, o investimetno B será o escolhido, pois o mesmo tem a maior utilidade esperada.

A escolha de um investimento não é tão simples assim; observe que, ao escolher o investimento B, supôs-se o conhecimento das probabilidades de uma economia boa ou ruim, além de que, no exemplo, atribuiu-se uma utilidade arbitrária. Necessita-se saber a localização do

Tabela 2.3: Utilidade Esperada dos Investimentos.

Investimento	**Utilidade Esperada**
A	$(0,6)(0,5) + (0,4)(1,0) = 0,7$
B	$(0,2)(0,5) + (0,8)(0,9) = 0,82$
C	$(1)(0,5) + (0)(0) = 0,5$
D	$(1)(0,6) + (0)(0) = 0,6$

sistema financeiro na economia para se ter uma visão do que vem a ser uma economia boa ou ruim. É necessário esse conhecimento pois as variáveis econômicas, como o PIB, a taxa de juros, a inflação, afetam diretamente ou indiretamente o retorno de ativos financeiros. Além do mais, o conceito de risco apresentado até agora é a medida da incerteza dos retornos financeiros e este conceito ainda está bem restrito.

No próximo capítulo, apresentar-se-á, além da localização do mercado financeiro na economia, a definição formal de risco e a base da teoria de Markowitz.

3 ANÁLISE E ESCOLHA DE UM PORTFOLIO

"A gestão de investimento não é uma arte, nem uma ciência, mas engenharia ..."

Charles Tschampion.

De um discurso em, 7 de fevereiro de 1995, (Bernstein, 1997).

3.1 Introdução

O presente capítulo trata alguns conceitos básicos do mercado financeiro. As questões que serão abordadas neste capítulo são:

- "Onde se situa o mercado financeiro na economia ?" ;
- "Quais são os mercados que segmentam o mercado financeiro?";
- "O que é risco?" e
- "Qual é a base da teoria financeira?".

Dessa forma, a idéia principal é fazer uma revisão bibliográfica da teoria financeira e apresentar o campo que se está estudando.

Divide-se o capítulo em cinco seções: a primeira trata do mercado financeiro e de seus sub-mercados; a segunda apresenta as origens da administração do risco, como também o conceito do que vem a ser risco e uma idéia de como o tempo influencia o retorno de um ativo financeiro; a terceira caracteriza-se pela apresentação das idéias de Markowitz para a escolha de um *Portfolio*; na quarta, resolve-se um problema de escolha de *Portfolio* pela Teoria de Markowitz; por último, apresenta-se algumas considerações sobre a teoria de Markowitz, e algumas razões para se usar uma outra ferramenta.

3.2 O Mercado Financeiro

A segmentação de um campo de estudo ou mesmo de uma ciência é comum em todas as áreas. Na economia, essa segmentação realiza-se pela divisão em duas grandes áreas: a Microeconomia e a Macroeconomia. Na Microeconomia, estuda-se as relações entre os agentes econômicos, num aspecto mais de indivíduo para indivíduo. Na Macroeconomia, a preocupação encontra-se mais no aspecto agregado das relações entre agentes econômicos. Dentro dessas duas grandes áreas da economia tem-se outras segmentações. Na Microeconomia os principais temas estudados são:

- Teoria do Consumidor;
- Teoria da Firma;
- Equilíbrio Geral e
- Estrutura de Mercado.

Na Macroeconomia, a divisão realiza-se em cinco mercados:

- Mercado de Bens e Serviços;
- Mercado Monetário;
- Mercado de Trabalho;
- Mercado Cambial;
- Mercado de Títulos.

O mercado financeiro é a união do mercado monetário com o mercado de títulos. A intermediação financeira é realizada entre quatro mercados, através da taxa de juros, a qual é considerada como moeda deste mercado. A segmentação do mercado financeiro é apresentada da seguinte forma: (Assaf Neto, 2001)

- Mercado Monetário;
- Mercado de Crédito;

- Mercado de Capitais;
- Mercado Cambial.

Todo mercado é caracterizado por dois tipos de agentes econômicos: os agentes que demandam algum produto e os que possuem o produto tão desejado e por algum preço abdicam dele. O mercado financeiro, através do mercado de capitais procura viabilizar a troca de recursos financeiros entre os que detêm recursos e os deficitários de recursos; o primeiro é o grande produtor deste mercado, o segundo é o consumidor.

Uma confusão comum é pensar que na compra de ações se está realizando um investimento, no sentido macroeconômico de desenvolvimento da economia, ou seja, uma produção de riqueza. Isso só ocorre se essa compra for realizada no mercado primário. A maioria das negociações de ações é realizada no mercado secundário, o qual, na verdade, só viabiliza a transferência de riqueza.

3.2.1 O Mercado Monetário

O Banco Central é o agente regulador do Mercado Monetário. Os principais ativos por ele negociados são títulos do Governo e os títulos do próprio Banco Central. O objetivo da negociação no mercado monetário é viabilizar a política monetária por parte do Banco Central, a qual possibilita o controle da liquidez monetária da economia. O controle sobre a quantidade de moeda e sobre a taxa de juros é realizado através das negociações no mercado aberto; são as negociações conhecidas como *open market*. Para entender melhor o funcionamento da política monetária, as atividades de negociação podem ser observadas em duas etapas; na primeira, realizada no mercado primário, o Banco Central vende títulos em leilões aos *dealers*, instituições representantes do próprio Banco; num segundo instante, em um mercado secundário, os *dealers* negociam os papéis com outras instituições financeiras.

3.2.2 O Mercado de Crédito

As negociações realizadas no Mercado de Crédito são para suprir a necessidade financeira de curto e médio prazos, de pessoas físicas e jurídicas. As operações neste mercado são realizadas pelos bancos comerciais e múltiplos. São diversos os tipos de crédito neste mercado; um exemplo é o Crédito Direto ao Consumidor–CDC, realizado por bancos comerciais a seus clientes.

3.2.3 O Mercado de Capitais

O Mercado de Capitais tem como principal objetivo o financiamento, de médio e longo prazos, do capital fixo e de giro das empresas. As aplicações de ações podem também ser consideradas aplicações de prazo indeterminado.

As operações no Mercado de Capitais são realizadas através das bolsas de valores em todo o mundo, o que permite uma movimentação maior de capitais, tanto estrangeiro quanto nacional.

Muitas das aplicações no Mercado de Capitais são feitas através de fundos de investimento, alguns dos quais serão apresentados no exemplo deste capítulo.

3.2.4 O Mercado Cambial

O mercado cambial viabiliza a negociação da moeda nacional com moedas estrangeiras conversíveis. São vários os motivos para se demandar moeda estrangeira, entre eles a necessidade de pagamento de dívidas das empresas nacionais por empréstimos internacionais.

A política cambial de um país pode ser classificada basicamente em duas formas, que são:

- Taxa de Câmbio Fixo;
- Taxa de Câmbio Flutuante.

Por meio da Taxa de Câmbio Fixo, o governo garante que não ocorrerão variações na taxa de câmbio. O preço da moeda estrangeira é fixo (num intervalo de tempo). Na política de câmbio flutuante, o mercado, através da demanda e da oferta do produto, no caso, a moeda estrangeira, determinam o preço da moeda.

3.3 Tempo e Risco

Tempo

O comportamento de um indivíduo no mercado financeiro também está associado ao tempo que ele estará disposto a abdicar do dinheiro corrente por um ativo. Os retornos dos ativos financeiros também estão relacionados com o tempo. Para alguns ativos, o retorno só ocorre com o decorrer de um certo tempo. Outros ativos têm rentabilidade imediata; basta apenas uma noite para um ativo ter um alto retorno. Em (Ross, 1995), apresenta-se um estudo realizado com cinco tipos de ativos:

- Ações Ordinárias;
- Ações de Empresas de Menor Capitalização;
- Obrigações de Longo Prazo Emitidas por Empresas;
- Obrigações de Longo Prazo do Governo dos Estados Unidos;
- Letras do Tesouro dos Estados Unidos.

Outro importante índice é a inflação, pois o retorno real ao ano pode ser calculado subtraindo-se do retorno corrente a inflação anual. O risco é inerente a todo ativo, porém consideram-se os títulos do governo (Letras do Tesouro dos Estados Unidos) ativos sem risco. A diferença entre o retorno de outros ativos e o de títulos do governo é chamada de prêmio por risco em relação aos títulos do governo. Nos estudos apresentados por (Ross, 1995), os ativos que apresentaram um retorno-médio maior também tinham uma maior variação. A questão é que, no curto prazo, os ativos do governo e os ativos de médio prazo apresentaram um retorno médio maior do que as ações ordinárias e as ações de pequenas empresas; no longo prazo o inverso ocorre. Dessa forma, existe um *tradeoff* entre o retorno de um ativo e o tempo da aplicação financeira.

As aplicações financeiras irão se diferenciar no caso de serem de curto prazo ou de longo prazo: alguns ativos no curto prazo dão um retorno maior do que outros; já no longo prazo estes ativos apresentam retorno menores, do que os ativos de retorno menor no curto prazo. A relação entre tempo, risco e retorno é clara. Com o decorrer do tempo, a incerteza sobre o investimento levará a um maior risco. Com um maior risco, o investidor só aplicará neste ativo se ele tiver a expectativa de um retorno maior; esta é uma hipótese de racionalidade. Uma hipótese básica é a de que no longo prazo a economia tem que crescer, senão ela irá à falência. O crescimento econômico levará o valor médio do lucro de todos os investidores a um aumento (Campello de Souza, 2002).

Risco

Em 1996, Peter L. Bernstein lançou o livro, com título em português, *"Desafio aos Deuses: A Fascinante História do Risco"*. O objetivo principal de Bernstein é mostrar como se deu a administração do risco ao longo do tempo. Os principais conceitos desta seção encontram-se no livro de Bernstein (Bernstein, 1997).

Risco é uma palavra que deriva do italiano antigo *risicare*, com o significado de "ousar". Na História, antes de qualquer estudo sério sobre a administração do risco, o futuro pertencia aos deuses, ou seja, o que iria ocorrer era obra do destino, e, aos pobres mortais, restava aceitá-lo. Risco, no sentido de "ousar", é uma opção. O estudo do risco, na concepção moderna da palavra, iniciou-se em 1654, época do Renascimento, e suas raízes são as mesmas da Teoria da Probabilidade, quando o cavaleiro de Méré desafiou Blaise Pascal a responder o problema do jogo de *balla* proposto por Pacciolo, um monge franciscano.

No decorrer de uma das suas obras mais famosas, a *Summa de arithmetic*, Paccioli propõe: "A e B estão empenhados em um jogo de *balla*. Eles concordam que o jogo continuará até que um deles vença seis rodadas. O jogo realmente termina quando A vence cinco, e B, três rodadas. Como devem ser divididas as apostas?".

Pascal não quis resolver o problema sozinho e entrou em contato com Pierre de Fermat, o qual era magistrado e morava em Toulouse. A comunicação entre os dois deu-se através de cartas. Quando Pascal e Fermat resolveram o problema, eles registraram uma forma de se determinar a probabilidade de cada um dos resultados possíveis, considerando sempre a possibilidade de se medir matematicamente os resultados. Encerrando-se a correspondência entre Pascal e Fermat em 1654, Pascal renunciou a tudo e entrou no Mosteiro de Port-Royal, na cidade de Paris. Na obra de Pascal, "*Pensamentos*", escrita na mesma época do mosteiro, existe um fragmento que ficou conhecido como "A Aposta de Pascal", e este faz a seguinte pergunta: "Deus existe ou não existe?". Pascal formula a questão em termos de um jogo, o qual terminará numa distância infinita no tempo. Neste momento uma moeda é lançada: Cara (Deus existe) ou Coroa (Deus não existe). Em qual lado você apostaria? Para alguns, a teoria da tomada de decisões inicia-se com a análise que Pascal utilizou para resolver este problema. (Detalhes sobre a Aposta de Pascal ver (Campello de Souza, 2002))

3.3.1 Daniel Bernoulli e o Conceito de Risco

> *"Desde que os matemáticos começaram a estudar a medição do risco, tem vigorado um consenso geral sobre esta proposição: os valores esperados são calculados multiplicando-se cada ganho possível pelo número de meios pelos quais pode ocorrer, e depois dividindo-se a soma desses produtos pelo número total de casos."*

Esse parágrafo expõe a hipótese que Daniel Bernoulli quis atacar, no artigo apresentado à Academia de São Petersburgo, em 1738. Setenta e seis anos antes do artigo de Bernoulli, um grupo de monges do Mosteiro de Port-Royal, o mesmo de Pascal, publicou o livro *"Lógica, ou a arte de pensar"*, tendo como principal autor, Antoine Arnauld. A *Lógica*, semelhante ao artigo de Bernoulli, tinha como principal argumento, em suas proposições, que qualquer decisão envolvendo risco teria que ser analisada por dois fatores distintos e inseparáveis. Um dos fatores corresponde aos fatos observáveis e o outro fator está associado ao valor do que será obtido, ou perdido, ao se tomar a decisão. Sendo assim, existe um fator subjetivo conhecido por *utilidade*. Há uma diferença entre as abordagens de cada autor. Antoine Arnauld acredita que pessoas aversas ao risco tomam decisões baseando-se nas conseqüências, enquanto Bernoulli argumenta que os aversos ao risco tomam suas decisões com base nas probabilidades e desconsideram as conseqüências. Uma das características mais marcantes em Bernoulli é a utilização da racionalidade e do comportamento do homem perante ela.

Pascal e Fermat trabalharam no caminho de medir o risco associado ao arremesso de dados, estabelecendo as opções. Bernoulli formulou suas idéias de tal forma que o desejo das pessoas influenciará nas suas decisões, e para cada pessoa os fatos seriam vistos de formas diferentes.

As decisões, segundo Bernoulli, dependem da utilidade, mas como medir a utilidade das pessoas? Naquela época esta questão não tinha resposta e ainda hoje muitas pessoas não acreditam nesta possibilidade. No mesmo período de Bernoulli, os economistas falavam em preferência de um bem em relação a outro. Bernoulli trata a preferência de forma que um bem tem um valor e o valor deste bem é maior que o de outro bem.

O "utilitômetro", nome atribuído ao aparelho que mede a utilidade, nunca foi inventado na forma de razão, porém já existe sim um utilitômetro com medida intervalar. Um das causas para tamanha falta de comunicação entre Bernoulli e os economistas deve-se, talvez, ao fato de que só no ano de 1896 o artigo de Bernoulli foi traduzido do latim para o alemão. A tradução em inglês só apareceu 216 anos após a publicação do original.

O método utilizado para calcular a *utilidade esperada* é o mesmo para se calcular o valor esperado (conceito apresentado por Huygens, em 1657), sendo a utilidade o peso. O exemplo de Bernoulli é um jogo eqüitativo com dois jogadores, cada um tendo 100 ducados. O perdedor pagaria 50 ducados ao outro. Qualquer um dos jogadores poderia terminar o jogo com 50 ducados ou 150. A pergunta que se faz é: deveriam eles jogar? O valor esperado do jogo é 100, ou seja, o mesmo que cada um teria se não jogasse. Bernoulli revela uma assimetria, a qual explica que jogos equilibrados são pouco atraentes. Para cada um dos jogadores os 50 ducados que ganhariam são menos atraentes, do que os 50 que perderiam.

O Paradoxo de São Petersbugo

Jacob Bernoulli, tio de Daniel Bernoulli, propõe, em seu livro "*A Arte da conjectura*" um jogo entre Pedro e Paulo, no qual Pedro jogará uma moeda, verá o resultado, e continuará jogando a moeda até aparecer uma cara. Se aparecer uma cara na primeira jogada, Pedro receberá um rubro, se aparecer no segundo lançamento, Pedro receberá agora dois rubros, se só aparecer no terceiro lançamento, Pedro receberá quatro rubros, e assim sucessivamente. Dessa forma, o pagamento do jogo é 2^n rubros, onde n é o número de lançamentos. A questão é: qual o valor que se pagará para jogar este jogo?

Supondo uma moeda justa, a probabilidade de se ter cara num lançamento é $0,5$. Tem-se o valor esperado do jogo expresso pela seguinte equação:

$$E(J) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right) = \infty. \tag{3.3.1}$$

O fato de se ter um jogo com valor esperado igual a infinito torna-se o argumento para o paradoxo. Pois, se uma pessoa decidir entrar nesse jogo pelo valor esperado, terá que pagar o máximo possível. E isto não é verdade. Segundo (Campello de Souza, 2002), "Um dos principais argumentos para resolver o paradoxo foi que o que estava errado com o jogo era que 2^{n+1} rubros não valem, necessariamente, duas vezes 2^n rublos." ..."A idéia era considerar-se não os ganhos esperados, mas, de alguma forma, ganhos escalonados esperados."

A solução definitiva para o paradoxo é dizer que há uma função utilidade para dinheiro limitada. Dessa forma, o valor esperado do jogo seria:

$$E(J) = \sum_{0}^{\infty} v\left(2^{n}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \tag{3.3.2}$$

onde: $v(2^n)$ é o valor da utilidade que Pedro atribui a 2^n rublos.

A definição de risco que surgiu das idéias de Bernoulli ao resolver o paradoxo é a única que existe e nenhuma outra mais: ***Risco é o produto de uma utilidade por uma probabilidade***.

Um Jogo Infantil é Base Para Grandes Teorias

As teorias que utilizam a idéia de Bernuolli, de racionalidade, são inúmeras. Em 1944, um físico e um economista terminam um livro de 650 páginas, o qual só foi publicado em 1947, por subsídio de um membro da família Rockefeller. O livro é "*Theory of Games and Economic Behavior*"(Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico) e os dois autores são John von Neumann e Oskar Morgenstern . Von Neumann é o pai da Teoria dos Jogos. Em 1926, Von Neumann apresentou um artigo à Sociedade Matemática da Universidade de Göttingen, cujo tema era uma estratégia racional para um jogo infantil. Von Neumann apresentou uma forma de se medir a utilidade, a qual é conhecida como utilidade cardinal fraca, e este é o utilitômetro em medida intervalar.

Von Neumann e Morgenstern concluíram através de experiências que os resultados "não são tão bons como seria de esperar, mas sua direção geral está ***correta***" (Bernstein, 1997, p.283). O grifo é do autor.

Em 1954, surge a Teoria da Decisão Estatística, a qual é a ferramenta usada para alcançar o objetivo principal desta dissertação. A Teoria da Decisão também se baseia na racionalidade dos agentes. Bernstein não faz nenhum comentário a respeito dessa ferramenta.

Um dos conceitos mais utilizados na Teoria da Decisão é o Risco de Bayes (r_d).

$$r_d = -\sum_{\theta} u(P(p|\theta, d))\pi(\theta) \tag{3.3.3}$$

onde:

- $\pi(\theta)$ é a probabilidade de que a natureza escolha a categoria θ;
- $u(P(p|\theta, d))$ é a utilidade da distribuição de probabilidade de se ter o bem p, dado que o estado da natureza seja θ e a regra de decisão seja d.
- O risco de Bayes é o risco de se usar a regra de decisão d, tendo $\pi(\theta)$ como distribuição de probabilidade subjetiva.

Uma distribuição de probabilidade subjetiva também é conhecida como a distribuição *a priori*. Jonh Maynard Keynes foi um dos primeiros a defender a utilização da probabilidade subjetiva. Ele acreditava que propriedades como a da distribuição normal, na qual os eventos seriam independentes, ou como a da Lei dos Grandes números, nunca aconteceriam em relações nas quais o homem estivesse envolvido.

Uma confusão comum no mercado financeiro é pensar que a medida de risco proposta por Markowitz, é o risco do ativo financeiro. Markovitz publicou em 1952 um artigo de 14 páginas, no *Journal of Finance*, com o título "*Portfolio Selection*". Na época, Markowitz era apenas um estudante de pós-graduação da Universidade de Chigago, na área de pesquisa operacional, e o problema foi sugerido por um corretor. Do seu artigo surge a recente Teoria das Finanças.

O artigo de Markowitz é base para os modelos *capital asset pricing model* – CAPM e *Arbitrage Pricing Theory*– APT e mais recentemente o conceito de *value at risk*, que podem ser estudados em vários livros de administração financeira entre eles (Assaf Neto, 2001), (Ross, 1995) e (Silva Neto, 1998). Como o objetivo principal deste trabalho não é apresentar a teoria financeira mas sim usar uma ferramenta para resolver um problema da teoria financeira, aqui não se aborda todos os modelos, mas apresenta-se as idéias principais deles através da Teoria de Markowitz.

