

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**PROPRIEDADES DE EQUILÍBRIO E DE  
TRANSPORTE DA MATÉRIA DE VÓRTICES  
EM NANOESTRUTURAS  
SUPERCONDUTORAS**

*Clécio Clemente de Souza Silva*

Tese apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos pré-requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador:

José Albino Oliveira de Aguiar

Co-orientador:

Gilson Matheus Carneiro

Julho de 2003



*A Mércia e à minha família  
pelo apoio e incentivo irrestritos*



# Agradecimentos

Ao meu orientador, Albino, pela orientação e incentivo.

A Leo, pela amizade e pela contribuição para o desenvolvimento desta tese.

Aos amigos do Laboratório de Supercondutividade, Petrúcio, Ivan, Cléssio, David, Ton, Carol, Anne, Yana, Felipe, Rodolfo, Adriano, Erivaldo e Marcílio.

Aos amigos Wilson e Hugo, pela troca de idéias durante os almoços, cafés e cervejas.

Aos Professores Gilson Carneiro e Ernst Helmut Brandt, pela colaboração com a tese e contribuição importante para minha formação.

Ao Professor Victor Moshchalkov, pela colaboração e pela hospitalidade durante minha estada em KULeuven.

A Alejandro Silhanek, pela amizade, incentivo e importante troca de idéias, e aos demais integrantes do Laboratorium voor Vaste-Stoffysica, KULeuven, Lieve van Look, Sophie Raedts, Margriet van Bael, Martin Lange, Wim Vick, entre outros.

A Ana e Linet, pela paciência de mãe.

A todos os integrantes do Departamento de Física.

Às agências de fomento CNPq, CAPES e FACEPE.



# Resumo

Nesta tese, estudamos teoricamente os aspectos dinâmicos e de equilíbrio da matéria de vórtices em duas classes de supercondutores nanoestruturados: (i) amostras mesoscópicas, cujas dimensões são comparáveis aos comprimentos característicos do vórtice; e (ii) amostras com uma rede regular de “armadilhas” artificiais. Em ambos os casos, a simetria da rede de vórtices é extremamente dependente dos parâmetros espaciais da amostra, de modo que as propriedades da rede de vórtices podem ser controladas artificialmente.

A nucleação de vórtices em filmes mesoscópicos e subseqüentes formações estruturais, à medida que um campo externo é variado foram simuladas por um algoritmo de dinâmica de Langevin. A estrutura dos vórtices e suas interações foram calculadas resolvendo a equação de London com as condições de contorno apropriadas. Mesmo na ausência de não-homogeneidades, que, em geral, previnem ou retardam o movimento dos vórtices, o ciclo de magnetização calculado para estas amostras apresenta histerese. Isso resulta da forte barreira de superfície que retarda a entrada e a saída dos vórtices gerando estados metaestáveis profundos. Além disso, as curvas de magnetização de filmes de diferentes espessuras apresentam oscilações que indicam transições estruturais envolvendo a criação ou destruição de uma cadeia de vórtices.

Usando um processo de minimização de Monte Carlo, calculamos o estado fundamental da rede de vórtices em filmes supercondutores com uma rede quadrada de poços de potencial. As propriedades elásticas da rede de vórtices foram estudadas no regime linear. Desenvolvemos um modelo simples que nos permitiu obter expressões analíticas para a resposta da rede de vórtices a uma pequena

excitação ac. Deste modelo, resulta que o espectro de frequências é determinado por duas frequências características: a frequência de acoplamento entre os vórtices e as armadilhas e a frequência de acoplamento entre os vórtices aprisionados e os vórtices intersticiais. O regime de validade do modelo foi estudado através de simulações de dinâmica molecular.

Estudamos também as propriedades de transporte de vórtices através deste potencial periódico. Desenvolvemos um modelo perturbativo para calcular curvas características de voltagem versus corrente. Estudamos algumas fases dinâmicas em função da corrente (intensidade e direção) e da temperatura através deste modelo. Mostramos que a quebra de simetria rotacional provocada pelo potencial periódico gera uma resposta altamente anisotrópica do movimento dos vórtices. Calculamos ainda a temperatura em que o estado desordenado do movimento dos vórtices em correntes baixas cristaliza em uma rede elástica. A temperatura de cristalização que encontramos escala com o inverso do quadrado da velocidade do centro de massa, em contraste com a conhecida lei do inverso da velocidade encontrada para o movimento de vórtices em um potencial aleatório.

# Abstract

In the present thesis, we study theoretically the equilibrium properties and dynamics of the vortex matter in two classes of nanostructured superconductors: (i) mesoscopic samples, with dimensions comparable with the penetration depth; and (ii) films with periodic array of artificial traps. In both cases, the vortex lattice symmetry is strongly dependent on the sample spacial parameters. In this way, the vortex lattice properties may be artificially controlled by changing these parameters.

Vortex penetration and further evolution inside a mesoscopic film under a parallel, externally applied magnetic field is simulated by a Langevin dynamics algorithm. The vortex structure and forces acting on it is calculated by solving the London equation with the appropriate boundary conditions. The surface barrier, resulting from the competition between the vortex self-force, which attracts vortices towards the surface, and the Meissner screening force, which pulls the vortices towards the sample center, is taken into account. The vortex lattice is shown to be composed of vortex chains parallel to the film surfaces. The field dependent magnetization curves present strong hysteresis, which is due to the surface barrier acting against vortex entrance and exit. The resulting vortex states are long-lived metastable states which undergo structural transitions where one vortex chain is created or destroyed, depending on the film magnetic history.

The elastic response of the vortex lattice in a square pinning array to small excitations is studied. The vortex lattice ground-state configurations are found using Monte Carlo simulated annealing minimization. A simple model was developed to compute analytically the linear response of the vortex lattice to small ac

currents. It is found that the frequency spectrum of the ac complex resistivity is determined by two characteristic frequencies: one is due to the coupling between vortices and the artificial traps and the other one is due to the coupling between trapped and interstitial vortices. Molecular dynamics simulations are performed to state the range of validity of the model.

The transport properties of vortices interacting with a periodic pinning potential are also studied. A mean-field treatment of the Langevin equations for the whole vortex lattice, which is assumed to flow elastically, as a strong driving current is applied, was developed to compute voltage–current characteristics and the dynamical crystallization process. It is shown that the broken translational symmetry of the periodic potential induces strongly anisotropic response, with vortex lattice motion directed preferentially along high symmetry axes of the pinning lattice. The transverse force necessary to depin vortices from these high symmetry directions is shown to depend on the pinning potential itself as well as on the center of mass velocity and the temperature. The crystallization temperature is shown to scale with the center of mass velocity  $v$  as  $1/v^2$ , in contrast with the  $1/v$  law for vortex motion in disordered superconductors.

# Sumário

Resumo	7
Abstract	9
<b>1 Introdução</b>	<b>21</b>
<b>2 Teoria de vórtices em supercondutores</b>	<b>25</b>
2.1 O estado supercondutor	25
2.1.1 Equações de London e o efeito Meissner	26
2.1.2 Termodinâmica do estado supercondutor e o campo crítico termodinâmico	27
2.1.3 Descrição microscópica e o gap de energia	28
2.1.4 A teoria de Ginzburg-Landau	30
2.1.5 Comprimentos característicos	32
2.2 O estado de vórtices	34
2.2.1 Quantização de fluxóide	34
2.2.2 A rede de vórtices de Abrikosov	35
2.2.3 Os campos críticos $H_{c1}$ e $H_{c2}$	36
2.2.4 Estrutura e energia de um vórtice isolado no limite $\kappa \gg 1$	37
2.2.5 Interações entre vórtices	40
2.2.6 Estrutura de um vórtice em duas dimensões	41
2.2.7 Equação do movimento de um vórtice	43
2.3 Fases termodinâmicas e dinâmicas de um sistema de vórtices	44
2.3.1 Elasticidade da rede de vórtices	45
2.3.2 Fusão da rede de vórtices	47
2.3.3 Fusão de vórtices na presença de desordem	50
2.3.4 Vórtices em movimento: plasticidade e recristalização	52
<b>3 A rede de vórtices em filmes mesoscópicos</b>	<b>55</b>
3.1 A barreira superficial de Bean-Livingston	57

3.1.1	Interação de um vórtice com uma interface supercondutor–isolante . . . . .	57
3.1.2	A barreira superficial de Bean-Livingston . . . . .	60
3.2	Vórtices em filmes mesoscópicos . . . . .	62
3.2.1	Estrutura dos vórtices e energia total . . . . .	62
3.2.2	Barreira superficial . . . . .	66
3.3	Vórtices em filmes mesoscópicos: configurações e metaestabilidade . . . . .	68
3.3.1	Simulação e dinâmica de Langevin . . . . .	68
3.3.2	Configurações e metaestabilidade . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Resposta ac linear da rede de vórtices em nanoestruturas periódicas</b>	<b>77</b>
4.1	Configurações de equilíbrio . . . . .	78
4.2	Resposta ac linear e o modelo de uma partícula . . . . .	82
4.2.1	O modelo de uma partícula . . . . .	85
4.2.2	Aplicação para redes comensuráveis com $n \leq n_s$ . . . . .	86
4.3	Resposta ac linear para $B > B_\Phi$ : O modelo de duas espécies . . . . .	87
4.3.1	Descrição do modelo e equações do movimento . . . . .	88
4.3.2	Cálculo do acoplamento vórtice-vórtice . . . . .	90
4.3.3	Espectro de frequência da resistividade e do comprimento de penetração . . . . .	91
4.3.4	Simulação numérica e regime de validade do modelo de duas espécies . . . . .	95
<b>5</b>	<b>Transporte e fases dinâmicas de vórtices em nanoestruturas periódicas</b>	<b>101</b>
5.1	Fusão da rede de vórtices revisitada: o modelo <i>cage</i> 2D . . . . .	102
5.2	O modelo <i>cage</i> dinâmico . . . . .	105
5.2.1	Equações do movimento . . . . .	105
5.2.2	Solução perturbativa: aproximação de 1 <sup>a</sup> ordem . . . . .	109
5.2.3	Flutuações e característica voltagem–corrente . . . . .	112
5.3	Fases dinâmicas de uma rede incomensurável . . . . .	114
5.3.1	Transporte e quebra de simetria rotacional . . . . .	114
5.3.2	Cristalização dinâmica . . . . .	119
5.4	Fases dinâmicas de uma rede comensurável . . . . .	121
5.4.1	Ancoragem transversal . . . . .	121
5.4.2	Flutuações anisotrópicas e cristalização dinâmica . . . . .	125
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>129</b>
<b>A</b>	<b>Dinâmica de Langevin</b>	<b>133</b>
A.1	Equação de Langevin e o teorema da flutuação dissipação . . . . .	133
A.2	Integração numérica da equação de Langevin . . . . .	134

**Referências bibliográficas****145****Artigos publicados e submetidos a publicação****147**



# Lista de Figuras

2.1	(a) Representação esquemática da interação elétron-elétron via fonons (no referencial do centro de massa do par de elétrons). No processo (a), o elétron $\mathbf{k}$ emite um fonon de vetor de onda $-\mathbf{q}$ . Num instante posterior, o fonon é absorvido pelo segundo elétron. No processo (b), o segundo elétron, de estado $-\mathbf{k}$ emite um fonon $\mathbf{q}$ , que é posteriormente absorvido pelo primeiro elétron. . . . .	29
2.2	Esquerda: Representação da rede triangular de Abrikosov em seu estado não perturbado ( $T = 0$ e sistema homogêneo). Direita: estrutura de um vórtice isolado, mostrando o comportamento espacial do parâmetro de ordem e da indução magnética local nas proximidades do núcleo e os comprimentos característicos do vórtice. . . . .	36
2.3	Magnetização de equilíbrio em função do campo externo para um supercondutor do tipo I (a) e um supercondutor do tipo II. Os campos críticos correspondentes estão indicados. . . . .	38
2.4	Três deformações diferentes na rede de vórtices correspondendo aos módulos elásticos de, da esquerda para a direita, compressão ( $c_{11}$ ), cisalhamento ( $c_{66}$ ) e entortamento ( $c_{44}$ ). . . . .	46
2.5	Representação do modelo <i>cake</i> 3D, onde uma linha de vórtice é deformada por efeito de flutuação térmica enquanto seus vizinhos permanecem em seus estados de equilíbrio. O sistema de coordenadas é mostrado.	48
2.6	Diagramas de fase $B - T$ para um sistema de vórtices em cristais perfeitos (a) e com desordem (b). As linhas contínuas indicam transições de fase abruptas, de primeira ordem, enquanto que as linhas intermitentes indicam transições contínuas. As linhas contínuas finas em (a) correspondem às curvas $B_f(T)$ nos limites $\mu_0 H_{c1} \ll B \ll \mu_0 H_{c2}$ e $B \lesssim \mu_0 H_{c1}$ estudados acima pelo modelo <i>cake</i> . As setas em (b) indicam fusão induzida por desordem (I) e fusão induzida termicamente (II). .	51

- 2.7 (a) Curvas características de voltagem–corrente (painel superior) e resistividade–corrente (inferior) típicas de um supercondutor desordenado. O sinal de voltagem é proporcional à velocidade média dos vórtices no interior do espécime. A queda abrupta do sinal de resistividade é usualmente associada a uma transição de uma fase desordenada para uma fase ordenada. (b) Diagrama de fases dinâmicas esquemático baseado em teorias recentes sobre fases dinâmicas de vórtices. Em baixas temperaturas e correntes, a rede de vórtices encontra-se ancorada (RA). Aumentando a corrente, os vórtices passam por uma fase de movimento plástico (MP) e, em seguida, cristalizam em uma fase de movimento ordenado (MO). A curva de recristalização (ou fusão dinâmica) assintota a temperatura de fusão de equilíbrio para correntes altas. . . . . 53
- 2.8 Algumas fases dinâmicas possíveis para um sistema de vórtices movidos por uma corrente de transporte. A fase plástica desordenada pode se ordenar em uma fase esmética, com ordem apenas na direção perpendicular ao movimento, ou em uma fase topologicamente ordenada, o vidro de Bragg. . . . . 54
- 3.1 Campo de entrada  $H_{en}$  dos vórtices em função da espessura do filme  $D$  calculado usando a Eq. (3.27) (linha contínua) e a Eq. (3.27) (linha tracejada). A linha pontilhada corresponde ao campo de penetração  $H_{en}^{GL}(D)$  obtido pela teoria de Ginzburg-Landau unidimensional (de Gennes, 1965). A linha ponto-tracejada corresponde ao campo crítico inferior  $H_{c1}(D)$ . . . . . 67
- 3.2 Curvas de magnetização (linhas contínuas espessas) calculadas para filmes homogêneos de espessura  $D = \lambda$  (a),  $2\lambda$  (b) e  $4\lambda$  (c). As linhas retas intermitentes são apenas guias para uma melhor identificação das fases estruturais. O número entre estas linhas indicam o número de cadeias de vórtices da fase respectiva. As linhas finas correspondem ao resultado macroscópico de Clem (veja texto). . . . . 71
- 3.3 Configurações da rede de vórtices em um pedaço do filme de  $D = \lambda$  para os pontos A, B, C, D, E e F indicados na Fig. 3.2. . . . . 72
- 3.4 Mesmo que Fig. 3.2, mas para  $D = 8\lambda$ . No canto direito superior é mostrada uma ampliação de um trecho do ramo decrescente da magnetização. 73
- 3.5 Configurações da rede de vórtices em um pedaço do filme de  $D = 8\lambda$  para os pontos A, B, C, D e F indicados na Fig. 3.4. Os valores do campo externo em unidades de  $\Phi_0/\mu_0\lambda^2$  são, respectivamente: 1,9 (a), 2,2 (b) e 2,4 (c), para campo crescente, e 2,4 (d), 1,8 (e) e 1,52 (f), em campo decrescente. . . . . 74

- 3.6 Diagrama de fase metaestável  $H-D$  (campo externo vs. espessura do filme) para o ramo crescente do ciclo de magnetização. Os dados correspondem aos campos de *matching*  $H_1 \equiv H_{en}$  (■),  $H_2$  (▲),  $H_3$  (●),  $H_4$  (▼) e  $H_5$  (◆) obtidos pelas simulações realizadas para filmes de espessura  $\lambda \leq D \leq 10\lambda$ . . . . . 75
- 4.1 Configurações de equilíbrio da rede de vórtices no potencial de ancoragem dado pela Eq. (4.2) para números de ocupação  $n = 0, 25, 0,5, 0,75$  e  $1$ , da esquerda para a direita e de cima para baixo. Os círculos menores (pretos) representam os vrtices e os grandes (brancos) representam os centros de ancoragem. Os polgonos tracejados correspondem às respectivas células unitárias. As configurações foram obtidas pelo procedimento de *annealing* simulado descrito no texto, usando  $a_p = \Lambda/4$ ,  $r_p = 0$ ,  $1a_p$  e  $\alpha_p = 8\pi\epsilon/a_p^2$ . . . . . 80
- 4.2 Mesmo que a Fig. 4.1, mas para  $n = 1, 25, 1,5, 1,75$  e  $2$ . . . . . 81
- 4.3 Mesmo que a Fig. 4.1, mas para  $n = 2, 25, 2,5, 2,75$  e  $3$ . . . . . 82
- 4.4 Espectro de frequência da resposta ac de uma rede de vórtices comensurável com o potencial de ancoragem para campos menores ou iguais ao campo de saturação. São mostradas as partes real (linhas cheias) e imaginária (linhas intermitentes) do comprimento de penetração complexo (a) e da resistividade complexa (b). As curvas foram obtidas do modelo de uma partícula. . . . . 87
- 4.5 (a) Representação esquemática de uma rede de vórtices para  $B = 2B_\Phi$  sob a ação de uma força uniforme  $F_{ac}$  (os círculos vazios representam os centros aprisionadores e os cheios representam os vórtices). Note que as sub-redes de vórtices ancorados e de vórtices intersticiais são deslocadas de suas posições de equilíbrio como corpos rígidos, i.e., sem sofrer deformações. Esse problema pode ser mapeado no análogo mecânico mostrado em (b), onde  $\kappa_p$  e  $\kappa_v$  representam as constantes elásticas de acoplamento vórtices-rede de defeitos e vórtices ancorados - vórtices intersticiais, respectivamente (veja texto). . . . . 89
- 4.6 Espectro de frequência da resistividade ac e do comprimento de penetração para campos entre o primeiro e segundo campos de *matching*, com  $n = 1, 1\frac{1}{8}, 1\frac{1}{4}, \dots, 2$ . A seta indica o sentido crescente de  $n$ . Adotamos como escala de frequência a frequência de acoplamento vórtice-vórtice,  $\omega_v$ . A frequência de ancoragem escolhida foi  $\omega_p = 8\omega_v$ . . . . . 93
- 4.7 Espectro de frequência da resistividade ac e do comprimento de penetração para campos entre o primeiro e segundo campos de *matching*, com  $n = 1, 1\frac{1}{8}, 1\frac{1}{4}, \dots, 2$ . A seta indica o sentido crescente de  $n$ . Adotamos como escala de frequência a frequência de acoplamento vórtice-vórtice,  $\omega_v$ . A frequência de ancoragem escolhida foi  $\omega_p = 8\omega_v$ . . . . . 94

- 4.8 Partes real  $\rho'$  (painel superior) e imaginária  $\rho''$  (painel inferior) da resposta ac para um potencial periódico de ancoragem com periodicidade  $a_p = \Lambda/4$  e força restauradora de ancoragem  $\alpha_p = 8\pi\epsilon/a_p^2$ . Os símbolos são os resultados da simulação de dinâmica molecular para  $n = B/B_\Phi = 1$  ( $\circ$ ), 1.25 ( $\square$ ), 1.5 ( $\diamond$ ), 1.75 ( $\triangle$ ) e 2 ( $\star$ ). As linhas cheias correspondem ao resultado analítico do modelo de duas espécies [Eq. 4.25]. Nenhum parâmetro de ajuste foi usado. Os dados de  $\rho''$  foram deslocados verticalmente para melhor visualização. . . . . 96
- 4.9 Parte real do comprimento de penetração ac  $\lambda_{ac}$  em função de  $\kappa_p$  para os valores de frequência  $\omega = \omega_0$ ,  $\omega_v$ , e  $8\omega_v$  (de cima para baixo). Os símbolos têm o mesmo significado que na Fig. 4.8. As linhas foram obtidas do modelo de duas espécies usando a Eq. 4.26. . . . . 97
- 4.10 Contribuições parciais da rede de vórtices ancorados ( $\star$ ) e da rede de vórtices intersticiais ( $\diamond$ ) para o comprimento de penetração ac (em cima) e a resistividade ac (em baixo) para  $B = 2B_\Phi$ . Os comprimentos de penetração estão normalizados pelos respectivos limites de baixa frequência. As linhas intermitentes indicam as frequências características  $\omega_v$  (esquerda) e  $\omega_p$  (direita), as quais definem três regimes dinâmicos (veja texto). . . . . 99
- 5.1 Movimento de uma rede de vórtices sobre um rede quadrada de centros de ancoragem. Em (a), a rede se move em uma direção (indicada pela seta) de baixa simetria do potencial de ancoragem. O movimento é incomensurável e a rede é essencialmente idêntica à rede de equilíbrio (triangular) pois o potencial de ancoragem não é capaz de deformá-la (veja texto). Em (b), o movimento é comensurável sobre uma direção de alta simetria da rede de ancoragem. A comensurabilidade é parcial, ocorrendo apenas na direção perpendicular ao movimento. . . . . 110
- 5.2 (a) Rede quadrada de armadilhas. As direções de maior simetria estão indicadas. Também é indicado o sistema de coordenada e são definidas as variáveis angulares da velocidade do centro de massa  $\mathbf{v}$  e da força motriz  $\mathbf{F}_d$ . (b) Potencial de ancoragem gerado pela Eq. (5.35) com  $U_2 = U_1/2$ . . . . . 116

- 5.3 Componentes  $v_x$  e  $v_y$  da velocidade do centro de massa e raiz da média quadrática das flutuações  $u$  como funções da intensidade da força motriz  $F_d$  para várias direções  $\alpha$  da força motriz. (a)  $32,5^\circ \leq \alpha \leq 40^\circ$ : o movimento dos vórtices é capturado pela direção [1,1] do potencial de ancoragem ( $v_x = v_y$ ) para valores de  $F_d$  menores que os indicados pelas linhas ponto-tracejadas verticais. (b)  $0^\circ < \alpha < 32,5^\circ$ : o movimento é capturada na direção [1,0] ( $v_y = 0$ ). As linhas horizontais nos painéis inferiores de (a) e (b) correspondem a  $u = c_L a$  para  $B = 2B_\Phi$  e  $c_L = 0,12$  (veja texto), acima da qual a fase elástica se torna instável em relação a flutuações. . . . . 117
- 5.4 Direção do movimento  $\theta$  em função da intensidade da força motriz  $F_L$  para direções de  $\mathbf{F}_L$  no intervalo  $5^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$  em incrementos de  $5^\circ$ . A seta indica o sentido crescente de  $\alpha$ . . . . . 118
- 5.5 Em cima: Linhas de cristalização dinâmica para  $10^\circ \leq \alpha \leq 40^\circ$ . Em baixo: Diagrama de fases dinâmicas  $\alpha$ - $F_L$  para  $T = 0$ . . . . . 121
- 5.6 Resultados do modelo *cage* dinâmico para movimento comensurável ao longo da direção [0,1] e a  $T = 0$ , mostrando a dependência da velocidade longitudinal,  $v$ , com as componentes transversal  $F_x$  (a) e longitudinal  $F_y$  (b) da força motriz. A linha intermitente corresponde à força crítica transversal, a partir da qual a fase comensurável se torna instável. (c)  $F_{x,c}$  em função de  $F_y$ . As forças estão normalizadas pela força máxima de ancoragem  $F_{max} = 8\pi|U_1|/a_p$ . . . . . 126
- 5.7 Raiz do desvio quadrático médio das flutuações transversais ( $\delta_x$ ) e longitudinais ( $\delta_y$ ) para movimento na direção [0,1] e  $T = 0$  em função da velocidade do c.m.,  $v$ . As forças estão normalizadas pela força máxima de ancoragem  $F_{max} = 8\pi|U_1|/a_p$  e os comprimentos estão normalizados pela periodicidade do potencial de ancoragem. Gráfico menor: Dependência de  $\delta_y$  com a força transversal  $F_x$  para valores fixos de  $v$ . . . 127



# Capítulo 1

## Introdução

Vórtices estão presentes na nossa vida cotidiana, desde pequenos redemoinhos no ralo de um tanque d'água até os grandes furacões que assolam o hemisfério norte. Por volta do ano 1500, Leonardo da Vinci registrou em esboços e anotações as nuances dos vórtices formados em vários estágios do movimento turbulento da água. Seus desenhos são provavelmente a primeira referência à importância dos vórtices na dinâmica dos fluidos.

A conexão entre vórtices e a estabilidade do movimento de um fluido só foi estabelecida no começo do século passado por Theodore von Kàrmàn, considerado o pai da aerodinâmica. Ele demonstrou que um fluido passando por um obstáculo cilíndrico pode estabilizar um arranjo periódico de vórtices cujos sentidos de rotação se alternam. Esse fenômeno, conhecido como “rua de Kàrmàn”, pode ser observado tanto em correntes fluviais e marítimas quanto em correntes atmosféricas sempre que o fluido contorna um obstáculo (a coluna de uma ponte ou uma ilha) a uma certa velocidade. A formação de vórtices em obstáculos é de fundamental importância, e.g., para diminuir efeitos de turbulência em aviões e planadores.