3.4 A Teoria de Markowitz

3.4.1 Mercados Eficientes

Mercados Eficientes são os mercados nos quais o preço reflete as informações disponíveis. A idéia de mercados eficientes é a premissa para a aplicação do método de Markowitz. É bom esclarecer que Markowitz elaborou um método e não uma teoria e é este método que vai ser explicado. As hipóteses básicas do mercado eficiente são (Assaf Neto, 2001):

- *"Nenhum participante do mercado tem a capacidade de sozinho influenciar os preços de negociações, alterando-os segundo exclusivamente suas expectativas.*
- *O mercado, de uma maneira geral, é constituído de investidores racionais, decidindo sobre alternativas que promovam o maior retorno possível para um determinado nível de risco, ou o menor risco possível para um certo patamar de retorno.*
- *Todas as informações estão disponíveis aos participantes do mercado, de maneira instantânea e gratuita. Nessa hipótese, nenhum investidor apresenta qualquer acesso privilegiado às informações, sendo identicamente disponíveis a todos os agentes.*
- *Em princípio, o mercado eficiente trabalha com a hipótese de inexistência de racionamento de capital, permitindo que todos agentes tenham acesso equivalente às fontes de crédito.*
- *Os ativos objetos do mercado são perfeitamente divisíveis e negociados sem restrições.*
- *As expectativas dos investidores são homogêneas, isto é, apresentam o mesmo nível de apreciação com relação ao desempenho futuro do mercado."*

3.4.2 Retorno e Risco de um Ativo

A estimativa de retorno médio, $\overline{R(A)}$, e a de risco, $\hat{\sigma}(A)$, de um ativo, são expressas pela esperança dos retornos passados e pelo seu desvio-padrão. As equações abaixo representam as estimativas do retorno esperado e do risco de um ativo:

$$\overline{R(A)} = \frac{\sum_{t=1}^{n} R_t}{n} \tag{3.4.1}$$

$$\hat{\sigma}(A) = \frac{\sum_{t=1}^{n} (R_t - \overline{R(A)})^2}{n-1} \tag{3.4.2}$$

O número de observações é representado por n, e R_t representa o retorno no instante t.

Em uma aplicação financeira, a relação de risco e retorno é importante. Na maioria dos ativos financeiros, quanto maior o risco, maior será o retorno esperado, ou seja, existe uma relação direta entre risco e retorno. Para um empresário, a decisão de aplicar o seu capital em um ativo financeiro deve ser diferente da decisão de um aposentado de aplicar suas economias de uma vida inteira. É mais provável que o aposentado seja mais averso ao risco do que o empresário. A forma de se avaliar se algum agente econômico é averso ao risco, ou não, é pela utilidade que o mesmo atribui ao dinheiro. Porém, sobre a hipótese de que os agentes são racionais pode-se estabelecer algumas considerações sobre as preferências dos investidores. Entre dois ativos, um investidor certamente se decidirá pelo que tenha um menor risco para o mesmo retorno, como também decidirá pelo ativo com um maior retorno para o mesmo risco.

3.4.3 Retorno e Risco de um *Portfolio*

O método de Markowitz baseia-se na formação de uma carteira de ativos de tal forma que o risco atribuído a cada um dos ativos possa ser minimizado. Esse risco é conhecido como risco não-sistemático. No método de Markowitz, o risco que não está sendo considerado é o risco de mercado, conhecido como o risco sistemático. A idéia de Markowitz é a diversificação da carteira com ativos de correlação negativa; dessa forma, a medida em que um ativo gera perda para a carteira, outro gerará ganhos.

O retorno médio, $R(P)$, e risco, $\sigma(P)$, de um *portfolio* são expressos pelas seguintes equações:

$$R(P) = \sum_{j=1}^{n} R_j W_j \tag{3.4.3}$$

$$\sigma(P) = \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} W_i W_j \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j \right]^{1/2} \tag{3.4.4}$$

onde:

- O percentual de aplicação em cada ativo é W_j;
- σ_j representa o risco de cada ativo e
- $\rho_{i,j}$ é o coeficiente de correlação entre o retorno de dois ativos.

Para se obter o percentual de aplicação em cada ativo, resolve-se o problema através do método de programação linear, no qual as variáveis de escolha são os percentuais de aplicação, o funcional objetivo é o risco do *Portfolio* e as restrições são bastante lógicas. Como o percentual de aplicação é uma probabilidade, eles serão positivos e o somatório dos percentuais será igual a um. O problema é expresso da seguinte forma:

$$\text{Min}_{W_j}\, \sigma(P)$$

$$s.a$$

$$\sum W_j = 1 \ , \ W_j \geqslant 0$$

3.5 Exemplo: A Escolha de um *Portfolio*

O rendimento anual de alguns fundos de investimento é apresentado na Tabela 3.1. O valor na tabela corresponde ao ganho de capital do fundo naquele ano.

Tabela 3.1: Rendimento Percentual dos Fundos de Investimento.

Ano	Fund Inv S.e.P 500 Index	Wellington Comp Index	Russell 1000 Gr Index	STAR Comp Aver
2000	-9.10	-2.37	-22.43	1.57
1999	21.04	10.61	33.16	15.82
1998	28.58	22.65	38.71	11.30
1997	33.36	26.27	30.49	17.92
1996	22.96	15.08	23.12	13.65
1995	37.58	33.72	37.19	23.30
1994	1.32	-1.15	2.66	-1.18
1993	10.08	11.11	2.90	10.64
1992	7.62	8.03	5.00	7.95
1991	30.47	26.98	41.16	26.93
1990	-3.10	0.48	-0.26	-1.61
1989	31.69	25.98	35.92	17.96
1988	16.61	14.25	11.27	11.83
1987	5.26	5.01	5.31	3.14
1986	18.68	19.10	15.36	12.60

Fonte: *Site: www.globalfindata.com/*

O rendimento ao longo do tempo (RALT) do fundo de investimento pode ser visto na Tabela 3.2. O RALT representa quanto o investidor terá de rendimento se sua aplicação for de 1986 a 2000. No caso de um investidor aplicar R$ 1,00 (hum real) no fundo "Fund Inv S.e.P 500 Index", terá, no fim de 2000, R$ 829,11 (oitocentos e vinte e nove reais e onze centavos), desconsiderando taxas ou impostos.

Tabela 3.2: Rendimento ao Longo do Tempo dos Fundos de Investimento.

Fundos	RALT
Fund Inv S.e.P 500 Index	829,11%
STAR Comp Aver	388,57%
Russell 1000 Gr Index	801,10%
Wellington Comp Index	601,34%

Como já se sabe o retorno passado, é fácil decidir em que ativo deve-se investir? A resposta é não. Nenhum ativo é totalmente livre de risco, porém alguns ativos, por apresentar pouca variabilidade no retorno, são considerados ativos sem risco; os mais conhecidos são os títulos públicos.

No caso dos fundos apresentados acima o retorno esperado e risco são apresentados na Tabela 3.3:

Tabela 3.3: Retorno Esperado e Risco dos Fundos de Investimento.

Fundos	Retorno Esperado	Risco
Fund Inv S.e.P 500 Index	16,69%	13,86%
STAR Comp Aver	11,68%	8,16%
Russell 1000 Gr Index	19,78%	18,02%
Wellington Comp Index	18,69%	10,85%

A escolha do fundo em que se deve aplicar dependerá da preferência do indivíduo em questão, pois se, ele for propenso ao risco e quiser ter o maior retorno, investirá no "Russell 1000 Gr Index", e se ele for averso ao risco, o fundo será o "STAR Comp Aver".

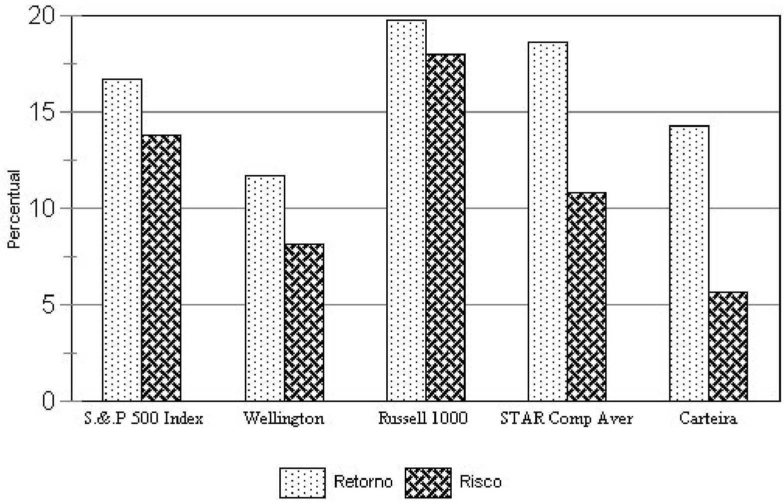
Utilizando a idéias de Markowitz de minimizar o risco não-sistemático dos ativos para formação de uma carteira, ou seja, resolvendo o problema de programação linear já citado, pode-se ver na Tabela 3.4 a combinação dos fundos de investimento que formam a carteira de investimento teórica de Markowitz

Tabela 3.4: Carteira de Ativos dos Fundos de Investimento.

Fundos	Percentual de Aplicação
Fund Inv S.e.P 500 Index	16,27%
STAR Comp Aver	47,36%
Russell 1000 Gr Index	09,69%
Wellington Comp Index	26,68%

O risco da carteira de investimento será de 5,65% e o retorno médio obtido nos 15 anos foi de 14,29%. No gráfico da Figura 3.1, observa-se que a relação retorno *versus* risco da carteira de investimento é melhor do que a relação dos outros fundos.

Figura 3.1: Gráfico de Barra do Retorno e do Risco dos Fundos e da Carteira de Investimento.



3.6 A Utilização de Uma Nova Ferramenta

A Metodologia de Markowitz Não Considera a Utilidade do Indivíduo

No método de Markowitz, é levado em consideração que todos os investidores são aversos ao risco. O objetivo é minimizar o risco não-sistemático considerando apenas a existência de correlação negativa entre o retorno dos ativos. Os aspectos de neutralidade e de propensão ao risco não têm nenhuma influência na hora de um investidor decidir seu investimento.

O Risco Sistemático

Para Markowitz, o risco sistemático é comum a todos os ativos e deve ser desconsiderado. Porém, fatos importantes, como guerras, eleições presidenciais, formação de blocos econômicos e etc. são importantes no momento de se decidir a carteira de investimento; contudo tais aspectos não são considerados pelo modelo de Markowitz.

Novo Método

A utilização da teoria da decisão na análise da escolha de *portfolio* representa um novo método, o qual levará em consideração aspectos importantes como:

- A função utilidade do decisor;
- A medição do risco sistemático.

Pode-se aplicar a nova proposta de Bayes empírico introduzida em (Campello de Souza, 2002) para obter uma medida do risco sistemático. Tais aspectos, que antes não eram levados em conta, podem representar um importante avanço na análise de investimento. No próximo capítulo, serão apresentados os conceitos e elementos utilizados pela Teoria da Decisão.

4 TEORIA DA DECISÃO

"A característica de um indivíduo inteligente é a sua capacidade de tomar decisões racionais com base em informações insuficientes".

Fernando Menezes Campello de Souza.

Decisões Racionais em Situações de Incerteza, 2002.

4.1 Introdução

Utilizando o método de Markowitz para decidir o *portfolio* em que se deve investir, não se considera o risco sistemático. Um dos objetivos deste trabalho é apresentar, à luz da teoria de decisão uma ferramenta que possibilite tomar decisões de aplicações financeiras minimizando o risco de mercado.

A teoria da decisão aborda problemas de se decidir qual a ação que se deve tomar, quando é incerto o que poderá acontecer. A base da teoria da decisão é a mesma da teoria dos jogos; para (Bacharach, 1977) a teoria dos jogos é parte da teoria da decisão. Para expor um problema de decisão, (Bacharach, 1977) utilizou o seguinte exemplo: suponha que um *businessman* tenha que escolher, entre dois investimentos, aquele com melhor retorno, caso ocorra uma guerra no Oriente Médio neste ano. Este estado do mundo (ocorrer uma guerra este ano), que também é chamado de estado da natureza em teoria da decisão, nunca ocorreu. Dessa forma, não existe nenhuma série de dados históricos que possibilite inferir a probabilidade de ocorrer uma guerra no Oriente Médio, neste ano. A única forma de se obter alguma informação sobre a probabilidade de ocorrência deste fenômeno é eduzir a opinião de um especialista. Para entender melhor um problema de decisão, pode-se caracterizá-lo pelos seguintes elementos:

1. um conjunto de possíveis estados da natureza;
2. um conjunto de ações;
3. um ganho associado com cada estado da natureza e uma ação;

4. observações obtidas de um experimento definido pelo estado da natureza.

Com os três primeiros elementos, tem-se um problema de decisão sem dados. A combinação de todos os elementos define o problema de decisão estatística. Dessa forma, ao se resolver um problema de teoria da decisão, o decisor escolhe uma ação de tal maneira que as conseqüências sejam as mais favoráveis possíveis para ele.

O presente capítulo tem como finalidade expor o uso da teoria da decisão em análise financeira. Para isso, o mesmo é dividido em cinco partes, que são: a primeira parte é uma introdução que está sendo feita agora; na segunda parte, apresenta-se os elementos matemáticos de um problema de teoria da decisão; na parte seguinte, é exposto um problema de decisão com enfoque da regra de Bayes, em que a distribuição *a priori* dos estados da natureza é obtida pelo método tradicional de Bayes empírico; a penúltima parte é composta de um exemplo o qual é resolvido usando o método de Bayes empírico, com o professor; na última parte, tem-se uma conclusão.

4.2 Os Elementos Matemáticos da Teoria da Decisão

O problema em estudo será resolvido utilizando as ferramentas da teoria da decisão. Em (Campello de Souza, 2002), um problema de decisão é caracterizado por três questões:

- "o que se quer?";
- "o que se sabe?";
- "o que se pode fazer?".

A primeira questão está associada à utilidade do retorno para um investidor financeiro. Para qualquer decisão financeira, primeiro atribui-se uma utilidade ao retorno; outro fator é a existência de uma probabilidade sobre as conseqüências do investimento sobre o dinheiro aplicado. Por definição, **risco** é o produto de uma utilidade por uma probabilidade. Dessa forma, existe um risco nas decisões financeiras. Diante do risco, o investidor pode assumir dois tipos de comportamento: o investidor pode ser averso ao risco e, assim, procurar ativos de baixo risco, tendo como conseqüência às suas decisões ativos de baixa rentabilidade, ou o investidor pode ser propenso ao risco, e procurar investir em ativos mais agressivos, que são ativos de maior risco, porém são também ativos de maior rentabilidade.

A segunda questão pode parecer um tanto mais fácil à primeira vista, pois no dias atuais as informações estão disponíveis para todos pela internet, mas, na verdade, o que se tem na internet são dados que precisam ser trabalhados para gerar informação. Outro problema é conhecer a dinâmica econômica; será uma economia keneysiana ou liberal? De fato, observar a economia não é fácil. Como saber o que é bom para o seu investimento, já que o estado da economia pode ser bom para um tipo de investimento e ao mesmo tempo ruim para outro? O retorno de um investimento não depende apenas da série histórica de seus retornos. Um outro problema na precisão ou predição do retorno de um ativo é a existência de fatores exógenos à economia que influenciam no seu comportamento; entre eles, podem-se citar:

- as decisões políticas;
- as guerras;
- perturbações na formação de blocos econômicos;
- eleições
- entre outros.

No caso da última questão, a resposta é mais fácil pois as ações já são conhecidas, o investidor sabe que deve distribuir um pouco de seu dinheiro em cada investimento; essa é a idéia de Markowitz, pois, com a diversificação, diminui-se o risco não-sistemático. Uma afirmação da proposta de Markowitz é desconsiderar o risco sistemático; o modelo proposto via teoria da decisão em (Campello de Souza, 2002) procura justamente desmentir esta afirmação, já que ele consiste na escolha de como o investidor deve distribuir o seu investimento, observando indicadores da economia, para minimização da incerteza sobre os possíveis estados da economia.

4.2.1 Conjuntos e Mecanismos Probabilísticos

Em geral, um problema de decisão é composto por quatro conjuntos e dois mecanismos probabilísticos frequentistas básicos. Os conjuntos são:

- o conjunto dos estado da natureza, $\Theta = \{\theta\}$;
- o conjunto das ações, $\mathcal{A} = \{a\}$ (no sentido de agir).
- o conjunto dos bens, $\mathcal{P} = \{p\}$;
- o conjunto das observações, $\mathcal{X} = \{x\}$.

Os mecanismos probabilísticos são:

- função conseqüência $P(p|\theta, a)$;
- função de verossimilhança $P(x|\theta)$.

Em um caso mais particular da teoria da decisão, em que se utiliza a Regra de Bayes para resolver o problema de decisão, apresenta-se mais um mecanismo probabilístico, a distribuição de probabilidade *a priori* do estado da natureza, $\pi(\theta)$. Todos as definições e propriedades dos elementos matemáticos de um problema de decisão podem ser encontrados em (Campello de Souza, 2002).

4.2.2 Conhecimento *a priori*

O conjunto dos estados da natureza, $\Theta = \{\theta\}$, pode ser discreto, contínuo, finito, infinito, escalar, vetorial ou alguma combinação desses conceitos. Os estados da natureza podem ser qualquer coisa; de uma forma geral, é o objeto de interesse de um indivíduo. A distribuição de probabilidade sobre o θ, $\pi(\theta)$, tanto pode ser calculada por séries históricas, como pela opinião de um especialista. No primeiro caso, a distribuição é conhecida como distribuição objetiva e, no segundo, como distribuição subjetiva.

Distribuições Objetivas

Quando se fala em distribuições objetivas sobre o estado da natureza, a natureza da distribuição de probabilidade é freqüentista. Para a obtenção de $\pi(\theta)$, usam-se as técnicas estatísticas conhecidas como Bayes Empírico, atráves das quais pode-se aprender sobre os estados da natureza, com ou sem o professor; essas duas metodologias podem ser encontradas em (Campello de Souza, 2002).

Distribuições Subjetivas

Uma questão importante a se discutir é se o subjetivo pode ser medido. A discussão dessa questão ficará para mais tarde, na seção 6.1. O fato é que Keynes defende a hipótese de que a longo prazo todos nós estaremos mortos e de que séries históricas que permitiriam realizar previsões sobre o nosso futuro nunca existiriam. Para Keynes, os economistas explicam muito bem o que já aconteceu porém eles não conseguem prever o que está para acontecer. Para (Campello de Souza, 2002), quando se dispõe de poucos dados ou nenhum dado, o conhecimento *a priori* do especialista deve ser utilizado. Um novo procedimento de edução do conhecimento *a priori* do especialista é apresentado em (Campello de Souza, 2002).

4.2.3 Função Utilidade

A função utilidade é outro elemento matemático da teoria da decisão. Em (Campello de Souza, 2002), encontram-se também alguns métodos de edução da função utilidade, diferentes do proposto por Von Neumann e Morgenstern. Este assunto será tratado com mais detalhes no Capítulo 5.

4.2.4 O Conjunto das Ações

A formulação das ações de um problema de decisão depende muito da criatividade do decisor ao formular o problema. No caso de um investimento, a ação do decisor é o *portfolio* em que ele deverá investir. Sendo assim, no conjunto das ações, a será um vetor do percentual de aplicação em cada ativo.

4.2.5 O Conjunto dos Bens e a Função Conseqüência

As conseqüências de se tomar uma decisão dado um certo estado da natureza estão contidas no conjunto dos Bens, $\mathcal{P} = \{p\}$. No caso de um investimento em *portfolio*, o conjunto dos bens é representado pelo retorno que o investidor terá. Como o retorno é expresso em dinheiro ou percentual, o conjunto dos bens será contínuo e poderá ser representado pelo conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$. O valor que uma pessoa atribuir a um elemento do conjunto dos bens pode ser expresso pela função utilidade de von Neumann e Morgenstern. O importante agora é que o leitor entenda que num problema de decisão de investimento nunca se sabe realmente quem é p, pois as conseqüências das ações são sempre incertas; dependem probabilisticamente do estado da natureza, uma vez que se exerce a ação. Dessa forma, tem-se um conjunto de distribuições de probabilidade sobre $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^* = \{P\}$, sendo P uma distribuição de probabilidade de ganhar o bem p, dado que a natureza encontra-se no estado θ e o decisor adotou a ação a. Essa distribuição é conhecida como **função conseqüência**, $P(p|\theta, a)$.

4.2.6 O Conjunto de Observações e a Função de Verossimilhança

São vários os casos em que não se pode observar diretamente o estado da natureza. O conjunto de Observações, $\mathcal{X} = \{x\}$, é um conjunto de variáveis observáveis que nos informa sobre o θ, através de alguma relação. Essa relação, ou canal de comunicação, entre as observações e os estados da natureza é chamada função de verossimilhança, denotada por $P(x|\theta)$, no caso discreto, e por $F_{\mathcal{X}|\theta}(x|\theta)$, no caso contínuo.

4.2.7 Regra de Decisão

"Uma regra de decisão é um procedimento que permite escolher um curso de ação, dentre os disponíveis, adequado ao que se quer e ao que se sabe" (Campello de Souza, 2002). Matematicamente, uma regra de decisão é uma função, em que o domínio é o conjunto de observações e o contra-domínio, o conjunto das ações. Desta forma, a cada observação, pode-se atribuir uma ação. A relação existente na função pode ser determinística ou probabilística. No caso determinístico, o conjunto de regra de decisões é denotado por $\mathcal{D} = \{d\}$. O número de regras de decisão para um número finito de observações e ações é dado por: $\|\mathcal{D}\| = \|\mathcal{A}\|^{\|\mathcal{X}\|}$. Para detalhes sobre regras probabilísticas, consultar (Campello de Souza, 2002).

4.2.8 Função Perda

A função perda é o negativo da utilidade. A equação que expressa a função perda é:

$$L(\theta, d) = -u(P(p|\theta, d)) = E_p v(p) = \sum_p v(p)P(p|\theta, d) \qquad (4.2.1)$$

onde: $v(p)$ é o valor do bem p obtido pela função utilidade cardinal fraca. Pode-se ainda expressar a função perda em função das observações, x.

Em um caso muito particular, pode-se tomar a função perda como a função perda do observador ideal. Suponha-se que $\mathcal{A} = \Theta$. Seja $L(\theta, a) = 1$, se $\theta \neq a$ e $L(\theta, a) = 0$, se $\theta = a$. O detalhe é que a função perda dá a mesma perda, se se comete um engano, (1), e dá (0), caso o decisor escolha a ação corretamente. Neste caso, não se considera a utilidade do decisor. A função está representada na Tabela 4.1

Tabela 4.1: Função Perda do Observador Ideal.

$L(\theta, a)$	a_{00}	a_{01}	a_{10}	a_{11}
θ_{00}	0	1	1	1
θ_{01}	1	0	1	1
θ_{10}	1	1	0	1
θ_{11}	1	1	1	0

4.2.9 Função Risco

> *"A função risco representa a perda média para o estatístico quando o verdadeiro estado da natureza é θ e o estatístico usa a função (decisão) d."* (Campello de Souza, 2002)

A expressão da função risco, R_d, é definida por:

$$R_d = E_\theta(L(\theta, d(x))) \tag{4.2.2}$$

4.3 Regras de Bayes

Para facilitar o entendimento do assunto, os conceitos serão apresentados no caso particular em que os conjuntos são discretos e a regra de decisão, determinística.

4.3.1 O Risco de Bayes

O risco de uma regra de decisão d será dado por:

$$r_d = -u(P(p|d)) = -\sum_{\theta} \pi(\theta) u(p|\theta, d) = \sum_{\theta} \pi(\theta) R_d(\theta) \tag{4.3.1}$$

A regra de decisão é escolhida minimizando-se r_d, sendo a variável de escolha uma regra de decisão determinística, d. Matematicamente, tem-se:

$$\text{Min}_d \, r_d = \sum_{\theta} \pi(\theta) R_d(\theta) \tag{4.3.2}$$

Todo o desenvolvimento e extensões das fórmulas citadas acima pode ser visto em (Campello de Souza, 2002).

Os problemas que podem ser resolvidos usando o risco de Bayes são inúmeros, porém, para poder usá-lo, supõe-se o conhecimento de $\pi(\theta)$; quando não se tem nenhuma forma de obter $\pi(\theta)$, pode-se usar dois outros métodos na teoria da decisão, que são: Regras de Neyman-Pearson e Regras Minimax. (Campello de Souza, 2002) e (Berger, 1985).

As Regras de Neyman-Pearson só podem ser utilizadas quando o problema de decisão é formulado com apenas dois estados da natureza. No caso das Regras Minimax, a aplicação pode ocorrer quando se possui muitas categorias sobre o estado da natureza.

Regras Minimax

A idéia do minimax vem da teoria dos jogos. Em um jogo tem-se dois ou mais jogadores, cada jogador querendo maximizar a sua utilidade, sendo que, para isso, leva-se em consideração que a decisão de um dos jogadores terá impacto sobre o retorno (*payoff*) do outro jogador. A idéia de minimax é uma forma de se decidir qual a melhor estratégia de um dos jogadores, considerando que a natureza decidirá pelo pior para o decisor.

Bayes Empírico

No caso de se ter algum dado sobre os estado da natureza, pode-se aprender alguma coisa a respeito da distribuição *a priori* do estado da natureza; e esse aprendizado pode ser com ou sem o professor.

Para aprender com o professor assume-se que se tem dados classificados sobre a ocorrência de

θ. Com n pontos de ocorrência, constrói-se uma estimativa para a distribuição de probabilidade *a priori*, $\pi_n(\theta)$. Para isso, tem-se o número de ocorrência de θ, nos dados e $\pi_n(\theta)$ será a freqüência relativa de ocorrência de θ nos dados observados. O passo seguinte é encontrar uma regra de Bayes d_n para π_n. Então, utiliza-se d_n como uma regra de Bayes para $\pi(\theta)$. O **Teorema 5.2.1**, apresentado em (Campello de Souza, 2002), garante a convergência do procedimento.

4.4 Exemplo: Usando Bayes Empírico

O problema de decisão aqui exposto serve como um exemplo de como se pode utilizar a teoria da decisão em análise financeira; os dados sobre os estados da natureza e sobre as observações foram tirados do *site* do Banco Central, a série histórica é de 02 de janeiro de 1990 a 03 de maio de 2002.

Os Estados da Natureza

Os θ's são pares ordenados da variação do retorno do índice bovespa e da variação do retorno da taxa de câmbio do dolar turismo. Tem-se, assim, quatro pares de θ, que são os seguintes:

- $\theta_{00} \Rightarrow$ a variação, tanto do índice bovespa, como do dólar, foi negativa;
- $\theta_{01} \Rightarrow$ a variação do índice bovespa foi negativa e a variação do dólar foi igual a zero ou positiva;
- $\theta_{10} \Rightarrow$ a variação do índice bovespa foi igual a zero ou positiva e a variação do dólar foi negativa;
- $\theta_{11} \Rightarrow$ a variação, tanto do índice bovespa, como do dólar, foi maior do zero ou positiva.

O conjunto dos estados da natureza é o seguinte:

$$\Theta = \{\theta_{00}, \theta_{01}, \theta_{10}, \theta_{11}\}$$

4.4.1 O Conjunto das Observações

Utilizou-se apenas uma variável de observação, que foi a variação da taxa de juros do Certificado de Depósito Interfinanceiro – (CDI). A escolha dessa variável não está fundamentada em nenhuma hipótese econômica; o fato é que essa variável pode representar a necessidade de financiamento dos bancos comerciais de um dia para o outro e estes, os bancos, podem representar um grande investidor na economia. O conjunto de observações é representado da seguinte forma: $\mathcal{X} = \{x_0, x_1\}$, onde:

- x_0 ocorre quando a variação da taxa de juros do CDI é negativa;
- x_1 ocorre quando a variação da taxa de juros do CDI é não negativa.

4.4.2 O Espaço das Ações

Para entender melhor as ações, deixa-se claro que o problema de decisão é um problema financeiro de um agente especulador, e para ele o importante é ter retorno a curto prazo. A sua decisão é apostar ou não na variação do índice bovespa e da taxa de câmbio do dolar turismo. Dessa forma, consideram-se apenas quatro ações, que são:

- $a_{00} \Rightarrow$ Não aplicar em nenhum dos ativos;
- $a_{01} \Rightarrow$ Aplicar apenas no dólar;
- $a_{10} \Rightarrow$ Aplicar apenas no índice bovespa;
- $a_{11} \Rightarrow$ Aplicar metade no dólar e metade no índice bovespa.

4.4.3 O Canal de Comunicação

A função de verossimilhança está representada na Tabela 4.2. Note-se que a soma das linhas tem que ser igual a um, para que se tenha uma distribuição de probabilidade.

Tabela 4.2: Função de Verossimilhança.

$P(x\|\theta)$	θ_{00}	θ_{01}	θ_{10}	θ_{11}
x_0	0,0656	0,3640	0,0735	0,4969
x_1	0,0791	0,3635	0,0863	0,4710

4.4.4 A Distribuição de Probabilidade *A Priori*

Usou-se Bayes empírico com o professor, para se obter as estimativas das distribuições de probabilidade sobre os estados da natureza. Os percentuais podem ser vistos na Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Distribuição de Probabilidade *a priori*.

$\pi_n(\theta)$	Percentual
θ_{00}	07,41
θ_{01}	36,36
θ_{10}	08,15
θ_{11}	48,08

4.4.5 A Função Perda

Serão usados dois exemplos de função perda; o primeiro será a função perda do observador ideal e está representado na Tabela 4.1. Na segunda função perda, considera-se a função conseqüência, apresentada na Tabela 4.5, onde: p_0 representa retorno negativo, p_1 é retorno nulo e p_2 representa retorno positivo, para essa função conseqüência e $v(p_1) = 0,8$, a função perda está representada na parte de cima da Tabela 4.4, e para $v(p_1) = 0,1$, a função perda será a representada na parte de baixo da Tabela 4.4

4.4.6 As Regras de Decisão

Como se tem quatro possíveis estados da natureza e duas observações, o número de regra de decisão é quatro elevado a dois, que é igual a 16. As regras de decisão estão enumeradas a seguir:

- $d_0 \Rightarrow$ para qualquer que seja o x, tome a ação a_{00};
- $d_1 \Rightarrow$ para qualquer que seja o x, tome a ação a_{01};
- $d_2 \Rightarrow$ para qualquer que seja o x, tome a ação a_{10};
- $d_3 \Rightarrow$ para qualquer que seja o x, tome a ação a_{11};
- $d_4 \Rightarrow$ para $x = x_0$, tome a ação a_{00} e, se $x = x1$, tome a ação a_{01};

- $d_5 \Rightarrow$ para $x = x_0$, tome a ação a_{00} e, se $x = x_1$, tome a ação a_{10};
- $d_6 \Rightarrow$ para $x = x_0$ tome a ação a_{00} e, se $x = x_1$, tome a ação a_{11};
- $d_7 \Rightarrow$ para $x = x_0$, tome a ação a_{01} e, se $x = x_1$, tome a ação a_{00};
- $d_8 \Rightarrow$ para $x = x_0$, tome a ação a_{01} e, se $x = x_1$, tome a ação a_{10};
- $d_9 \Rightarrow$ para $x = x_0$, tome a ação a_{01} e, se $x = x_1$, tome a ação a_{11};
- $d_{10} \Rightarrow$ para $x = x_0$, tome a ação a_{10} e, se $x = x_1$, tome a ação a_{00};
- $d_{11} \Rightarrow$ para $x = x_0$, tome a ação a_{10} e, se $x = x_1$, tome a ação a_{01};
- $d_{12} \Rightarrow$ para $x = x_0$, tome a ação a_{10} e, se $x = x_1$, tome a ação a_{11};
- $d_{13} \Rightarrow$ para $x = x_0$, tome a ação a_{11} e, se $x = x_1$, tome a ação a_{00};
- $d_{14} \Rightarrow$ para $x = x_0$, tome a ação a_{11} e, se $x = x_1$, tome a ação a_{01};
- $d_{15} \Rightarrow$ para $x = x_0$, tome a ação a_{11} e, se $x = x_1$, tome a ação a_{10}.

Tabela 4.4: Função Perda.

Para $v(p_1) = 0,8$					
$L(\theta, a)$		a_{00}	a_{01}	a_{10}	a_{11}
θ_{00}		-0,8	0	0	0
θ_{01}		-0,8	-0,89866	0	-0,1403
θ_{10}		-0,8	0	-0,9952	-0,761
θ_{11}		-0,8	-0,90026	-0,99392	-0,9958
Para $v(p_1) = 0,1$					
$L(\theta, a)$		a_{00}	a_{01}	a_{10}	a_{11}
θ_{00}		-0,1	0	0	0
θ_{01}		-0,1	-0,54397	0	-0,1403
θ_{10}		-0,1	0	-0,9784	-0,761
θ_{11}		-0,1	-0,55117	-0,97264	-0,9811

Tabela 4.5: Função Conseqüência.

$P(p\|\theta,a)$	p_0	p_1	p_2
(θ_{00},a_{00})	0	1	0
(θ_{00},a_{01})	1	0	0
(θ_{00},a_{10})	1	0	0
(θ_{00},a_{11})	1	0	0
(θ_{01},a_{00})	0	1	0
(θ_{01},a_{01})	0	0,5067	0,4933
(θ_{01},a_{10})	1	0	0
(θ_{01},a_{11})	0,8597	0	0,1403
(θ_{10},a_{00})	0	1	0
(θ_{10},a_{01})	1	0	0
(θ_{10},a_{10})	0	0,024	0,976
(θ_{10},a_{11})	0,239	0	0,761
(θ_{11},a_{00})	0	1	0
(θ_{11},a_{01})	0	0,4987	0,5013
(θ_{11},a_{10})	0	0,0304	0,9696
(θ_{11},a_{11})	0	0,021	0,979

4.4.7 O Risco De Bayes

O risco de Bayes para os três casos está apresentado na Tabela 4.6. A regra de decisão será a que apresentar o menor risco de bayes. Dependendo da preferência do decisor, sua regra de decisão mudará. Para o observador ideal, a melhor regra de decisão é a d_3. Quando o decisor atribuir o valor de 0,1 ao retorno nulo, a regra de decisão será d_3. No caso de $v(p_1) = 0,8$, a melhor regra de decisão é a d_1.

4.5 A Medida da Utilidade e de $\pi\{\theta\}$

Neste Capítulo, resolveu-se um problema de teoria da decisão, em que se considerava uma distribuição de probabilidade *a priori* obtida pelo método de Bayes empírico. Dessa forma, a distribuição *a priori* do estado da natureza é de caráter objetivo, ou seja, é uma distribuição de probabilidade freqüentista e não subjetiva. Outro ponto muito importante que não foi abordado neste Capítulo é como se mede a utilidade do decisor. Estes dois pontos serão tratados nos próximos capítulos, sendo que no primeiro será tratada a edução da utilidade do decisor e, posteriomente, a distribuição *a priori* do especialista.

Tabela 4.6: Risco de Bayes.

Risco de Bayes – r_d			
d	Obs. Ideal	$v(p_1) = 0,8$	$v(p_1) = 0,1$
0	0,74400	-0,6029	-0,0753
1	0,48919	**-0,6566**	-0,4003
2	0,74061	-0,4755	-0,4654
3	**0,28821**	-0,5105	**-0,5036**
4	0,61664	-0,6283	-0,2349
5	0,74175	-0,5378	-0,2653
6	0,52230	-0,3535	-0,1699
7	0,61547	-0,6312	-0,2408
8	0,61429	-0,5661	-0,4308
9	0,39484	-0,5834	-0,4497
10	0,7418	-0,5622	-0,3723
11	0,6155	-0,5661	-0,4349
12	0,5211	-0,4928	-0,4843
13	0,5088	-0,5582	-0,2947
14	0,3825	-0,5837	-0,4542
15	0,5076	-0,4931	-0,4847

5 UTILIDADE: UMA MEDIDA PARA O DINHEIRO INCERTO

5.1 Introdução

Trata-se agora sobre o problema de se medir a utilidade do dinheiro do investidor. (Detalhes sobre a teoria da utilidade ver (Campello de Souza, 2002), (von Neumann & Morgenstern, 1947), (Bacharach, 1977), (Fishburn, 1990) e (Fishburn, 1994))

5.1.1 Utilidade Cardinal *versus* Ordinal

Há sempre uma discussão entre os economistas da necessidade de medir a utilidade ou não. Acredita-se que o conceito de utilidade ordinal é suficiente para explicar o comportamento do consumidor, porém é fato que a utilidade ordinal só explica a escolha do consumidor num ambiente sem risco. A análise de escolha do consumidor e da firma, baseada na utilidade ordinal, dá-se pela resolução de problemas de otimização. Como já foi dito a única teoria de como se medir a utilidade cardinal é a desenvolvida por Von Neumann e Morgenstern. Como qualquer problema de decisões financeiras apresenta uma incerteza é importantíssimo o desenvolvimento de métodos que possibilitem a medida da utilidade de um investidor. Para um problema de decisão envolvendo incerteza a utilidade ordinal não ajudará a responder qual a ação do indivíduo, diante da incerteza de um estado da natureza. Dessa forma, este capítulo tem como finalidade apresentar a teoria da utilidade de Von Neumann e Morgenstern, como também os métodos desenvolvidos por Campello de Souza para estimação da utilidade cardinal.

5.2 Teoria da Utilidade

Como se sabe p representa o conjunto dos bens. O qual é representado por $\mathcal{P} = \{p\}$. O conjunto sobre $\mathcal{P}$ de todas as possíveis distribuições de probabilidade é representado por $\mathcal{P}^* = \{P, Q, \dots\}$. A idéia básica num problema de decisão é que os $p's$ não existem, pois o decisor só los possuirá em função da ação que ele tomar e do estado da natureza, θ, ocorrido. Dessa forma, tem-se distribuições de probabilidade sobre os bem, que são conhecidas como função conseqüência, $P(p|\theta, a)$. As distribuições de probabilidades P e Q são chamadas agora de conseqüência.

O decisor agora tem que decidir se prefere P ou Q. A preferência do decisor será obtida impondo algumas restrições as suas preferências. Essas retrições são também conhecidas como *restrições de racionalidades*. Não há uma formula matemática para indicar as preferências do decisor, por essa razão é que se impõem as *restrições de racionalidade*. A idéia de racionalidade é imposta por razões de se evitar a ocorrência de que um decisor prefira P a Q e Q a R, porém prefira R a P. A base da teoria da utilidade de Von Neumann e Morgenstern e a imposição de alguns axiomas, os quais impedem a possibilidade de que o decisor tome decisões como as apresentadas acima. Em (Campello de Souza, 2002) pode-se encontrar as relações de preferências que ajudam na apresentação dos axiomas, em resumo, para todo P e Q pertencentes a $\mathcal{P}^*$, tem-se:

- P é pelo menos tão desejável quanto Q, $P \succsim Q$;
- P é preferível à Q, $P \succ Q$;
- P e Q são equivalentes, $P \sim Q$.

Duas outras definições são:

- $P \succ Q se P \succsim Q$ *é falso que* $P \precsim Q$;
- $P \sim Q se P \succsim Q$ *e* $Q \succsim P$.

Os axiomas da teoria da utilidade de Von Neumann e Morgenstern, para P,Q, R, $\ldots \in \mathcal{P}^*$, são apresentados e em (Campello de Souza, 2002) da seguinte forma:

Axioma 5.2.1 *Completeza:* $P \succsim Q$ *ou* $Q \succsim P$*; isto equivalente a dizer-se que ou* $P \succ Q$*, ou* $P \sim Q$*, ou* $Q \succ P$.

Axioma 5.2.2 *Transitividade:*

a) $P \succ Q$ *e* $Q \succsim R \Longrightarrow P \succ R$*;*

b) $P \sim Q$ *e* $Q \sim R \Longrightarrow P \sim R$*;*

Axioma 5.2.3 *Dominância:*

a) Se $P \succ Q$*,* $1 \geq \lambda > 0$*, então para todo* $R \in \mathcal{P}^*$ *tem-se* $\lambda P + (1-\lambda)R \succ \lambda Q + (1-\lambda)R$*;*

b) Se $P \sim Q$*,* $1 \geq \lambda > 0$*, então para todo* $R \in \mathcal{P}^*$ *tem-se* $\lambda P + (1-\lambda)R \sim \lambda Q + (1-\lambda)R$*;*

Axioma 5.2.4 *Arquimediano: Se* $P \succ Q \succ R$*, então existem números* λ *e* μ *tais que* $1 > \lambda > \mu > 0$ *e tais que* $\lambda P + (1-\lambda)R \succ Q \succ \mu P + (1-\mu)R$*.*

Em (Campello de Souza, 2002) tem-se comentários sobre cada um dos axiomas.

5.2.1 Função Utilidade

A função utilidade será representada por u e a definição é a seguinte:

Definição 5.2.1 *u é uma função utilidade se*

a) $u : \mathcal{P}^* \rightarrow \mathbb{R}$*, isto é, pra toda distribuição* $P \in \mathcal{P}^*$ *corresponde um número real* $u(P)$*.*

b) Estes números preservam a ordem no sentido de que $P \succsim Q \Leftrightarrow u(P) \geq u(Q)$*. Dessa forma, eles apresentam a ordem de preferência.*

c) Existe linearlidade; $u[\lambda P + (1-\lambda)Q] = \lambda u(P) + (1-\lambda)u(Q)$*.*

Quando os quatros axiomas são satisfeito chega-se a um teorema que afirma a existência da função utilidade. Para se demostra esses objetivos tem-se alguns Lemas, a prova dos lemas e do teorema pode ser vista em (Campello de Souza, 2002), que são os seguintes:

- **Lema 5.2.1** *Monotonicidade: Se* $P \succ Q$*,* $\lambda \succ \mu$*, então* $\lambda P + (1-\lambda)Q \succ \mu P + (1-\mu)Q$*.*
- **Lema 5.2.2** *Unicidade: Se* $P \succ Q$ *e* $\lambda P + (1-\lambda)Q \sim \mu P + (1-\mu)Q$*, então* $\lambda = \mu$*.*

- **Lema 5.2.3** *Representação:* $P \succsim Q$ *se e somente se* $u_{\underline{P},\overline{P}}(P) \geq u_{\underline{P},\overline{P}}(Q)$.

  onde: $u_{\underline{P},\overline{P}}(P) = sup\{\lambda : P \succ \lambda\overline{P} + (1-\lambda)\underline{P}\}$, $\underline{P}$ é a distribuição menos deserjável de um conjunto de conseqüências e $\overline{P}$ é a mais desejável.