Ao contrário dos fluidos clássicos, como os descritos acima, um fluido quântico escapa sem qualquer viscosidade. A primeira descrição matemática de um vórtice em um fluido quântico foi feita por Onsager (1949), num estudo sobre quantização do momento angular em superfluidos. Poucos anos depois, Abrikosov (1957) demonstrou que alguns materiais supercondutores são permeados por linhas de fluxo quantizado quando submetidos a um campo magnético externo suficientemente

intenso. Estas linhas de fluxo são, na verdade, vórtices em um superfluido dos pares ligados de elétrons (os pares de Cooper, que são os responsáveis pela supercondutividade). No núcleo destes vórtices, a densidade superfluida  $n_s$  colapsa, criando uma circulação de corrente que, por sua vez, gera um fluxo magnético. O estado de menor energia corresponde a um único quantum de fluxo por vórtice, dado por  $\Phi_0 = h/2e$ , onde  $h$  é a constante fundamental de Planck. Assim, estes materiais, aos quais denominou supercondutores do tipo II, permitem, através de vórtices, a entrada parcial e quantizada do campo magnético. Os supercondutores do tipo II constituem a grande maioria dos materiais supercondutores conhecidos e, comparados com aqueles que não permitem a formação de vórtices, os chamados supercondutores do tipo I, têm um grande potencial de aplicação devido aos altos campos e correntes que podem suportar.

Os supercondutores mais promissores atualmente são os óxidos cupretos de alta temperatura crítica  $T_c$ . Esta classe de supercondutores foi descoberta por Bednorz & Müller (1986) e são denominados de alta  $T_c$  pois são, até hoje os únicos materiais que apresentam supercondutividade em temperaturas acima da temperatura de liquefação do nitrogênio. Dentre os materiais mais conhecidos estão os compostos  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$  (YBCO), com  $T_c$  em torno de 90 K, e os do sistema BSCCO, com um  $T_c$  que pode chegar a 110 K para o composto  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10-y}$ . Nestes materiais a presença de vórtices é particularmente importante pois a fase de vórtices se estende por quase todo o diagrama de fases do supercondutor.

Vórtices em supercondutores podem ser entendidos como linhas elásticas que interagem entre si e com o próprio material supercondutor que permeiam. Defeitos neste material, sejam naturais ou criados artificialmente, constituem, em geral, centros atrativos para os vórtices, os chamados centros de ancoragem. Assim, a rede de vórtices pode ser destruída ou “derretida” não só por efeitos de flutuação térmica como também por efeitos de desordem na distribuição de centros de ancoragem. Isso torna a mecânica estatística de vórtices ao mesmo tempo intrincada e fascinante.

Outro fator que pode modificar as propriedades da rede de vórtices é o geométrico. Em amostras ditas mesoscópicas, cujo tamanho é comparável aos comprimentos

---

característicos de um vórtice (entre algumas dezenas e centenas de nanômetros), a rede de vórtices pode sofrer fortes alterações na sua simetria. Isso se deve ao fato de que, nessas amostras, a interação entre os vórtices e suas superfícies ou interfaces passa a ser dominante, fazendo com que a estrutura dos vórtices seja regida pela forma específica da amostra.

É possível também mudar a simetria da rede de vórtices em amostras macroscópicas, onde o efeito de superfície é desprezível, através da introdução artificial de uma rede de centros de ancoragem. Estas “armadilhas” de vórtices são obtidas fabricando-se orifícios ou depressões de escala nanométrica em um filme supercondutor por um processo de litografia ou através de pontos magnéticos depositados sobre o filme. Se as forças produzidas pela rede de centros de ancoragem forem altas o suficiente para vencer as tensões elásticas da rede de vórtices, cria-se condições favoráveis para a formação de estados comensuráveis, onde as simetrias da rede vórtices e da rede de ancoragem estão intimamente relacionadas, dando origem a novas estruturas de vórtices impossíveis de serem obtidas em amostras naturais.

Na presente tese, estudamos as propriedades de equilíbrio e de transporte da rede de vórtices cuja estrutura é modificada por efeitos de superfície em amostras mesoscópicas ou pelo potencial periódico gerado por uma rede artificial de centros de ancoragem. A tese está organizada da seguinte maneira. No Capítulo 2, revisamos alguns fundamentos da supercondutividade e da física de vórtices em supercondutores. Algumas propriedades da rede de vórtices em filmes mesoscópicos são estudadas no Capítulo 3, onde, através de cálculos analíticos e simulações numéricas, nos focalizamos principalmente nos aspectos estruturais e na metaestabilidade inerente destes sistemas. Algumas propriedades dinâmicas e de equilíbrio da rede de vórtices em filmes supercondutores com uma rede de centros de ancoragem são estudadas nos Capítulos 4 e 5. No Capítulo 4, estudamos os vários estados de comensurabilidade assumidos pela rede de vórtices. Investigamos, mais especificamente o papel da simetria nas propriedades termodinâmicas e na resposta da rede de vórtices a pequenas excitações alternadas. No Capítulo 5, investigamos as propriedades de transporte dos vórtices quando movidos para longe do equilíbrio

por uma força motriz (gerada por uma corrente de transporte) e estudamos as várias fases dinâmicas formadas em função da direção e intensidade da corrente e da temperatura do cristal supercondutor. As considerações finais e conclusões são discutidas no Capítulo 6.

# Capítulo 2

## Teoria de vórtices em supercondutores

### 2.1 O estado supercondutor

A História da supercondutividade tem início em 1908, quando H. Kamerlingh Onnes conseguiu, pela primeira vez, liquefazer o hélio. Tal evento provocou um salto gigantesco na tecnologia de refrigeração e, conseqüentemente, no estudo de fenômenos de baixas temperaturas. Com acesso a temperaturas de apenas alguns kelvins, não demorou muito até que ele observasse, num experimento realizado com vários metais (Onnes, 1911), que a resistividade de alguns destes materiais desaparecia completamente abaixo de uma temperatura crítica  $T_c$  característica de cada material. Ele observou ainda que essa propriedade se extinguia quando aplicado um campo magnético acima de um valor crítico  $H_c$ . Tal propriedade de condutividade elétrica perfeita em temperaturas não nulas ficou conhecida como supercondutividade.

A resistividade nula foi a única característica marcante conhecida do estado supercondutor até 1933, quando Meissner & Ochsenfeld demonstraram que um material no estado supercondutor apresenta diamagnetismo perfeito, ou seja, a indução magnética no interior destes materiais é nula para qualquer campo externo aplicado abaixo de  $H_c$ , não importando a história magnética do material antes da transição. Este efeito (chamado efeito Meissner) não poderia ser explicado pela condutividade perfeita. Os condutores perfeitos blindam seu interior de campos

externos, mas, uma vez estabelecido um fluxo magnético interno, este fluxo não seria expelido abaixo de  $T_c$ . Assim, *condutividade e diamagnetismo perfeitos são as propriedades eletrodinâmicas que tornam a supercondutividade um fenômeno único.*

O fenômeno da supercondutividade permaneceu sem uma abordagem teórica satisfatória até os anos 50. Antes disto, alguns modelos, como o dos irmãos London 1935, obtiveram bastante sucesso na descrição das duas propriedades eletrodinâmicas mencionadas anteriormente, mas pouco se sabia sobre as propriedades termodinâmicas da transição e sobre a natureza dos portadores de carga e sua estrutura de bandas de energia. Em 1950, Ginzburg & Landau formularam uma teoria fenomenológica que explicava a maioria das propriedades macroscópicas dos supercondutores. A essa altura já se suspeitava que a supercondutividade era um fenômeno quântico. Mas uma abordagem microscópica quântica da supercondutividade só foi proposta em 1957 por Bardeen, Cooper e Schriffer.

A seguir, descreveremos brevemente a teoria da supercondutividade, dando maior ênfase aos aspectos fenomenológicos, pois propiciam uma abordagem bastante satisfatória da física de vórtices em supercondutores.

### 2.1.1 Equações de London e o efeito Meissner

As propriedades eletrodinâmicas básicas do estado supercondutor, condutividade perfeita e efeito Meissner, podem ser descritas qualitativamente através das equações propostas pelos irmãos London para os campos elétrico e magnético microscópicos, obtidas a partir de considerações clássicas simples (veja p. ex. Tinkham, 1996):

$$\mathbf{E} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\lambda^2 \mathbf{j}_s) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{b} = \nabla \times (\lambda^2 \mathbf{j}_s) \quad (2.2)$$

onde  $\lambda = \sqrt{m/\mu_0 n_s e^2}$  é um parâmetro fenomenológico conhecido como comprimento de penetração de London,  $m$  e  $e$  são a massa e o valor absoluto da carga do elétron, respectivamente,  $n_s$  é a densidade de elétrons supercondutores (fração dos

elétrons, no modelo de dois fluidos, que não sofre espalhamento) e  $\mathbf{j}_s = n_s e \mathbf{v}$  é a densidade de corrente destes super-elétrons. A equação (2.1) descreve a condutividade perfeita pois o menor campo elétrico é capaz de acelerar os super-elétrons. O efeito Meissner é melhor visualizado se reescrevermos (2.2) com o auxílio da lei de Ampere,

$$\nabla \times \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (2.3)$$

Tomando o rotacional de (2.3) e substituindo  $\nabla \times \mathbf{j}$  em (2.2) temos:

$$\nabla^2 \mathbf{b} = \lambda^{-2} \mathbf{b}, \quad (2.4)$$

onde usamos também a lei de Gauss,  $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ . Esta é a forma mais conhecida da equação de London. Uma equação idêntica pode ser obtida para a corrente  $\mathbf{j}_s$  se tomarmos o rotacional de (2.2) e substituirmos em (2.3). Podemos notar que a solução desta equação para várias simetrias com um campo magnético externo aplicado consiste em um decaimento exponencial do campo local  $\mathbf{b}$  a partir da superfície ao interior da amostra supercondutora, com comprimento característico  $\lambda$  que, em geral, é da ordem de 500 . A equação (2.4) descreve, portanto, o efeito Meissner.

### 2.1.2 Termodinâmica do estado supercondutor e o campo crítico termodinâmico

A existência de um campo crítico para a supercondutividade é consequência natural da termodinâmica no formalismo de Gibbs. A destruição da supercondutividade está associada à energia necessária para manter o campo fora do espécime,  $\mu_0 H_a^2 / 2$  (onde  $H_a$  é o campo aplicado), quando este campo exceder um certo valor crítico  $H_c$ . Ou seja, a variação na energia livre do supercondutor quando este campo for aplicado, em uma temperatura fixa  $T$ , será:  $g_s(T, H) - g_s(T, 0) = \mu_0 H_a^2 / 2$ , onde  $g_s$  é a densidade de energia de Gibbs para o material na fase supercondutora. No equilíbrio entre as duas fases, temos que  $g_s(H_c) = g_n(H_c)$ . Como a susceptibilidade de um material normal não magnético é praticamente desprezível, a contribuição na energia livre devido ao

campo magnético aplicado é essencialmente nula, de modo que  $g_n(H_c) = g_n(0)$ . Logo,  $H_c(T)$  será dado por

$$\Delta g(T) = g_n(T, 0) - g_s(T, 0) = \mu_0 H_c^2 / 2. \quad (2.5)$$

$\Delta g(T)$  nada mais é do que a energia de condensação do estado supercondutor a campo aplicado nulo. A forma funcional de  $H_c(T)$ , como confirmado empiricamente, é dada aproximadamente por uma lei parabólica,

$$H_c(T) = H_c(0) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2, \quad (2.6)$$

A natureza da transição entre as fases normal e supercondutora pode ser obtida calculando a diferença entre as entropias das duas fases, dada por

$$\Delta S = \int dV \left( \frac{\partial g_n}{\partial T} - \frac{\partial g_s}{\partial T} \right) = \mu_0 H_c \frac{\partial H_c}{\partial T}. \quad (2.7)$$

Como vemos, em  $T = T_c$  e em campo nulo, a entropia no decorrer da transição é contínua, caracterizando uma transição de fase de segunda ordem (o que é confirmado pela descontinuidade no calor específico). A uma temperatura  $T < T_c$ , a transição ocorre quando o campo externo for igual a  $H_c(T)$  resultando numa descontinuidade da entropia neste ponto. Nestas condições, a transição é de primeira ordem.

### 2.1.3 Descrição microscópica e o gap de energia

O gás de elétrons em um metal obedece à estatística de Fermi, i.e., o número de ocupação em cada nível de energia  $\frac{\hbar k^2}{2m}$ , onde  $\mathbf{k}$  é o vetor de onda, deve assumir apenas os valores 1 ou 0. O estado fundamental do gás, ou mar de Fermi, corresponde, então, a preencher completamente estes níveis até um valor máximo  $E_F = \frac{\hbar k_F^2}{2m}$ , chamado energia de Fermi. Cooper (1956) mostrou que a menor excitação atrativa entre dois elétrons perturbaria o mar de Fermi de modo a favorecer a formação de pares ligados de elétrons (pares de Cooper).

Tal excitação atrativa não poderia ser realizada pela interação Coulombiana

entre os elétrons, visto que esta é repulsiva. Assim, a excitação atrativa deve emergir da interação dos elétrons com algum sistema de excitações no sólido. Dentre os vários tipos de excitações que podem existir em um sólido, a interação elétron-fonon é tida como a única realmente importante e foi inicialmente proposta por Frölich (1950). Uma representação esquemática do acoplamento elétron-elétron via fonons é mostrada na Fig. 2.1. A idéia básica é que um elétron polariza o meio ao seu redor atraindo íons positivos do cristal. A alta concentração de carga positiva atrai um segundo elétron, dando origem a uma interação efetiva atrativa entre os dois elétrons, intermediada pelas deformações no cristal, ou seja, por fonons.

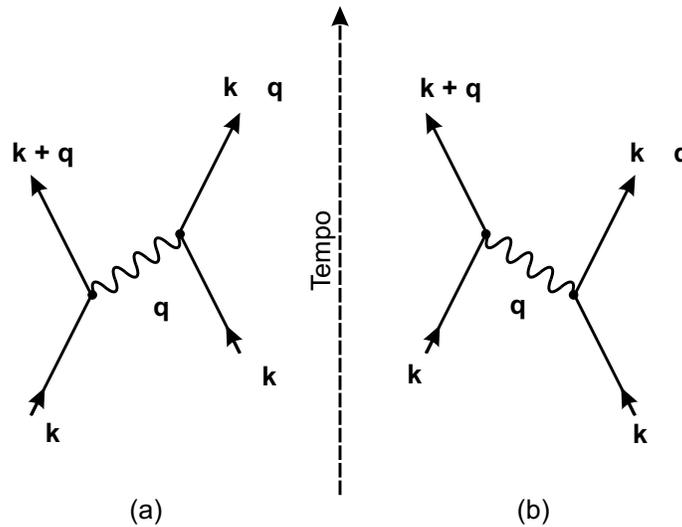


Figura 2.1: (a) Representação esquemática da interação elétron-elétron via fonons (no referencial do centro de massa do par de elétrons). No processo (a), o elétron  $\mathbf{k}$  emite um fonon de vetor de onda  $-\mathbf{q}$ . Num instante posterior, o fonon é absorvido pelo segundo elétron. No processo (b), o segundo elétron, de estado  $-\mathbf{k}$  emite um fonon  $\mathbf{q}$ , que é posteriormente absorvido pelo primeiro elétron.

O fato de o mar de Fermi ser instável a uma interação atrativa entre um par de elétrons, leva à idéia da formação de um condensado destes pares após ser estabelecido um estado de equilíbrio em que uma energia de ligação nula seria necessária para retirar um par de Cooper do mar de Fermi. Bardeen Cooper e Schrieffer (1957) descreveram este estado condensado introduzindo uma função de onda macroscópica dos  $N$  elétrons do sistema. O principal resultado da teoria

BCS é a existência de um gap de energia entre o estado fundamental e os estados de excitações de quase-partículas. Este gap é dado por  $E_g(T) = 2\Delta(T)$ , onde  $\Delta(T)$  é a energia característica que determina os níveis de energia envolvidos na formação de pares de Cooper e tem a seguinte dependência com a temperatura

$$\Delta(T) \sim \begin{cases} 1,74\Delta(0)\sqrt{1 - T/T_c}, & \text{para } T \approx T_c; \\ \Delta(0), & \text{para } T \ll T_c. \end{cases} \quad (2.8)$$

$\Delta(0) = 1.764k_B T_c$  e  $T_c$  é a temperatura crítica do estado supercondutor, ou seja, aquela na qual  $\Delta(T) \rightarrow 0$ .  $E_g$  corresponde à energia necessária para quebrar um par de Cooper. Assim, um campo eletromagnético com frequência maior que  $2\Delta/h$  ( $\sim 10^{11} - 10^{12}$  Hz) é capaz de destruir a supercondutividade.

### 2.1.4 A teoria de Ginzburg-Landau

Embora a teoria BCS descreva com precisão os mecanismos da supercondutividade nos materiais clássicos, uma descrição microscópica completa torna-se quase que impraticável nas situações em que há inhomogeneidades espaciais na densidade de super-elétrons e, portanto, no gap de energia. Este, de fato, é o caso da maioria das amostras supercondutoras, como veremos mais adiante. Nestas situações, uma descrição macroscópica seria mais adequada e a teoria de Ginzburg-Landau (GL) oferece uma descrição fenomenológica simples e compatível com inúmeros resultados experimentais.

Esta teoria é uma generalização da teoria de London. Aqui, os super-elétrons são tratados como um fluido quântico descrito por uma pseudo-função de onda  $\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|e^{i\varphi(\mathbf{r})}$  tal que a densidade local de elétrons supercondutores é dada por  $n_s = |\psi(\mathbf{r})|^2$ , ou seja, diferentemente da teoria de London,  $n_s$  não é necessariamente homogêneo no espaço. A pseudo-função de onda  $\psi(\mathbf{r})$  foi introduzida por Ginzburg e Landau como um parâmetro de ordem complexo numa adaptação da teoria geral de transições de fase de segunda ordem de Landau, em que a energia livre de Helmholtz, nas proximidades do ponto crítico, é expandida em potências pares do parâmetro de ordem.  $\psi(\mathbf{r})$  e o potencial vetor  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , dado por  $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{A}$ ,

são os campos que determinam a dinâmica do sistema. A densidade de energia livre proposta por Ginzburg e Landau pode ser escrita como um funcional destes dois campos. (Uma construção detalhada da energia livre pode ser encontrada em de Gennes, 1966.) Para um supercondutor isotrópico, temos

$$f_s[\psi, \mathbf{A}] = f_n + \alpha|\psi(\mathbf{r})|^2 + \beta|\psi(\mathbf{r})|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left[ \frac{\hbar}{i} \nabla - e^* \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) \right|^2 + \frac{b^2}{2\mu_0} \quad (2.9)$$

onde  $m^*$  e  $e^*$  são, respectivamente, a massa efetiva e a carga dos portadores. Esta última pode ser identificada como  $2e$ , já que os portadores de carga em um supercondutor são os pares de Cooper. Observe que, para um material anisotrópico, é preciso considerar a natureza tensorial de  $m^*$ . O primeiro termo do lado direito de (2.9) corresponde à energia no estado normal. Os dois termos seguintes correspondem à energia de condensação do estado supercondutor, representando uma expansão típica para a energia livre na teoria geral de Landau, onde  $\alpha$  e  $\beta$  são os parâmetros fenomenológicos da expansão. O quarto termo pode ser lido como  $\mathbf{P}^2/2m^*$ , onde  $\mathbf{P}$  é o momento canônico invariante de calibre. O último termo corresponde ao aumento na energia necessário para assegurar o efeito Meissner, ou seja, para expulsar o fluxo e/ou mantê-lo excluído do interior do supercondutor.

É interessante discutirmos aqui o significado físico das constantes  $\alpha$  e  $\beta$ . Para simplificar, consideremos apenas casos na ausência de campos e de variações espaciais no parâmetro de ordem. Assim, a energia livre é dada simplesmente por  $f_s - f_n = \alpha|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi|^4$ . Vê-se de imediato que  $\beta$  não pode ser negativo, caso contrário a energia não teria um mínimo global, exceto para valores infinitos de  $\psi$ , onde a expansão não seria mais válida. Com  $\beta$  positivo temos duas situações: se  $\alpha$  for também positivo, o único mínimo possível é para  $\psi = 0$ , ou seja, o material está no estado normal; se  $\alpha < 0$ , haverá um mínimo em um valor não-nulo de  $|\psi|^2$  dado por

$$|\psi_\infty|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}. \quad (2.10)$$

(O índice  $\infty$  denota que este é o valor que  $|\psi|^2$  assume no interior profundo de um espécime macroscópico homogêneo.) Logo,  $\alpha(T) = 0$  define a temperatura crítica da transição de segunda ordem,  $T_c$ .

Note que  $\alpha$  e  $\beta$  estão relacionados com o campo crítico termodinâmico. Vimos anteriormente que  $g_s(T, 0) - g_n(T, 0) = -\mu_0 H_c^2/2$ . Como, na ausência de campos, as energias livres de Gibbs e de Helmholtz são equivalentes, temos

$$f_s - f_n = -\frac{\alpha^2}{2\beta} = -\frac{\mu_0}{2} H_c^2. \quad (2.11)$$

Consideremos agora a situação mais geral em que campos e gradientes estão presentes. O estado de equilíbrio termodinâmico corresponde ao mínimo da energia livre de Gibbs, que se relaciona com a energia de Helmholtz por

$$G[\psi, \mathbf{A}] = \int dV f_s[\psi, \mathbf{A}] - V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}. \quad (2.12)$$

As famosas equações de Ginzburg-Landau são obtidas minimizando (2.12) em relação ao parâmetro de ordem e ao potencial vetor, respectivamente (veja, e.g., de Gennes, 1966, ou de Souza Silva, 1999):

$$\alpha\psi - \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{2m^*}(-i\hbar\nabla - e^*\mathbf{A})^2\psi = 0, \quad (2.13)$$

que, a menos do termo não-linear, é idêntica à equação de Schrödinger para uma partícula de massa  $m^*$  e carga  $2e$ , sendo  $\psi(\mathbf{r})$  sua função de onda e  $-\alpha$  o auto-valor de energia; e

$$\mathbf{j}_s = e^* \frac{-i\hbar}{2m^*} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{e^{*2}}{m^*} |\psi|^2 \mathbf{A} = \frac{e^* |\psi|^2}{m^*} (\hbar \nabla \varphi - e^* \mathbf{A}) \quad (2.14)$$

que define a densidade de corrente dos super-elétrons (note que aqui a analogia com a mecânica quântica é perfeita).

### 2.1.5 Comprimentos característicos

Considere a Eq. (2.13) para uma situação em que não haja campos ou correntes externas atuando sobre o supercondutor. Sob tais condições, podemos tomar  $\mathbf{A} = 0$  e, assim, termos todos os coeficientes da equação diferencial (2.13) reais de modo que podemos considerar, a menos de uma fase constante,  $\psi = \psi^*$ . Em uma

dimensão, a Eq. (2.13) se reduz a

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \beta\psi^3 + \alpha\psi = 0. \quad (2.15)$$

Considerando um supercondutor homogêneo, esperamos que o parâmetro de ordem em pontos infinitamente profundos no interior da amostra supercondutora seja praticamente constante ( $\psi = \psi_\infty$ ). Como vimos, para esta região a solução de (2.15) nos daria  $\psi_\infty^2 = -\alpha/\beta > 0$ . Queremos saber o qual o comprimento característico da variação de  $\psi(x)$  em torno de um ponto onde  $\psi(x) \neq \psi_\infty$ . Reescrevemos, então, (2.15) na forma reduzida,

$$-\xi^2 \frac{d^2f}{dx^2} - f^3 + f = 0. \quad (2.16)$$

onde  $f(x) = \psi(x)/\psi_\infty$  e  $\xi^2 = \hbar^2/2m^*|\alpha|$ .  $\xi$  é o comprimento característico da variação de  $f$  que procurávamos e nos dá a extensão da coerência do parâmetro de ordem supercondutor próximo a uma região no estado normal (onde  $\psi$  cairia a zero). Usando a dependência de  $\alpha$  na temperatura, temos

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha(T)|} \simeq \frac{\xi^2(0)}{1-t}, \quad (2.17)$$

onde  $t = T/T_c$  é a temperatura reduzida.

Outro comprimento característico de interesse é aquele que determina as variações dos campos e das correntes junto às interfaces normal/supercondutor, descritas pela segunda equação de GL. Considerando campos magnéticos fracos e baixas temperaturas, de modo que  $|\psi|^2$  é praticamente seu valor na ausência de campos,  $|\psi_\infty|^2$ , a Eq. (2.14) se reduz a

$$\mathbf{j}_s = \frac{|\psi|^2 e^{*2}}{m} \mathbf{A}. \quad (2.18)$$

Tomando o rotacional em ambos os lados de (2.18), teremos o equivalente à

equação de London (2.4), onde o comprimento de penetração será dado por:

$$\lambda^2(T) = \frac{m^*}{\mu_0 |\psi|^2 e^{*2}} = \frac{m^* \beta}{\mu_0 e^{*2} |\alpha|} \simeq \frac{\lambda^2(0)}{1-t}. \quad (2.19)$$

$\lambda(0)$  coincide com o comprimento de penetração de London a  $T = 0$ , onde todos os elétrons do modelo de dois fluidos são supercondutores ( $n_s = n$ ).

Existe um parâmetro adimensional que descreve a relação entre a penetração do fluxo em um espécime supercondutor e a coerência de sua supercondutividade. É o chamado parâmetro de GL,  $\kappa = \lambda(T)/\xi(T)$ . Como  $\lambda(T)$  e  $\xi(T)$  têm essencialmente a mesma dependência com a temperatura,  $\kappa$  é um parâmetro constante em  $T$ .

Podemos usar as expressões obtidas para  $\lambda$  e  $\xi$  para expressar o campo crítico termodinâmico em termos destes comprimentos característicos. O resultado é

$$H_c(T) = \frac{\Phi_0}{2\sqrt{2}\pi\lambda(T)\xi(T)}. \quad (2.20)$$

## 2.2 O estado de vórtices

### 2.2.1 Quantização de fluxóide

Como vimos, vórtices são regiões em estado normal através das quais atravessa um fluxo magnético quantizado. Discutiremos aqui a origem desta quantização. Consideramos uma região cilíndrica de material isolante (ou vácuo) atravessando um espécime supercondutor macroscópico e localizado longe da sua superfície externa, digamos, no centro deste espécime. Imaginemos um circuito fechado  $\Gamma$ , em torno desta região, posicionado de forma que o campo local é zero, ou seja, longe de qualquer interface. Nesta situação, a integral de  $\mathbf{j}_s$  ao longo de  $\Gamma$  será nula e, a partir de (2.14), teremos:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{2e} \oint_{\Gamma} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l}, \quad (2.21)$$

onde usamos  $e^* = 2e$ . A integral no primeiro membro nos dá o fluxo magnético no

interior do caminho e a integral no segundo membro é simplesmente  $2\pi n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), já que  $\varphi(r)$  deve variar, num circuito fechado, de múltiplos inteiros de  $2\pi$  para garantir a unicidade de  $\psi(r)$ . Temos então que

$$\Phi = n\Phi_0 = n\frac{h}{2e} \quad (2.22)$$

ou seja, o fluxo magnético no interior da região normal é quantizado, sendo  $\Phi_0$  o quantum de fluxo magnético (igual a  $2,07 \times 10^{-15}$  T m<sup>2</sup>).

### 2.2.2 A rede de vórtices de Abrikosov

Estudando a teoria de GL com campo externo e em situações onde  $\lambda > \xi$ , Alexei Abrikosov (1957) obteve uma solução periódica para o parâmetro de ordem superconductor. Tal solução consiste em uma rede bidimensional triangular<sup>1</sup> de regiões tubulares bem definidas, paralelas ao campo aplicado, em que  $|\psi|^2$  caía a zero. Baseando-se nas considerações feitas anteriormente, estas regiões normais devem ter extensão da ordem de  $\xi$  e portar um fluxo quantizado (na verdade, exatamente um quantum de fluxo, como veremos mais adiante). Este fluxo seria garantido por correntes circulando ao seu redor que, naturalmente, deveriam cair com um comprimento característico igual a  $\lambda$ . Estas linhas de fluxo, também chamadas vórtices, têm, portanto, um corpo de raio  $\lambda$ , onde estaria concentrada a maior parte do fluxo, e um núcleo de raio  $\xi$ , onde o fluxo assume um valor máximo e o parâmetro de ordem um valor mínimo nulo (veja Fig. 2.2). Segundo Abrikosov, os vórtices seriam os responsáveis pela penetração parcial de fluxo observada em alguns materiais, que passaram a ser conhecidos como supercondutores do tipo II.

A origem das linhas de fluxo está no fato de que é energeticamente mais favorável a formação de domínios de regiões no estado normal dentro do superconductor quando um campo acima de um valor crítico,  $H_{c1}$ , é aplicado. Para um superconductor do tipo II, a energia superficial das paredes de domínio, dada grosseiramente por  $\epsilon_s = \delta H_c^2(T)/2$ , onde  $\delta \sim (\xi - \lambda)$  é a espessura da parede, é

<sup>1</sup>Originalmente, Abrikosov previu uma rede de simetria quadrada. Na verdade, como mostrado posteriormente por Kleiner et al. (1964), a rede triangular é a mais estável dentre todas as configurações possíveis, embora seja apenas ligeiramente mais estável que a rede quadrada

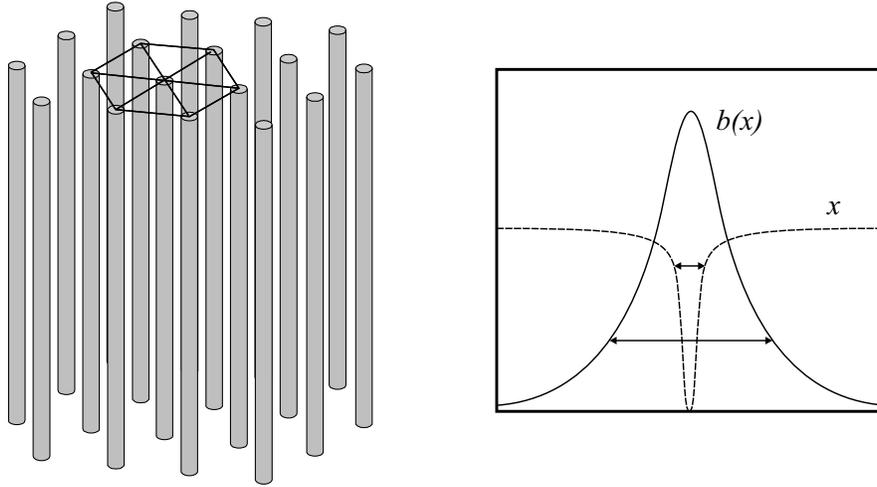


Figura 2.2: Esquerda: Representação da rede triangular de Abrikosov em seu estado não perturbado ( $T = 0$  e sistema homogêneo). Direita: estrutura de um vórtice isolado, mostrando o comportamento espacial do parâmetro de ordem e da indução magnética local nas proximidades do núcleo e os comprimentos característicos do vórtice.

negativa pois  $\lambda \gg \xi$ . Assim, domínios deste tipo seriam quebrados em porções menores, em favor da existência de um maior número possível de domínios, até que o limite quântico fosse alcançado, quando cada domínio assume um quantum de fluxo, tornando-se, portanto, indivisível. Estes domínios são os vórtices previstos pela teoria de Abrikosov. O supercondutor é dito, então, encontrar-se no estado misto ou estado de vórtices e permanece nesta fase até um campo crítico superior,  $H_{c2}(T)$ . Abaixo, descrevemos com mais detalhes estes campos críticos.

### 2.2.3 Os campos críticos $H_{c1}$ e $H_{c2}$

*Campo crítico inferior,  $H_{c1}$ .* Este campo está relacionado ao custo energético para se ter um único vórtice no interior da amostra, ou seja, é o campo que permite a nucleação do primeiro vórtice. Neste campo, as energias livres de Gibbs para um vórtice fora da amostra e dentro da amostra assumem o mesmo valor. Como  $G = F - H \int b dV$ , temos  $G_s = F_s$  na ausência de vórtices (ou seja, na ausência de fluxo). Assim podemos escrever

$$F_s = F_s + \epsilon_v L - H_{c1} \int b dV = F_s + \epsilon_v L - H_{c1} \Phi_0 L.$$

Logo, temos

$$H_{c1} = \epsilon_v / \Phi_0. \quad (2.23)$$

$\epsilon_v$  é a energia da linha de vórtice por unidade de comprimento. Como veremos mais adiante, no limite de  $\kappa \gg 1$ ,  $\epsilon_v = \frac{\Phi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda^2} \ln \kappa$ .

*Campo crítico superior,  $H_{c2}$ .* Este pode ser obtido se resolvermos a primeira equação de GL para um supercondutor infinito sob um campo uniforme aplicado em uma das direções cartesianas. Este problema é formalmente idêntico à resolução da equação de Schrödinger para uma partícula de carga  $2e$  viajando sob a ação de um campo uniforme  $H$ , onde obtém-se que o valor máximo  $H_{c2}$  permitido ao campo  $H$ , obtido da expressão para os autovalores de energia (Tinkham, 1996), é

$$H_{c2}(T) = \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0\xi^2(T)} = \sqrt{2}\kappa H_c(T). \quad (2.24)$$

Observe que se,  $H_{c2}$  for menor que o campo crítico termodinâmico, não faz sentido falar em estado de vórtices pois, como vimos, em  $H_c(T)$  a transição é de primeira ordem, ou seja,  $|\psi|^2$  vai descontinuamente de 0 a  $|\psi_\infty|^2$  em todo lugar, favorecendo um estado Meissner completo. No estado misto, é esperado que  $|\psi|^2$  varie suavemente, pois está diretamente relacionado à densidade de vórtices, ou seja, à densidade de regiões no estado normal. Logo, se  $H_{c2} < H_c$  o supercondutor será do tipo I, caso contrário, o material poderá entrar num estado misto, o que caracteriza os supercondutores do tipo II. Assim, a segunda igualdade de (2.24) nos fornece o valor exato de  $\kappa$ ,  $1/\sqrt{2}$ , que divide os materiais supercondutores em tipo I ( $\kappa < 1/\sqrt{2}$ ) e tipo II ( $\kappa > 1/\sqrt{2}$ ). A magnetização de equilíbrio,  $M = \mu_0^{-1}B - H$ , é mostrada na Fig. 2.3 em função do campo externo aplicado para os dois tipos de supercondutores.

### 2.2.4 Estrutura e energia de um vórtice isolado no limite $\kappa \gg 1$

Grande parte dos supercondutores do tipo II convencionais e virtualmente todos os supercondutores de alta  $T_c$  possuem  $\lambda \gg \xi$ . Isso facilita bastante os cálculos envolvendo vórtices nestes materiais pois, com  $\xi$  pequeno, podemos considerar  $|\psi(\mathbf{r})|^2$  essencialmente constante por todo o espécime, exceto bem próximo

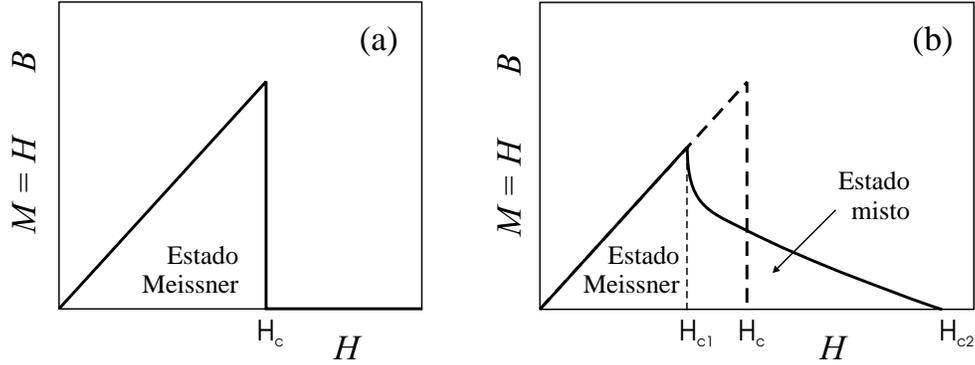


Figura 2.3: Magnetização de equilíbrio em função do campo externo para um supercondutor do tipo I (a) e um supercondutor do tipo II. Os campos críticos correspondentes estão indicados.

aos núcleos dos vórtices.

Para  $|\psi(\mathbf{r})|^2 = cte.$ , a variação espacial do parâmetro de ordem recai sobre a fase, i.e.,  $\psi(\mathbf{r}) = |\psi|e^{i\varphi(\mathbf{r})}$ . Assim, tomando o rotacional da 2ª Equação de GL (2.14), temos

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{j}_s &= \frac{e^*|\psi|^2}{m^*}(\hbar\nabla \times \nabla\varphi - e^*\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0\lambda^2}\nabla \times \nabla\varphi - \frac{1}{\mu_0\lambda^2}\mathbf{b}\end{aligned}\quad (2.25)$$

Suponha agora que há um vórtice na amostra e considere que este vórtice é reto e paralelo ao eixo ortogonal  $z$  e está localizado no ponto  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$  do plano  $xy$ . Integrando  $\nabla \times \nabla\varphi$  no plano  $xy$  e usando o teorema de Stokes, temos

$$\int dr^2 \mathbf{n} \cdot \nabla \times \nabla\varphi = \oint d\mathbf{l} \cdot \nabla\varphi = 2\pi p,$$

onde, na última igualdade, usamos o mesmo raciocínio que levou à Eq. (2.22). Logo, podemos identificar  $\nabla \times \nabla\varphi$  como

$$2\pi\boldsymbol{\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = 2\pi\hat{z}p\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (2.26)$$

o que define a *função de fonte* ou *vorticidade*  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)$  de um vórtice com  $p$  quanta

de fluxo (onde  $p$  é inteiro positivo), que nesta aproximação é dada por uma função delta de Dirac. Usando  $\mu_0 \mathbf{j}_s = \nabla \times \mathbf{b}$ , podemos reescrever (2.25) como

$$-\lambda^2 \nabla^2 \mathbf{b} + \mathbf{b} = \Phi_0 \boldsymbol{\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = \hat{z} p \Phi_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (2.27)$$

A Eq. 2.27 nada mais é do que a equação de London (2.4) com um termo de fonte devido a um vórtice localizado em  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$  portando um fluxo  $p\Phi_0$  e com um núcleo de raio infinitesimal, representado pela função delta. Esta equação pode ser resolvida facilmente pelo método de transformadas de Fourier. Observando que  $\mathbf{b}(\mathbf{r}) = \hat{z}b(\mathbf{r})$ , temos

$$b(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} b(\mathbf{r}) = \frac{p\Phi_0}{\lambda^2} \frac{1}{q^2 + \lambda^{-2}} \quad (2.28)$$

Tomando a transformada inversa, obtemos a solução exata

$$b(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{q}}{2\pi} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} b_z(\mathbf{r}) = \frac{p\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}{\lambda}\right), \quad (2.29)$$

onde  $K_0(r)$  é a função de Bessel modificada de ordem zero. Esta função decai exponencialmente, como  $e^{-r/\lambda}$ , em longas distâncias ( $r \gg \lambda$ ) e diverge logarithmicamente, como  $\ln(r/\lambda)$ , quando  $r \rightarrow 0$ . Deste modo,  $b(r)$  seria não regular em  $r = 0$ . Tal divergência é um artefato produzido por termos desprezados o núcleo do vórtice. Fisicamente, a uma distância da ordem do raio do núcleo,  $\xi$ ,  $|\psi(\mathbf{r})|^2$  cai a zero. Isso introduz um *cutoff* (truncamento) em  $r \sim \xi$  que elimina a divergência em  $b(r)$ . Assim, o chamado limite de London, no qual se baseia a abordagem que levou à Eq. (2.29), corresponde a termos  $r \gg \xi$  e  $\lambda \gg \xi$ .

Nesta abordagem, a energia de linha do vórtice,  $\epsilon_v$ , é dada apenas pelas contribuições da energia cinética das correntes e a energia do campo magnético gerado pelo vórtice. Assim, integrando estas energias no plano  $xy$ , excluindo a área correspondente ao núcleo do vórtice, temos

$$\epsilon_v = \frac{1}{2\mu_0} \int_{r>\xi} d\mathbf{r} (\lambda^2 |\nabla \times \mathbf{b}|^2 + b^2). \quad (2.30)$$

Usando a identidade vetorial  $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}$ , onde  $\mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{b}$ , esta integral pode ser desmembrada em dois termos e a Eq. (2.30) pode ser reescrita como:

$$\epsilon_v = \frac{1}{2\mu_0} \int_{r>\xi} d\mathbf{r} (\mathbf{b} + \lambda^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} + \frac{1}{2\mu_0 \lambda^2} \oint d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{b} \times \nabla \times \mathbf{b}) \quad (2.31)$$

Usando a Eq. de London (2.27), vemos que a primeira integral se anula, já que o núcleo do vórtice é excluído. A segunda integral é tomada sobre dois caminhos circulares, um de raio infinito e outro de raio igual a  $\xi$ , ambos centrados no núcleo do vórtice. Assim, ficamos apenas com a segunda integral que resulta em

$$\epsilon_v = \frac{\lambda^2}{2\mu_0} \left[ b \frac{db}{dr} 2\pi r \right]_{r=\xi} - \left[ b \frac{db}{dr} 2\pi r \right]_{r=\infty}. \quad (2.32)$$

O segundo termo se anula, pois  $b(r \rightarrow \infty) = 0$ . Para obter o primeiro termo, usamos a aproximação assintótica de (2.29) para  $r \ll \lambda$ , i.e.,  $b(r) \approx \frac{p\Phi_0}{2\pi\lambda^2} (\ln \frac{r}{\lambda} + 0,12)$ . Assim, temos, finalmente,

$$\epsilon_v \approx \frac{\epsilon}{2} p^2 \ln \kappa = \frac{p^2 \Phi_0^2}{4\pi\mu_0 \lambda^2} \ln \kappa, \quad (2.33)$$

Aqui, definimos também uma importante escala de energia,  $\epsilon$ . Note que  $\epsilon_v$  é proporcional a  $p^2$ . Assim, a existência de um vórtice com 2 quanta de fluxo é energeticamente desfavorável em relação a termos dois vórtices com um quantum cada um. Como veremos a seguir, isso é verdade mesmo considerando a energia de interação entre os vórtices.

### 2.2.5 Interações entre vórtices

Considere dois vórtices retilíneos paralelos, um localizado no ponto  $\mathbf{r}_i$  e o outro em  $\mathbf{r}_l$ . O vórtice  $i$  “sente” a presença do vórtice  $l$  devido à distribuição local de corrente  $\mathbf{j}_s^{(l)}$  gerada por  $l$  e vice-versa. Como um vórtice é essencialmente uma linha de fluxo magnético, ele sente uma força de Lorentz devido à corrente do outro vórtice que flui em sua posição. Assim o vórtice  $i$  sentirá uma força por

unidade de comprimento dada por

$$\mathbf{f}_L^{(i)} = \mathbf{j}_s^{(l)}(\mathbf{r}_i) \times (\Phi_0 \hat{z}) \quad (2.34)$$

A corrente gerada por um vórtice é  $\mathbf{j}_s = \nabla \times \mathbf{b}$ . Como  $\mathbf{b} = b(r)\hat{z}$ , temos  $\mathbf{j}_s = -(\partial b/\partial r)\hat{\phi}$ . Logo, temos

$$\mathbf{f}_L^{(i)} = \hat{r}_{ij} \Phi_0 \frac{\partial b^{(l)}(\mathbf{r}_i)}{\partial r_i} = \frac{\Phi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda^3} K_1(r_{ij}/\lambda), \quad (2.35)$$

onde  $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$  e  $K_1(r)$  é a função de Bessel modificada de 1ª ordem. Usando a primeira igualdade de (2.35), podemos identificar a energia de interação como sendo

$$E_{vv}(r_{ij}) = \Phi_0 b(r_{ij}) = \frac{\Phi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda^2} K_0(r_{ij}/\lambda). \quad (2.36)$$

Uma maneira mais formal, porém mais trabalhosa, de obter esta energia de interação é integrando as energias cinética e magnética no plano  $xy$ , tal como fizemos para o cálculo da energia de linha. Mas aqui, a área de integração deve excluir os dois núcleos correspondentes aos vórtices  $i$  e  $j$ . O resultado é a energia total do sistema, i.e.,  $E = 2\epsilon_v + E_{vv}(r_{ij})$  (de Gennes, 1966, cf.).

### 2.2.6 Estrutura de um vórtice em duas dimensões

Em filmes finos, com espessura  $d \ll \lambda$ , campos e correntes são praticamente constantes ao longo da espessura. Como, neste caso, os vórtices são objetos essencialmente pontuais, seu campo magnético se distribui tridimensionalmente fora do filme. Assim é mais conveniente escrevermos a equação de London em termos do potencial vetor e da corrente, já que estes estão confinados no plano do filme. Para isso, definimos um campo vetorial  $\mathbf{S}$  por  $\nabla \times \mathbf{S} = \Phi_0 \boldsymbol{\nu}$  e reescrevemos a Eq. (2.27) como

$$\lambda^2 \mu_0 \mathbf{j} + \mathbf{A} = \mathbf{S} = \frac{\Phi_0}{2\pi r}, \quad (2.37)$$

onde na última igualdade usamos a identidade  $\nabla \times (1/r) = \hat{\theta} 2\pi \delta(r)$ . Tomando a

média na espessura do filme, obtemos

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0 \Lambda} (\mathbf{S} - \mathbf{A}), \quad (2.38)$$

onde  $\mathbf{J} = \int dz \mathbf{j} = \mathbf{j}d$  é a corrente lamelar e  $\Lambda = \lambda^2/d$  é o comprimento de penetração efetivo. Usando  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}$ , obtemos uma equação para o potencial vetor

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{\delta(z)}{\Lambda} \mathbf{A} = \frac{\delta(z)}{\Lambda} \mathbf{S}. \quad (2.39)$$

Esta equação pode ser resolvida pelo método de transformadas de Fourier, embora a resolução seja um pouco mais intrincada que no caso 3D (de Gennes, 1966). A solução para a corrente lamelar no espaço de Fourier é

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\Lambda} \mathbf{S}(\mathbf{q}) \frac{2\Lambda q}{1 + 2\Lambda q} = \frac{\Phi_0}{\Lambda} \frac{\hat{z} \times \mathbf{q}}{q^2 + q(2\Lambda)^{-1}}, \quad (2.40)$$

onde  $\mathbf{S}(\mathbf{q}) = i\Phi_0 \frac{\hat{z} \times \mathbf{q}}{q^2}$  é a transformada de Fourier de  $\mathbf{S}(r)$ . Esta é a famosa solução de Pearl (1964) para vórtices em duas dimensões.

A energia de interação entre dois vórtices Pearl a uma distância  $r$  um do outro é dada pela força de Lorentz  $\mathbf{F}_L(r) = \Phi_0 \mathbf{J}(r) \times \hat{z}$  (note que aqui a força é integrada sobre o comprimento do vórtice). No espaço de Fourier, temos

$$\mathbf{F}_L(\mathbf{q}) = \Phi_0 \mathbf{J}(\mathbf{q}) \times \hat{z} = i\mathbf{q} \frac{\Phi_0^2}{\Lambda} \frac{1}{q^2 + q(2\Lambda)^{-1}} \quad (2.41)$$

A energia  $E_{vv}(\mathbf{q})$  de interação entre os dois vórtices pode ser dada por  $\mathbf{F}_L(\mathbf{q}) = -i\mathbf{q}E_{vv}(\mathbf{q})$ . Assim, podemos identificar  $E_{vv}(\mathbf{q})$  como

$$E_{vv}(q) = \frac{\Phi_0^2}{\Lambda} \frac{1}{q^2 + q(2\Lambda)^{-1}}. \quad (2.42)$$

Para curtas distâncias,  $r \ll \Lambda$  ou  $q \gg \Lambda^{-1}$ , temos que  $\mathbf{J} \propto \mathbf{S}$ , ou seja

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(r) &= \frac{\mathbf{S}(r)}{\Lambda} = \hat{\theta} \frac{\Phi_0}{2\pi\Lambda r}, \\ E_{vv}(r) &= \frac{\Phi_0^2}{2\pi\Lambda} \ln\left(\frac{r}{\Lambda}\right). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Note que neste limite, os vórtices Pearl e os vórtices de Bessel [ou seja, aqueles dados pela Eq. (2.29)] têm essencialmente o mesmo potencial de interação.

### 2.2.7 Equação do movimento de um vórtice

Como vimos, a força de interação entre dois vórtices provém da corrente que um gera sobre o outro. A força de Lorentz que atua sobre um vórtice pode, em princípio, ser gerada por qualquer fonte de corrente, como uma corrente de transporte ou a corrente de blindagem nas proximidades da superfície do espécime supercondutor. Assim, a Eq. (2.34) pode ser generalizada para qualquer densidade de corrente superfluida  $\mathbf{j}_s$ .

Por outro lado, quando um vórtice se move, há uma força viscosa que se opõe ao seu movimento. Esta força resulta dos processos de espalhamento sofridos pelos elétrons normais no interior do núcleo. Note que aqui não estamos, ainda, falando de impurezas ou imperfeições no cristal hospedeiro. Estamos considerando um cristal perfeito. Estes processos de espalhamento são semelhantes aos que ocorrem em um metal normal. Descrevendo de maneira simplista, o núcleo do vórtice, como elétrons em um metal, se move em velocidade terminal, definida por um coeficiente de viscosidade  $\eta$ . Assim, a equação de movimento de um vórtice sob a ação de uma corrente  $\mathbf{j}_s$  seria

$$\eta\mathbf{v} = \mathbf{j} \times \hat{z}\Phi_0. \quad (2.44)$$

onde  $(-\eta\mathbf{v})$  é a força viscosa. Cabe aqui comentarmos que um vórtice de fluxo  $\Phi_0$  se movendo com velocidade  $\mathbf{v}$  induz um campo elétrico dado por  $\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v} = \frac{\Phi_0}{A}\hat{z} \times \mathbf{v}$ , onde  $A$  é a área da amostra no plano normal ao vórtice. Portanto, a Eq. (2.44) pode ser entendida como uma espécie de lei de Ohm. Fazendo  $\frac{\Phi_0}{A}\hat{z} \times (\dots)$  em cada membro de (2.44), de fato, temos

$$\mathbf{E} = \rho_{ff}\mathbf{j}, \quad \rho_{ff} = \frac{B\Phi_0}{\eta}. \quad (2.45)$$

$\rho_{ff}$  é conhecido como resistividade de *flux flow* (termo relacionado ao movimento contínuo do fluxo magnético). Assim, se tivermos um sistema de  $N$  vórtices se mo-

vendo com velocidade média  $\mathbf{v}$ , o espécime supercondutor se comporta como um condutor convencional de resistividade  $\rho_{ff} = n\Phi_0^2/\eta$ , onde  $n = N/A$  é a densidade de vórtices no sistema, e dissipando uma potência  $P_{\text{diss}} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{\rho_{ff}} E^2 = \eta v^2$ .