- **Lema 5.2.4** *Linearidade:* $u[\lambda P + (1-\lambda)Q] = \lambda u(P) + (1-\lambda)u(Q)$.

- **Lema 5.2.5** *Extensão: Se* u *é uma função utilidade, então* $u^* = au + b$.

A Edução da Utilidade

A teoria da utilidade desenvolvida por Von Neumann e Morgenstern, como já foi dito, é conhecida como a utilidade *cardinal fraca*, isso ocorre pois a medida de utilidade encontra-se em intervalos arbitrários, sendo assim uma medida intervalar e não de razão. Os valores arbitrários são justamente a utilidade da conseqüência mais desejável e a da conseqüência menos desejável. O mais comum é atribuir zero para a conseqüência menos desejável e o um para a conseqüência mais desejável, ou seja, $u_{\underline{P},\overline{P}}(\underline{P}) = 0$ e $u_{\underline{P},\overline{P}}(\overline{P}) = 1$.

A edução da utilidade pelo método original desenvolvido por Von Neumann e Morgenstern ocorre quando o indivíduo responde apenas uma pergunta sobre a probabilidade que o torna indiferente entre uma conseqüência, P, ou de um jogo como probabilidade λ de ganhar $\overline{P}$ ou $(1-\lambda)$ de se ganhar $\underline{P}$. É claro que para a pergunta ter sentido o valor de P tem que está entre a conseqüência mais preferível e a menos preferível. A idéia é a seguinte.

Escreve-se

$$\begin{cases} R\$ \quad p_1 \quad \text{com probabilidade } \lambda, \\ R\$ \quad p_2 \quad \text{com probabilidade } 1-\lambda, \end{cases}$$

para representar um jogo no qual um indivíduo ganha p_1 Reais com probabilidade λ, ou p_2 Reais com probabilidade $1-\lambda$. Considere-se o exemplo:

$$\begin{cases} R\$ \quad 50.000,00 \quad \text{com probabilidade 0,30}, \\ R\$ \quad 2.000,00 \quad \text{com probabilidade 0,70}. \end{cases}$$

Aqui $\lambda = 0,30$ e $1-\lambda = 0,70$. Note-se que

$\lambda + (1 - \lambda) = 1$. Isto significa que, neste exemplo, o indivíduo tem uma probabilidade de 0,30 de ganhar R$ 50.000,00 e uma probabilidade complementar de 0,70 de ganhar R$ 2.000,00. Quer dizer, ou ele ganha R$ 50.000,00, ou ganha R$ 2.000,00; não pode ganhar as duas quantias ao mesmo tempo.

É muito comum se expressar a probabilidade em termos percentuais, e usar-se a palavra chance ao invés de probabilidade. Assim, uma probabilidade de 0,26 seria o mesmo que uma chance de 26%. O *layout* da apresentação do jogo também pode variar, em função de conveniências operacionais. Nos questionários de edução que serão apresentado os valores e as respectivas chances estão alinhados. O importante é se lembrar que existe um valor monetário maior ao qual está atrelada a probabilidade (chance) λ, e um valor monetário menor ao qual está associada a probabilidade (chance) $1 - \lambda$.

Um indivíduo, presumivelmente, preferiria receber R$ 25.000,00 (com certeza) do que receber um jogo (pense como se fosse um bilhete de uma loteria) no qual ele receberia R$ 50.000,00 com 1% de chance, ou R$ 2.000,00 com 99% de chance. Escreve-se então:

$$\begin{cases} R\$ \quad 25.000,00 \\ \text{(com certeza)} \end{cases} \succ \begin{cases} R\$ \quad 50.000,00 & \text{c/ prob. 0,01,} \\ R\$ \quad 2.000,00 & \text{c/ prob. 0,99.} \end{cases}$$

Mas se se for aumentando a chance dele ganhar os R$ 50.000,00, isto é, se se for aumentando λ, então é natural que a partir de um certo ponto, ele já não se sinta tão seguro que prefere a quantia certa ao invés do jogo. Para um valor alto de λ, por exemplo, $\lambda = 0,95$, muito provavelmente ele iria preferir o jogo ao invés da quantia certa. Escrever-se-ia então:

$$\begin{cases} R\$ \quad 25.000,00 \\ \text{(com certeza)} \end{cases} \prec \begin{cases} R\$ \quad 50.000,00 & \text{c/ prob. 0,95,} \\ R\$ \quad 2.000,00 & \text{c/ prob. 0,05.} \end{cases}$$

Pode-se então imaginar que existe um valor de λ (uma certa chance de ganhar o maior prêmio) para o qual o indivíduo se sentiria indiferente em receber a quantia certa ou o jogo (loteria). Escrever-se-ia então:

$$\begin{cases} R\$ \quad 25.000,00 \\ \text{(com certeza)} \end{cases} \sim \begin{cases} R\$ \quad 50.000,00 & \text{c/ prob. } \lambda, \\ R\$ \quad 2.000,00 & \text{c/ prob. } 1-\lambda. \end{cases}$$

Note-se que se o indivíduo prefere o jogo, então ele sabe que o pior que pode acontecer é ele ganhar o menor prêmio (R$ 2.000,00 no exemplo).

5.3 Medição da Utilidade

Serão apresentados dois métodos diferentes do de Von Neumann e Morgenstern para edução da função utilidade. A edução é obtida através de dois processos.

O primeiro processo de edução usa essa noção de indiferença do decisor entre um valor certo e uma loteria. Através de um protocolo de edução, no qual será realizado uma série de perguntas para que o indivíduo explicite o valor de λ para o qual ele se sente indiferente entre uma determinada quantia certa e um jogo (loteira). Deve ficar bem claro que para o leito não existe uma "resposta certa" para cada pergunta. Apenas deve-se ter cuidado para se fazer uma boa introspecção de modo a obter uma boa precisão. As respostas são individuais, elas devem ser adequadas à psicologia do risco do indivíduo. Não se terá nunca uma precisão infinita, pois é preciso não confundir racionalidade com perfeição. Este método é conhecido como o método das **faixas superpostas**.

O segundo processo usa a idéia de comparação entre dois jogos. O indivíduo é solicitado a expressar uma preferência por uma loteria ou outra. É um processo mais rápido, mas exige uma consistência maior do indivíduo que se submete ao protocolo. O método é baseado em programação linear e basta que apareçam duas respostas inconsistentes para que o conjunto viável se torne vazio. Neste processo a edução será feita pelo método chamado de edução por **programação linear**.

Como o principal interesse aqui é medir a utilidade dos retornos de aplicações, pode-se representá-los por dinheiro e os métodos que serão apresentados a seguir estão no contexto da edução do dinheiro, porém os mesmo podem ser ampliados para outros bens.

5.4 Método das Faixas Superpostas

A suposição para o uso da função utilidade cardinal de Von Neumann é a existência de dois bens, um mais desejável, $\overline{P}$, e outro menos desejável, $\underline{P}$, ao qual se atribui duas utilidades atritarias. Quando esses valores $\overline{P}$ e $\underline{P}$ encontram-se distantes um do outro é muito difícil a escolha do valor de λ para um valor P, sendo $\underline{P} < P < \overline{P}$. Dessa forma, pergunta-se o λ que torna P indiferente a uma loteria entre $\underline{P}$ e $\overline{P}$ em faixas diferentes, para depois através do Lema 5.2.1 (extensão) passar os valores de λ para uma mesma faixa.

Pretende-se eduzir a função utilidade do dinheiro num intervalo de - R$ 95.000,00 (menos noventa e cinco mil reais) a R$ 95.000,00 (noventa e cinco mil reais). Para alcançar o objetivo dividi-se este intervalo em outros sete intervalos superpostos, que são (mil reais):

1. $[-95; -40]$;
2. $[-80; -25]$;
3. $[-35; 20]$;
4. $[-20; 35]$;
5. $[25; 80]$;
6. $[40; 90]$ e
7. $[-40; 40]$.

Os intervalos estão distribuídos de uma forma uniforme entre $[-95; 95]$ observe que no questionário pergunta-se a utilidade dos valores que se encontram nos extremos de cada intervalo. A edução foi realizada com o seguinte questionário:

Tabela 5.1: Primeiro Questionário.

		λ		**MAIOR GANHO**		$1-\lambda$	**MENOR GANHO**
	p	P	u	R$ 1.000	$1-P$	$1-u$	R$ 1.000
	-95	P	0	95	$1-P$	1	-95
1	-80	P		-40	$1-P$		-95
2	-40	P		-25	$1-P$		-80
3	-60	P		-35	$1-P$		-80
4	-30	P		-20	$1-P$		-60
5	-35	P		-25	$1-P$		-80
6	-25	P		20	$1-P$		-35
7	-15	P		20	$1-P$		-30
8	0	P		25	$1-P$		-15
9	-20	P		20	$1-P$		-35
10	20	P		35	$1-P$		-20
11	10	P		35	$1-P$		0
12	15	P		40	$1-P$		10
13	25	P		35	$1-P$		-20
14	35	P		80	$1-P$		25
15	30	P		40	$1-P$		15
16	50	P		80	$1-P$		30
17	40	P		80	$1-P$		25
18	80	P		95	$1-P$		40
19	55	P		95	$1-P$		50
20	90	P		95	$1-P$		55
21	-35	P		40	$1-P$		-40
22	20	P		40	$1-P$		-40

continua na próxima página

Tabela 5.1: Primeiro Questionário. (continuação)

				MAIOR		**MENOR**	
			λ	**GANHO**		$1-\lambda$	**GANHO**
	p	P	u	R$ 1.000	$1-P$	$1-u$	R$ 1.000
23	-33	P		-15	$1-P$		-60
24	-22	P		0	$1-P$		-30
25	-20	P		40	$1-P$		-40
26	35	P		40	$1-P$		-40
27	-2	P		10	$1-P$		-22
28	17	P		35	$1-P$		-2
29	33	P		55	$1-P$		17
30	64	P		90	$1-P$		50
31	93	P		95	$1-P$		64
32	-67	P		-33	$1-P$		-80
33	-90	P		-67	$1-P$		-95
34	-52	P		2	$1-P$		-95
35	-43	P		0	$1-P$		-52
36	-12	P		17	$1-P$		-52
37	-3	P		10	$1-P$		-12
38	4	P		17	$1-P$		-3
39	12	P		20	$1-P$		4
40	19	P		33	$1-P$		2
41	28	P		64	$1-P$		-3
42	45	P		50	$1-P$		19
43	77	P		93	$1-P$		64
44	88	P		93	$1-P$		77

Para que a idéia fique bem clara neste método. Pretende-se usar ferramentas estatística para inferir sobre o erro do decisor ao responder as perguntas do questionário. Para ser mais preciso usar-se de análise de regressão para a estimação dos parâmetros da função utilidade. Em (Campello de Souza, 2002) apresenta-se as formas mais clássicas de funções utilidades, que são as seguintes:

- função linear:
$$u(p) = ap + b,\ a > 0$$
- função exponencial:
$$u(p) = 1 - exp^{-\lambda p},\ \lambda > 0$$
- função logarítmica:
$$u(p) = log(p + a),\ p + a > 0$$
- função quadrática:
$$u(p) = ap - bp^2,\ a, b > 0, p < \frac{a}{2b}$$
- função raiz quadrada:
$$u(p) = \sqrt{p + a},\ a > 0, p \geq 0$$

A análise de regressão será realizada pelo método dos mínimos quadrados ordinários, onde a suposição básica para realizar inferência estatística sobre os parâmetros e que o erro de estimação se comporte como uma distribuição normal. (Detalhes sobre análise de regressão ver (Johnston, 2001))

Usar-se de um teste de hipótese para verificar se a distribuição é normal ou não. O teste usado foi o de Kolmogorov e Smirnov. Este teste é baseado em postos, ou seja é um teste "não-paramétrico". A hipótese nula ,H_0, que se quer testar é a de que a distribuição da amostra não é uma distribuição normal. O resultado do teste para duas eduções encontra-se na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Teste de Normalidade de Kolmogorov-Smirnov.

	N	$MaxD$	$p - valor$
Investidor - 1	46	0,170265	$p < 0,15$
Investidor - 2	46	0,124353	$p > 0,20$

O N representa o número de observações da amostra, o $MaxD$ representa a máxima diferença entre, o valor da distribuição de freqüência acumulada da distribuição normal para um determinado valor, com o valor da distribuição de freqüência acumulada da distribuição amostral para o mesmo valor. Se o teste é significativo, ou seja $p < 0,05$, pode-se rejeitar a hipótese de que a distribuição seja uma normal. Dessa forma, nos dois casos, aceita-se que as distribuições sejam uma distribuições normal, nos casos das distribuições não se comportar como uma distribuição normal, pode-se aplicar o método da transformação de Box e Cox para transformar a variável dependente em uma distribuição normal. Usou-se para estimação o método dos mínimos quadrados ordinários. (Detalhes sobre o teste de normalidade consultar (Siegel, 1977) e sobre a transformação de Box e Cox ver (Gauss M.Cordeiro, 1989)).

Os gráficos das Figuras 5.1 e 5.2 representam os valores das duas eduções realizadas com dois investidores. É interessante notar que:

Para os dois investidores usou-se a expressão da função quadrática. Os coeficientes foram significativos tanto no teste parcial (teste t), como no teste global (teste F), os coeficientes de determinação nas duas regressões apresentaram valores maiores do que 95%, o que mostra que em 95% dos casos a utilidade do dinheiro dos investidores pode ser representado pelas seguintes equações:

$$u_1(p) = 0,825867 + 0,004417p - 0,000031p^2$$

e

$$u_2(p) = 0,702501 + 0,0047p - 0,000018p^2$$

Uma observação importante é o fato de quer a função quadrática tem uma restrição, $p < \frac{a}{2b}$, no caso do primeiro investidor a função satura para um $p = 71,24$ (mil reais), dessa forma a função não cobre todo o espaço dos possíveis bens, no caso do segundo investidor a função tem seu máximo em $p \cong 130$ (mil reais). Outra observação é que o valor da utilidade estimada não encontra-se num intervalo pré-determinado e pode-se realizar a transformação para a faixa de escala, onde: $u(-95) = 0$ e a $u(90) = 1$. No gráfico da Figura 5.3 apresenta-se os valores das utilidades estimadas para os dois investidores. Para resolver o problema da equação do investidor 1 não cobrir o espaço dos bens, selecionou-se uma amostra aleatória das utilidades do primeiro investidor, o resultado para amostra aleatória pode ser visto na equação abaixo, esta equação pode ser usada para representar a utilidade do investidor 1.

$$u_1(p) = 0,833003 + 0,003717p - 0,000019p^2$$

Figura 5.1: Gráfico De Edução da Função Utilidade do Investidor - 1.

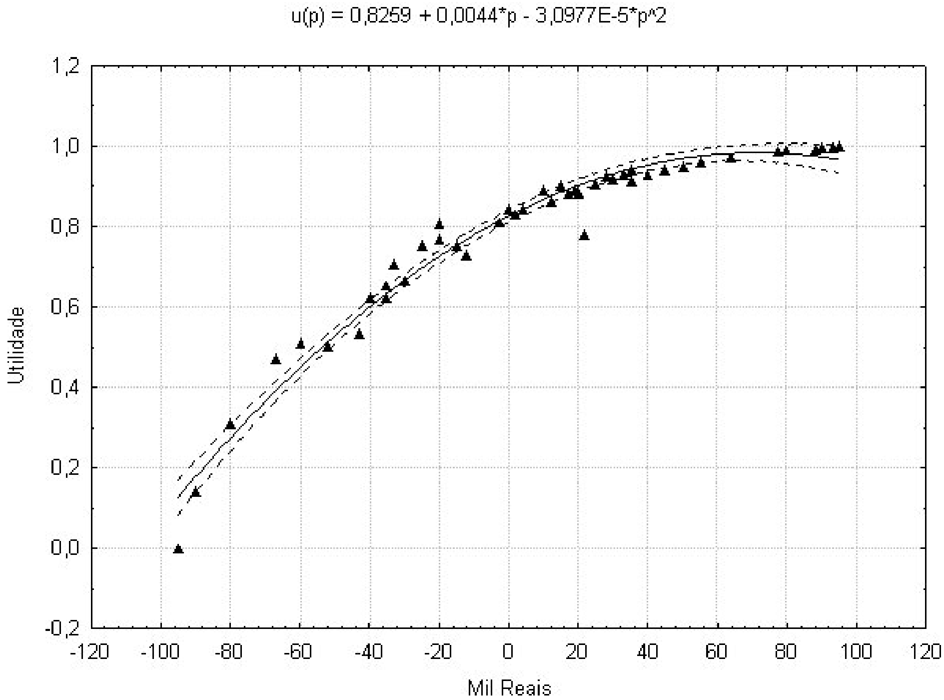


Figura 5.2: Gráfico De Edução da Função Utilidade do Investidor - 2.

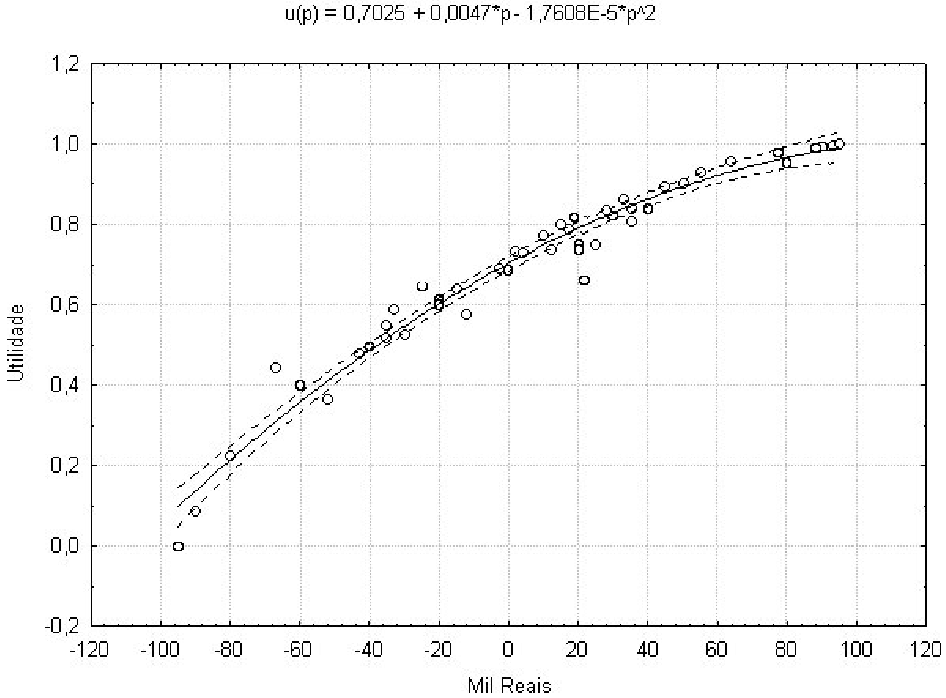


Figura 5.3: Gráfico Da Utilidade Esperada dos Investidores - 1 e 2.

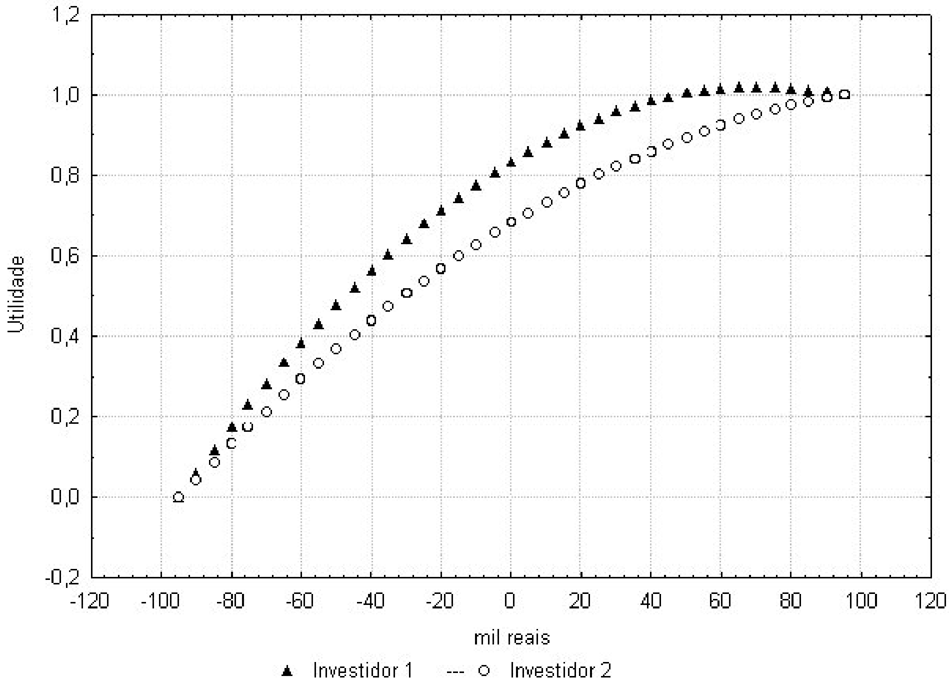


Tabela 5.3: Sumário das Regressões.