A derivação microscópica do coeficiente de fricção  $\eta$  é complexa, sendo, ainda hoje, um tema em aberto (veja, p.ex., Blatter et al. 1994, pg. 1143). Fenomenologicamente,  $\eta$  pode ser estimado por uma abordagem simplificada que considera que a dissipação decorre de um processo puramente resistivo no interior do núcleo. Tal abordagem foi utilizada por Bardeen & Stephen (1965), que obtiveram

$$\eta \simeq \frac{\Phi_0 B_c^2}{\rho_n}, \quad (2.46)$$

onde  $\rho_n$  é a resistividade no estado normal extrapolada para a temperatura de interesse.

A grosso modo, a teoria de Bardeen-Stephen deve ser válida no chamado limite sujo de um supercondutor, que corresponde a termos o livre caminho médio dos elétrons no núcleo do vórtice  $l \ll \xi$ . Neste caso, os processos dissipativos de espalhamento são dominantes. A maior parte das amostras supercondutoras encontra-se neste limite.

Uma terceira força que pode ser incorporada à equação do movimento dos vórtices é a força de ancoragem produzida por inhomogeneidades no material supercondutor. Normalmente, tais inhomogeneidades agem como potenciais atrativos para as linhas de vórtice, ou seja, como centros de ancoragem de vórtices. Assim, para “desancorar” um vórtice é necessária uma força maior que um certo valor crítico que depende da distribuição de centros de ancoragem ao longo da linha de vórtice. Esta força define a densidade de corrente crítica  $\mathbf{j}_c$  acima da qual o fluxo magnético começa a se mover no material supercondutor.

### 2.3 Fases termodinâmicas e dinâmicas de um sistema de vórtices

No limite de London, a rede de vórtices pode ser entendida como um cristal de simetria bidimensional cujos elementos constituintes são linhas elásticas, no caso

3D (monocristais, cerâmicas etc.), ou partículas essencialmente pontuais, no caso 2D (filmes finos ou, sob certas condições, supercondutores altamente anisotrópicos, como o BSCCO). Este cristal pode ter suas propriedades, como densidade e simetria, facilmente alteradas simplesmente mudando a intensidade e/ou a direção do campo externo. Assim, o sistema de vórtices é um dos poucos sistemas cristalinos em que o diagrama de fases termodinâmicas que relaciona a temperatura  $T$  e a densidade do cristal  $B$  é facilmente acessível. Além disso, como já mencionamos, este cristal (de vórtices) interage com um cristal hospedeiro (atômico) de tal modo que defeitos naturais ou artificiais no cristal hospedeiro podem mudar dramaticamente as propriedades dinâmicas e termodinâmicas da rede de vórtices.

Nesta seção, estudaremos o diagrama de fases termodinâmicas da rede de vórtices, discutindo brevemente os efeitos de desordem. Analisaremos também as fases dinâmicas que um sistema de vórtice pode adquirir quando submetidos a uma corrente motriz.

### 2.3.1 Elasticidade da rede de vórtices

Consideremos uma rede de vórtices em um supercondutor isotrópico infinito, e seja  $\{\mathbf{R}_i\}$  o conjunto das posições de equilíbrio dos vórtices no plano  $xy$  (os vórtices estando paralelos ao eixo  $z$ ). Distorções de uma linha de vórtice  $i$  são definidas pelo campo de deslocamento  $\mathbf{u}_i(z)$ . Na aproximação elástica linear, o excesso de energia produzido por pequenas deformações da rede de vórtices em relação ao seu estado de equilíbrio é quadrática em  $\mathbf{u}_i(z)$ . É conveniente expressarmos esta energia em termos das componentes de Fourier de  $\mathbf{u}_i(z)$ , definidas por

$$u(\mathbf{q}, k_z) = \frac{\Phi_0}{B} \sum_i \int dz \mathbf{u}_i(z) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_i} e^{-ik_z z}, \quad (2.47)$$

onde  $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ . Assim a forma quadrática mais geral para a energia é

$$E_{\text{elast.}} = \frac{1}{2} \int \frac{d^2 k_z}{2\pi} \int_{ZB} \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} C_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, k_z) u_\alpha(\mathbf{q}, k_z) u_\beta^*(\mathbf{q}, k_z), \quad (2.48)$$

onde a segunda integral é tomada sobre a primeira zona de Brillouin (ZB) da

rede recíproca da rede triangular de vórtices e  $\alpha, \beta = x, y$ . Os coeficientes  $C_{\alpha\beta}$  são os elementos de uma matriz elástica que é real e simétrica no espaço de Fourier. Na aproximação contínua não-local (Blatter et al., 1994; Brandt, 1995), esta matriz está relacionada com os módulos elásticos de compressão uniaxial,  $c_{11}$ , cisalhamento,  $c_{66}$ , e entortamento,  $c_{44}$ , por

$$C_{\alpha\beta} = (c_{11} - c_{66})q_\alpha q_\beta + \delta_{\alpha\beta}[c_{66}(q_x^2 + q_y^2) + c_{44}k_z^2]. \quad (2.49)$$

As deformações na rede de vórtices relacionadas a estes módulos elásticos estão ilustradas na Fig. 2.4.

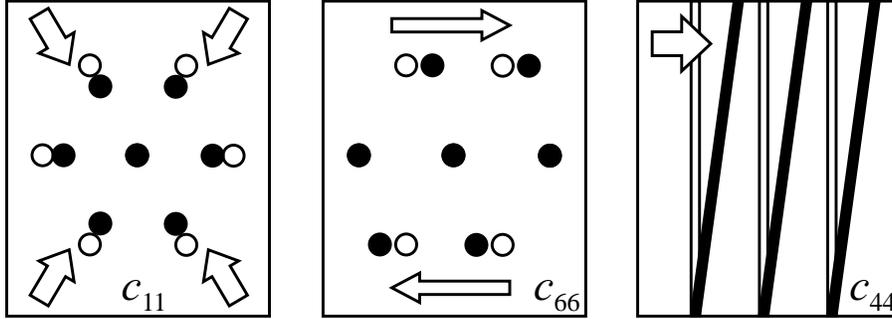


Figura 2.4: Três deformações diferentes na rede de vórtices correspondendo aos módulos elásticos de, da esquerda para a direita, compressão ( $c_{11}$ ), cisalhamento ( $c_{66}$ ) e entortamento ( $c_{44}$ ).

Devido à interação de longo alcance entre os vórtices, os módulos elásticos  $c_{11}$  e  $c_{44}$  são dispersivos, i.e., são funções de  $\mathbf{q}$  e de  $k_z$  dadas aproximadamente por

$$c_{11}(\mathbf{q}, k_z) \simeq c_{44}(\mathbf{q}, k_z) \simeq \frac{B^2}{\mu_0} \frac{1}{1 + \lambda^2(q^2 + k_z^2)}. \quad (2.50)$$

O módulo de cisalhamento  $c_{66}$ , no entanto, é essencialmente não-dispersivo e dado por

$$c_{66} \simeq \frac{\Phi_0 B}{16\pi\mu_0\lambda^2} = \frac{n_v \epsilon}{4}, \quad (2.51)$$

onde  $n_v$  é o número de vórtices por unidade de área.

Note que no limite  $\mathbf{q} \rightarrow 0$  e  $k_z \rightarrow 0$  temos  $c_{11} = c_{44} = B^2\mu_0^{-1} \gg c_{66}$ , o que caracteriza um sólido essencialmente incompressível. Assim, a dispersão nos

módulos de compressibilidade e de entortamento tornam a rede de vórtices mais “macia”. Para campos próximos de  $H_{c2}$  há uma redução considerável na densidade superfluida que deve ser levada em consideração. Tal redução renormaliza o comprimento de penetração  $\lambda$  para  $\lambda' = \lambda/\sqrt{1-b}$ , onde  $b = B/B_{c2}$ , causando uma forte diminuição dos módulos elásticos (Brandt, 1986, 1991).

### 2.3.2 Fusão da rede de vórtices

O derretimento da rede de vórtices tem sido extensivamente estudado ao longo das últimas décadas. Vários trabalhos teóricos (Hetzl et al., 1992; Sengupta et al., 1991) e experimentais (Charalambous et al., 1993; Safar et al., 1993, 1992; Zeldov et al., 1995) apresentam evidências de que a transição sólido-líquido em uma rede de vórtices é de primeira ordem. No entanto, uma teoria completa desta transição não foi ainda formulada.

Usando a descrição elástica, é possível estimar qualitativamente a curva de fusão  $T_f(B)$  de uma rede de vórtices. A estimativa é, geralmente, baseada no chamado critério de Lindemann (Lindemann, 1910), que assume que um cristal se torna instável em relação a flutuações térmicas quando a raiz do desvio quadrático médio da partícula,  $\sqrt{\langle u^2 \rangle}$ , excede uma fração  $c_L$  da constante de rede  $a$  do cristal. Em outras palavras, a temperatura de fusão pode ser definida por

$$\langle u^2(T_f) \rangle = c_L^2 a^2. \quad (2.52)$$

onde, empiricamente,  $c_L \sim 0,1-0,2$ . Simulações numéricas e vários experimentos têm demonstrado que o critério de Lindemann é bastante útil para estimar a forma da curva de fusão  $T_f(B)$  e são consistentes com um valor constante de  $c_L$  em uma ampla faixa de densidade de fluxo.

É preciso, no entanto, atentar para o fato de que a teoria elástica e o critério de Lindemann não podem dizer nada conclusivo a respeito da natureza da transição, visto que, na vizinhança da transição, a descrição elástica perde sua validade.

O método de estimar a temperatura de fusão da rede de vórtices usando o critério de Lindemann foi proposto inicialmente por Houghton, Pelcovits e

Sudbø (1989). Eles determinaram  $\langle u^2(T) \rangle$  usando a teoria elástica que descrevemos brevemente acima. Aqui, usaremos um modelo elástico mais simples proposto por Frey, Nelson e Fisher (1994) para estimar  $T_f(B)$ . Este modelo, denominado modelo *cage* (gaiola) considera as flutuações térmicas de uma única linha de vórtice interagindo elasticamente com seus vizinhos, que são considerados retos e fixos em suas posições de equilíbrio (veja Fig. 2.5). A temperatura de fusão é então estimada aplicando o critério de Lindemann ao desvio quadrático médio das flutuações do vórtice “engaiolado”.

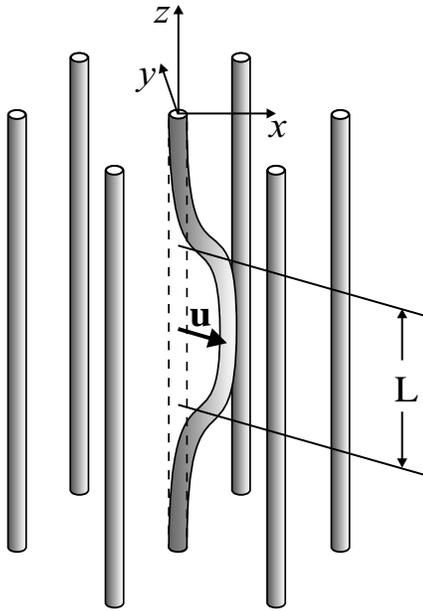


Figura 2.5: Representação do modelo *cage* 3D, onde uma linha de vórtice é deformada por efeito de flutuação térmica enquanto seus vizinhos permanecem em seus estados de equilíbrio. O sistema de coordenadas é mostrado.

Inicialmente, consideramos que flutuações térmicas causam uma excitação de comprimento  $\sim L$  na linha de vórtice. Este segmento é deslocado de sua posição de equilíbrio de um valor  $\mathbf{u}$ , cujo valor quadrático médio desejamos estimar. A origem do sistema de coordenadas é colocada na posição de equilíbrio do vórtice teste, direcionando o eixo  $z$  paralelamente à linha, como mostrado na Fig. 2.5. Os demais vórtices da rede produzem um potencial bidimensional que é essencialmente parabólico nas proximidades da posição de equilíbrio do vórtice teste, ou seja, o segmento deslocado do vórtice sente uma força restauradora  $\mathbf{F}_{rest.} \approx -\kappa\mathbf{u}L$ ,

onde  $\kappa$  é a constante elástica da força harmônica. Assim, temos uma energia

$$\Delta E_{int} \approx \frac{1}{2} \kappa u^2 \cdot L$$

associada à interação entre o segmento de vórtice e o restante da rede. A outra energia elástica envolvida é aquela correspondente à deformação da linha, ou seja, à *variação na auto-energia do vórtice*. Esta energia nada mais é do que a energia de linha  $\epsilon_v$  do vórtice multiplicada pela variação do seu comprimento, ou seja,

$$\Delta E_{auto} = \epsilon_v \left[ \int_0^L dz \sqrt{1 + \left( \frac{du}{dz} \right)^2} - L \right] \approx \frac{1}{2} \epsilon_v \int_0^L dz \left( \frac{du}{dz} \right)^2 \approx \frac{1}{2} \epsilon_v \frac{u^2}{L}$$

A variação total da energia elástica é, então, dada aproximadamente por

$$\Delta E_{el} = \Delta E_{int} + \Delta E_{auto} \approx \frac{1}{2} \kappa u^2 L + \frac{1}{2} \epsilon_v \frac{u^2}{L} \quad (2.53)$$

O valor de  $L$  que minimiza esta energia é  $L = (\epsilon/\kappa)^{1/2}$ , o que produz  $\Delta E_{el} = \sqrt{\kappa\epsilon} u^2$ . A média desta energia deve ser comparável com a energia térmica, i.e.  $\langle \sqrt{\kappa\epsilon} u^2 \rangle \sim k_B T$ . Assim, temos finalmente

$$\langle u^2 \rangle \approx \frac{k_B T}{\sqrt{\kappa\epsilon}}. \quad (2.54)$$

Agora, podemos aplicar o critério de Lindemann e obter a temperatura de fusão

$$k_B T_f \approx c_L^2 a^2 \sqrt{\kappa\epsilon}. \quad (2.55)$$

Para obtermos a curva  $T_f(B)$  resta-nos calcular  $\kappa(B)$ . Uma boa aproximação para  $\kappa$  é dada por (Frey et al., 1994)

$$\kappa \simeq \left[ \frac{\partial^2 E_{vv}(r)}{\partial r^2} \right]_{r=a}. \quad (2.56)$$

Para campos intermediários,  $\mu_0 H_{c1} \ll B \ll \mu_0 H_{c2}$  (ou  $\xi \ll a \ll \lambda$ ), as interações são logarítmicas, sendo dadas por  $E_{vv} = \epsilon \ln(r/\lambda)$ , onde  $\epsilon$  está definida na Eq. (2.33). Assim, temos simplesmente  $\kappa = \epsilon/a^2$ , o que produz uma curva de

fusão dada por

$$k_B T_f(B) \approx c_L^2 \epsilon a = \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \frac{c_L^2 \Phi_0^{5/2}}{4\pi \lambda^2 B^{1/2}}. \quad (2.57)$$

Na segunda igualdade, usamos  $B = n\Phi$ , onde  $n = (\frac{\sqrt{3}}{2}a^2)^{-1}$  para uma rede triangular. Usualmente, esta equação é invertida para obter  $B_f(T)$ . Note que  $B_f(T)$  é uma função decrescente, mesmo considerando a dependência explícita de  $\lambda(T)$ . Por exemplo, na aproximação de campo médio, válida nas proximidades de  $T_c$ ,  $\lambda^{-2} \propto (T_c - T)$ , de modo que  $B_f \propto (T_c - T)^2$ . Para baixas temperaturas,  $\lambda$  é essencialmente constante e  $B_f(T) \propto T^{-2}$ .

No limite de campos baixos,  $B \lesssim \mu_0 H_{c1}$  (ou  $a \gtrsim \lambda$ ), a energia de interação decai exponencialmente como  $E_{vv} = \epsilon \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda}{r} e^{-r/\lambda}$ . Com os vórtices interagindo apenas fracamente,  $\kappa$  é bastante reduzido sendo dado aproximadamente por  $\kappa \approx \frac{\epsilon}{a^2} \left( \frac{a}{\lambda} \right)^{3/4} e^{-a/\lambda}$ . Assim, a temperatura de fusão é

$$k_B T_f \approx c_L^2 \epsilon a \left( \frac{a}{\lambda} \right)^{3/4} e^{-a/\lambda}. \quad (2.58)$$

Note que esta equação produz  $T_f(B)$  (assim como  $B_f(T)$ ) monotonicamente crescente. Este comportamento é responsável pela reentrância observada experimentalmente nos diagramas  $B-T$  de supercondutores de alta  $T_c$  para campos baixos. Um esboço deste diagrama é mostrado na Fig. 2.6 (a).

### 2.3.3 Fusão de vórtices na presença de desordem

O diagrama de fases da rede de vórtices pode ser sensivelmente alterado devido ao efeito de desordem no cristal hospedeiro. Para desordem fraca, a fase cristalina dos vórtices dá lugar a uma fase sólida conhecida como *vidro de Bragg*. Esta fase foi primeiramente proposta por Giamarchi & Le Doussal (1995) e posteriormente corroborada por outros cálculos analíticos (Fisher, 1997; Kierfeld et al., 1997) e por simulações numéricas (Gingras & Huse, 1996; van Otterlo et al., 1998). Em um vidro de Bragg, o ordenamento translacional de longo alcance é destruído mas a ordem topológica é preservada, ou seja, a desordem não é suficiente para gerar

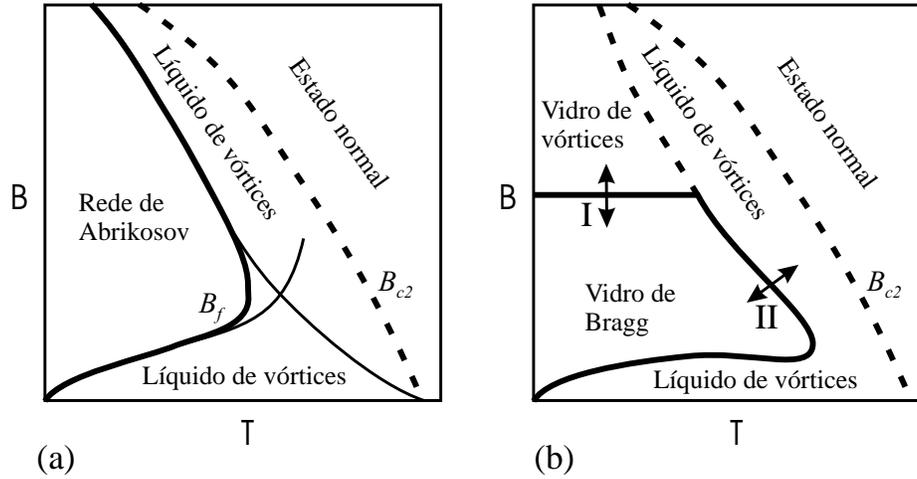


Figura 2.6: Diagramas de fase  $B - T$  para um sistema de vórtices em cristais perfeitos (a) e com desordem (b). As linhas contínuas indicam transições de fase abruptas, de primeira ordem, enquanto que as linhas intermitentes indicam transições contínuas. As linhas contínuas finas em (a) correspondem às curvas  $B_f(T)$  nos limites  $\mu_0 H_{c1} \ll B \ll \mu_0 H_{c2}$  e  $B \lesssim \mu_0 H_{c1}$  estudados acima pelo modelo *cake*. As setas em (b) indicam fusão induzida por desordem (I) e fusão induzida termicamente (II).

defeitos topológicos, como deslocamentos. O nome desta fase está relacionado ao fato de que, apesar de ser uma fase vítrea, seu espectro de difração (acessível, e.g., por experimentos de difração de nêutrons) apresenta picos de Bragg. Estes picos divergem algebricamente, em contraste com os picos de um cristal convencional que divergem exponencialmente. Vários experimentos, como decoração magnética em monocristais de  $\text{NbSe}_2$  (Pardo et al., 1998) e de BSCCO (Barnejee et al., 2003) e difratometria de nêutrons em monocristais de BSCCO (Klein et al., 1998), têm mostrado evidências de que a teoria de vidro de Bragg é válida para cristais supercondutores com baixa concentração de defeitos.

Com o aumento dos efeitos de desordem do cristal hospedeiro, o vidro de Bragg pode “derreter” em um vidro de vórtices amorfo, i.e., topologicamente desordenado. Como o efeito de desordem é, em geral, proporcional à densidade de vórtices, esta transição pode ocorrer com o aumento isotérmico da densidade de vórtices. Esta transição e a transição vidro de Bragg–líquido de vórtices são provavelmente de primeira ordem, como recentemente demonstrado em experimentos

(Avraham et al., 2001) e simulações numéricas (Olson et al., 2003). Um esboço do diagrama de fases de vórtices em supercondutores desordenados é mostrado na Fig. 2.6 (b).

### 2.3.4 Vórtices em movimento: plasticidade e recristalização

A desancoragem da rede de vórtices em um supercondutor com desordem submetido a uma corrente da ordem de  $j_c$  é um processo ainda pouco conhecido. A complexidade se deve ao fato de que a ancoragem não é homogênea, ou seja, há vórtices mais fortemente ancorados que outros. Algumas simulações numéricas (Olson et al., 1998; Reichhardt et al., 2001; Ryu et al., 1996) têm traçado um panorama em que o limiar da desancoragem é caracterizado por deformações plásticas da rede de vórtices, onde os vórtices mais fracamente ancorados começam a se mover primeiro, destruindo a ordem da rede.

Nos primeiros estágios do movimento, os primeiros vórtices desancorados fluem em canais “fáceis” desenhados pela estrutura desordenada dos vórtices ainda ancorados. Este movimento é semelhante ao movimento de filetes de água descendo uma superfície rugosa inclinada. À medida que a força de Lorentz aumenta, mais vórtices são desancorados até que todos se movem de maneira desordenada, como um fluido. Ocorre que, para correntes ainda mais altas, os vórtices se movem mais rápido, passando a sentir menos a rugosidade do potencial de ancoragem. Conseqüentemente, a velocidades suficientemente altas, onde o efeito do potencial é pequeno, os vórtices tendem a se reordenar em uma rede triangular, semelhante à rede de equilíbrio termodinâmico. Esta recristalização da rede de vórtices foi sugerida pela primeira vez por Schmid & Hauger (1973).

Koshelev & Vinokur (1994) introduziram o conceito de temperatura de “chacoalhamento”,  $T_{sh}$ , para uma rede de vórtices se movendo sobre um potencial de desordem em alta velocidade. Esta temperatura resulta do efeito do ruído provocado pela passagem da rede de vórtices pela rugosidade do meio (correspondendo à primeira ordem da aproximação perturbativa) e, adicionada à temperatura  $T$  do cristal supercondutor, é capaz de fundir a rede de vórtices. Koshelev e Vinokur

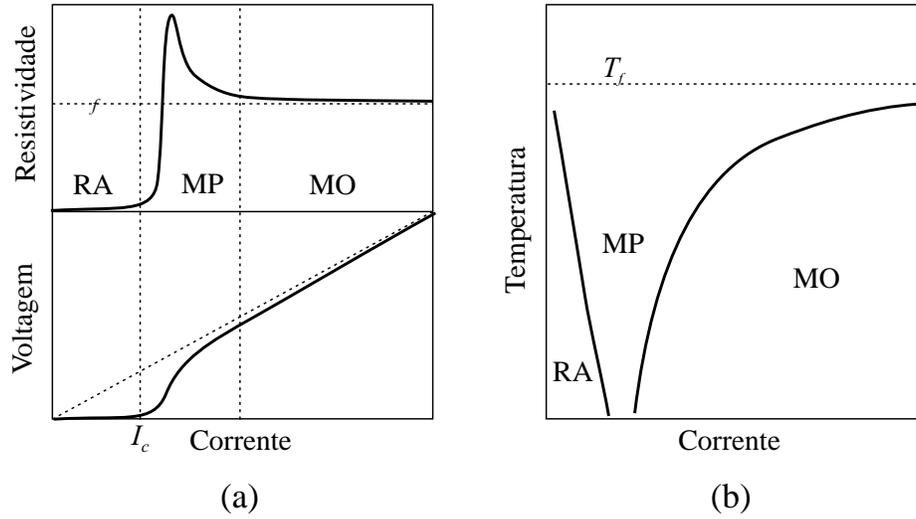


Figura 2.7: (a) Curvas características de tensão–corrente (painel superior) e resistividade–corrente (inferior) típicas de um supercondutor desordenado. O sinal de tensão é proporcional à velocidade média dos vórtices no interior do espécime. A queda abrupta do sinal de resistividade é usualmente associada a uma transição de uma fase desordenada para uma fase ordenada. (b) Diagrama de fases dinâmicas esquemático baseado em teorias recentes sobre fases dinâmicas de vórtices. Em baixas temperaturas e correntes, a rede de vórtices encontra-se ancorada (RA). Aumentando a corrente, os vórtices passam por uma fase de movimento plástico (MP) e, em seguida, cristalizam em uma fase de movimento ordenado (MO). A curva de recristalização (ou fusão dinâmica) assintota a temperatura de fusão de equilíbrio para correntes altas.

mostraram que  $T_{\text{ch}}$  depende da velocidade média dos vórtices como

$$T_{\text{ch}} = \frac{n_v \gamma_U}{\eta r_p^3} \frac{1}{v}, \quad (2.59)$$

onde  $n_v$  é a densidade de vórtices,  $\gamma_U$  é uma constante relacionada à correlação do potencial aleatório e  $r_p$  é o tamanho característico dos centros de ancoragem. Este resultado só é válido para a fase cristalina, onde a teoria elástica se aplica. A fase cristalina se torna instável quando  $T + T_{\text{ch}} = T_f$ . Esta relação define a velocidade de cristalização, que, usando a Eq. (2.59), será dada por

$$v_{\text{cr}} = \frac{n_v \gamma_U}{\eta r_p^3} \frac{1}{T_f - T}. \quad (2.60)$$

Na Fig. 2.7(b), mostramos um esboço do diagrama de fases dinâmicas, que pode ser obtido através desta equação (válida para velocidades altas) e de simulações numéricas.

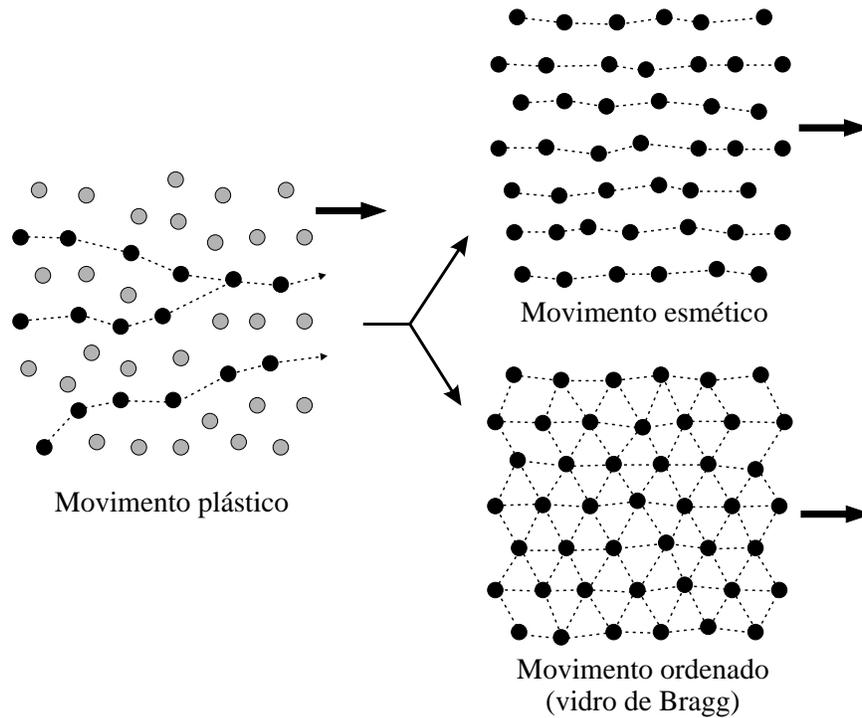


Figura 2.8: Algumas fases dinâmicas possíveis para um sistema de vórtices movidos por uma corrente de transporte. A fase plástica desordenada pode se ordenar em uma fase esmética, com ordem apenas na direção perpendicular ao movimento, ou em uma fase topologicamente ordenada, o vidro de Bragg.

Mais recentemente, Giamarchi & Le Doussal (1996, 1997, 1998) mostraram que a fase cristalina prevista por Koshelev & Vinokur corresponde, na verdade a um vidro de Bragg. Várias simulações numéricas (Kolton et al., 2001; Olson et al., 1998; Reichhardt et al., 2001; Ryu et al., 1996) e alguns experimentos (Pardo et al., 1998) sustentam a existência desta fase em uma certa faixa de corrente aplicada e temperatura. As simulações citadas acima prevêem também a existência de uma fase esmética onde os vórtices se ordenam apenas na direção perpendicular à do movimento (veja Fig. 2.8).

## Capítulo 3

# A rede de vórtices em filmes mesoscópicos

As propriedades da rede de vórtices podem mudar drasticamente quando uma ou mais dimensões do espécime supercondutor são reduzidas a tamanhos mesoscópicos. Para amostras em que uma ou mais dimensões são comparáveis ao comprimento de penetração,  $\xi$ , não só a rede de vórtices mas a própria estrutura do núcleo do vórtice pode ser alterada de modo a favorecer a formação de estruturas anômalas, como moléculas de vórtices (Chibotaru et al., 2000, 2001; Mel'nikov et al., 2002) e vórtices gigantes, com mais de um quantum de fluxo (Deo et al., 1997; Fink & Presson, 1966; Moshchalkov et al., 1997; Saint-James, 1965).

Aqui, no entanto, estamos interessados em sistemas cujas dimensões sejam comparáveis com o comprimento de penetração,  $\lambda$ , de modo que o núcleo do vórtice pode ser, *a priori*, desprezado (supondo que o supercondutor seja altamente tipo II). Assim, o efeito de dimensionalidade se restringe às interações dos vórtices entre si e com o campo externo. A situação mais simples que pode ser estudada é aquela em que apenas uma das dimensões do espécime é mesoscópica, como o raio de um cilindro ou a espessura de um filme. Se o campo é aplicado paralelamente ao eixo do cilindro ou ao plano do filme, a dimensão finita  $D$  tem um efeito confinatório sobre uma eventual rede de vórtices que venha a se formar. Se  $D \gg \lambda$  é esperado que a rede de vórtices se comporte como em um sistema infinito, com propriedades semelhantes às que estudamos no Cap. 2. Se  $D \sim \lambda$ , a interação dos vórtices com as superfícies pode dominar e dar origem a novas fases

da rede de vórtices.

No caso específico de filmes mesoscópicos, os vórtices penetram no filme paralelamente às suas superfícies e ao campo magnético externo e, devido a uma forte pressão das correntes de blindagem, se acomodam inicialmente no plano equatorial do filme, onde minimizam sua energia. À medida que o campo aumenta, uma rede de vórtices paralelos às superfícies é formada. Esta rede, como predito por Shmidt (1969, 1971) e Rusinov & Mkrtchan (1971), é essencialmente triangular. Em experimentos realizados em super-redes de Nb/Cu com espessura  $D \approx \lambda$ , Guimpel et al. (1988) observaram um pico extra na curva de magnetização em função do campo magnético aplicado um pouco acima do campo de penetração dos vórtices. Partindo de uma minimização da energia livre de Gibbs, eles mostraram que o pico correspondia a uma transição de fase onde a cadeia de vórtices estabilizada no centro do filme se dividia em duas cadeias. Posteriormente, observou-se, teórica (Brongersma et al., 1993; Carneiro, 1998; Mawatari & Yamafuji, 1994) e experimentalmente (Brongersma et al., 1993; Ziese et al., 1996), que em filmes finos, com  $D \leq \lambda$ , estas duas cadeias se quebravam em três cadeias para um campo mais alto gerando um terceiro pico na curva de magnetização, e novas transições, envolvendo a criação de uma nova cadeia, ocorriam à medida que o campo aumentava ainda mais. Assim, ficou estabelecido que, para filmes finos, há uma seqüência de transições estruturais na rede de vórtices onde o número de cadeias de vórtices é incrementado em uma unidade. Estas transições ocorrem em valores específicos de campo, os chamados campos de *matching*, e podem ser identificadas na curva de magnetização de equilíbrio como uma série de picos nestes valores. Este efeito *matching* é semelhante ao que ocorre em cilindros mesoscópicos de seção reta circular (Akkermans et al., 2001; Venegas & Sardella, 1998) ou retangular (Sardella et al., 1999), com a diferença de que nestes dois casos a rede de vórtices é completamente confinada.

Estados de equilíbrio, no entanto, nem sempre são possíveis de serem obtidos experimentalmente. Recentes avanços nas técnicas de nanofabricação têm levado à preparação de amostras mesoscópicas com bordas e superfícies praticamente livres de imperfeições (Geim et al., 1997; Moshchalkov et al., 1995). Para estes

sistemas, um ciclo de magnetização convencional é caracterizado por uma histerese (Geim et al., 2000, 1997), mesmo estas amostras sendo extremamente puras. Esta histerese está relacionada com uma forte barreira de superfície que atrasa a entrada de vórtices, quando o campo externo é aumentado, e atrasam sua saída, quando o campo é decrescido (Akkermans et al., 2001; de Souza Silva & Aguiar, 2001; de Souza Silva et al., 2001; Peeters et al., 2002; Schweigert et al., 1998). Os estados obtidos são, portanto, estados metaestáveis.

Neste capítulo estudaremos a estrutura da rede de vórtices em filmes mesoscópicos de espessura  $\lambda \leq D \leq 10\lambda$ . Os objetivos principais são dois: (i) determinar o limite da razão  $D/\lambda$  em que o efeito matching discutido acima domina a curva de magnetização e a estrutura da rede de vórtices; e (ii) estudar o papel da barreira de superfície na formação de estados meta-estáveis. Iniciaremos descrevendo alguns conceitos básicos sobre a barreira superficial de Bean–Livingston. Em seguida, exporemos um cálculo para a barreira superficial em filmes de espessura arbitrária. Usamos estes resultados para simular a penetração e a dinâmica de vórtices no interior dos filmes através de um algoritmo de dinâmica de Langevin.

## 3.1 A barreira superficial de Bean-Livingston

### 3.1.1 Interação de um vórtice com uma interface supercondutor–isolante

Quando um vórtice se encontra próximo a uma interface supercondutor–vácuo (ou isolante), as condições de contorno nesta interface impõem severas modificações na distribuição de corrente que circunda o vórtice. Assim, para entender como os vórtices interagem entre si e com as correntes de blindagem da amostra, é necessário calcular como estas interfaces modificam a estrutura dos vórtices e sua auto-energia.

O caso mais simples que pode ser estudado é a interação de um vórtice retilíneo com uma superfície plana (Bean & Livingston, 1964; de Gennes, 1966). Este problema é relevante para amostras macroscópicas, ou seja, cujas interfa-

ces encontram-se separadas umas das outras por distâncias muito maiores que o comprimento de penetração  $\lambda$ , e sem efeito de demagnetização (que, em geral, “entorta” a linha de vórtice). Este tipo de amostra pode ser modelado por um supercondutor semi-infinito ocupando o espaço  $x > 0$  (a região  $x < 0$  correspondendo ao vácuo). Estamos interessados em obter as distribuições locais de campos e correntes geradas por um vórtice localizado a uma distância  $x_i$  da superfície plana, onde  $x_i > \xi$ , e alinhado com o eixo  $z$ . Escolhemos a origem do eixo  $y$  de modo que  $y_i = 0$ . A condição de contorno que deve ser satisfeita é que a densidade de corrente não pode ter componente normal à interface supercondutor-vácuo. Analogamente ao problema eletrostático de uma linha de carga diante de um plano condutor aterrado, este problema pode ser resolvido pelo método de imagens (Jackson, 1999). Assim, a condição de contorno deve ser garantida se colocarmos um vórtice imagem, de vorticidade oposta à do vórtice real, na posição simetricamente oposta, i.e, em  $r'_i = (-x_i, 0)$ .

O campo local resultante deverá então ser a soma dos campos gerados pelo vórtice em  $(x_i, y_i)$  e sua imagem em  $(-x_i, y_i)$ :

$$b_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \left[ K_0\left(\frac{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}}{\lambda}\right) - K_0\left(\frac{\sqrt{(x+x_i)^2 + (y-y_i)^2}}{\lambda}\right) \right], \quad (3.1)$$

Observe que o campo local produzido pelo vórtice é essencialmente nulo quando  $x_i \rightarrow 0$  e tende ao campo de um vórtice isolado quando  $x_i \gg \lambda$ . Assim, o fluxo magnético portado pelo vórtice depende da sua distância à superfície e é sempre menor ou igual a  $\Phi_0$ . Este fluxo pode ser obtido integrando o campo local dado pela Eq. (3.1). É mais conveniente, no entanto, usar a transformada de Fourier de (3.1). Usando a Eq. (2.28), temos

$$b_v(\mathbf{q}, \mathbf{r}_i) = \frac{\Phi_0}{4\pi^2\lambda^2} \frac{e^{iq_x x_i} - e^{-iq_x x_i}}{q^2 + \lambda^{-2}}, \quad (3.2)$$

Assim, o fluxo total do vórtice é dado por

$$\begin{aligned}\Phi(x_i) &= \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy b_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \\ &= \frac{\Phi_0}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy \int_{-\infty}^\infty dq_x \int_{-\infty}^\infty dq_y \frac{e^{iq_x x_i} - e^{-iq_x x_i}}{q^2 + \lambda^{-2}} e^{i(q_x x + q_y y)}\end{aligned}$$

Usando a  $\int_{-\infty}^\infty dy e^{iq_y y} = 2\pi\delta(q_y)$ , obtemos

$$\Phi(x_i) = \frac{\Phi_0}{2\pi} \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dq_x \frac{e^{iq_x x_i} - e^{-iq_x x_i}}{q_x^2 + \lambda^{-2}} e^{iq_x x}.$$

Agora, usando a identidade

$$\int_{-\infty}^\infty dk \frac{e^{-ikr}}{a^2 + k^2} = \frac{\pi}{a} e^{-|ar|},$$

obtemos que o fluxo efetivo carregado por um vórtice a uma distância  $x_i$  da superfície de um supercondutor semi-infinito é

$$\Phi(x_i) = \Phi_0(1 - e^{-x_i/\lambda}). \quad (3.3)$$

Naturalmente, é esperado que a auto-energia,  $E_{auto}$ , do vórtice também seja dependente da posição.  $E_{auto}(x_i)$  pode ser dado por

$$E_{auto}(x_i) = \frac{1}{2} \Phi_0 b_v(\mathbf{r} = \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i).$$

Aqui, usaremos um procedimento de truncamento para levar em conta o núcleo do vórtice. Este procedimento consiste simplesmente em substituir  $r - r_i$  por  $\sqrt{(r - r_i)^2 + 2\xi^2}$ , ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned}x - x_i &\rightarrow \sqrt{(x - x_i)^2 + \xi^2} \\ y - y_i &\rightarrow \sqrt{(y - y_i)^2 + \xi^2}\end{aligned} \quad (3.4)$$

Este procedimento, proposto por Clem (1975), corresponde à solução exata das

equações de Ginzburg–Landau no limite  $\xi \ll \lambda$ . Assim, obtemos

$$E_{auto}(x_i) = -\frac{\epsilon}{2} \left[ K_0\left(\frac{2x_i}{\lambda}\right) - K_0\left(\frac{2\xi}{\lambda}\right) \right], \quad (3.5)$$

onde  $\epsilon = \Phi_0^2/2\pi\lambda^2$ . Como  $K_0(x)$  é uma função decrescente, percebe-se de imediato que o vórtice diminui monotonicamente sua energia quando se aproxima da superfície, ou seja, *o vórtice é atraído pela superfície*. A força de atração é

$$\mathbf{F}_{auto} = -\hat{x} \frac{\partial E_{auto}}{\partial x_i} = -\hat{x} \frac{\epsilon}{\lambda} K_1\left(\frac{2x_i}{\lambda}\right). \quad (3.6)$$

### 3.1.2 A barreira superficial de Bean-Livingston

Para que seja permitida a entrada de um vórtice no espécime, é necessária a ação de um agente externo. Tal agente pode ser, e.g., um campo magnético  $H$  aplicado paralelamente à superfície. Consideremos que este campo está alinhado com o eixo  $z$  (e, portanto, com o vórtice). Neste caso, a solução da equação de London para a penetração do campo externo resulta em  $b_M(x) = \mu_0 H e^{-x/\lambda}$ , que corresponde ao campo Meissner gerado pelas correntes de blindagem. A energia total do vórtice é então a soma da sua auto-energia com a energia de interação entre o vórtice e o campo Meissner  $b_M(x)$ , ou seja

$$\begin{aligned} E(x_i) &= E_{auto}(x_i) + \frac{\Phi_0}{\mu_0} b_M(x_i) \\ &= -\frac{\epsilon}{2} \left[ K_0\left(\frac{2x_i}{\lambda}\right) - K_0\left(\frac{2\xi}{\lambda}\right) \right] + \Phi_0 H e^{-x/\lambda}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Esta energia, a menos de uma constante, pode ser identificada como a energia livre de Gibbs por unidade de comprimento (veja, e.g., de Gennes, 1966, pgs. 76-79). Aqui, a energia de Gibbs é o potencial termodinâmico relevante pois o campo externo é considerado constante, i.e., o sistema está em contato com um “reservatório” de campo magnético. Assim, o sistema encontra seu estado de equilíbrio quando minimiza esta energia. Para campos baixos,  $E(x_i)$  tem mínimo apenas em  $x_i = \xi$ . Como  $\xi$  é o limite da resolução espacial do modelo de London,

isso equivale a dizer que o mínimo do vórtice é na superfície, o que corresponde, na prática, à inexistência de vórtices no sistema. Um mínimo global para  $E(x_i)$  no interior do espécime só existe para campos suficientemente altos e a posição de mínimo corresponde a  $x_i = \infty$ , ou seja, a um ponto infinitamente profundo no interior do espécime supercondutor. Assim, o campo crítico acima do qual é energeticamente favorável a existência de um vórtice no interior do espécime, ou seja,  $H_{c1}$ , pode ser definido por

$$E(x_i = \infty) - E(x_i = \xi) = \frac{\epsilon}{2} K_0\left(\frac{2\xi}{\lambda}\right) + \Phi_0 H_{c1} = 0 \quad (3.8)$$

onde usamos  $K_0(x \rightarrow \infty) = 0$  e a aproximação  $e^{-\xi/\lambda} = 1$  no limite  $\kappa \gg 1$ . Assim, obtemos uma estimativa para  $H_{c1}$ :

$$H_{c1} = \frac{\epsilon}{2\Phi_0} K_0\left(\frac{2\xi}{\lambda}\right) \approx \frac{\Phi_0}{4\pi\mu_0\lambda^2} \ln \kappa = \frac{\epsilon_v}{\Phi_0}, \quad (3.9)$$

que, não surpreendentemente, é a mesma expressão encontrada no Cap. 1 [Eq. (2.23)]. Isso mostra que, em amostras macroscópicas,  $H_{c1}$  é insensível a efeitos de superfície.

Quando aumentamos o campo externo partindo do estado Meissner, a eventual entrada dos vórtices se dá através da superfície. Assim, para um vórtice se acomodar no mínimo de energia estabelecido em  $H \geq H_{c1}$  é necessário que ele transponha a barreira superficial de energia criada pela competição entre a energia atrativa da superfície e a energia repulsiva do campo Meissner. Esta barreira superficial é conhecida como barreira de Bean-Livingston. Portanto, a condição de entrada de um vórtice é que, na superfície (ou seja, em  $x_i = \xi$ ), a força resultante sobre ele aponte para dentro do supercondutor, i.e.,

$$f_x(x_i = \xi) = -\frac{\epsilon}{2\lambda} K_1\left(\frac{2\xi}{\lambda}\right) + \frac{\Phi_0}{\lambda} H e^{-\xi/\lambda} \geq 0.$$

Esta equação define o campo de entrada do vórtice:

$$H_{en} = \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0\lambda^2} K_1\left(\frac{2\xi}{\lambda}\right) = \frac{\Phi_0}{4\pi\mu_0\lambda^2} \kappa = \frac{H_c}{\sqrt{2}}. \quad (3.10)$$

onde usamos a aproximação assintótica  $K_1(x) \rightarrow 1/x$  para  $x \ll 1$ . Assim para um supercondutor altamente tipo II, o campo de entrada pode ser consideravelmente maior que o campo crítico inferior, pois enquanto  $H_{c1}$  cresce com  $\ln \kappa$ ,  $H_{en}$  cresce com  $\kappa$ . Entretanto, irregularidades na superfície podem produzir fissuras na barreira superficial que permitem a incursão de vórtices em campos menores que  $H_{en}$ , de modo que em muitas amostras o campo de entrada real pode ser bem próximo de  $H_{c1}$ .

## 3.2 Vórtices em filmes mesoscópicos

Nesta seção, estudaremos a estrutura de um vórtice em filmes supercondutores mesoscópicos na presença de um campo magnético aplicado paralelamente à superfície do filme. Usaremos a teoria de London para determinar as várias interações que atuam sobre um vórtice e as condições sob as quais um vórtice pode entrar no filme.

### 3.2.1 Estrutura dos vórtices e energia total

Consideremos, inicialmente, um filme supercondutor infinito homogêneo de espessura  $D$ . O plano infinito do filme é definido pelos eixos  $y$  e  $z$  e o eixo  $x$  está orientado ao longo da espessura do filme. O campo magnético externo  $H$  é aplicado paralelamente ao filme ao longo do eixo  $z$ . Assim, considerando vórtices retilíneos e paralelos a  $\mathbf{H} = \hat{z}H$ , o problema se restringe ao plano  $xy$ . O campo local  $b$  gerado por uma distribuição arbitrária de  $N$  vórtices é dado pela equação de London

$$\nabla^2 b - \lambda^{-2} b = -\frac{\Phi_0}{\lambda^2} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i) \delta(y - y_i), \quad (3.11)$$

com as condições de contorno de Dirichlet

$$b(0, y) = b(D, y) = \mu_0 H. \quad (3.12)$$

Observe que estas condições implicam em  $j_x = \frac{\partial b}{\partial y} = 0$  em ambas as superfícies do filme.

Poderíamos resolver este problema através do método de imagens, tal como fizemos na seção anterior. Neste caso, para cada vórtice localizado em  $(x_i, y_i)$  teríamos uma série infinita de imagens distribuídas periodicamente na reta  $y = y_i$  do plano  $xy$ , semelhante ao problema de uma carga localizada entre duas placas condutoras aterradas. No entanto, usaremos aqui o método de funções de Green (Jackson, 1999), por ser mais flexível a diferentes condições de contorno, sem haver a necessidade de se determinar o conjunto de imagens que satisfazem estas condições. Este método consiste em determinar a função de Green  $G(x, y; x', y')$  do problema, que é dada por

$$(\nabla^2 - \lambda^{-2})G = -\delta(x - x')\delta(y - y'). \quad (3.13)$$

A solução da equação desejada, Eq. (3.11), é obtida usando o teorema de Green para os potenciais escalares  $b$  e  $G$ . Aplicação do teorema de Green para  $b$  satisfazendo (3.11) e  $G$  satisfazendo (3.13), nos dá

$$b(x, y) - \mu_0 H = \frac{\Phi_0}{\lambda^2} \sum_{i=1}^N \int dx dy G(x, y; x', y') \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) + \oint dl' \left[ G(x, y; x', y') \frac{\partial b}{\partial n'} - b(x', y') \frac{\partial G}{\partial n'} \right].$$

A escolha mais adequada para as condições de contorno de  $G$  são as condições de Dirichlet  $G(x, y; 0, y') = G(x, y; D, y') = G(x, y; x', \pm\infty) = 0$ . Assim o teorema de Green nos dá uma solução explícita de  $b(x, y)$  se conhecemos  $G(x, y; x', y')$ :

$$b(x, y) = \frac{\Phi_0}{\lambda^2} \sum_{i=1}^N G(x, y; x_i, y_i) + \mu_0 H \left[ 1 - \int_0^D dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' G(x, y; x', y') \right], \quad (3.14)$$

O primeiro termo desta equação corresponde à solução não-homogênea da Eq. (3.11), ou seja, é o campo gerado pelos vórtices. Podemos então identificar  $\frac{\Phi_0}{\lambda^2} G(x, y; x_i, y_i)$  como a densidade local de fluxo gerada por um vórtice localizado em  $(x_i, y_i)$ . Assim, a integral da função de Green na área transversal do filme nos dá o fluxo efetivo  $\Phi(x_i, y_i)$  portado pelo vórtice. O segundo termo é a solução homogênea, que nos dá a distribuição do campo Meissner  $b_M(x, y)$  no interior do filme.

Vamos agora encontrar a função de Green requerida. Iniciamos explorando o fato de que a função delta em coordenadas retangulares em duas dimensões pode ser expandida na forma

$$\begin{aligned}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \delta(x - x')\delta(y - y') \\ &= \delta(y - y') \frac{2}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi x}{D}\right) \left(\sin\frac{m\pi x'}{D}\right),\end{aligned}\quad (3.15)$$

o que corresponde à relação de completude do espaço de funções ortogonais  $\left\{\sqrt{\frac{2}{D}} \sin\frac{\pi m x}{D}\right\}$ . Assim, podemos expandir a função de Green como

$$G(x, y; x', y') = \frac{2}{D} \sum_{m=1}^{\infty} g_m(y, y') \sin\left(\frac{m\pi x}{D}\right) \sin\left(\frac{m\pi x'}{D}\right). \quad (3.16)$$

Substituindo (3.16) em (3.13), encontra-se que  $g_m(y, y')$  deve ser determinado pela seguinte equação

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \lambda^{-2}\alpha_m^2\right)g_m = -\delta(y - y'), \quad (3.17)$$

onde

$$\alpha_m^2 = 1 + \left(\lambda \frac{m\pi}{D}\right)^2. \quad (3.18)$$

Usando o fato de que  $g_m(y, y')$  deve satisfazer condições de contorno de Dirichlet em  $y, y' = \pm\infty$  e a propriedade de simetria da função de Green, i.e.,  $g_m(y, y') = g_m(y', y)$ , obtemos

$$g_m(y, y') = \frac{\lambda}{2\alpha_m} e^{-\alpha_m|y-y'|/\lambda}, \quad (3.19)$$

e a função de Green total será

$$G(x, y; x', y') = \frac{\lambda}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_m|y-y'|/\lambda}}{\alpha_m} \sin\left(\frac{m\pi x}{D}\right) \sin\left(\frac{m\pi x'}{D}\right). \quad (3.20)$$

Assim, a distribuição de fluxo magnético gerada pelos vórtices será

$$\begin{aligned} b_v(x, y) &= \sum_{i=1}^N b_i(x, y) = \frac{\Phi_0}{\lambda^2} \sum_{i=1}^N G(x, y; x_i, y_i) \\ &= \frac{\Phi_0}{\lambda D} \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_m |y-y_i|/\lambda}}{\alpha_m} \sin\left(\frac{m\pi x}{D}\right) \sin\left(\frac{m\pi x_i}{D}\right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

O fluxo efetivo de um vórtice localizado na posição  $(x_i, y_i)$  é obtido integrando a densidade de fluxo deste vórtice,  $\Phi_0 \lambda^{-2} G(x, y; x_i, y_i)$ , na área do filme. O resultado é

$$\Phi(x_i) = \Phi_0 \int_0^D dx \int_{-\infty}^{\infty} dy G(x, y; x_i, y_i) = \Phi_0 \left[ 1 - \frac{\cosh \frac{1}{\lambda}(x_i - D/2)}{\cosh(D/2\lambda)} \right]. \quad (3.22)$$

Observe que o fluxo efetivo é máximo no plano equatorial do filme ( $x = D/2$ ). Para filmes muito finos, o fluxo efetivo máximo pode ser bem menor que  $\Phi_0$ .