	Regressão do Investidor 1					
Utilidade Investidor - 1	$R = 0,98380436$, $R^2 = 0,96787102$ $F(2,43) = 647,68$, $p < 0,0000$					
Coeficientes	B	Erro Padrão de B	Beta	Erro Padrão de Beta	$t(43)$	$p - valor$
Intercepto			0,825867	0,007958	103,7744	0,000000
p	0,967619	0,027713	0,004417	0,000127	34,9155	0,000000
p^2	-0,398088	0,027713	-0,000031	0,000002	-14,3646	0,000000
	Regressão do Investidor 2					
Utilidade Investidor - 1	$R = 0,98225267$, $R^2 = 0,96482031$ $F(2,43) = 589,65$, $p < 0,0000$					
Coeficientes	B	Erro Padrão de B	Beta	Erro Padrão de Beta	$t(43)$	$p - valor$
Intercepto			0,702501	0,008623	81,47169	0,000000
p	0,994304	0,028999	0,004700	0,000137	34,28745	0,000000
p^2	-0,218542	0,028999	-0,000018	0,000002	-7,53619	0,000000
	Regressão do Investidor 1 - Para uma Amostra Aleatória					
Utilidade Investidor - 1	$R = 0,963574808$, $R^2 = 0,93266936$ $F(2,17) = 117,74$, $p < 0,0000$					
Coeficientes	B	Erro Padrão de B	Beta	Erro Padrão de Beta	$t(17)$	$p - valor$
Intercepto			0,833003	0,010767	75,50598	0,000000
p	1,134782	0,080160	0,004417	0,000263	14,15639	0,000000
p^2	-0,330104	0,080160	-0,000019	0,000005	-4,118000	0,000718

5.5 O Método de Programação Linear

Uma das vantagens deste método é que pode-se obter a edução da utilidade de um investidor com um menor número de perguntas além de incorporar novos construtos para o tratamento da vagueza do decisor. Em resumo, formula-se um protocolo, em que as perguntas são entre duas distribuição de probabilidade, e o decisor terá que responder qual das duas distribuições ele prefere. Na Tabela 5.4 apresenta-se o questionário de edução. Para exemplificar, na primeira questão pergunta-se, se o decisor prefere um jogo, no qual ele tem 24% de perde 40 (mil reais) e 76% de perde 95 (mil reais) ou um jogo com 22% de perde 50 (mil reais) e 78% de perde 85 (mil reais). As respostas do questionário tornam-se restrições num problema de programação linear. A formulação matemática do problema de programação linear é o seguinte:

$$Max(Min)_{\{u_j\}} \sum_{j=1}^{n} (n-j+1)u_j$$

$$s.a$$

$$u(G_i) - u(G_l) \leq 0 \text{ (ou } \geq 0\text{, dependendo das respostas do decisor.)}$$

$$u(\underline{p}) = 0, u(\overline{p}) = 100$$

$$\frac{1}{2}u_{i-1} - u_i + \frac{1}{2}u_{i+1} \leq 0, i = 2, \ldots n-1. \text{ (Esta restrição garante a concavidade da função utilidade.}$$

$$u_{n-1} - u_n \leq 0. \text{ (Esta restrição garante a monotonicidade da função utilidade.)}$$

onde: $u(G_i) = u[\lambda_i p_j + (1-\lambda_i)p_k] = \lambda_i u(p_j) + (1-\lambda_i)u(p_k)$.

Quando se resolve o problema de maximização está obtendo-se a utilidade com maior valor médio e quando se está resolvendo o problema de minimização obtém-se a utilidade com menor valor médio. A vagueza do decisor é dado pela seguinte equação:

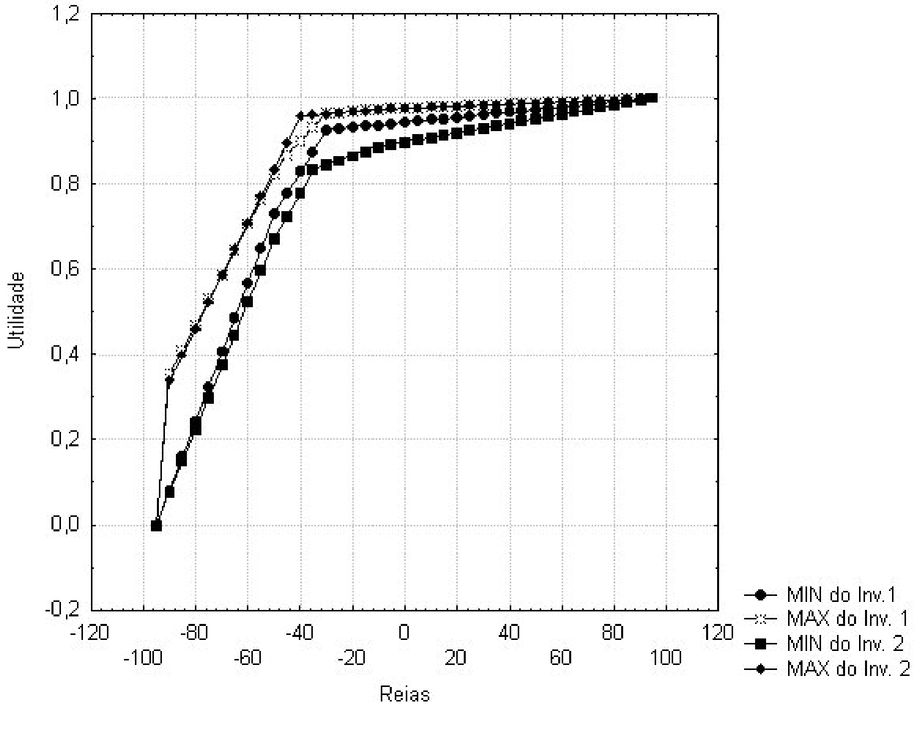
$$V_d = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[u_{max}(p_j) - u_{min}(p_j)]$$

O método pode ser usado para decisão de grupo. Aplicou-se o questionário apresentado na Tabela 5.4

5.5.1 Resultado da Aplicação do Protocolo de Edução

O resultado da edução pelo método de programação linear é apresentado no gráfico da Figura 5.4. O investidor 1 tem a vagueza de 0, 0614, enquanto que a vagueza do investidor 2 é de 0, 0966. Numa comparação entre os métodos, pode-se dizer que o investidor 2 tem a utilidade estimada pelo método das **faixas superpostas** entre a mínima e a máxima faixa de utilidade.

Figura 5.4: Gráfico Das Faixas de Utilidade dos Investidores 1 e 2.



O método também permite a decisão em grupo. E estabelece alguns construtos, que são:

- vagueza preferencial global: relação entre a área da união das faixas e a área em baixo da reta $u(p) = u(\overline{p})$. No exemplo a vagueza preferencial global é de $Vag_p g = 0,0978$;

- precisão preferencial: $Prec_p = 1 - Vag_p g = 0,9022$;
- concordância do grupo: relação entre a área de interseção das faixas e a área da união das faixas, $Conc_p g = 0,6162$;
- discordância do grupo: $Disc_p g = 1 - Conc_p g = 0,3837$;
- conflito de atitude em relação ao risco: é a área do vácuo que é formada pela região onde as faixas mínimas e máximas dos investidores não se interceptam,

$$Conf_p g = \frac{\text{área do vácuo}}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{n}[|u_{max1}(p_j) - u_{max2}(p_j)| + |u_{min1}(p_j) - u_{min2}(p_j)|]}{n} = 0,0047;$$

- harmonia do grupo:$Harm_p g = \frac{Conc_p g}{Conc_p g + Conf_p g} = 0,9922$;
- dissonância do grupo:$Diss_p g = 1 - Harm_p g = 0,0078$;
- qualidade do padrão global de preferência: O resultado final da preferência global será dado pela função utilidade média. A qualidade será dada por

$$Qualid = \frac{Conc_p g}{Conc_p g + Conf_p g + Vag_p g} = 0,8573;$$

- hesitação: quando o conflito é muito grande fica difícil aceitar a função utilidade média. Essa dificuldade pode ser medida através da hesitação, a qual é definida por

$$Hesit = \frac{\text{aréa das regiões de vácuo}}{\text{área das regiões de vácuo} + \text{área da união das faixas}} = 0,0459;$$

- resolução: $Reso = 1 - Hest = 0,9541$.

Segundo (Campello de Souza, 2002), pode-se seguir o seguinte princípio: aceita-se a função utilidade média se e somente se a $Reso \geq 0,5$, dessa forma pode-se adotar a utilidade média para uma decisão do grupo.

Tabela 5.4: Segundo Questionário.

	JOGO 1					**JOGO 2**			
	p_1	p	p_2	$1-p$	Opção	p_3	p	p_4	$1-p$
	1	1	1	1	1 ou 0	0	0	0	0
1	-40	24%	-95	76%		-50	22%	-85	78%
2	-55	53%	-85	47%		-40	41%	-90	59%
3	-50	71%	-90	29%		-25	26%	-70	74%
4	-25	39%	-80	61%		-45	47%	-75	53%
5	-35	51%	-80	49%		-20	11%	-65	89%
6	-30	41%	-65	59%		-15	27%	-60	73%
7	-10	86%	-60	14%		0	7%	-35	93%
8	10	33%	-10	67%		5	67%	-15	33%
9	10	79%	-5	21%		20	23%	0	77%
10	30	91%	-5	9%		15	86%	5	14%
11	35	25%	0	75%		60	10%	15	90%
12	65	89%	35	11%		70	39%	45	61%
13	65	28%	20	72%		80	18%	30	82%
14	75	12%	45	88%		80	64%	25	36%
15	70	93%	25	7%		90	30%	50	70%
16	90	61%	40	39%		85	28%	55	72%
17	85	37%	50	63%		95	52%	40	48%
18	95	85%	-95	15%		-20	48%	-30	52%
19	95	62%	-95	38%		-55	39%	-75	61%
20	95	99%	-95	1%		75	1%	55	99%

5.6 Estimação Não-Linear da Função Utilidade

A função utilidade tem geralmente um formato de S. Os modelos segmoidais, ou seja modelos com um valor máximo esperado, podem ser representados pelas funções apresentadas a baixo (Gauss M.Cordeiro, 1989):

$$\text{Modelo Gompertz } \Longrightarrow u(p) = \alpha exp[-exp(\beta - \gamma p)]$$

$$\text{Modelo Logístico } \Longrightarrow u(p) = \frac{\alpha}{[1 + exp(\beta - \gamma p)]}$$

$$\text{Modelo Richards } \Longrightarrow u(p) = \frac{\alpha}{[(1 + exp(\beta - \gamma p))^{\frac{1}{\delta}}]}$$

$$\text{Modelo Morgan-Mercer-Flodin } \Longrightarrow u(p) = (\beta\gamma + \alpha p^{\delta})/(\gamma + p^{\delta})$$

$$\text{Modelo Weibull } \Longrightarrow u(p) = \alpha - \beta exp(-\gamma p^{\delta})$$

Nesses modelos o parâmetro β está relacionado com intercepto, o parâmetro α é o valor máximo esperado, ou seja é o valor onde a satisfação satura, o parâmetro δ é usado para aumentar a flexibilidade dos modelos aos dados. Os modelos seigmoidais são freqüentemente encontrados na agricultura, em biologia, ecologia, engenharia e economia.

Em (Campello de Souza, 2002), apresenta-se uma função de utilidade logística generalizada. A relação básica que define a função utilidade é dada por

$$\frac{du}{dp} = \frac{c}{d}(u + a)(b - a - u)g(p), \; g > 0 \text{ contínua}, \; b > a > 0, \; c > 0. \tag{5.6.1}$$

Pode-se com uso de estimação não-linear (Detalhes sobre métodos de estimação não-linear ver: (Maddala, 1977) e (Gauss M.Cordeiro, 1989)) obter todos os parâmetros dessas funções. Depois de algumas tentativas em relação aos modelos seigmoidais, verificou-se que o modelo de Gompertz apresentou uma resposta mais satisfatória para os dados observáveis. Porém esse resultado poderia ser deduzido *a priori* pois os dados apresentam uma função utilidade com uma região côncava, ou seja os investidores são aversos ao risco, dessa forma o crescimento da função parte de um valor, α, e cresce suave até um ponto onde a utilidade saturar, e essas características são próprias do modelo de Gompertz. A função perda para estimação dos parâmetros foi uma função quadrática, os algoritmos foram os Rosenbrock e o Quasi-Newtom e o software foi o Statistica da StatSoft.

5.6.1 Resultados da Estimação

Gerou-se 9 combinações convexas das funções utilidades de maior e de menor valor esperado. O coeficiente de correlação dos dois investidores foram superiores a 98%. O resultado para os dois investidores podem ser visto nas equações 5.6.2 e 5.6.3, sendo respectivamente a primeira equação a estimação do investidor 1 e segunda a do investidor 2.

$$u(p) = 0,9831 \exp(-\exp(-3,66 - 0,045p)) \tag{5.6.2}$$

$$u(p) = 0,9636 \exp(-\exp(-3,39 - 0,042p)) \tag{5.6.3}$$

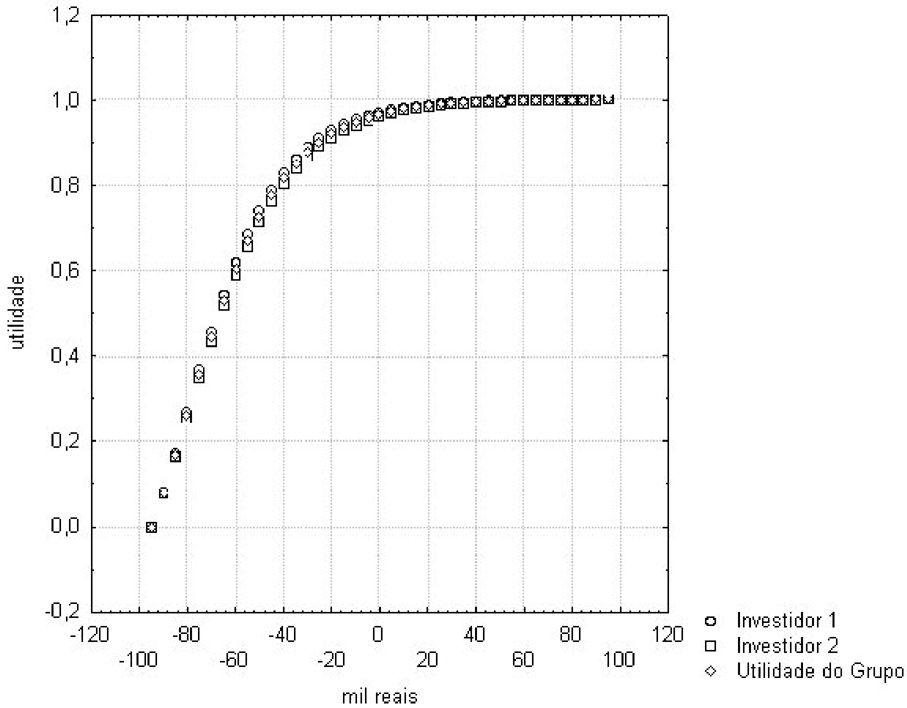
A decisão da união dos dois investidores, foi obtida com a combinação das funções utilidades geradas para estimação individual de cada investidor o resultado é apresentado na equação 5.6.4. O gráfico da Figura 5.5 apresenta a forma das utilidades para os dois investidores e também a utilidade do grupo.

$$u(p) = 0,9731 \exp(-\exp(-3,53 - 0,044p)) \tag{5.6.4}$$

5.7 Comentários Sobre o Processo de Edução

Tem que ficar bem claro que usou-se apenas de dois métodos de edução, mas usou-se de três métodos para estimação da função utilidade, o primeiro método, estimação de parâmetros lineares, apresentou um bom resultado apenas para o segundo investidor já que a função quadrática do primeiro investidor não cobria todo o intervalo das possíveis conseqüências, porém

Figura 5.5: Gráfico Da Função Utilidade com Parâmetros não-Lineares.



isso não significa que um processo de edução ou de estimação é melhor do que o outro e sim que para esses dois investidores em particular a edução pelo método de programação linear apresentou melhores resultados, além de possibilitar a comparação entre a preferência do grupo. Outro importante aspecto do método de edução por programação linear é que o mesmo pode ser estendido para o caso geral onde p pode ser contínuo ou discreto.

Os modelos seigmoidais apresentam uma maior flexibilidade para obtenção da estimação dos parâmetros, porém deduzir qual o modelo pode não ser uma tarefa fácil.

A questão a se discutir agora é a edução do conhecimento do especialista e este será o assunto do próximo capítulo.

6 PROBABILIDADE SUBJETIVA

"No longo prazo, estaremos todos mortos"

Jonh Maynard KEYNES.

"Lidar com a incerteza é uma coisa para qual todas as formas de vida devem estar preparadas. Qualquer que seja o nível de complexidade. ..., existe sempre algo que pode ser interpretado como incerteza, não apenas a respeito do significado dos sinais ou estímulos que a ele chegam como também das possíveis conseqüências das ações que pode efetuar."

Fernando Menezes Campello de Souza.

Decisões Racionais em Situações de Incerteza, 2002.

Na literatura científica há várias aplicações e discussões sobre o fato de que opiniões de especialistas possam ser medidas em termos de probabilidade. Duas referências são: (Campello de Souza, 2002) e o *site http://ippserv.rug.ac.be/* que trata sobre o *IPP: Imprecise Probabilities Project*. A primeira referência traz um método de edução da opinião do especialista. O site do *IPP* traz pesquisas de fronteira no tratamento matemático da incerteza. As duas referências citadas devem servir mais como informativas e esclarecedoras para chegar ao consenso que o subjetivo é medido sim!

6.1 Probabilidade Imprecisas

A probabilidade imprecisa é usada mais como um termo genérico que cobre todos os "modelos matemáticos que medem a possibilidade ou a incerteza sem probabilidades numéricas afiadas."(Walley, 1997 - 2000) Os julgamentos, na maior parte das vezes, são qualitativos e é comum utilizar expressões como "eu acho que", "é provável que", etc.. A imprecisão ocorre quando o especialista está para afirmar uma probabilidade superior e inferior sobre algum evento. Em finanças o evento mais comum é o retorno de ativos financeiros. Dessa forma, para um especialista em finanças é mais fácil atribuir a probabilidade de se ter uma variação positiva de um retorno do que estabelecer que a probabilidade de se ter um percentual de retorno na aplicação do mesmo retorno é de 90%.

Para Smithson(1997 - 2000) os estudos do julgamento humano sobre a incerteza têm uma história que é quase contemporânea com as teorias das probabilidades. Ainda de acordo com Smithson(1997 - 2000) o uso da probabilidade para descrever estados cognitivos ou julgamentos subjetivos tem provocado muitos debates, além do desenvolvimento de teorias e da realização de pesquisas empíricas.

O presente capítulo tem como objetivo apresentar o método de edução proposto em Campello de Souza(2002) em aplicações no mercado financeiro.

6.2 O Modelo de Edução da Distribuição *A Priori*

O método de edução da distribuição *a priori* do especialista tem como suposição básica que o especialista tenha um conhecimento vago sobre $\pi(\theta)$; assume-se que ele possa fazer "apenas um número finito de asserções probabilísticas comparativas" quando responde perguntas sobre a "verrossimilhança de θ pertencer a um de dois intervalos dados." O método conduz a expressar o conhecimento do especialista em famílias de probabilidade.

A utilização deste método permite entre outras coisa medir fatos que não podem ser apresentados por uma série histórica, porém estão presentes e sabe-se que sua probabilidade de ocorrência é bastante alta. Tais fatos mudam a decisão de se investir ou não num ativo financeiro, mas quanto essa mudança é significativa? Outra importante observação a ser feita é que o método também permite a medida do risco do mercado sistemático.

O modelo consiste na resolução de um problema de programação linear. Dessa forma, o método é conhecido e pode ser chamado como **o método de edução da distribuição *a priori* por progamação linear**. Matematicamente ele é expresso da seguinte forma:

$$Max(Min)_{\pi_j} \sum_{j=1}^{2n} c_j \pi_j \tag{6.2.1}$$

sujeito a:

$$a_i k \sum_{j=i}^{k} \pi_j - a_l m \sum_{j=l}^{m} \pi_j \leq b_s \tag{6.2.2}$$

$$\alpha_j \pi_j \leq \pi_{j+1}, j = 1, 2, \ldots, 2n-1, \alpha > 0 \tag{6.2.3}$$

$$\beta_j \pi_{j+1} \leq \pi_j, j = 1, 2, \ldots, 2n-1, \beta > 0 \tag{6.2.4}$$

$$\pi_j \leq 0, j = 1, 2, \ldots, 2n \tag{6.2.5}$$

$$\sum_{j=1}^{2n} \pi_j = 1 \tag{6.2.6}$$

As restrições 6.2.2 tornam-se perguntas em um questionário que o especialista deverá responder, e de acordo com as respostas o sinal poderá ser de $\leq$ ou $\geq$. Dependendo da combinação dos parâmetros a_{ik}, a_{lm} e b_s, pode ser captada de várias maneiras a opinião do especialista. As restrições 6.2.3 e 6.2.4 são utilizadas quando se quer usar uma distribuição *a priori* que seja tão não informativa quanto possível. Caso contrário pode-se suprir essas restrições. As últimas restrições são consideradas básicas para se ter uma distribuição de probabilidade.