Podemos usar a Eq. (3.22) para obter o campo Meissner:

$$b_M(x) = \mu_0 H \left[ 1 - \int_0^D dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' G(x, y; x', y') \right] = \mu_0 H \frac{\cosh \frac{1}{\lambda}(x - D/2)}{\cosh(D/2\lambda)}, \quad (3.23)$$

que é exatamente o resultado clássico para a distribuição de fluxo em um filme no estado Meissner.

Vamos agora calcular a auto-energia de um vórtice  $i$  no filme, i.e.,  $E_{auto} = \frac{1}{2\mu_0} \Phi_0 b_i(\mathbf{r} = \mathbf{r}_i)$ . Para isso, usamos o procedimento de truncamento da Eq. (3.4) e obtemos

$$E_{auto}(x_i, y_i) = \frac{\Phi_0^2}{2\mu_0 \lambda D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_m \xi/\lambda}}{\alpha_m} \sin^2\left(\frac{m\pi x_i}{D}\right). \quad (3.24)$$

A energia total do sistema de  $N$  vórtices é então a soma das auto-energias de cada vórtice com a energia de interação entre eles e a energia de interação com a

distribuição de campo Meissner. O resultado é

$$E = \frac{\Phi_0^2}{\mu_0 \lambda D} \sum_{i,j>i}^N \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_m |y_i - y_j|/\lambda}}{\alpha_m} \sin\left(\frac{m\pi x_i}{D}\right) \sin\left(\frac{m\pi x_j}{D}\right) + \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\Phi_0^2}{2\mu_0 \lambda D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_m \xi/\lambda}}{\alpha_m} \sin^2\left(\frac{m\pi x_i}{D}\right) + \Phi_0 H \frac{\cosh \frac{1}{\lambda}(x_i - D/2)}{\cosh(D/2\lambda)} \right]. \quad (3.25)$$

### 3.2.2 Barreira superficial

O termo entre colchetes na Eq. (3.25) produz uma barreira de energia contra a entrada de um vórtice.

Para determinar o campo de entrada do primeiro vórtice, usaremos aqui a condição de balanço de forças introduzida na Sec. 3.1. A força total atuando sobre um vórtice isolado no filme tem componente apenas na direção  $x$  e é dada por

$$f(x_i) = \frac{\pi \Phi_0^2}{\mu_0 \lambda D^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\alpha_m} e^{-\alpha_m \xi/\lambda} \sin\left(\frac{2m\pi x_i}{D}\right) + \frac{\Phi_0 H}{\lambda} \frac{\sinh \frac{1}{\lambda}(x_i - D/2)}{\cosh(D/2\lambda)}. \quad (3.26)$$

Fazendo  $f(x_i = \xi) = 0$ , obtemos o campo de entrada  $H_{en}$  em função da espessura do filme:

$$H_{en} = \frac{\pi \Phi_0}{2\mu_0 D^2} \frac{\cosh(D/2\lambda)}{\sinh(D/2\lambda - \xi/\lambda)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\alpha_m} e^{-\alpha_m \xi/\lambda} \sin\left(\frac{2m\pi \xi}{D}\right). \quad (3.27)$$

No limite  $D \gg \xi$ , podemos transformar a soma na Eq. (3.27) em uma integral sobre a variável  $s = \frac{\pi \xi}{D} m$ . Usando a identidade (Gradshteyn & Ryzhik, 1965)

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{\delta^2 + x^2}} e^{-\beta \sqrt{\delta^2 + x^2}} \text{sen}(ax) = \frac{a\delta}{\sqrt{a^2 + \beta^2}} K_1(\delta \sqrt{a^2 + \beta^2}),$$

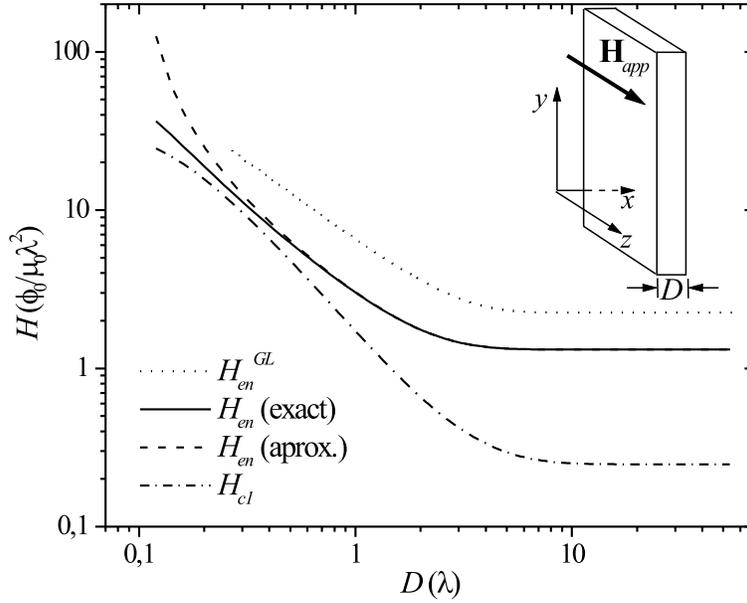


Figura 3.1: Campo de entrada  $H_{en}$  dos vórtices em função da espessura do filme  $D$  calculado usando a Eq. (3.27) (linha contínua) e a Eq. (3.27) (linha tracejada). A linha pontilhada corresponde ao campo de penetração  $H_{en}^{GL}(D)$  obtido pela teoria de Ginzburg-Landau unidimensional (de Gennes, 1965). A linha ponto-tracejada corresponde ao campo crítico inferior  $H_{cl}(D)$ .

obtemos uma expressão fechada para  $H_{en}(D)$ :

$$H_{en}(D) = \frac{\Phi_0}{\pi\sqrt{5}\mu_0\lambda^2} K_1(\sqrt{5}\xi/\lambda) \tanh(D/2\lambda) \quad (3.28)$$

Na Fig. 3.1, mostramos curvas de  $H_{en}(D)$  calculadas pela equação exata (3.27) (linha contínua) e pela equação aproximada (3.28) (linha tracejada) para um supercondutor com  $\kappa = 20$ . observe que a solução aproximada de  $H_{en}$  concorda bem com a solução exata para  $D \gtrsim 0,5\lambda$ . Outro ponto importante é que o campo de entrada assume um valor essencialmente constante para  $D \gtrsim 8\lambda$ , que é dado por

$$H_{en} = \frac{\Phi_0}{\pi\sqrt{5}\mu_0\lambda^2} \kappa = \frac{2\sqrt{2}}{5} H_c \quad (3.29)$$

Este valor é bem parecido com aquele obtido para o supercondutor semi-infinito da Sec. 3.1. Assim,  $D \approx 8\lambda$  marca um *crossover* entre o comportamento mesoscópico e o macroscópico em relação à entrada de vórtices no filme.

Ainda na Fig. 3.1, mostramos a curva  $H_{en}(D)$  calculada numericamente através de um modelo unidimensional proposto por de Gennes (1965). Este modelo usa a teoria de Ginzburg-Landau para obter a depreciação do parâmetro de ordem na superfície. O comportamento de  $H_{en}(D)$  é bastante semelhante ao comportamento que obtivemos usando a teoria de London, onde a depreciação do parâmetro de ordem é desprezada.

### 3.3 Vórtices em filmes mesoscópicos: configurações e metaestabilidade

Nesta seção, descreveremos simulações da penetração e evolução dinâmica de vórtices em um filme mesoscópico quando um campo magnético externo é variado. Estudaremos mais especificamente a influência da espessura do filme nas fases estruturais da rede de vórtices e como isso afeta o processo de magnetização do filme.

#### 3.3.1 Simulação e dinâmica de Langevin

Como vimos na Sec. 2.2, o movimento de um vórtice pode ser descrito por equações de Langevin sobre-amortecidas, apropriadas para partículas de massa desprezível embebidas em um meio viscoso e em contato com um reservatório térmico. Assim, a equação do movimento de um vórtice  $i$  no interior do filme homogêneo é dada por

$$\eta \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = -\nabla_i E + \mathbf{\Gamma}_i(t), \quad (3.30)$$

onde  $\nabla_i$  é o operador gradiente em relação a  $i$  e  $\mathbf{\Gamma}_i(t)$  representa um ruído gaussiano de média zero cuja variância é proporcional à temperatura  $T$  [Eq. (A.3)]. Aqui a função da temperatura é meramente de acelerar a convergência para um estado de equilíbrio.  $T$  é escolhida como sendo bem menor que a temperatura na qual a rede de vórtices funde.

Nossa simulação se resume em integrar numericamente as equações acopladas de Langevin para  $N$  vórtices que já tenham satisfeito a condição de entrada. A integração é feita usando o algoritmo apresentado na Sec. A.2 do Apêndice, expresso pela seguinte equação de recorrência:

$$x_i(t_{n+1}) = x_i(t_n) - \frac{1}{\eta} \frac{\partial E(t_n)}{\partial x_i} h + u(t_n) \sqrt{\mathcal{D}h}, \quad (3.31)$$

onde  $h$  é o passo de tempo na discretização, i.e.,  $t_{n+1} = t_n + h$ , e  $\mathcal{D} = 2k_B T/\eta$  é a difusividade do vórtice.  $h$  deve ser pequeno o suficiente para garantir a convergência das soluções. Nas simulações, usamos  $h \leq 10^{-4} \eta \lambda^4 / \Phi_0^2$ .  $u(t_n)$  é uma variável gaussiana de variância unitária que é sorteada a partir de um gerador de números aleatórios de distribuição uniforme pelo método de Box-Muller (Press et al., 1992).

Para simular um filme infinito, usamos condições de contorno periódicas na direção  $y$  com periodicidade  $L_y \gg \lambda$ . Assim, a célula de simulação tem uma área  $A = D \times L_y$ . Para todos os filmes estudados, usamos  $L_y \geq 20\lambda$ . Verificamos que este comprimento é grande o suficiente para minimizar efeitos de tamanho finito. Como a força de interação entre os vórtices decai exponencialmente na direção  $y$ , truncamos a interação numa distância  $R_{cutoff} = 10\lambda$ . Verificamos que os resultados da simulação para  $D = \lambda$  foram insensíveis à escolha de  $R_{cutoff}$  dentre os valores  $8\lambda$ ,  $10\lambda$  e  $12\lambda$ .

O procedimento para a nucleação dos vórtices nas superfícies do filme é como segue: a cada instante de tempo, uma posição  $(x_0, y_0)$  é sorteada, onde  $x_0 = \xi$  ou  $D - \xi$  e  $0 \leq y_0 < L_y$ . Calculamos então a força total sobre um vórtice teste posicionado em  $(x_0, y_0)$ , ou seja, a auto-força mais a força Meissner, que constituem a barreira de superfície, adicionadas à força de interação com todos os vórtices no interior do filme. Se esta força tiver componente apontando para o interior do filme, o vórtice teste é aceito e passa a participar da dinâmica. Caso contrário ele é rejeitado e a dinâmica prossegue com os  $N$  vórtices já existentes. Eventualmente, um vórtice já aceito pode sair do filme. Consideramos que um vórtice sai do filme quando, em um dado instante de tempo, ele assume uma posição  $x < \xi$  ou  $x > D - \xi$ . Nestas condições, o vórtice é completamente

descartado e apenas os  $N - 1$  vórtices restantes participam da dinâmica.

Usando este procedimento, simulamos ciclos de magnetização  $M = \mu_0^{-1}B - H$  em função do campo externo aplicado. O campo externo é incrementado, partindo de  $H = 0$ , a passos regulares  $\Delta H$  após um intervalo de tempo  $\Delta t$ . A taxa de varredura do campo,  $\Delta H/\Delta t$ , é cuidadosamente escolhida para garantir a estabilização da configuração de vórtices após cada incremento de campo. A indução magnética  $B$  total do filme é calculada integrando a densidade de fluxo local em toda a área do filme, i.e.

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{A} \int_0^D dx \int_0^{L_y} dy \left[ \sum_{i=1}^N b_i(x, y) + b_M(x) \right] \\ &= \frac{1}{A} \sum_{i=1}^N \Phi(x_i) + \mu_0 H \frac{\tanh(D/2\lambda)}{D/2\lambda}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde  $\Phi(x_i)$  é o fluxo efetivo do vórtice  $i$  dado pela Eq. (3.22).

Para caracterizar a estrutura da rede de vórtices, as configurações são gravadas periodicamente. Usamos um algoritmo de triangulação de Delauney para encontrar os vizinhos naturais de cada vórtice e usamos estes dados para estimar a probabilidade de coordenação sêxtupla  $\mathcal{P}_6$ , ou seja, a probabilidade de, para uma dada configuração, encontrarmos um vórtice com seis primeiros vizinhos. Para uma rede perfeitamente triangular esta probabilidade deve ser igual a um. Devemos, no entanto, levar em conta que em um filme os vórtices adjacentes às superfícies têm um número reduzido de vizinhos, o que pode reduzir consideravelmente o valor de  $\mathcal{P}_6$ , mesmo que a rede seja perfeita. Defeitos topológicos na rede, como dislocações, produzem vórtices com número de coordenação diferente de 6, e também reduzem o valor de  $\mathcal{P}_6$ .

### 3.3.2 Configurações e metaestabilidade

Ciclos de magnetização  $M(H)$  obtidas pelas simulações de dinâmica de Langevin para filmes de espessura entre  $\lambda$  e  $8\lambda$  são mostradas nas Figs. 3.2 e 3.4. Todas as curvas apresentam histerese e uma seqüência de picos e depressões em ambos os ramos, crescente e decrescente, do ciclo de magnetização. Flagrantes

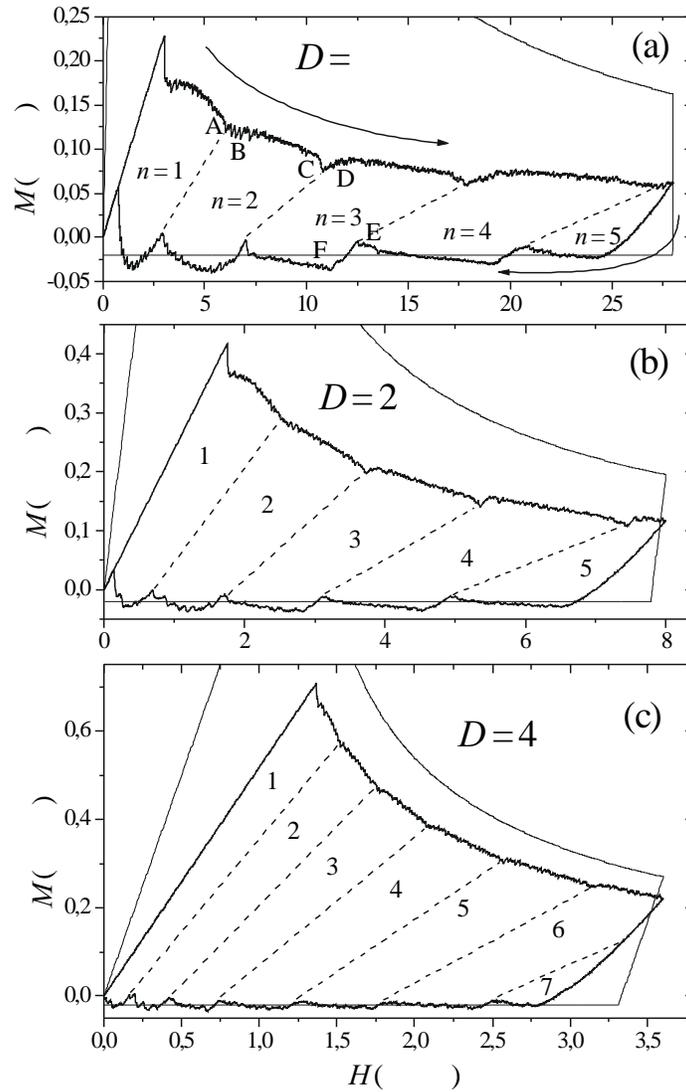


Figura 3.2: Curvas de magnetização (linhas contínuas espessas) calculadas para filmes homogêneos de espessura  $D = \lambda$  (a),  $2\lambda$  (b) e  $4\lambda$  (c). As linhas retas intermitentes são apenas guias para uma melhor identificação das fases estruturais. O número entre estas linhas indicam o número de cadeias de vórtices da fase respectiva. As linhas finas correspondem ao resultado macroscópico de Clem (veja texto).

das configurações da rede de vórtices em vários valores de campo mostram que uma depressão no ramo crescente e um pico no ramo decrescente correspondem, respectivamente, à introdução ou aniquilação de uma cadeia de vórtices (algumas destas configurações são mostradas nas Figs. 3.3 e 3.5). A histerese observada é bastante robusta. Para o filme  $D = 8\lambda$ , p. ex., observamos que para  $\delta H/\Delta t \geq 2 \times 10^{-6} \eta\lambda^4/\Phi_0^2$  os ciclos de histerese são virtualmente os mesmos e nenhuma relaxação é observada.

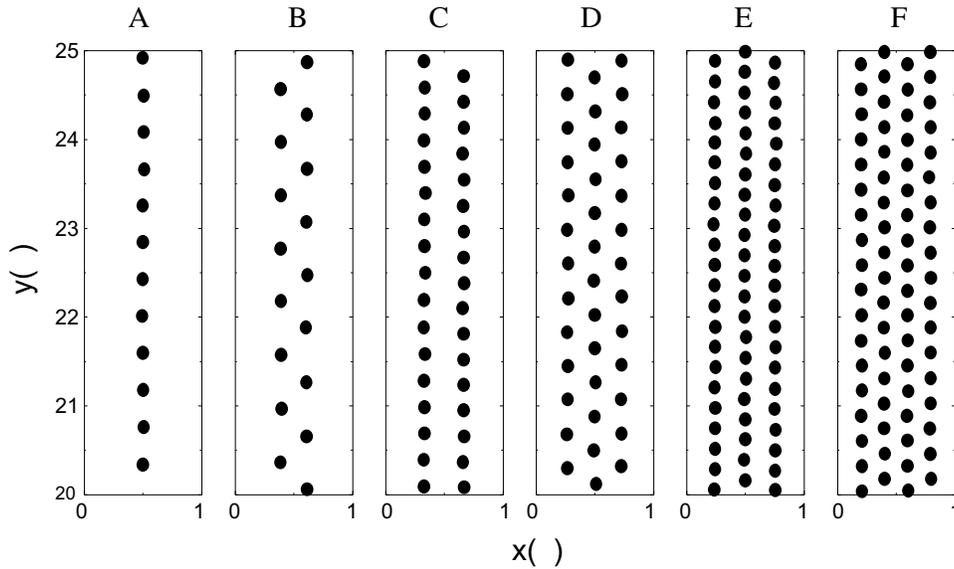


Figura 3.3: Configurações da rede de vórtices em um pedaço do filme de  $D = \lambda$  para os pontos A, B, C, D, E e F indicados na Fig. 3.2.

Os valores de campo  $H_n$  em que ocorrem estas transições estruturais na rede de vórtices são usualmente denominados campos de *matching*, pois logo acima destes valores a rede de vórtices estabiliza um número  $n$  de cadeias que, para aquele valor de campo, se ajusta de maneira otimizada ao perfil de energia. Quando o campo externo é aumentado, uma nova cadeia é formada após cada campo de *matching*. Em um processo de equilíbrio termodinâmico (Brongersma et al., 1993; Carneiro, 1998), a formação de uma nova cadeia permite a entrada de mais vórtices no filme (pois a densidade de vórtices em cada cadeia diminui). Tal fato é observado nas curvas de magnetização de equilíbrio (reversível) como uma queda no valor absoluto da magnetização. Antes da transição, a rede de vórtices

encontra-se saturada, dificultando a entrada de vórtices e gerando um aumento em  $|M|$ . Assim, a magnetização de equilíbrio apresenta picos sobre os valores  $H_n$ .

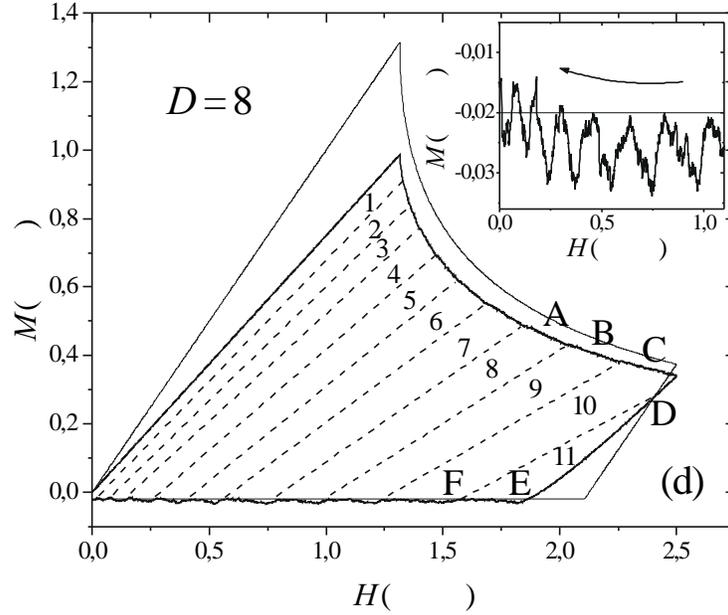


Figura 3.4: Mesmo que Fig. 3.2, mas para  $D = 8\lambda$ . No canto direito superior é mostrada uma ampliação de um trecho do ramo decrescente da magnetização.

No caso que estudamos aqui, consideramos que os vórtices têm que transpor a barreira de superfície para chegar ao interior da amostra. Mesmo que exista um mínimo de energia no interior do filme, a barreira superficial pode ser alta o suficiente para impedir que o vórtice chegue a este mínimo. Assim, em campo crescente, há um forte atraso na penetração dos vórtices e, conseqüentemente, um atraso nas transições (supersaturação). Os estados gerados são, portanto, *estados metaestáveis supersaturados*, ou seja, quando, finalmente, uma transição ocorre, o novo estado já se encontra saturado e a penetração de vórtices é dificultada. Assim, no lugar de picos, observamos depressões no ramo crescente do ciclo de magnetização nos valores de campo  $H_n$  onde ocorrem as transições.

Para campo decrescente, a barreira superficial atua no sentido oposto, ou seja, contrária à saída de vórtices. À medida que o campo cai, o sistema minimiza sua energia com a saída de alguns vórtices e, eventualmente, com a destruição de uma cadeia. No entanto, a barreira de superfície atrasa este processo mantendo

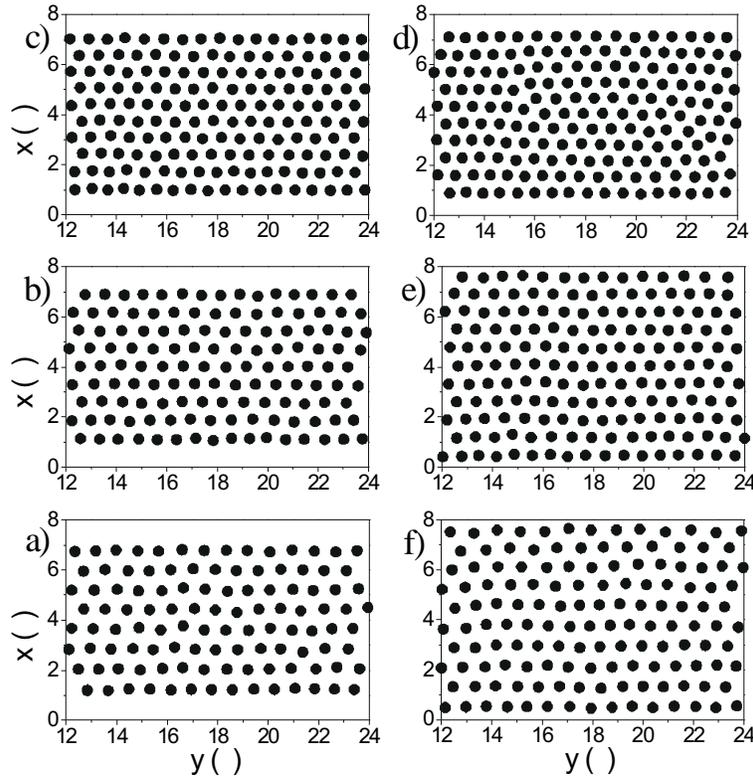


Figura 3.5: Configurações da rede de vórtices em um pedaço do filme de  $D = 8\lambda$  para os pontos A, B, C, D e F indicados na Fig. 3.4. Os valores do campo externo em unidades de  $\Phi_0/\mu_0\lambda^2$  são, respectivamente: 1,9 (a), 2,2 (b) e 2,4 (c), para campo crescente, e 2,4 (d), 1,8 (e) e 1,52 (f), em campo decrescente.

um *estado metaestável superresfriado* com um número de cadeias freqüentemente menor do que teria o estado de equilíbrio para aquele valor de campo. Isso resulta em curvas de magnetização bastante assimétricas, com os campos de *matching*  $H_n$  dependendo fortemente da história magnética do filme.

A formação de estados metaestáveis pode dar origem a efeitos inesperados como o que está ilustrado nas Figs. 3.4 e 3.5. Observe que o ponto *D* indicado na curva de magnetização da Fig. 3.4 está posicionado exatamente sobre uma transição de 10 para 11 cadeias de vórtices que ocorre no ramo *decescente* do ciclo de histerese, quando seria esperado que transições deste tipo ( $n \rightarrow n + 1$ ) só ocorreriam a campo crescente. No trecho em que ocorre esta transição invertida, a barreira de superfície é finita e vai diminuindo na medida em que o campo é

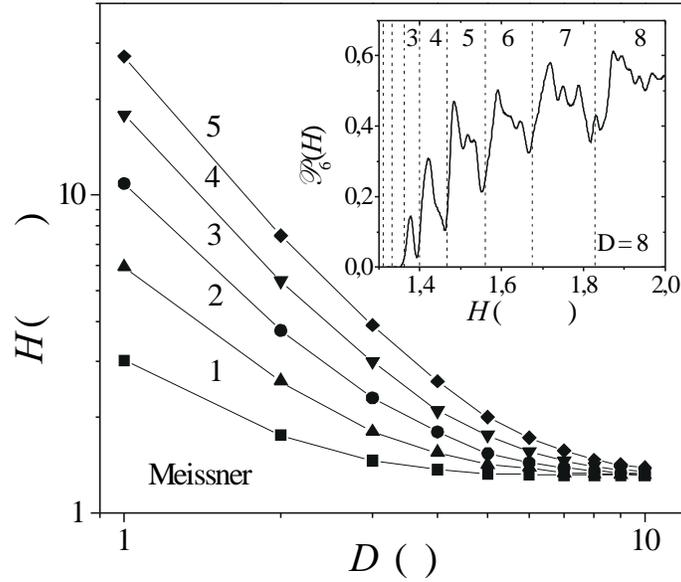


Figura 3.6: Diagrama de fase metaestável  $H$ - $D$  (campo externo vs. espessura do filme) para o ramo crescente do ciclo de magnetização. Os dados correspondem aos campos de *matching*  $H_1 \equiv H_{en}$  (■),  $H_2$  (▲),  $H_3$  (●),  $H_4$  (▼) e  $H_5$  (◆) obtidos pelas simulações realizadas para filmes de espessura  $\lambda \leq D \leq 10\lambda$ .

decrecido. Com a diminuição da barreira, a rede de vórtices se expande cedendo espaço para uma nova cadeia. Vale frisar que este processo não envolve entrada ou saída de vórtices, embora a indução magnética total possa variar, pois esta depende das posições dos vórtices no filme através da Eq. 3.32.

Para caracterizar estas transições, calculamos a fração média de vórtices com 6 primeiros vizinhos em função do campo aplicado  $\mathcal{P}_6(H)$ . Para melhor visualização, a curva foi suavizada tomando, para cada ponto, a média dos cinco pontos vizinhos. O resultado é mostrado na Fig. 3.6. Observa-se que as transições são precedidas por uma forte queda de  $\mathcal{P}_6(H)$ , o que indica uma grande proliferação de dislocações na rede de vórtices, e sucedidas por um aumento acentuado, indicando o reordenamento da rede. A proliferação de dislocações no momento da transição está ilustrada na Fig. 3.5(d). Esse comportamento abrupto de  $\mathcal{P}_6(H)$  nas proximidades de um campo de *matching* é um forte indício de que as transições estruturais na rede de vórtices são de primeira ordem. Na Fig. 3.6, mostramos

um diagrama  $H-D$  com várias fases metaestáveis supersaturadas. As fronteiras de fase correspondem aos campos de *matching* em função da espessura  $D$  no ramo crescente do ciclo de histerese, para  $\lambda \leq D \leq 10\lambda$ .

Os resultados mostrados aqui se aplicam a filmes cujas superfícies são perfeitamente planas. Em amostras reais, no entanto, é difícil evitar rugosidade na superfície e, em alguns materiais supercondutores, é muito comum a formação de um camada de material fracamente supercondutor na superfície do filme, o que pode ser evitado com a deposição de uma camada protetora isolante. Em geral, estes efeitos modificam as condições de contorno de modo que o efeito da barreira superficial pode ser severamente reduzido.

Por outro lado, os resultados que obtivemos para o filme mesoscópico podem, com algumas restrições, ser aplicados para fitas mesoscópicas em campo perpendicular. Com as técnicas de nanofabricação atuais, este tipo de amostra pode ser fabricado com bordas praticamente perfeitas, de modo que a barreira de superfície fica essencialmente intacta. Recentemente, mostramos que uma fita mesoscópica fina de espessura  $d \ll \lambda$  (ao longo de  $z$ ), largura  $W \ll \Lambda = \lambda^2/d$  (ao longo de  $x$ ) e comprimento  $L \gg W$  (ao longo de  $y$ ) apresenta efeito *matching*, com transições estruturais envolvendo criação ou destruição de cadeias de vórtices, e sua curva de magnetização é marcada por uma forte histerese (de Souza Silva & Aguiar, 2003). As curvas de magnetização e as estruturas formadas são bem semelhantes aos resultados que apresentamos aqui para o filme mesoscópico mais fino ( $D = \lambda$ ).

## Capítulo 4

# Resposta ac linear da rede de vórtices em nanoestruturas periódicas

Uma rede elástica interagindo com um substrato periódico rígido pode formar diferentes estados comensuráveis ou incomensuráveis, dependendo se as duas estruturas periódicas apresentam ou não uma conformidade estrutural. Este problema é relevante em várias áreas da física da matéria condensada, tais como camadas monoatômicas adsorvidas em uma superfície monocristalina (Pokrovsky & Talapov, 1984), colóides em armadilhas ópticas (Dufrense & Grier, 1998) e redes de junções Josephson. Vórtices em filmes supercondutores nanoestruturados com uma rede de orifícios ou pontos magnéticos constituem um exemplo especial desta classe de sistemas. Em geral, o potencial produzido pela rede de centros de ancoragem permite a acomodação de vórtices nos interstícios, possibilitando a formação de estruturas bem mais complexas.

Além de interesses fundamentais mais amplos, como o discutido acima, vórtices em nanoestruturas periódicas têm despertado interesses específicos para diversas aplicações de materiais e dispositivos supercondutores. Normalmente, este tipo de amostra apresenta valores elevados de corrente crítica e baixa taxa de *creep*, sendo de grande interesse para aplicações onde a condutividade perfeita é importante. Além disso, a corrente crítica em função do campo aplicado apresenta picos bem definidos em certos valores de campo, sugerindo aplicações de chaveamento controlado por campo magnético. Estes picos correspondem a densidades

de vórtices que formam estruturas comensuráveis de alta simetria (Moshchalkov et al., 1998, 1996).

Neste capítulo, estudaremos as propriedades elásticas da rede de vórtices sujeita a pequenas excitações alternadas. Nosso objetivo é estabelecer uma relação entre o espectro de frequência da resposta ac com modos elásticos da rede de vórtices ancorada em um potencial periódico.

## 4.1 Configurações de equilíbrio

As possíveis configurações que a rede de vórtices pode assumir em um filme supercondutor com uma rede periódica de centros artificiais de ancoragem têm sido intensivamente estudadas por diversas técnicas de imagem, como microscopia Lorentz (Harada et al., 1996), decoração magnética (Bezryadin et al., 1996) e microscopia Hall (Field et al., 2002; Grigorenko et al., 2001), e por simulações numéricas (Reichhardt et al., 1998a). Os vórtices podem formar diferentes estruturas, dependendo da simetria da rede de armadilhas e do tamanho das armadilhas. O número máximo  $n_s$  de quanta de fluxo que uma armadilha pode estabilizar depende do tamanho das armadilhas e é dado aproximadamente por  $n_s = r_p/2\xi$ , onde  $r_p$  é o raio efetivo da armadilha. Assim, armadilhas suficientemente grandes podem aprisionar mais de um quantum de fluxo. Para  $n_s = 1$ , a rede de armadilhas satura no chamado campo de comensurabilidade,  $B_\Phi$ , que corresponde ao campo onde há exatamente um vórtice (com um quantum de fluxo) por armadilha. Neste caso, se aumentamos a indução magnética acima de  $B_\Phi$ , alguns vórtices ocuparão as posições intersticiais, e serão aprisionados pela gaiola magnética formada pelos vórtices ancorados nas armadilhas. Se a desordem no material é fraca, é possível obter, através de um processo de *annealing*, uma superestrutura de vórtices intersticiais comensurável com a rede de vórtices ancorados (Harada et al., 1996; Reichhardt et al., 1998a). Se aumentarmos ainda mais o campo, de modo que a indução no filme ultrapasse  $2B_\Phi$ , os vórtices se organizam em dímeros aprisionados nos interstícios e uma superestrutura de dímeros é observada em  $B = 3B_\Phi$  (Harada et al., 1996; Reichhardt et al., 1998a).

Aqui, consideraremos uma rede quadrada de centros de ancoragem com  $n_s = 1$ .

Considere um sistema de vórtices pontuais em um filme fino com um campo externo aplicado perpendicularmente ao filme. Para altas densidades de vórtices, podemos aproximar as interações entre os vórtices por um potencial logarítmico,  $E_{vv} = \epsilon \ln(r/\Lambda)$  [Eq. (2.43)]. Assumiremos aqui condições de contorno periódicas em uma célula de simulação quadrada de tamanho  $L \times L$ . Como o potencial logarítmico é de longo alcance, a simples truncagem do potencial pode resultar em erros numéricos consideráveis. No entanto, fazendo uso das condições de contorno periódicas, é possível escrever o potencial de interação vórtice-vórtice como uma série rapidamente convergente válida em toda célula de simulação (Doria, 1991; Grønbech-Jensen, 1996, 1999). Para uma rede quadrada, o resultado é

$$E_{vv}(x_i, y_i; x_j, y_j) = \epsilon\pi \frac{(y_i - y_j)^2}{L^2} - \frac{\epsilon}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \ln \frac{\cosh 2\pi \left( \frac{y_i - y_j}{L} + k \right) - \cos \frac{2\pi(x_i - x_j)}{L}}{\cosh 2\pi k}, \quad (4.1)$$

Esta série considera que, dentro da célula de simulação, a força que um vórtice  $j$  exerce sobre um vórtice  $i$  resulta do potencial logarítmico de  $j$  mais os potenciais logarítmicos das suas infinitas imagens localizadas em  $(x_j + mL, y_j + nL)$ , onde  $m$  e  $n$  são inteiros. O valor exato do potencial resultante pode ser aproximado pela soma de apenas alguns termos da série.

Modelamos o potencial periódico, gerado pelas armadilhas, por uma rede quadrada de poços gaussianos. Para evitar truncamento e discontinuidades, descrevemos o potencial periódico de ancoragem por uma função periódica bem comportada:

$$U^p(x, y) = \frac{\pi^2 \alpha_p}{a_p^2 \xi_p^2} e^{-\frac{1}{2}(\beta_x^2 + \beta_y^2)/\xi_p^2}, \quad (4.2)$$

onde  $\beta_u = \sin \frac{\pi u}{a_p}$ ,  $u = x, y$ , e  $\xi_p = \sin \frac{\pi r_p}{a_p}$ . A Eq. (4.2) é normalizada de maneira que  $\alpha_p$  correspondem à constante de força restauradora em um mínimo do potencial de ancoragem. Para  $r_p \ll a_p$ , esta expressão representa uma rede quadrada de armadilhas gaussianas e  $r_p$  coincide com o raio onde a força de ancoragem é máxima. Assim, a energia total do sistema de vórtices é

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,j} E_{vv}(x_i, y_i; x_j, y_j) + \sum_i U^p(x_i, y_j). \quad (4.3)$$

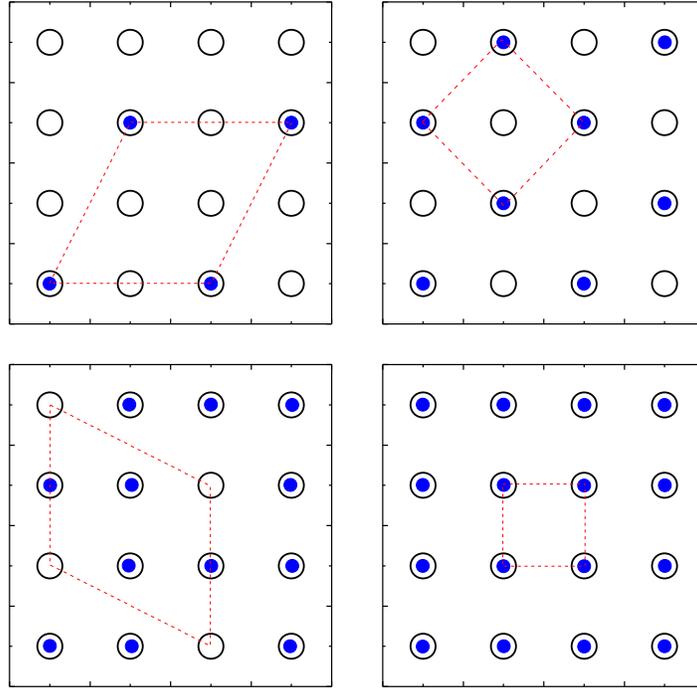


Figura 4.1: Configurações de equilíbrio da rede de vórtices no potencial de ancoragem dado pela Eq. (4.2) para números de ocupação  $n = 0, 25, 0,5, 0,75$  e  $1$ , da esquerda para a direita e de cima para baixo. Os círculos menores (pretos) representam os vórtices e os grandes (brancos) representam os centros de ancoragem. Os polígonos tracejados correspondem às respectivas células unitárias. As configurações foram obtidas pelo procedimento de *annealing* simulado descrito no texto, usando  $a_p = \Lambda/4$ ,  $r_p = 0,1a_p$  e  $\alpha_p = 8\pi\epsilon/a_p^2$ .

Aqui usamos o método de Monte Carlo para simular um processo de *annealing* e obter o estado fundamental da rede de vórtices para diferentes números de ocupação  $n$ . O cálculo é baseado no algoritmo de Metropolis. Em cada passo de Monte Carlo, um vórtice é sorteado e sua posição ligeiramente modificada para uma posição aleatória dentro de uma vizinhança quadrada  $\Delta R \times \Delta R$ . Calculamos então a nova energia  $E'$  do sistema e a comparamos com a energia anterior,  $E$ . Se a energia diminuir, a nova posição do vórtice escolhido é aceita. Caso contrário, a nova posição só é aceita com uma probabilidade  $e^{(E'-E)/k_B T}$ . O processo de *annealing* se inicia a temperaturas altas, maiores que a temperatura de fusão da

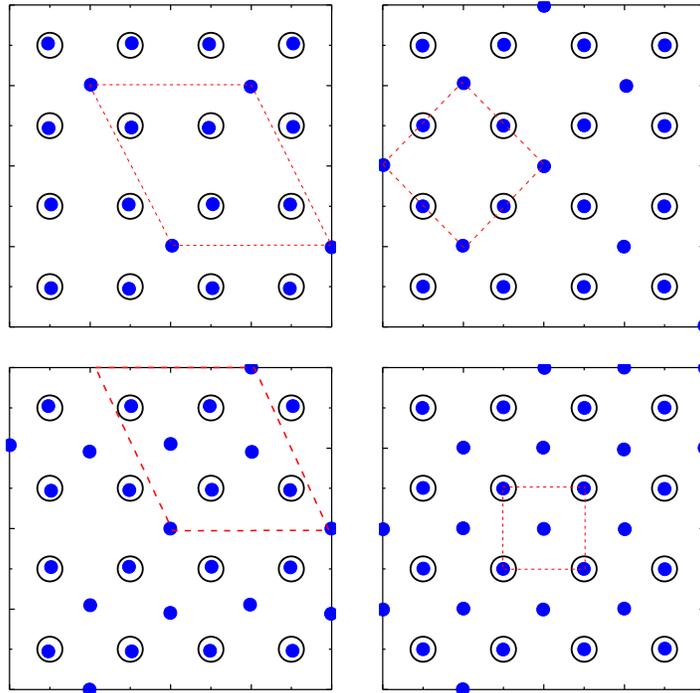


Figura 4.2: Mesmo que a Fig. 4.1, mas para  $n = 1, 25, 1,5, 1,75$  e  $2$ .

rede de vórtices correspondente, com uma distribuição de vórtices aleatória. A temperatura é então diminuída lentamente até chegar a zero. O sucesso para a obtenção da configuração de equilíbrio correta depende da escolha adequada da taxa de variação da temperatura e do tamanho  $\Delta R$  da vizinhança.

Realizamos simulações para diferentes valores de  $\alpha_p$ , fixando  $a_p = \Lambda/4$  e  $r_p = 0, 1a_p$ , e observamos que, para números de ocupação  $0 < n \leq 3$ , a rede de vórtices em todas as configurações é completamente ancorada e comensurável com o potencial periódico para  $\alpha_p > 4\pi\epsilon/a_p^2$ . Para  $\alpha_p = 4\pi\epsilon/a_p^2$ , algumas configurações, como aquela correspondente a  $n = 1,75$ , são apenas parcialmente ancoradas, i.e., apenas uma fração das armadilhas conseguem capturar um vórtice. Para valores ainda mais baixos de  $\alpha_p$ , algumas configurações correspondem a uma rede incomensurável flutuante. Os resultados para  $\alpha_p = 8\pi\epsilon/a_p^2$  são mostrados nas Figs. 4.1, 4.2 e 4.3, para  $\alpha_p = 8\pi\epsilon/a_p^2$ . Observamos que as configurações para valores mais altos de  $\alpha_p$  são essencialmente as mesmas mostradas nestas figuras.

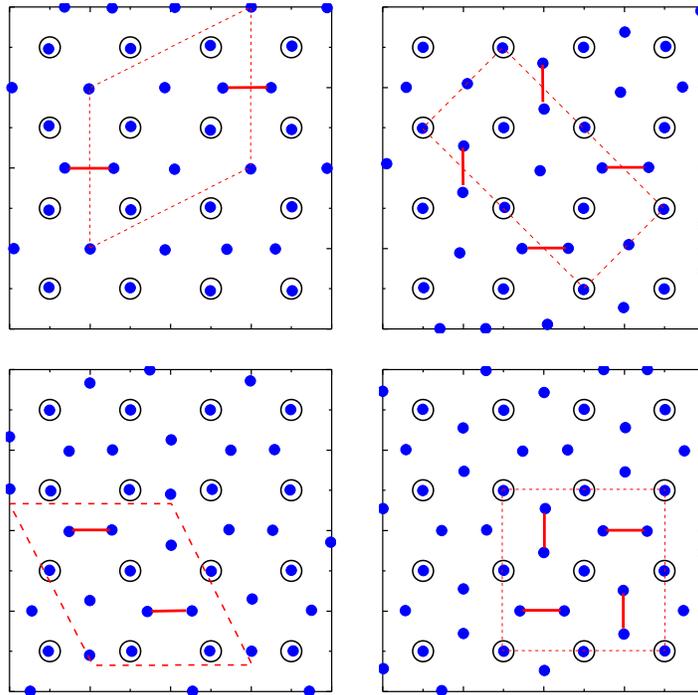


Figura 4.3: Mesmo que a Fig. 4.1, mas para  $n = 2, 25, 2,5, 2,75$  e 3.

Algumas destas configurações já foram observadas previamente por simulações de Langevin (Reichhardt et al., 1998a) e por técnicas de imagem (Bezryadin et al., 1996; Field et al., 2002; Grigorenko et al., 2001; Harada et al., 1996). É interessante notar que, quando a ancoragem é suficientemente forte, as configurações encontradas para um da valor de  $n$  são essencialmente as mesmas, independentemente da escolha do potencial de interação vórtice-vórtice

## 4.2 Resposta ac linear e o modelo de uma partícula

Medidas da resposta ac de amostras supercondutoras é uma ferramenta experimental poderosa e muito utilizada para testar teorias sobre as diferentes fases que a matéria de vórtices pode assumir. Tais experimentos têm sido utilizados para estudar as propriedades dinâmicas e de ancoragem de vórtices em materiais do tipo II na presença de defeitos pontuais desordenados (Henderson et al., 1998;

Kötzler et al., 1994a, b), rugosidade na superfície da amostra (Lütke-Entrup et al., 1997; Pautrat et al., 2001), defeitos colunares produzidos por bombardeamento de íons pesados (Pasquini et al., 1999, 2002) e nanoestruturas periódicas fabricadas por litografia (Silhanek et al., 2002).

Há duas maneiras simples de excitar a rede de vórtices com uma força alternada. Pode-se aplicar uma corrente de transporte ac à amostra, ou adicionar ao campo magnético externo  $\mathbf{H}$  uma componente ac  $\mathbf{h}_{ac}(t)$ . Em geral, a resposta do sistema é analisada a partir de medidas da susceptibilidade,  $\chi_{ac}$ , ou da resistividade,  $\rho_{ac}$ . *No regime linear, a resposta do sistema deve ser independente da amplitude de excitação.* Caso contrário, o sistema se desgarra de seu estado fundamental, dando origem a harmônicos superiores não-nulos, e a resposta é dita não-linear. O aparecimento de harmônicos superiores marca o “onset” da transição entre os regimes linear e não-linear.

No regime linear, a resistividade ac é definida por  $\mathbf{E} = \rho_{ac}(\omega)\mathbf{J}$ . Observe que, em geral,  $\rho_{ac}$  é complexo, o que significa que pode haver um atraso de fase entre a excitação e o sinal medido. É possível relacionar  $\rho_{ac}$  ao comprimento de penetração ac  $\lambda_{ac}$  através da teoria de London. Usando a primeira equação de London, Eq. (2.1), temos  $\mathbf{E} = -i\omega\mu_0\lambda_{ac}^2\mathbf{J}$ . Assim o comprimento de penetração ac é dado por

$$\lambda_{ac}^2(\omega) = \frac{\rho_{ac}(\omega)}{-i\omega\mu_0}. \quad (4.4)$$

Conhecendo-se a forma da amostra, é possível calcular a susceptibilidade ac a partir de  $\lambda_{ac}$  ou  $\rho_{ac}$ . Em situações onde o efeito de demagnetização pode ser desprezado, como cilindros longos com campo axial ou placas com campo paralelo,  $\chi_{ac}(\omega)$  pode ser obtido de maneira relativamente simples (Clem et al., 1976). No entanto, muito comumente medidas de susceptibilidade são realizadas com o campo magnético perpendicular às superfícies de discos ou retângulos, situação em que o alto efeito de demagnetização produz um sinal medido bem mais expressivo. Neste caso  $\chi_{ac}(\omega)$  pode ser obtido por um método numérico desenvolvido por Brandt (1994a, b).

Para analisar como estas grandezas macroscópicas estão relacionadas à dinâmica de vórtices, devemos estudar o comportamento microscópico destes. Uma ex-

citação  $\mathbf{j}_{ac}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ , seja ela uma corrente de transporte ou a corrente gerada por um campo magnético ac, exerce uma força de Lorentz sobre os vórtices, dada por  $\phi_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}_i, t) \times \hat{z}$  gerando um campo de deslocamento  $\mathbf{u}$  na rede de vórtices. Para pequenas oscilações, podemos escrever uma equação linearizada para o movimento dos vórtices em relação às suas posições de equilíbrio local (Gittleman & Rosenblum, 1966; van der Beek et al., 1993):

$$\eta \dot{\mathbf{u}}_i = -\kappa_i \mathbf{u}_i + \phi_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}_i, t) \times \hat{z}. \quad (4.5)$$

Esta é uma equação linear com um termo de oscilação forçada, de modo que sua solução para o regime estacionário deve oscilar com a mesma frequência da força motriz, i.e.,

$$\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{u}_i(\omega) e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{u}_i(\omega) = \frac{\phi_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}_i) \times \hat{z}}{-i\eta\omega + \kappa_p}. \quad (4.6)$$

(Uma solução mais formal pode ser obtida, e.g., pelo método de transformadas de Fourier.)