Para se obter as distribuições de probabilidade da opinião do especialista ele terá que ser consistente nas suas respostas. Se uma resposta não for consistente o conjunto viável das restrições será vazio. Se se desejá obter as distribuições com menor e maior valor médio o coeficiente do funcional objetivo será igual a $c_j = 2n - j + 1$.

O especialista deverá deixar de responder às perguntas quando o mesmo não puder afimar sobre a verossimilhança de θ pertencer a um de dois intervalos dados. As perguntas que o especialista não responder não entrarão nas restrições do problema de progamação linear. As perguntas serão expostas de acordo com os indicadores desenvolvidos por Nadler Lins em (Lins, 2000).

O modelo define novos construtos como:

- vagueza;

- precisão;
- concordância;
- vagueza global;
- conflito;
- decidabilidade;
- harmonia;
- qualidade da inferência e a
- quantidade de informação.

O método de edução por programação linear também permite a combinação de corpos de evidência. Tal método pode ser considerado como um novo Bayes empiríco, para isso acrescenta-se as seguintes restrições:

$$\sum_{j=1}^{2n} P(x_i|\theta_j)\pi_j = P_k(x_i), i = 1, 2, \ldots, l. \tag{6.2.7}$$

6.3 Um Exemplo de Edução

6.3.1 Estados da Natureza

Considera-se quatro variáveis básicas como representantes do estado da natureza, todas elas assumindo apenas dois possíveis valores: 0, quando o evento não acontecer e 1, quando o evento acontecer:

1. ω_1 = A oposição não ganha a eleição presidencial no Brasil;
2. ω_2 = O PIB (produto interno bruto) cresce no período, quando comparado ao período anterior;
3. ω_3 = A inflação cresce no período, quando comparada ao período anterior;
4. ω_4 = O câmbio cresce no período, quando comparado ao período anterior.

Estas quatro dicotomias definirão, portanto, 16 diferentes e mutuamente exclusivos cenários futuros, que serão denotados por θ_j, $j = 1, 2, \ldots, 16$. Cada cenário será descrito pois, por uma quádrupla onde cada elemento pode ser 0 ou 1. É claro que, como a eleição estava relativamente próxima, a variável ω_1 influenciaria as demais e nenhuma destas a influenciaria. Se ω_2, ω_3, e ω_4 influenciassem ω_1, ter-se-ia um sistema não causal. Os fatores que mais influenciarão em ω_1 serão outros. Consideradas como sendo as do período anterior, as variáveis ω_2, ω_3, e ω_4 terão uma influência na variável ω_1 do período futuro (onde vai maturar o investimento sobre o qual se está decidindo), assim como também nas variáveis ω_2, ω_3, e ω_4 deste período futuro. Mas não será a influência principal. As variáveis ω_2, ω_3, e ω_4 do período anterior não entram no processo de edução que se vai fazer sobre o futuro. Esta projeção do futuro a partir de valores numéricos do passado é tarefa para a função de verossimilhança $P(x|\theta)$, e da modelagem dinâmica do fenômeno a partir da teoria econômica. A tarefa de edução deve se concentrar nos aspectos "clínicos", como aquela capacidade do médico, que não tem nada a ver com o fato dele "ter visto muitos pacientes", em fazer afirmações probabilísticas sobre o estado de saúde de um paciente a partir de uma anamnese e de um exame físico.

A Tabela 6.1 explicita os 16 cenários.

A dinâmica econômica é acoplada e à medida que evolui, no período de maturação do investimento, há uma interação dinâmica entre as variáveis ω_2, ω_3, e ω_4. Essa dinâmica sofre a influência, é claro, das condições iniciais, do resultado de ω_1 e de outras perturbações aleatórias.

6.3.2 O Questionário

Usou-se o questionário apresentado na Tabela 6.9 para eduzir a opinião de dois especialistas. Os especialistas são estudantes de pós-graduação no programa de engenharia de produção da Universidade Federal de Pernambuco - UFPE. Neste caso os estados da natureza não se apresentam como uma variável aleatória. A resolução do problema dá-se da mesma forma, ou seja resolvendo o problema de otimização apresentado acima, porém os coeficientes do funcional objetivo, c_j serão aleatórios. Resolvendo-se o problema para 16 valores diferentes de c_j tem-se uma família de probabilidades subjetivas para cada θ. Na Tabela 6.2 apresenta-se as opiniões sobre cada estado da natureza antes da edução.

Tabela 6.1: Os 16 Possíveis Cenários.

Cenário	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
θ_1	0	0	0	0
θ_2	0	0	0	1
θ_3	0	0	1	0
θ_4	0	0	1	1
θ_5	0	1	0	0
θ_6	0	1	0	1
θ_7	0	1	1	0
θ_8	0	1	1	1
θ_9	1	0	0	0
θ_{10}	1	0	0	1
θ_{11}	1	0	1	0
θ_{12}	1	0	1	1
θ_{13}	1	1	0	0
θ_{14}	1	1	0	1
θ_{15}	1	1	1	0
θ_{16}	1	1	1	1

Tabela 6.2: Opinião dos Especialistas Antes da Edução.

θ	**Especilaista 1** $\pi(\theta)$	**Especialista 2** $\pi(\theta)$
θ_1	0,00	0,00
θ_2	3,00	2,00
θ_3	9,00	10,00
θ_4	8,00	8,00
θ_5	0,00	0,00
θ_6	0,00	0,00
θ_7	4,00	10,00
θ_8	6,00	5,00
θ_9	10,00	0,00
θ_{10}	10,00	5,00
θ_{11}	15,00	5,00
θ_{12}	5,00	10,00
θ_{13}	10,00	0,00
θ_{14}	5,00	10,00
θ_{15}	5,00	10,00
θ_{16}	10,00	25,00

O resultado da edução é apresentado na Tabela 6.3.2. O resultado pode ser interpretado como um conjunto convexo de probabilidades dentro de um intervalo com uma probabilidade inferior e superior para cada estado da natureza. Qualquer combinação de valores dentro dos intervalos pode ser usada como a distribuição *a priori* do especialista. Uma forma mais usual é usar a média de todos os valores obtidos nas 16 soluções do problema de programação linear. A combinação das opiniões dos especialista pode ser obtida com a média simples das médias de cada especialista. Os dois especialistas responderam todas as perguntas e suas respostas foram consistentes. Propõe-se a seguinte forma de estimar os construtos propostos por Campello de Souza 2000:

- Vagueza:
$$\overline{V} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[\pi_{max}(\theta_j) - \pi_{min}(\theta_j)] = 0,3195 \;;$$

- Precisão:
$$P = 1 - V = 0,6805 \;;$$

- Concordância:
$$\overline{C} = \frac{\sum_{j=1}^{n}[min\pi_{max}(\theta_j) - max\pi_{min}(\theta_j)]}{\sum_{j=1}^{n}[max\pi_{max}(\theta_j) - min\pi_{min}(\theta_j)]} = 1 \;;$$

- Vagueza Global
$$\overline{V_G} = \frac{\sum_{j=1}^{n}[max\pi_{max}(\theta_j) - min\pi_{min}(\theta_j)]}{n} = 0,3195 \;;$$

- Conflito:
$$\overline{K} = \frac{\sum[|\pi^j_{max} - \pi^i_{max}|] + \sum\left[|\pi^j_{min} - \pi^i_{min}|\right]}{n} = 0 \;;$$

- Decidabilidade: $\overline{D} = 1 - (V_G + K) = 0,6805$;

- Harmonia: $\overline{H} = \overline{CD} = 0,6805$;

- Qualidade da Inferência: $\overline{Q} = \frac{[\overline{CV_G}+1-(\overline{V_G}+\overline{K})]}{(\overline{CV_G}+1)} = 0,5955$;

- Quantidade de Informação: $\overline{AI} = g(\overline{Q})$ onde g é uma função monotonicamente crescente. Pode-se usar $g = \overline{Q}^2 = 0,3541$.

A diferença entre o método proposto neste trabalho e o de Campello de Souza(2002) encontra-se no fato que os construtos propostos aqui são para o caso onde não há uma variável aleatória definida, para esse mesmo caso Campello de Souza propõem o uso do volume do Simplex.

Os dois especialistas apresentaram o mesmo conjunto de intervalos. De acordo com Campello de Souza 2000, "A prioridade deve ser baixo conflito, alta concordância e baixa vagueza, nesta ordem".

Tabela 6.3: Resultado da Edução da Opinião dos Especialistas.

	Especialista 1 - $\pi(\theta)$			Especialista 2 - $\pi(\theta)$		
	mínima	média	máxima	mínima	média	máxima
θ_1	0,00	0,59	14,29	0,00	0,86	14,29
θ_2	0,00	3,24	25,00	0,00	2,44	25,00
θ_3	0,00	0,78	25,00	0,00	0,00	25,00
θ_4	0,00	5,47	25,00	0,00	5,68	25,00
θ_5	0,00	21,62	50,00	0,00	20,46	50,00
θ_6	0,00	3,52	25,00	0,00	3,41	25,00
θ_7	0,00	10,61	50,00	0,00	13,72	50,00
θ_8	0,00	1,53	16,67	0,00	1,08	16,67
θ_9	0,00	1,26	16,67	0,00	1,08	16,67
θ_{10}	0,00	0,87	13,64	0,00	1,27	13,64
θ_{11}	0,00	20,61	50,00	0,00	23,16	50,00
θ_{12}	0,00	4,88	50,00	0,00	3,69	50,00
θ_{13}	0,00	9,04	50,00	0,00	7,47	50,00
θ_{14}	0,00	3,19	33,33	0,00	4,64	33,33
θ_{15}	0,00	8,52	33,33	0,00	6,33	33,33
θ_{16}	0,00	4,27	33,33	0,00	4,70	33,33

6.4 O Uso do Conhecimento *A Priori* na Tomada de Decisões

Propõe-se o seguinte exemplo:

a) Estados da Natureza: a incerteza encontra-se nos cenários apresentados no exemplo da edução do conhecimento do especialista acima, usa-se das eduções apresentadas pelos especilistas para a tomada de decisão.

b) Conjunto dos Bens: o investidor tem como conseqüências de suas decisões o retorno da aplicação em uma determinada carteira. Admite-se que o retorno pode variar de -R$95.000,00 (menos noventa e cinco mil Reais); uma perda portanto, a R$95.000,00 (mais noventa e cinco mil Reais), um ganho portanto. O conjunto das conseqüências seria, em princípio, o intervalo fechado $[-95.000, 95.000]$. Este intervalo será transformado, entretanto, em 4 intervalos, cada um deles sendo considerado como uma só conseqüência. Isto permite um trabalho mais realista com as planilhas eletrônicas. Os intervalos são: $p_0[-95.000, 45.000]$, $p_1[45.000, 50.000]$, $p_2[50.000, 55.000]$ e $p_3[55.000, 95.000]$.

c) Conjunto das Obsevações: as observações serão correspondentes às variáveis ω_1, ω_2, ω_3, e ω_4 do período imediatamente anterior ao investimento e serão denotadas por s_1, s_2, s_3 e s_4. Da mesma forma que nos θ's a combinação dos s's formará 16 possíveis x. Cada x_j corresponderá a um θ_j, $j = 1, \dots, 16$.

d) Conjunto das Ações: As alternativas de investimento constituirão o conjunto de ações deste problema de decisão. Os fundos de investimento utilizados são:

1. Fundo Conservador: O qual é composto por 90% (noventa por cento) em Certificado de Depósito Bancário – CDB e 10% (dez por cento) em IBOVESPA, no trimester cívil.
2. Fundo Moderado: composto por 60% em Certificado de Depósito Bancário Ũ- CDB e 40% em IBOVESPA, no trimester cívil.

Os dois fundos acima são carteiras teóricas, porém servem de base para alguns bancos estabelecerem uma meta de desempenho superior.

Serão consideradas as seguintes possibilidades:

- a_0– Investir apenas no Fundo Conservador;
- a_1– Investir apenas no Fundo Moderado;
- a_2– Investir 50% em cada Fundo.

e) A Função Conseqüência: A função conseqüência, $P(p_i|\theta_j, a_k)$, apresenta-se na Tabela 6.4. As probabilidades foram estimadas com bases em dados históricos no caso da situação estar no governo, as probabilidades em relação a oposição e a cenários que nunca ocorreram foram supostas.

Tabela 6.4: A Função Conseqüência.

$P(p_i \vert \theta_j, a_k)$	p_0	p_1	p_2	p_3
(θ_1, a_0)	0	0	0,5	0,5
(θ_1, a_1)	0,1765	0,1176	0,5294	0,1765
(θ_1, a_2)	0,125	0,125	0,625	0,125
(θ_2, a_0)	0	1	0	0
(θ_2, a_1)	0	0	1	0
(θ_2, a_2)	0	0	1	0
(θ_3, a_0)	0	0,25	0,75	0
(θ_3, a_1)	0	1	0	0
(θ_3, a_2)	0,1667	0,25	0,5	0,0833
(θ_4, a_0)	0	0	0,5	0,5
(θ_4, a_1)	0,5	0,5	0	0
(θ_4, a_2)	0	0	1	0
(θ_5, a_0)	0	0	1	0
(θ_5, a_1)	0	0	0,5	0,5
(θ_5, a_2)	0	0,5	0,5	0
(θ_6, a_0)	0	0	1	0
(θ_6, a_1)	0	0	1	0
(θ_6, a_2)	0	0	0,333	0,667
(θ_7, a_0)	0,2	0,2	0,4	0,2
(θ_7, a_1)	0	0	1	0
(θ_7, a_2)	0	0	0	1
(θ_8, a_0)	0	0	1	0
(θ_8, a_1)	0	0,3	0,3	0,4
(θ_8, a_2)	0	0,25	0,75	0
(θ_9, a_0)	0,9	0,1	0	0
(θ_9, a_1)	1	0	0	0
(θ_9, a_2)	0,6	0,4	0	0
(θ_{10}, a_0)	1	0	0	0
(θ_{10}, a_1)	0	0	0	1
(θ_{10}, a_2)	0,75	0,25	0	0

continua na próxima página

Tabela 6.4: (continuacão)

$P(p_i \vert \theta_j, a_k)$	p_0	p_1	p_2	p_3
(θ_{11}, a_0)	1	0	0	0
(θ_{11}, a_1)	0,75	0,25	0	0
(θ_{11}, a_2)	0,5	0,25	0,25	0
(θ_{12}, a_0)	0,75	0,25	0	0
(θ_{12}, a_1)	0,85	0	0,15	0
(θ_{12}, a_2)	0,6	0,35	0	0,05
(θ_{13}, a_0)	0	1	0	0
(θ_{13}, a_1)	0,5	0,3	0,2	0
(θ_{13}, a_2)	0,4	0,2	0,2	0
(θ_{14}, a_0)	0,6	0,4	0	0
(θ_{14}, a_1)	0,4	0,2	0,4	0
(θ_{14}, a_2)	0	0,2	0,6	0,2
(θ_{15}, a_0)	0	0	0,6	0,4
(θ_{15}, a_1)	0	1	0	0
(θ_{15}, a_2)	0	0,3	0,7	0
(θ_{16}, a_0)	0	0	1	0
(θ_{16}, a_1)	0	0,3	0,2	0,5
(θ_{16}, a_2)	0	0,3	0,7	0

f) Função de Verosimilhança: a probabilidade condicional $P(x_l|\theta_j)$, apresenta-se na Tabela 6.5. As probabilidades foram estimadas com bases em dados históricos e na suposição de que se for observado que um dos certos candidatos esteja na frente na última pesquisa eleitoral ele vencerá a eleição.

Tabela 6.5: A Função de Verrosimilhança.

$P(x_l\|\theta_j)$	θ_9	θ_{10}	θ_{11}	θ_{12}	θ_{13}	θ_{14}	θ_{15}	θ_{16}
x_9	0,129	0,141	0,118	0,129	0,107	0,118	0,124	0,129
x_{10}	0,132	0,142	0,121	0,132	0,111	0,121	0,116	0,121
x_{11}	0,128	0,140	0,128	0,128	0,105	0,128	0,122	0,117
x_{12}	0,136	0,136	0,108	0,136	0,122	0,108	0,115	0,136
x_{13}	0,141	0,141	0,129	0,129	0,107	0,118	0,113	0,118
x_{14}	0,127	0,139	0,127	0,127	0,115	0,115	0,121	0,127
x_{15}	0,125	0,138	0,113	0,138	0,113	0,138	0,106	0,125
x_{16}	0,127	0,139	0,127	0,127	0,127	0,127	0,109	0,115

g) O Risco de Bayes: para calcular o risco de bayes neste problema tem-se que enumerar $||\mathcal{D}|| = ||\mathcal{A}||^{||\mathcal{X}||} = 3^{16} = 43.046.721$ regras de decisão. Um trabalho bastante difícil. A solução para este problema dá-se da seguinte forma:

- Enumera-se todas as possíveis observações;
- Para cada uma dessas observações, achar-se qual a ação com menor risco de Bayes para cada observação.

h) A utilidade considerada neste problema será a do investidor 2 do capítulo anterior. Os valores para os quatro bens encontra-se na Tabela 6.6.

Tabela 6.6: Utilidade do Investidor 2.

p	$u(p)$
p_0	0,446122
p_1	0,896334
p_2	0,91536
p_3	0,965148

i) A decisão a ser tomada será com base no conhecimento *a priori* do primeiro especialista que pode ser vista na Tabela ??. Com o uso desta distribuição, tem-se os seguintes risco de Bayes total para cada ação:

Tabela 6.7: O Risco Total de Bayes.

Ação	r_d
a_0	-0,74129
a_1	-0,88081
a_2	-0,78269

Sendo assim, se o investidor quiser tomar uma ação independente do x observado, ele deverá investir no fundo moderado. Porém pode-se conseguir uma decisão mais apurada com a observação do x. Na Tabela 6.8 apresenta-se o risco de Bayes de cada ação para cada x observado. A ação a ser tomada também é indicada na parte da direita da tabela com o dígito 1.

Tabela 6.8: O Risco de Bayes das Ações Para Cada x Observado.

(x, a)	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3
x_1	-0,00582	-0,00566	-0,00532	1	0	0
x_2	-0,03249	-0,03318	-0,03318	0	1	1
x_3	-0,00693	-0,00697	-0,00637	0	1	0
x_4	-0,05399	-0,05256	-0,05256	1	0	0
x_5	-0,17992	-0,17992	-0,17805	1	1	0
x_6	-0,03149	-0,03149	-0,03263	0	0	1
x_7	-0,08161	-0,09026	-0,09517	0	0	1
x_8	-0,01389	-0,01389	-0,01381	1	1	0
x_9	-0,00649	-0,01209	-0,00827	0	1	0
x_{10}	-0,00434	-0,00891	-0,00544	0	1	0
x_{11}	-0,0897	-0,18404	-0,13591	0	1	0
x_{12}	-0,02862	-0,04689	-0,03226	0	1	0
x_{13}	-0,07367	-0,07523	-0,04445	0	1	0
x_{14}	-0,01952	-0,02854	-0,02873	0	0	1
x_{15}	-0,07406	-0,07248	-0,07203	1	0	0
x_{16}	-0,03875	-0,03875	-0,03851	1	1	0

6.5 Conclusão

Até agora discutiu-se modelos numéricos para se tomar a decisão de investir ou não em algum fundo. O exemplo numérico acima mostra que não é tão difícil modelar um problema de decisão financeira utilizando a teoria da decisão; as dificuldades encontram-se na falta de *software* com base em modelos de teoria da decisão. Utilizou-se neste trabalho planilhas eletrônicas para se realizar os cálculos. Um modelo analítico com base em teoria da decisão para se decidir qual carteira que se deve investir, considerando a preferência do decisor e o risco de como se encontrará a economia num instante futuro é apresentado em (Campello de Souza, 2002).

O próximo capítulo trata a questão da utilização do modelo analítico proposto por (Campello de Souza, 2002) num caso prático.

Tabela 6.9: Questionário Para Edução da Opinião do Especialista.

I_A	**1 ou 0**	I_B
$[\theta_1 - \theta_8]$		$[\theta_9 - \theta_{16}]$
$[\theta_1 - \theta_7]$		$[\theta_8 - \theta_{16}]$
$[\theta_1 - \theta_9]$		$[\theta_{10} - \theta_{16}]$
$[\theta_1 - \theta_{10}]$		$[\theta_{11} - \theta_{16}]$
$[\theta_1 - \theta_6]$		$[\theta_7 - \theta_{16}]$
$[\theta_1 - \theta_7]$		$[\theta_9 - \theta_{16}]$
$[\theta_2 - \theta_8]$		$[\theta_9 - \theta_{16}]$
$[\theta_1 - \theta_8]$		$[\theta_9 - \theta_{15}]$
$[\theta_1 - \theta_{11}]$		$[\theta_{12} - \theta_{16}]$
$[\theta_1 - \theta_5]$		$[\theta_6 - \theta_{16}]$
$[\theta_1 - \theta_7]$		$[\theta_9 - \theta_{15}]$
$[\theta_1 - \theta_7]$		$[\theta_{10} - \theta_{16}]$
$[\theta_1 - \theta_4]$		$[\theta_5 - \theta_{16}]$
$[\theta_1 - \theta_{12}]$		$[\theta_{13} - \theta_{16}]$
$[\theta_2 - \theta_7]$		$[\theta_9 - \theta_{16}]$
$[\theta_2 - \theta_7]$		$[\theta_9 - \theta_{15}]$
$[\theta_4 - \theta_{12}]$		$[\theta_{13} - \theta_{16}]$
$[\theta_1 - \theta_7]$		$[\theta_8 - \theta_{12}]$
$[\theta_1 - \theta_7]$		$[\theta_8 - \theta_{12}]$
$[\theta_1 - \theta_8]$		$[\theta_9 - \theta_{12}]$
$[\theta_5 - \theta_8]$		$[\theta_9 - \theta_{16}]$
$[\theta_1 - \theta_4]$		$[\theta_9 - \theta_{16}]$
$[\theta_1 - \theta_8]$		$[\theta_{13} - \theta_{16}]$
$[\theta_1 - \theta_4]$		$[\theta_5 - \theta_{12}]$
$[\theta_5 - \theta_8]$		$[\theta_9 - \theta_{16}]$
$[\theta_5 - \theta_8]$		$[\theta_9 - \theta_{16}]$
$[\theta_1 - \theta_8]$		$[\theta_9 - \theta_{12}]$
$[\theta_7 - \theta_{13}]$		$[\theta_{14} - \theta_{16}]$
$[\theta_1 - \theta_3]$		$[\theta_7 - \theta_{13}]$
$[\theta_4 - \theta_8]$		$[\theta_9 - \theta_{12}]$
$[\theta_1 - \theta_4]$		$[\theta_8 - \theta_{12}]$
$[\theta_1 - \theta_4]$		$[\theta_{12} - \theta_{16}]$
$[\theta_8 - \theta_{12}]$		$[\theta_{13} - \theta_{16}]$
$[\theta_5 - \theta_8]$		$[\theta_{13} - \theta_{16}]$
$[\theta_1 - \theta_4]$		$[\theta_5 - \theta_8]$
$[\theta_5 - \theta_8]$		$[\theta_9 - \theta_{12}]$
$[\theta_2 - \theta_5]$		$[\theta_{12} - \theta_{14}]$
$[\theta_1 - \theta_2]$		$[\theta_{12} - \theta_{16}]$
$[\theta_1 - \theta_5]$		$[\theta_{15} - \theta_{16}]$
$[\theta_1 - \theta_2]$		$[\theta_{15} - \theta_{16}]$

7 UM MODELO ANALÍTICO

"Nada é mais prático do que uma boa Teoria".

Immanuel Kant.

7.1 Introdução

É bom ficar claro para o leitor que não se está elaborando nenhuma teoria econômica, ou financeira. O que se pretende é a resolução de problemas no mercado financeiro à luz da teoria da decisão.

Em (Campello de Souza, 2002), apresenta-se modelos analíticos a luz da teoria da decisão, no mercado financeiro, além de propor um segundo modelo. O primeiro modelo pode ser compreendido como um modelo de decisões no longo prazo, períodos superiores a um ano. No modelo, a economia é vista como um todo usando apenas um indicador. Um ponto positivo em relação aos dois modelos é que a formulação é geral, abrangente e flexível. Dessa forma, pode-se usar outras expressões analíticas. Uma outra observação de caráter mais geral é que quanto melhor a teoria econômica a ser usada na elaboração dos construtos, melhores deverão ser os resultados e deve-se agregar informações de teorias econômicas no desenvolvimento dos modelos.

Pretende-se dar uma contribuição no segundo modelo como também resolvê-lo para um problema real de decisão no mercado financeiro.

7.2 O Modelo

Os construtos do problema de decisão podem ser expressos pelos seguintes conjuntos:

O Conjunto dos Bens

O conjunto do bens, $\mathcal{P} = \{p\}$, representa o retorno líquido do investimento. O conjunto é limitado ao intervalo $[-M, M]$.

Usa-se a função utilidade quadrática:

$$v(p) = k_0 + k_1 p - k_2 p^2 \tag{7.2.1}$$

para atribuir a psicologia do risco do investidor.

O Conjunto dos Estados da Natureza

O conjunto dos estados da natureza representa a incerteza sobre indicadores da economia. Propõe-se uma formulação onde os θ's são considerados isoladamente.

Cada θ é um vetor formado pela combinação de quatro dicotomias, que são os indicadores do funcionamento da economia brasileira representados por ω_i. A incerteza dos indicadores é quanto aos seus valores no próximo mês. Se um dos indicadores, ω_i, for melhor para a economia no período seguinte então o mesmo receberá o valor de 1 caso contrário terá o valor de 0. Os indicadores serão:

$$\begin{cases} \omega_1 = \text{Produto Interno Bruto - PIB;} \\ \omega_2 = \text{Taxa de Inflação - IPCA;} \\ \omega_3 = \text{Taxa de Juros - Selic;} \\ \omega_4 = \text{Taxa de Desemprego na região metropolitana do Brasil;} \end{cases}$$

Para ω_1 a suposição é que quanto maior o PIB melhor estará a economia, enquanto que para os três indicadores o melhor é um valor menor do que o observado. Supõe-se também que entre os indicadores o mais importante é o PIB, depois vem a inflação, a taxa de juros e o emprego. As dicotomias definirão, portanto, 16 diferentes e mutuamente exclusivos cenários futuros da economia, que serão denotados por θ_j, $j = 1, 2, \ldots, 16$. $\theta_j = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$

A tabela 7.1 explicita os 16 cenários em ordem de importância para a economia. A cada θ_j é atribuído um coeficiente de impacto na economia, n_j. Os valores de n_j não são fixos e foram escolhidos de forma a apresentar qual a importância dos θ_j no retorno do investimento; a rigor o valor de cada n_j deverá ser definido pela teoria econômica mais apropriada a cada país. Como exemplo, nos últimos 8 anos na economia brasileira deu-se importância ao controle da inflação enquanto que no Estados Unidos da America a importância maior foi dada ao crescimento da economia, PIB. Escolheu-se os n_j seguindo uma ordem decrescente em relação à importância dos θ_j. Dessa forma, θ_1 e θ_{16} terão seus n_j iguais a 16 e 1 respectivamente, e os outros θ's receberam valores intermediários entre esses valores.Os calores foram atribuídos de acordo com a sua ordem de importância.

Tabela 7.1: Os 16 Possíveis Cenários.

Cenário	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
θ_1	0	0	0	0
θ_2	0	0	0	1
θ_3	0	0	1	0
θ_4	0	0	1	1
θ_5	0	1	0	0
θ_6	0	1	0	1
θ_7	0	1	1	0
θ_8	0	1	1	1
θ_9	1	0	0	0
θ_{10}	1	0	0	1
θ_{11}	1	0	1	0
θ_{12}	1	0	1	1
θ_{13}	1	1	0	0
θ_{14}	1	1	0	1
θ_{15}	1	1	1	0
θ_{16}	1	1	1	1

As séries históricas destes indicadores foram obtidas no *site* do Banco Central do Brasil - *site: www.bcb.gov.br.*

Apartir de agora θ_j corresponderá à probabilidade de ocorrência de cada um dos 16 θ_j apresentados acima, ou seja o que se entendia por $\pi(\theta_j)$ passa a ser denotado apenas por θ_j. O conhecimento *a priori* do especialista será modelado por uma distribuição de Dirichlet $\theta \sim Diri(\alpha)$:

$$\pi(\theta) = \frac{\Gamma(\nu)}{\prod_{j=1}^{k}\Gamma(\alpha_j)}\prod_{j=1}^{k}\theta_j^{\alpha_j-1},$$

onde $\alpha_j > 0$, $\nu = \sum_{j=1}^{k}\alpha_j$, $\sum_{j=1}^{k}\theta_j = 1$.

$$E(\theta_j) = \frac{\alpha_j}{\nu}, \quad \mathrm{var}(\theta_j) = \frac{\frac{\alpha_j}{\nu}(1 - \frac{\alpha_j}{\nu})}{\nu + 1}, \quad \mathrm{cov}(\theta_j, \theta_i) = -\frac{\frac{\alpha_i}{\nu}\frac{\alpha_j}{\nu}}{\nu + 1}.$$

Segundo (Campello de Souza, 2002),

> "*A distribuição de Dirichlet pode ser vista como uma generalização multivariável da distribuição beta. Ela pode ser interpretada também como uma distribuição de máxima entropia, sobre o espaço de distribuições* Θ^**, com uma restrição sobre a distância média (isto é, entropia relativa) relativa a uma distribuição de referência. ... Walley (1996) apresenta um novo método para se fazer inferências a partir de dados de uma distribuição multinomial em casos onde não existe informação a priori, chamado "o modelo impreciso de Dirichlet".*"

O Espaço das Observações

O espaço das observações será modelado por uma:

Multinomial $\mathcal{M}(n, \theta)$

$$P(x|\theta) = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{k}(x_j!)} \prod_{j=1}^{k} \theta_j^{x_j}$$

onde cada x_j é um inteiro entre 0 e n, $\sum_{j=1}^{k} x_j = n$, $\sum_{j=1}^{k} \theta_j = 1$, $0 \leq \theta_j \leq 1$.

$$\mathrm{E}(X_j) = n\theta_j, \quad \mathrm{var}(X_j) = n\theta_j(1 - \theta_j), \quad \mathrm{cov}(X_i, X_j) = -n\theta_i\theta_j.$$

Se uma amostra independente de tamanho n é retirada de uma população de k tipos, onde θ_j é a probabilidade de que uma simples observação é do j-ésimo tipo, então X_j é o número de indivíduos do j-ésimo tipo na amostra.

Nota: $k = 2$ dá a distribuição $B(n, \theta)$, com $\theta = \theta_1 = 1 - \theta_2$.

Um Dado de 16 Faces

A melhor metáfora para entender como se dá o tratamento dos dados através das distribuições apresentadas acima talvez seja o lançamento de um dado. Neste caso tem-se seis (6) θ's, correspondendo às seis faces do dado. Se se joga o dado n vezes, ocorrerão x_j vezes a face j, para todo j, e a soma dos x_j's será o número total de vezes que o dado foi lançado.

Se são 4 indicadores da economia (PIB, Taxa de Inflação (IPCA), Selic, Taxa de Desemprego) então serão 16 θ's. Um "dado" de 16 faces. Uma observação do que aconteceu com a economia num período corresponderá a um *string* de 4 dígitos (0's e 1's). Assim, ao longo de n períodos, haverão 4 trajetórias, como na Tabela 7.2.

Tabela 7.2: Exemplo de Uma Amostra.

Indicador \ período	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	n
PIB	0	1	1	1	1	0	0	0	0	...	1
Desemprego	1	1	1	0	0	1	1	0	0	...	1
Selic	0	1	1	0	0	1	1	0	1	...	1
IPCA	1	0	0	1	1	1	1	1	1	...	1

O melhor θ é o θ_{16} observe que ele não se repetiu na tabela 7.2. Já o θ_{14} apareceu duas vezes (períodos 2 e 3). Isto é, $x_{14} = 2$. O θ_9 apareceu também duas vezes, e portanto $x_9 = 2$ (períodos 4 e 5).

Tem-se também $x_6 = 1$ (período 1). Veja que $x_8 = 2$ (períodos 6 e 7) e que $x_1 = x_4 = 1$ (períodos 8 e 9, respectivamente).

Deve-se ter:

$$\sum_{j=1}^{16} \pi(\theta_j) = 1 \quad \text{e}$$

$$\sum_{i=1}^{16} x_j = n.$$

Considerando-se a tabela acima (considerando-se $n = 10$) ter-se-ia:

$$\hat{\pi}(\theta_1) = \hat{\pi}(\theta_4) = \hat{\pi}(\theta_6) = \hat{\pi}(\theta_1 6) = \frac{1}{10}.$$

$$\hat{\pi}(\theta_8) = \hat{\pi}(\theta_9) = \hat{\pi}(\theta_{14}) = \frac{2}{10}.$$

Os outros 9 (nove) θ's têm estimativas de probabilidade iguais a zero, pois não apareceram em nenhum período. Confira que a soma das estimativas (freqüências relativas) das probabilidades dos θ's é igual a um e que a soma dos x_j's é igual a 10 (que é o n para o exemplo numérico).

Observações no Plano Real

Para a série dos indicadores no período de julho de 1994 a novembro de 2002 tem-se 100 observações e cada θ_j teve os seguintes números de ocorrência apresentados na Tabela 7.3.

Tabela 7.3: Observações no Plano Real.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	N
1	4	8	7	4	6	9	4	6	6	4	13	6	5	6	11	100

Os Conjuntos da Ações

$\mathcal{A} = \{a\}$ é o conjunto das alternativas de investimento. Cada a torna-se um *mix* de ativos financeiros, ou seja, as ações serão formadas por uma composição, percentual, de cada ativo. Para composição dessas ações usou-se os seguintes ativos:

- Rentabilidade média de CDB com prazo de 30 dias;
- Ouro - variação percentual mensal;
- Ibovespa - variação percentual mensal;
- Fundos de ações - rentabilidade acumulada no mês.

A série é do mesmo período dos indicadores econômicos e também foram obtidos no *site* do banco central do brasil. Na Tabela 7.5 apresenta-se uma análise estatística desses ativos como também da carteira de Markorwitz para esses ativos. Tanto no gráfico da Figura 7.1 como na Tabela 7.4 pode-se observar que o retorno dos ativos não apresentam uma alta correlação, exceto o Fundo de ações e o Ibovespa, o que não permite que a carteira teórica de Markorwitz tenha melhores resultados. A composição da carteira de Markorwitz é dada com os seguintes percentuais: CDB - 96,38%, Ouro - 1,06%, Ibovespa - 0,49% e o Fundo de Ações - 2,05%.

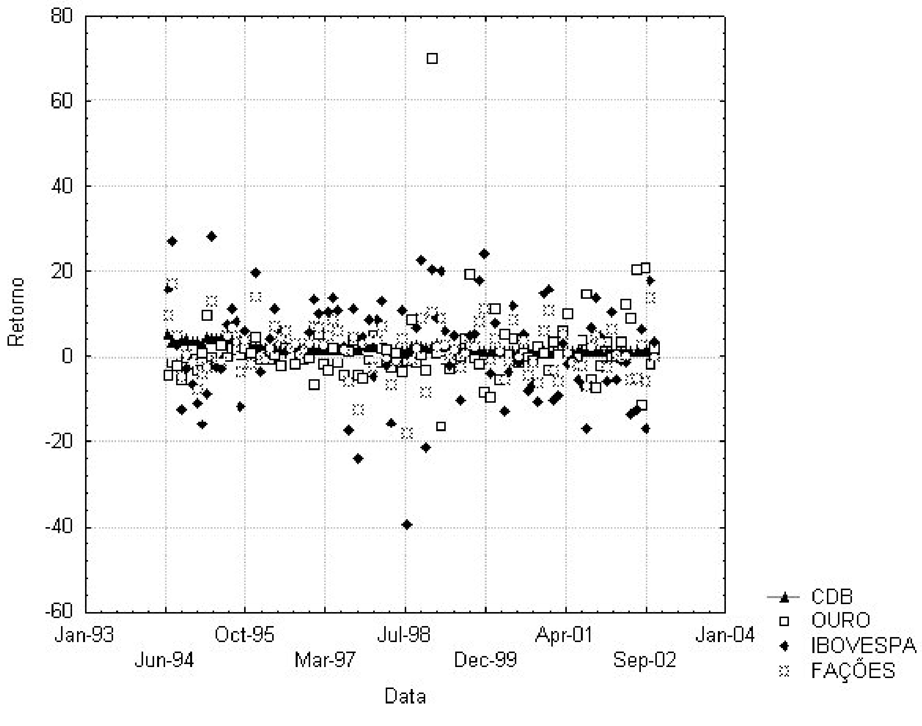
Tabela 7.4: Correlação de Sperman.

	N - Valido	Spearman	t(N-2)	p-valor
CDB & OURO	101	-0,1426	-1,4331	0,1550
CDB & IBOVESPA	101	0,1532	1,5428	0,1261
CDB & FUNDO DE AÇÕES	101	0,1535	1,5460	0,1253
OURO & IBOVESPA	101	-0,1974	-2,0038	0,0478
OURO & FUNDO DE AÇÕES	101	-0,1816	-1,8377	0,0691
IBOVESPA & FUNDO DE AÇÕES	101	0,9567	32,7149	0,0000

Tabela 7.5: Ativos da Carteira de Investimento.

Ativos	**Média**	**Mínimo**	**Máximo**	**Desvio Padrão**
CDB	2,0661	1,1500	5,20000	0,91514
OURO	1,4358	-16,4000	70,00000	8,95345
IBOVESPA	1,7377	-39,5500	28,02000	11,54773
FUNDO DE AÇÕES	1,6145	-17,9800	17,07000	5,67691
CARTEIRA DE MARKOWITZ	2,0485	0,8980	5,24192	0,92359

Figura 7.1: Gráfico Do Retorno do Ativos.



Dessa forma, uma a é uma carteira composta por vários ativos e pode ser denotada por:

$$a = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_i a_i \tag{7.2.2}$$

onde: a_i representam os retornos de cada ativo individualmente, no exemplo da Tabela 7.5 a carteira determinada pelo método de Markowitz representa um fundo de investimento; ξ representa os percentuais de investimento em cada ativo. Construiu-se aleatoriamente 95 possíveis ações, ou seja, determinou-se um conjunto de ξ aleatoriamente. Dessa forma, o conjunto de possíveis ações é de cardinalidade igual a 100, no qual as quatro primeiras ações é de se investir apenas em um dos ativos: CDB, OURO, IBOVESPA, FUNDO DE AÇÕES. A quinta ações é investir na carteira teórica de Markowitz.

As ações são caracterizadas por um retorno médio, μ, e um desvio padrão do retorno, σ.

A média dos retornos de cada ação é expressa por:

$$\mu(a) = \xi_1 \mu(a_1) + \xi_2 \mu(a_2) + \cdots + \xi_i \mu(a_i) \tag{7.2.3}$$

O risco não-sistemático, que é inerente a natureza do investimento será medido por:

$$R(a) = \left(1 - \frac{\mu(a)}{\mu(a) + \sigma(a)}\right) \tag{7.2.4}$$

A Função Conseqüência

Segundo (Campello de Souza, 2002), na escolha da expressão analítica da função conseqüência, deve ser considerado alguns aspectos, que são:

- *combinar o estado da natureza e a ação no sentido correto; θ e a agem independentemente um do outro, mas se combinam para dar forma à distribuição de probabilidade de p;*
- *espelhar o comportamento que tipicamente se observa nos retornos de investimento, ou seja, unimodalidade e variância e assimetria limitadas; é desejável uma certa robustez;*
- *propiciar uma facilidade de cálculo quando associada às demais expressões analíticas da formulação global do problema de decisão.*

A função conseqüência a ser apresentada incorpora as três aspectos apresentadas acima. A função conseqüência é dada por:

$$f(p|\theta, a) = \left[2M(1+R)\tau \prod \theta_j\right]^{-1} \text{ se}$$

$$M(1+R)\left[\sum n_j\theta_j + \tau \prod \theta_j\right] + \mu \geq p \text{ e}$$

$$M(1+R)\left[\sum n_j\theta_j - \tau \prod \theta_j\right] + \mu \leq p \;\; ;$$

$$f(p|\theta, a) = 0 \text{ noutros casos.}$$

onde: τ corresponde a uma constante de proporcionalidade. Analise a distribuição para o caso de todos os θ's terem a mesma probabilidade de ocorrência $\theta_j = \frac{1}{16}$; a distribuição será uniforme. Uma outra característica da função é que se tem certeza do acontecimento de um θ_j, a probabilidade de ocorrência do p será igual a um, já que a função de densidade da função conseqüência será igual a ∞. De uma maneira geral, para cada θ fixo, a distribuição de probabilidade é uniforme. Porém o investimento tem uma incerteza inerente a sua natureza, o risco não-sistemático, e a estimativa da média e do desvio padrão são variáveis aleatórias. Dessa forma, mesmo para um θ fixo a distribuição não será uniforme. Na verdade, como θ tem uma distribuição que tipicamente não é uniforme, $f(p|\theta, a)$ tem uma forma que lembra uma distribuição normal.

A Função Perda

A função perda é o negativo da função utilidade e é obtida dos seguintes passos:

1. $$L(\theta|a) = -u(f(p|\theta, a))$$

2.

$$u(f(p|\theta,a)) = \int_{[M(1+R)[\sum n_j\theta_j - \tau \prod \theta_j]+\mu}^{[M(1+R)[\sum n_j\theta_j + \tau \prod \theta_j]+\mu} \frac{k_0 + k_1 p - k_2 p^2}{2M(1+R)\tau \prod \theta_j} dp$$

3.

$$u(f(p|\theta,a)) = \frac{[k_0 p + \frac{k_1}{2}p^2 - \frac{k_2}{3}p^3]}{2M(1+R)\tau \prod \theta_j}\Bigg|_{[M(1+R)[\sum n_j\theta_j - \tau \prod \theta_j]+\mu}^{[M(1+R)[\sum n_j\theta_j + \tau \prod \theta_j]+\mu}$$

4.

$$u(f(p|\theta,a)) = k_0 + k_1\left[2M(1+R)\left[\sum n_j\theta_j\right] + \mu\right] - k_2\left[2M(1+R)\left[\sum n_j\theta_j\right] + \mu\right]^2 -$$

$$-\frac{1}{3}k_2\left[2M(1+R)\tau \prod \theta_j\right]^2$$

5.

$$L(\theta|a) = -k_0 - k_1\left[2M(1+R)\left[\sum n_j\theta_j\right] + \mu\right] + k_2\left[2M(1+R)\left[\sum n_j\theta_j\right] + \mu\right]^2 +$$

$$+\frac{1}{3}k_2\left[2M(1+R)\tau \prod \theta_j\right]^2$$

7.2.1 A Solução do Modelo

Vai ser necessário usar os seguintes fatos para solução do problema:

1.

$$u(f(p|\theta,a_j)) = \int u(p) f(p|\theta,a_j) dp.$$

2.

$$L(\theta,a_j) = -u(f(p|\theta,a_j)).$$

3.

$$R_d(\theta) = \sum_x P(x|\theta) L(\theta, d(x)).$$

4.

$$r_d = \int_0^1 \pi(\theta) R_d(\theta) d\theta (\text{risco de Bayes}).$$

5.
$$r_d = \int_0^1 \left[\sum_x \pi(\theta) P(x|\theta) L(\theta, d(x)) \right] d\theta.$$

6.
$$r_d = \int_0^1 \left[\sum_x \pi(\theta|x) P(x) L(\theta, d(x)) \right] d\theta.$$

7.
$$rd = \sum_x P(x) \int_0^1 \pi(\theta|x) L(\theta, d(x)) d\theta.$$

8. Minimizar r_d por uma escolha de d que é o mesmo que minimizar para cada x, o termo

$$\int_0^1 \pi(\theta|x) L(\theta, d(x)) d\theta,$$

por uma escolha de $d(x)$.

Distribuição *a posteriori*

Quando se fala em uma distribuição *a posteriori* está-se trabalhando no famoso problema da probabilidade inversa: a partir dos dados, fazer afirmações sobre a probabilidade das causas.

A distribuição *a posteriori*: $Diri(\alpha + x)$

$$\pi(\theta|x) = \frac{\Gamma(\nu)}{\prod_{j=1}^{k} \Gamma(\alpha_j + x_j)} \prod_{j=1}^{k} \theta_j^{\alpha_j - 1 + x_j},$$

onde: $\nu = \sum \alpha_j + x_j$.

7.2.2 A Forma Analítica de r_d

Para facilitar os cálculos denota-se $\frac{\Gamma(\nu)}{\prod_{j=1}^{k} \Gamma(\alpha_j + x_j)} = \omega$

$$r_d = \int_0^1 \omega [\prod_{i=1}^{k} \theta_i^{\alpha_i - 1 + x_i}] (-1) *$$

$$* \left[k_0 + k_1 \left[2M(1+R) \left[\sum n_j \theta_j \right] + \mu \right] - k_2 \left[2M(1+R) \left[\sum n_j \theta_j \right] + \mu \right]^2 \frac{1}{3} k_2 \left[2M(1+R) \tau \prod \theta_j \right]^2 \right] d\theta$$

$$\therefore r_d = (-1)[\underbrace{k_0\omega \int_0^1 \prod \theta_j^{\alpha_j-1+x_j} d\theta}_{I} + \underbrace{\int_0^1 k_1[2M(1+R)\sum n_j\theta_j + \mu]\omega \prod \theta_j^{\alpha_j+x_j-1} d\theta}_{II} -$$

$$-\underbrace{\int_0^1 k_2[2M(1+R)\sum n_j\theta_j + \mu]^2\omega \prod \theta^{\alpha_j-1+x_j} d\theta}_{III} +$$

$$+\underbrace{\frac{1}{3}k_2\omega 4M^2(1+R)^2 \int_0^1 \tau \prod \theta_j^2 \prod \theta_j^{\alpha_j-1+x_j} d\theta}_{IV}$$

Dividiu-se r_d em quatro partes enumerada abaixo da equação. A solução de cada uma das partes da-se da seguinte forma:

I - Parte:

$$I = k_0 \int_0^1 \omega \prod \theta_j^{\alpha_j-1+x_j} d\theta$$

Resolvendo a integral tem-se:

$$I = k_0$$

Pois está integrando-se as distribuições marginais dos θ's que é igual a um.

II - Parte:

$$II = \int_0^1 k_1[2M(1+R)\sum n_j\theta_j + \mu]\omega \prod \theta_j^{\alpha_j+x_j-1} d\theta$$

$$II = k_1 2M(1+R) \int_0^1 [\sum n_j\theta_j + \mu]\omega \prod \theta_j^{\alpha_j+x_j-1} d\theta$$

$$II = k_1 2M(1+R)[\int_0^1 \sum n_j\theta_j \prod \theta_j^{\alpha_j+x_j-1} d\theta + \mu \int_0^1 \omega \prod \theta_j^{\alpha_j+x_j-1} d\theta]$$

Resolvendo as integrais tem-se:

$$II = k_1 2M(1+R)\omega \sum_{i \neq j}^{k} \left[\frac{n_j}{(\alpha_j + x_j + 1)\Pi(\alpha_i + x_i)} \right] + k_1 \mu$$

III - Parte:

$$III = -k_2 [2M(1+R) \sum n_j \theta_j + \mu]^2 \omega \prod \theta_j^{\alpha_j - 1 + x_j}$$

$$III = -k_2 \left[2M(1+R)^2 \omega \int_0^1 (\sum n_j \theta_j)^2 \prod \theta_j^{\alpha_j - 1 + x_j} d\theta + 4M(1+R)\omega \int_0^1 n_j \theta_j \prod_j^{\alpha_j - 1 + x_j} d\theta \right] -$$

$$-k_2 \mu^2 \int_0^1 \omega \prod \theta_j^{\alpha_j - 1 + x_j} d\theta_j$$

Resolvendo as integrais tem-se:

$$III = -k_2 [4M^2 (1+R)^2 \omega \left[\sum_{i \neq j}^{k} \frac{n_j^2}{(\alpha_j + x_j + 1)\Pi(\alpha_i + x_i)} \right] +$$

$$+4 \sum_{j=1\ ;i<j}^{k} \frac{n_j n_i}{(\alpha_j + x_j + 1)(\alpha_i + x_i + 1) \prod_{t:t \neq j \neq i} (\alpha_t + x_t)} +$$

$$+4M(1+R)\omega \sum_{j=1\ ;j \neq i}^{k} \frac{n_j}{(\alpha_j + x_j + 1) \prod (\alpha_i + x_i)} + \mu]$$

IV - Parte:

$$IV = \frac{4}{3} M^2 (1+R)^2 k_2 \omega \int_0^1 \prod \theta_j^2 \prod_j^{\alpha_j - 1 + x_j} d\theta_j$$

Resolvendo a integral tem-se:

$$IV = \frac{4}{3} \tau \omega M^2 (1+R)^2 k_2 \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{(\alpha_j + x_j + 1)}$$

Tem-se assim, a expressão do risco de se tomar uma regra de decisão:

$$rd = (-1) * \{k_0 + k_1 2M(1+R)\omega \sum_{i \neq j}^{k} \left[\frac{n_j}{(\alpha_j + x_j + 1)\Pi(\alpha_i + x_i)} \right] + k_1\mu -$$

$$-k_2[4M^2(1+R)^2\omega \left[\sum_{i \neq j}^{k} \frac{n_j^2}{(\alpha_j + x_j + 1)\Pi(\alpha_i + x_i)} \right] +$$

$$+4 \sum_{j=1 \quad ;i<j}^{k} \frac{n_j n_i}{(\alpha_j + x_j + 1)(\alpha_i + x_i + 1) \prod_{t:t \neq j \neq i} (\alpha_t + x_t)} +$$

$$+4M(1+R)\omega \sum_{j=1 \ ;j \neq i}^{k} \frac{n_j}{(\alpha_j + x_j + 1) \prod(\alpha_i + x_i)} + \mu] +$$

$$+\frac{4}{3}\tau\omega M^2(1+R)^2 k_2 \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{(\alpha_j + x_j + 1)}\}$$

7.2.3 Um Risco Superior e Inferior

Uma das suposições do modelo acima é a existência de uma distribuição *a priori*, $\pi(\theta)$. Em (Walley, 1996), apresenta-se uma maneira de se ter probabilidades *a posteriori* sem o conhecimento de uma distribuição *a priori*. O modelo é conhecido como "o modelo impreciso de Dirichlet".

No seu artigo *"Inferences from Multinomial Data: Learning from a Bag of Marbles"* Walley apresenta um método para se fazer inferência sobre os estados da natureza, θ, quando há pouca ou nenhuma informação sobre os parâmetros da distribuição *a priori*, toda a análise é feita sem levar em consideração a opinião do especialista. O modelo fornece uma probabilidade *a posteriori* superior e inferior sobre θ.

As razões para o uso da distribuição de Dirichlet, segundo Walley são as seguintes:

a) As distribuições *a priori* de Dirichlet são matematicamente tratáveis porque geram as distribuições *a posteriori* de Dirichlet;

b) As distribuições de Dirichlet são muito comuns em modelos bayesianos quando há ignorância *a priori* sobre θ;

c) Quando as categorias são combinadas, distribuições de Dirichlet transformam-se em outra distribuição de Dirichlet.

O Modelo Impreciso de Dirichlet - (IDM)

A idéia de Walley é reparametrizar a distribuição $\pi(\theta)$ da seguinte forma:

$$\pi(\theta) = \prod_{j=1}^{k} \theta_j^{st_j - 1},$$

onde: t_j é a média de θ_j. Walley(1996) define o IDM como o conjunto de todas as distribuições de Dirichlet $Diri(s,t)$, tal que $0 < t_j < 1$ para $j = 1, 2, \ldots, k$ e $\sum_{j=1}^{k} t_j = 1$, onde s é uma constante positiva que não depende do espaço amostral.

O conjunto de distribuições *a posteriori* é formado por todas as distribuições de Dirichlet $Diri(N+s, t^*)$ onde $t^* = \frac{n_j + st_j}{N+s}$ e $0 < t_j < 1$ para $j = 1, 2, \ldots, k$ e $\sum_{j=1}^{k} t_j = 1$.

Neste conjunto de distribuições *a posteriori* de Dirichlet são obtidas probabilidade superiores e inferiores do evento. A probabilidade superior é obtida quando se toma o limite de t_j igual a um. A probabilidade inferior é obtida quando $t_j \to 0$.

A probabilidade superior *a posteriori* é definida como:

$$\overline{P}(\theta_j | x) = \frac{n_j + s}{N + s}$$

e a probabilidade inferior *a posteriori* como:

$$\overline{P}(\theta_j | x) = \frac{n_j}{N + s}.$$

N é o número de observações sobre o θ no exemplo acima $N = 100$. s é um hiperparâmetro. Walley faz uma discussão sobre a escolha do s e mostra como ele pode se adequar aos vários modelos existentes. Quando $s = 1$ aborda-se o caso freqüentista, no caso de $s = 2$ tem-se os modelos bayesianos de escolha cautelosa.

Usando as distribuições *a posteriori* superior e inferior para um determinado s obtém-se um risco superior e inferior por se adotar uma determinada ação. Se o intervalo atribuído a uma determinada ação for o menor tanto superior quanto inferior deve-se adotar esta ação.

Tabela 7.6: Probabilidades Superior e Inferior.

s	$s=1$		$s=2$	
$P(\theta\|x)$	$\underline{P}$	$\overline{P}$	$\underline{P}$	$\overline{P}$
$P(\theta_1\|x)$	0,0099	0,0198	0,0098	0,0294
$P(\theta_2\|x)$	0,0396	0,0495	0,0392	0,0588
$P(\theta_3\|x)$	0,0792	0,0891	0,0784	0,0980
$P(\theta_4\|x)$	0,0693	0,0792	0,0686	0,0882
$P(\theta_5\|x)$	0,0396	0,0495	0,0392	0,0588
$P(\theta_6\|x)$	0,0594	0,0693	0,0588	0,0784
$P(\theta_7\|x)$	0,0891	0,0990	0,0882	0,1078
$P(\theta_8\|x)$	0,0396	0,0495	0,0392	0,0588
$P(\theta_9\|x)$	0,0594	0,0693	0,0588	0,0784
$P(\theta_{10}\|x)$	0,0594	0,0693	0,0588	0,0784
$P(\theta_{11}\|x)$	0,0396	0,0495	0,0392	0,0588
$P(\theta_{12}\|x)$	0,1287	0,1386	0,1275	0,1471
$P(\theta_{13}\|x)$	0,0594	0,0693	0,0588	0,0784
$P(\theta_{14}\|x)$	0,0495	0,0594	0,0490	0,0686
$P(\theta_{15}\|x)$	0,0594	0,0693	0,0588	0,0784
$P(\theta_{16}\|x)$	0,1089	0,1188	0,1078	0,1275

Para o exemplo acima, todos os risco inferiores e superiores das 100 ações foram calculados. O resultado para as cinco primeiras ações encontra-se na Tabela 7.7. Apresentou-se apenas os risco das regras de decisões das cinco primeiras alternativas em virtude do espaço. Mas, o resultado ótimo apresenta-se entre essas cinco alternativas. A ação de investir apenas no CDB apresentou tanto no caso de s conservador, ou seja igual a 2, como também, no caso de $s=1$ o intervalo de menor risco.

Tabela 7.7: O Risco Superior e Inferior.

ATIVOS	$\underline{r_d}(s=1)$	$\overline{r_d}(s=1)$	$\underline{r_d}(s=2)$	$\overline{r_d}(s=2)$
CDB	68802,22	137604,4	68127,69	204383,1
OURO	139617,5	279235,1	138248,7	414746,2
IBOVESPA	140730,4	281460,8	139350,7	418052
FUNDO DE AÇÕES	127414	254828,1	126164,9	378494,7
CARTEIRA DE MARKOWITZ	69201,63	138403,3	68523,18	205569,5

7.3 Conclusão

Alguns pontos importantes serão ressaltados:

- o uso de modelos analíticos pode levar a conclusões teóricas sobre o comportamento do investidor;
- os modelos analíticos também são fáceis de se implementar: em uma planilha ou mesmo em uma calculadora;
- o IDM apresenta uma importância muito grande na solução de problema de decisão, já que o mesmo pode atribuir probabilidades *a posteriori* sem precisar do conhecimento do especialista;
- outra vantagem do uso do IDM é que ele também é capaz de atribuir probabilidades sem a necessidade de se definir o espaço amostral. O IDM também é capaz de informar probabilidades para previsão de ocorrência de um evento para mais de um período.
- pode-se refinar as probabilidades *a posteriori* combinando o modelo de Walley com o método de edução do conhecimento do especialista.

8 CONCLUSÕES, SUGESTÕES E COMENTÁRIOS

8.1 Conclusões

No final de cada capítulo, apresentou-se as conclusões diretas sobre cada um. As principais conclusões do trabalho como um todo são as seguintes:

- Pode-se modelar o problema da escolha de uma carteira de investimento à luz da teoria da decisão. Foram apresentados e resolvidos três problema desta natureza;
- Aspectos subjetivos como: a utilidade do investidor e a opinião do especialista podem ser medidos e usados para refinar a tomada de decisão no mercados financeiros;
- A opinião do especialista sobre estados incertos do mundo pode ser usado como uma medida do risco sistemático. Dessa forma, a incerteza sobre eventos como: eleição para presidente, acordos internacionais e guerras são medidos e incorporados ao problema de escolha do investimento;
- O modelo impreciso de Dirichlet apresenta um importante avanço na tomada de decisões com informações insuficiente e o mesmo deve ser usado em problemas de escolha de carteiras de investimento. Pode-se inclusive incorporar a opinião do especialista e as informações desses corpos de evidência devem ser usados em conjunto.

8.2 Sugestões Para Trabalhos Futuros

- Continuar a formulação e aplicação de outros problemas ligados a finanças e a economia à luz da teoria da decisão;
- Comparar a tomada de decisões por modelos formulados à luz da teoria da decisão com relação aos modelos já existente, como: *capital asset pricing model*, o *Arbitrage Pricing*

Theory, o *value at risk* e etc;

- Explorar mais a possibilidade dos modelos de utilidade e probabilidade imprecisas.

8.3 Comentários

Existe uma necessidade de se aplicar mais o modelo impreciso de Dirichlet e a teoria de Walley "mundo real". O tratamento que Walley dá a questão de se fazer inferência diante de pouca informação, combina com muitos problemas de decisões na economia e em finanças. Um das poucas referências do uso dos modelos de decisões na economia é o (Walley & Campello de Souza, 1990).

O ponto mais importante, desta dissertação é que o gerenciamento de empresas, nos dias atuais, passa por uma gestão financeira da mais alta complexidade, o trabalho desenvolvido nesta dissertação tem como finalidade principal o desenvolvimento de formulação onde se possa tomar decisões financeiras de uma racional.

Referências Bibliográficas

ASSAF NETO, ALEXANDRE. 2001. *Mercado Financeiro.* 4 edn. São Paulo: Atlas.

BACHARACH, MICHAEL. 1977. *Economics and theory of games.* London: Westview Press, Inc.

BERENGUER, A. M. 2003 (Janeiro). *Estudo Sobre a Edução da Utilidade e do Conhecimento a priori.* M.Phil. thesis, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

BERGER, JAMES O. 1985. *Statistical Decision Theory and Baysian Analysis.* 2 edn. Springer Series is Statistics. New York: Springer- Velag New York, Inc.

BERNSTEIN, PETER L. 1997. *Desafio aos Deuses: A Fascinante História do Risco.* Rio de Janeiro: Campus.

CAMPELLO DE SOUZA, F. MENEZES. 2002. *Decisões Racionáis em Situação de Incerteza.*

FISHBURN, PETER C. 1990. Interdependent preferences. *The New Palgrave: A Dictionary of Economics.* Edited By Jonh Eatwell, Murray Milgate and Peter Newman.

FISHBURN, PETER C. 1994. Utility and Subjective Probability. **2**.

GAUSS M.CORDEIRO, GILBERTO A. A. A. PAULA. 1989. *Modelos de Regressão para Análise de Dados Univariados.* 17ž Colóquio Brasileiro de Matemática.

JOHNSTON, J & DINARDO, J. 2001. *Métodos Econométricos.* 4 edn. McGRAW-HILL.

LINS, GERTRUDES COELHO NADLER. 2000. *Contribuições a um protocolo de edução do conhecimento a priori.* M.Phil. thesis, Recife.

MADDALA, G.S. 1977. *Econometrics.* McGraw-Hill. Inc. ISBN 0-07039412-1.

ROSS, STEPHEN A. 1995. *Administração Financeira.* São Paulo: Atlas.

SIEGEL, S. 1977. *Estatística não-paramétrica para ciências do comportamento.* São Paulo: MacGraw-Hill do Brasil.

SILVA NETO, LAURO DE ARAÚJO. 1998. *Derivativos: definições, emprego e risco.* 2 edn. São Paulo: Atlas.

SIMONSEN, M. H., & WERLANG, S. R. DA C. 1991. Subadditive Probabilities and Portfolio Inertia. *Revista de Econometria*, **XI**(1), 1–19.

SMITHSON, M. J. 1997 - 2000. Human Judgment and Imprecise Probabilities. Web site of The Imprecise Probabilities Project: http:ippserv.rug.ac.be.

VON NEUMANN, JOHN, & MORGENSTERN, OSKAR. 1947. *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton.

WALLEY, P. 1996. Inferences from Multinomial Data: Learning about a Bag of Marbles. *J. R. Statist. Soc., B*, 3–57.

WALLEY, P. 1997 - 2000. Imprecise Probabilities. Web site of The Imprecise Probabilities Project: http:ippserv.rug.ac.be.

WALLEY, P., & CAMPELLO DE SOUZA, F. M. 1990. Uncertainty and indeterminacy in assessing the economic viability of energy options: a case study ofsolar heating systems in Brazil. *Ennergy Syst. Policy*, 281–304.