Para uma distribuição aleatória de defeitos, os vórtices interagem com um potencial que apresenta desordem topológica e também energética, já que o número de defeitos que contribuem para o aprisionamento de uma linha de vórtice é, em geral, aleatório. Para calcular a resposta macroscópica do sistema, devemos então calcular a média de  $\mathbf{u}$  sobre uma distribuição de forças restauradoras. Embora essa distribuição seja desconhecida, é possível estimar a média das forças restauradoras,  $\kappa_L = \langle \kappa_i \rangle$ , conhecida como constante elástica de Labusch (van der Beek et al., 1993). Assumindo que a distribuição de barreiras de potencial é unimodal e caracterizada por um valor típico  $U$ , pode-se estimar  $\kappa_L \sim U/Lr_0$ , onde  $L$  é um comprimento que caracteriza o tamanho típico de seções da linha de vórtice que são aprisionadas independentemente e  $r_0$  é o raio de atuação dos defeitos, em geral, da ordem de  $\xi$  para campos bem abaixo de  $H_{c2}$ .  $U$  e  $L$  podem ser estimados, p. ex., da teoria de ancoragem coletiva, donde se obtém que  $\kappa_L$  pode ser expresso em termos da densidade de corrente crítica:  $\kappa_L = j_c \phi_0 / r_0$ .

### 4.2.1 O modelo de uma partícula

Um modelo muito usado para descrever a resposta de vórtices em meios aleatórios é o modelo de uma partícula, que considera, como uma aproximação, que todos os vórtices são atraídos para os centros de ancoragem por uma mesma força restauradora típica dada por  $\kappa_L \mathbf{u}$ . Neste modelo, a frequência característica de ancoragem,  $\omega_L = \kappa_L/\eta$ , estabelece um “crossover” entre dois regimes dinâmicos:

- *O regime de altas frequências.* Para  $\omega \gg \omega_L$ , a força viscosa, que é proporcional a  $\eta\omega\mathbf{u}$ , domina sobre a força restauradora  $-\eta\omega_L\mathbf{u}$ . Assim, os vórtices oscilam com uma amplitude média dada por  $\mathbf{u}(\omega) \approx i\phi_0\mathbf{j} \times \hat{z}/\omega\eta$  e uma diferença de fase de  $\pi/2$ , ou seja, o sistema está em quadratura com a força motriz. A velocidade média dos vórtices,  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = -i\omega\mathbf{u}$ , é real, o que conduz a uma resposta dissipativa do sistema, com uma resistividade real e dada por

$$\begin{aligned} \rho_{ac}(\omega \gg \omega_L) &= \frac{v(t)B}{j_{ac}(t)} \approx \frac{\phi_0 B}{\eta} = \frac{B}{B_{c2}} \rho_n \\ \text{ou} \quad \rho_{ac}(\omega \gg \omega_L) &\approx \rho_{FF}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Assim, o limite de altas frequências é também conhecido como regime de flux-flow. O comprimento de penetração,

$$\lambda_{ac}(\omega \gg \omega_L) = \sqrt{i \frac{\rho_{FF}}{\omega \mu_0}} = (1+i) \frac{\delta}{\sqrt{2}}, \quad (4.8)$$

onde  $\delta$  é o chamado “skin depth” (veja Jackson, 1999, Secs. 5.18 e 8.1, ou, para uma discussão mais aprofundada, Landau & Lifshitz, 1960, Sec. 45), sugere que, neste regime, a amostra supercondutora se comporta como um metal normal com resistividade  $\rho = \rho_{FF}$  e “skin depth”  $\delta = \sqrt{2\rho_{FF}/\mu_0\omega}$ .

- *O regime de baixas frequências.* Este limite equivale a mover os vórtices quase-estaticamente, de modo que a força viscosa se torna desprezível. A amplitude média de oscilação dos vórtices é, então, real e não dispersiva, sendo expressa por  $\mathbf{u}(\omega) \approx \phi_0\mathbf{j} \times \hat{z}/\kappa_p$ . Percebe-se de imediato que a velocidade média e, portanto, a resistividade vão a zero linearmente com a

freqüência,

$$\rho(\omega \ll \omega_L) \approx -i\omega \frac{\phi_0 B}{\eta \kappa_L} = -i \frac{\omega}{\omega_L} \rho_{FF}. \quad (4.9)$$

Neste caso, o comprimento de penetração é real e dado por

$$\lambda_{ac}(\omega \ll \omega_L) = \lambda_C = \sqrt{\frac{\phi_0 B}{\mu_0 \kappa_L}}. \quad (4.10)$$

$\lambda_C$  é conhecido como comprimento de penetração de Campbell. Assim, neste regime de baixas freqüências, conhecido como regime Campbell, o sistema se comporta como se estivesse no estado Meissner, blindando campos com um comprimento característico  $\lambda_C$ .

#### 4.2.2 Aplicação para redes comensuráveis com $n \leq n_s$

Uma rede de vórtices comensurável com uma rede periódica de centros de ancoragem e com uma densidade menor que o número de saturação da rede de ancoragem ( $n_s$ ) constitui um sistema ideal para o modelo de uma partícula. Para simplificar nossa análise, consideramos que  $n_s = 1$  e que a força motriz se distribui uniformemente no filme. Assim, se considerarmos que as forças entre os vórtices se cancelam por simetria, cada vórtice obedece à mesma equação de movimento,

$$\eta \dot{\mathbf{u}} = -\kappa_p \mathbf{u} + \phi_0 \mathbf{J}_{ac}(t) \times \hat{z}, \quad (4.11)$$

com  $\kappa_i = \kappa_p$  para todo  $i$ , onde  $\kappa_p$  é a constante da força restauradora dos centros de ancoragem. Ou seja, a solução desta equação,  $u(t) = u(\omega)e^{-i\omega t}$ , onde  $\mathbf{u}(\omega) = \phi_0 \mathbf{J} \times \hat{z} / (-i\eta\omega + \kappa_p)$ , descreve o movimento não só de um vórtice em particular, mas do centro de massa de toda a rede de vórtices. Assim, a resistividade ac do sistema de vórtices, definida por  $\mathbf{E} = \rho_{ac} \mathbf{J}$ , será dada simplesmente por

$$\rho_{ac} = \rho_{ac}(\omega) = \frac{\dot{u}(t)B}{J_{ac}(t)} = -i\omega u(\omega) \frac{B}{J}$$

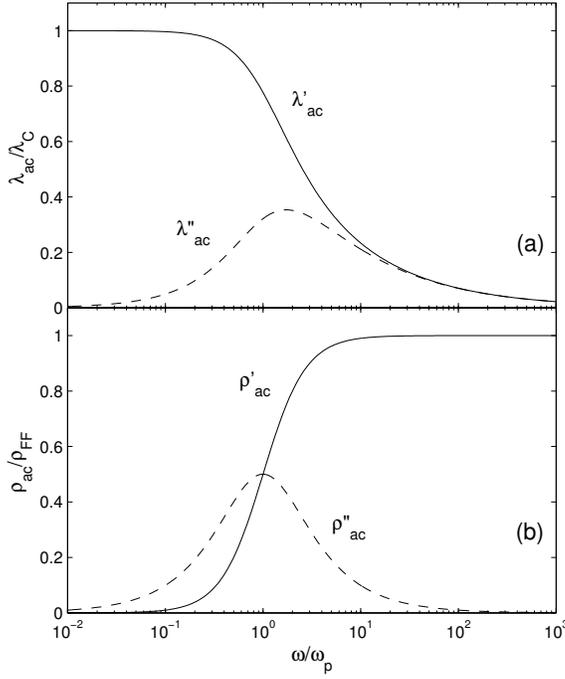


Figura 4.4: Espectro de frequência da resposta ac de uma rede de vórtices comensurável com o potencial de ancoragem para campos menores ou iguais ao campo de saturação. São mostradas as partes real (linhas cheias) e imaginária (linhas intermitentes) do comprimento de penetração complexo (a) e da resistividade complexa (b). As curvas foram obtidas do modelo de uma partícula.

$$\text{ou } \rho_{ac}(\omega) = \rho'(\omega) - i\rho''(\omega) = \frac{\omega^2 - i\omega\omega_p}{\omega^2 + \omega_p^2} \rho_{FF}, \quad (4.12)$$

onde  $\omega_p = \alpha_p/\eta$  e  $\rho_{FF} = (B/B_{c2})\rho_n$  é a resistividade de flux-flow.

Na Fig. (4.4), mostramos curvas das partes real e imaginária de  $\rho_{ac}$  e de  $\lambda_{ac}$  em função de  $\omega/\omega_p$  obtidas pelas Eqs. (4.12). Note que  $\omega/\omega_p = 1$  coincide com a frequência de pico de  $\rho''$ . Vale frisar que aqui  $\omega_p$  é uma frequência característica que mede a ação restauradora que cada centro de ancoragem exerce sobre o vórtice por ele aprisionado e não uma média estatística sobre uma coleção de forças restauradoras. Assim, medir o crossover entre os dois regimes dinâmicos significa obter uma informação precisa sobre a curvatura do potencial de ancoragem nas proximidades de um centro aprisionador.

### 4.3 Resposta ac linear para $B > B_\Phi$ : O modelo de duas espécies

Quando aumentamos o campo acima de  $B_\Phi$ , onde a rede de ancoragem encontra-

se saturada, os vórtices que “sobram” tendem a ocupar as posições intersticiais. Como esses vórtices intersticiais não estão diretamente conectados a um centro de ancoragem, a restauração de suas posições de equilíbrio local se devem a interação elástica com os vórtices ancorados. Assim, a elasticidade da rede de vórtices passa a desempenhar um papel importante, de modo que o modelo de uma partícula não pode mais ser utilizado.

Nesta seção, propomos um modelo simples para estudar a resposta ac linear da rede vórtices para densidades de fluxo acima do campo de saturação. O efeito da interação elástica entre vórtices intersticiais e a rede de vórtices ancorados é calculado exatamente para situações de alta simetria.

### 4.3.1 Descrição do modelo e equações do movimento

Consideremos  $N$  vórtices em um potencial periódico e sob a ação de uma força motriz alternada  $\mathbf{F}_{ac}(t) = \phi_0 \hat{z} \times \mathbf{J}_{ac}(t)$ , com  $\mathbf{J}_{ac}(t) = \mathbf{J}e^{-i\omega t}$ . Assumimos inicialmente que a dinâmica dos vórtices é descrita por equações sobre-amortecidas, i.e.,

$$\eta \dot{\mathbf{r}}_i = - \sum_{j \neq i}^N \nabla_i E_{vv}(r_{ij}) - \nabla U_p(\mathbf{r}_i) + \phi_0 \hat{z} \times \mathbf{J}_{ac}(t). \quad (4.13)$$

Podemos simplificar bastante este problema se considerarmos apenas densidades de vórtices que produzem redes comensuráveis. Nesse caso, a rede de vórtices é composta de duas sub-redes, uma formada pelos vórtices ancorados, aos quais rotularemos vórtices da espécie A, e a outra formada pelos vórtices intersticiais, que serão rotulados como vórtices da espécie B, ambas comensuráveis ao potencial periódico de ancoragem. Essa é a idéia básica do modelo. Assumimos ainda que essas duas sub-redes movem-se uma em relação à outra como corpos rígidos, ou seja, os modos internos de cada sub-rede não são excitados. Tal afirmação se justifica pois em geral as forças internas de cada sub-rede se cancelam por simetria (embora isso não seja verdade para algumas configurações de vórtices intersticiais). Assim, conseguimos reduzir o problema de muitos corpos a um problema de dois corpos.

Para pequenas oscilações, vórtices da espécie A estão elasticamente conectados

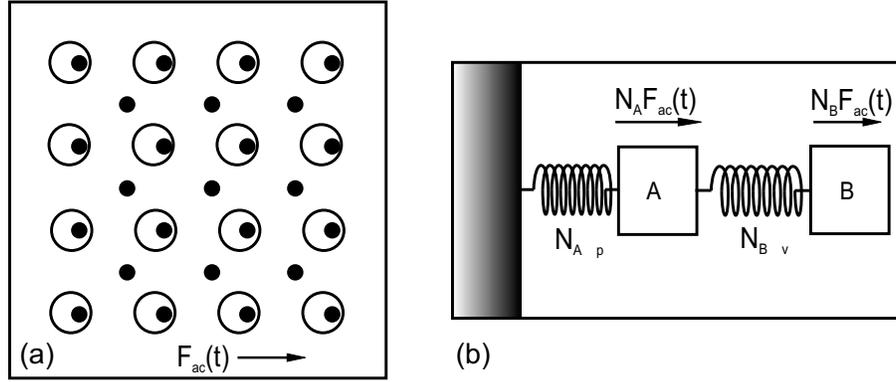


Figura 4.5: (a) Representação esquemática de uma rede de vórtices para  $B = 2B_\Phi$  sob a ação de uma força uniforme  $F_{ac}$  (os círculos vazios representam os centros aprisionados e os cheios representam os vórtices). Note que as sub-redes de vórtices ancorados e de vórtices intersticiais são deslocadas de suas posições de equilíbrio como corpos rígidos, i.e., sem sofrer deformações. Esse problema pode ser mapeado no análogo mecânico mostrado em (b), onde  $\kappa_p$  e  $\kappa_v$  representam as constantes elásticas de acoplamento vórtices-rede de defeitos e vórtices ancorados - vórtices intersticiais, respectivamente (veja texto).

à amostra supercondutora através do potencial de ancoragem, com uma constante elástica característica  $\kappa_p$ , e vórtices da espécie B estão conectados à sub-rede A via interações vórtice-vórtice, com uma constante elástica característica  $\kappa_v$ . Este problema é análogo ao problema mecânico de dois blocos A e B de massa desprezível (em um meio de alta viscosidade) conectados por uma mola de constante  $\kappa_v$ , um dos quais (bloco A) está conectado a uma parede por uma mola de constante  $\kappa_p$  (veja Fig. 4.5). Note que, como a força motriz é a mesma para todos os vórtices, a força total em cada sub-rede (ou bloco) será  $N_A \mathbf{F}$  para a rede A e  $N_B \mathbf{F}$  para a rede B, onde  $N_{A(B)}$  é o número de vórtices na sub-rede A(B). Assim, as equações que descrevem as oscilações do centro de massa de cada sub-rede são

$$\eta \dot{u}_A = -\kappa_p u_A - n_B \kappa_v (u_A - u_B) + \phi_0 J_{ac}(t), \quad (4.14)$$

$$\eta \dot{u}_B = -\kappa_v (u_B - u_A) + \phi_0 J_{ac}(t), \quad (4.15)$$

onde  $n_B = N_B/N_A$  é o número de ocupação de vórtices intersticiais. As equações (4.14) e (4.15) constituem um sistema de equações diferenciais lineares não-homogêneas de 1ª ordem. Analogamente à solução da Eq. (4.6), aqui as soluções de estado

estacionário também são do tipo  $u_A(t) = u_A(\omega)e^{-i\omega t}$  e  $u_B(t) = u_B(\omega)e^{-i\omega t}$ , onde  $u_A(\omega)$  e  $u_B(\omega)$  são números complexos que calcularemos a seguir. Substituindo estas soluções harmônicas em (4.14) e (4.15) temos

$$\begin{aligned} (-i\omega + \kappa_p + n_B\kappa_v)u_A(\omega) - n_B\kappa_v u_B(\omega) &= \phi_0 J, \\ -\kappa_v u_A(\omega) + (-i\omega + \kappa_v)u_B(\omega) &= \phi_0 J. \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema obtemos:

$$u_A(\omega) = \frac{n\omega_v - i\omega}{\omega_v\omega_p - \omega^2 - i\omega(n\omega_v + \omega_p)} \frac{\Phi_0 J}{\eta}, \quad (4.16)$$

$$u_B(\omega) = \frac{n\omega_v + \omega_p - i\omega}{\omega_v\omega_p - \omega^2 - i\omega(n\omega_v + \omega_p)} \frac{\Phi_0 J}{\eta}. \quad (4.17)$$

Aqui,  $n = N/N_A$  é o número de ocupação total dos vórtices e as frequências  $\omega_p = \kappa_p/\eta$  e  $\omega_v = \kappa_v/\eta$  são as frequências características do acoplamento vórtice-rede de ancoragem e vórtice-vórtice, respectivamente. Note que toda a dinâmica é determinada apenas por essas duas frequências características. O deslocamento do centro de massa é descrito por

$$u(t) = u(\omega)e^{-i\omega t}, \quad u(\omega) = \frac{N_A u_A(\omega) + N_B u_B(\omega)}{N}. \quad (4.18)$$

### 4.3.2 Cálculo do acoplamento vórtice-vórtice

A frequência de acoplamento vórtice-vórtice pode ser calculada a partir do potencial  $U^v$  gerado pela rede de vórtices ancorados, considerando pequenos deslocamentos de um vórtice intersticial teste em relação a um mínimo deste potencial.  $U^v$  pode ser calculado a partir do potencial de interação entre um par de vórtices. Para vórtices pontuais em filmes finos o potencial apropriado é  $E_{vv}(r) = \int \frac{d^2k}{4\pi^2} \tilde{V}(k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ , onde  $\tilde{V}(k) = 2\pi\epsilon/(k^2 + 2\Lambda^{-1}k)$ ,  $\epsilon = \Phi_0^2/2\pi\lambda^2$  é a escala de energia e  $\Lambda = \lambda^2/d$  é o comprimento de penetração efetivo. Assim, a energia potencial resultante da rede de vórtices ancorados pode ser escrita como:

$$U^v(x, y) = 2\pi\epsilon \frac{\Lambda^2}{a_p^2} \sum_{\mathbf{G}} \frac{e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} F(G)}{G^2 + 2\Lambda^{-1}G}, \quad (4.19)$$

onde  $\mathbf{G} = \frac{\pi}{a_p}(m, n)$  são os vetores da rede recíproca dos centros de ancoragem e  $F(G)$  é a função de truncamento necessária para eliminar as divergências e incluir o efeito do núcleo dos vórtices (Clem, 1974).

No limite de altas densidades ( $a/\pi \ll \Lambda$ ), a interação vórtice-vórtice é essencialmente logarítmica,  $V(r) = \epsilon \ln(r)$ , e a Eq. (4.19) pode ser reescrita como uma soma rapidamente convergente, semelhante àquela que usamos na Sec. 4.1. Para uma rede de centros de ancoragem quadrada temos

$$U^v(x, y) = \epsilon\pi \frac{y^2}{a_p^2} - \frac{\epsilon}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \ln \frac{\cosh 2\pi(\frac{y}{a_p} + k) - \cos \frac{2\pi x}{a_p}}{\cosh 2\pi k}. \quad (4.20)$$

Os pontos de mínimo deste potencial são  $(x, y) = \frac{a_p}{2}(m, n)$ , onde  $m$  e  $n$  são inteiros. A constante elástica para um vórtice teste localizado em uma dessas posições de mínimo corresponde à segunda derivada de  $U^v$  avaliada em um destes pontos:

$$\kappa_v = \frac{2\pi^2\epsilon}{a_p^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \cosh \pi(2k + 1)} = \frac{\pi\epsilon}{a_p^2}. \quad (4.21)$$

### 4.3.3 Espectro de frequência da resistividade e do comprimento de penetração

A resistividade ac devida ao movimento dos vórtices é dada por  $\rho_{ac}(\omega) = \frac{v(t)B}{J_{ac}(t)} = -i\omega \frac{u(\omega)B}{J}$ . Usando a Eq. (4.18), podemos escrevê-la como a soma de duas contribuições provenientes das sub-redes A e B:

$$\rho_{ac}(\omega) = \rho_A(\omega) + \rho_B(\omega). \quad (4.22)$$

onde, usando as Eqs. (4.16) e (4.17),

$$\rho_A(\omega) = -i\omega \frac{u_A(\omega)B_\Phi}{J} = \frac{-\omega^2 - in\omega\omega_v}{\omega_v\omega_p - \omega^2 - i\omega(n\omega_v + \omega_p)} \rho_{FF}^A, \quad (4.23)$$

$$\rho_B(\omega) = -i\omega \frac{u_B(\omega)(B - B_\Phi)}{J} = \frac{-\omega^2 - i\omega(n\omega_v + \omega_p)}{\omega_v\omega_p - \omega^2 - i\omega(n\omega_v + \omega_p)} \rho_{FF}^B \quad (4.24)$$

são as resistividades devidas ao movimento da rede de vórtices ancorados e da rede de vórtices intersticiais, respectivamente,  $\rho_{FF}^A = \frac{B_\Phi}{B_{c2}} \rho_n = \frac{N_A}{N} \rho_{FF}$  e  $\rho_{FF}^B = \frac{B - B_\Phi}{B_{c2}} \rho_n = \frac{N_B}{N} \rho_{FF}$ . A resistividade total é, então,

$$\rho_{ac}(\omega) = \frac{-\omega^2 - i\omega(n\omega_v + \frac{n_B}{n}\omega_p)}{\omega_v\omega_p - \omega^2 + i\omega(n\omega_v + \omega_p)} \rho_{FF}. \quad (4.25)$$

Podemos usar procedimento análogo para obter o comprimento de penetração complexo  $\lambda_{ac}^2(\omega) = \frac{\rho_{ac}(\omega)}{-i\omega\mu_0} = \frac{B}{\mu_0 J} u(\omega)$  e as respectivas contribuições das sub-redes A e B, i.e.

$$\lambda_{ac}^2(\omega) = \lambda_A^2(\omega) + \lambda_B^2(\omega), \quad (4.26)$$

onde

$$\lambda_A^2(\omega) = \frac{B_\Phi}{\mu_0 J} u_A(\omega), \quad (4.27)$$

$$\lambda_B^2(\omega) = \frac{B - B_\Phi}{\mu_0 J} u_B(\omega). \quad (4.28)$$

Na Fig. 4.6, mostramos espectros de frequência da resposta linear de redes de vórtices com densidades  $1 \leq n \leq 2$  em uma potencial de ancoragem tal que  $\omega_p = 8\omega_v$ . As curvas de  $\rho_{ac}(\omega)$  [(a) parte real  $\rho'$  e (b) parte imaginária  $\rho''$ ] e de  $\lambda_{ac}^2(\omega)$  [(c) parte real e (d) parte imaginária] foram obtidas a partir das Eqs. (4.25) e (4.26).

Note que, assim como no modelo de uma partícula,  $\rho_{ac} = \rho_{FF}$  e  $\lambda_{ac}(\omega) = \sqrt{i \frac{\rho_{FF}}{\omega\mu_0}} = (1 + i) \frac{\delta}{\sqrt{2}}$  no limite de altas frequências ( $\omega \gg \omega_p$ ). No regime de baixas frequências,  $\omega \ll \omega_v$ , a resposta é não dissipativa,  $\rho \approx 0$ , e caracterizada por um comprimento de penetração real dado por  $\lambda_{ac}(\omega \rightarrow 0) = \sqrt{\frac{B}{\mu_0 J} u(\omega \rightarrow 0)}$ . Usando

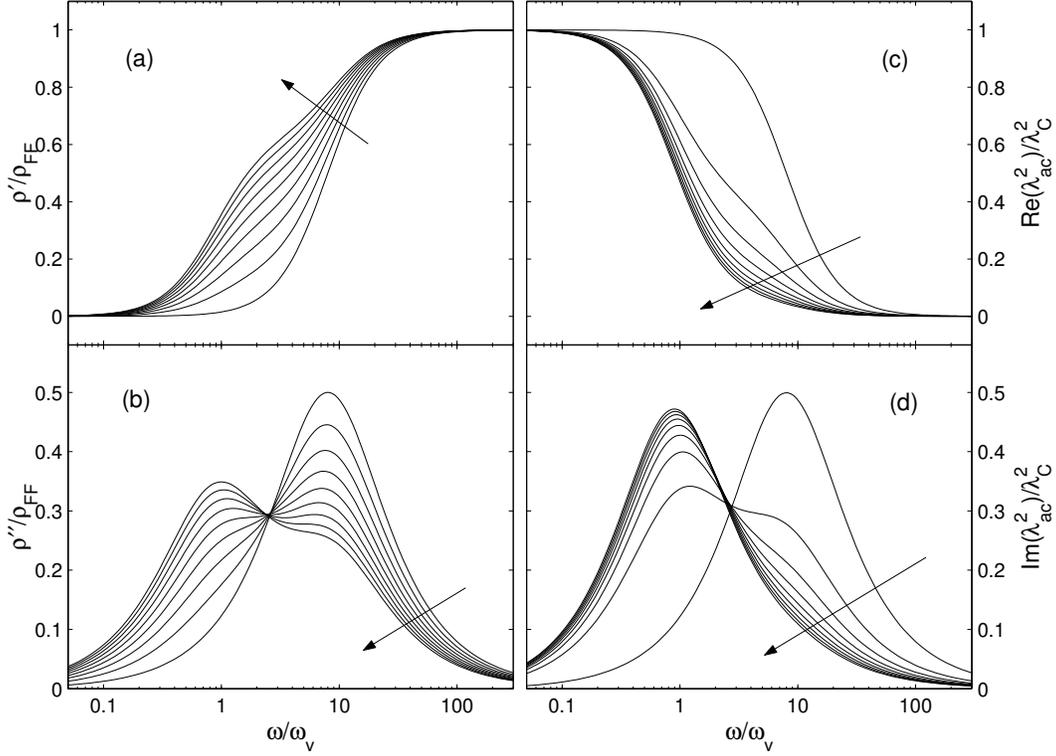


Figura 4.6: Espectro de frequência da resistividade ac e do comprimento de penetração para campos entre o primeiro e segundo campos de *matching*, com  $n = 1, 1\frac{1}{8}, 1\frac{1}{4}, \dots, 2$ . A seta indica o sentido crescente de  $n$ . Adotamos como escala de frequência a frequência de acoplamento vórtice-vórtice,  $\omega_v$ . A frequência de ancoragem escolhida foi  $\omega_p = 8\omega_v$ .

a Eq. (4.18), vemos que  $u(\omega \rightarrow 0) = \phi_0 J / \alpha_L^{\text{eff}}$ , onde

$$\alpha_L^{\text{eff}} = \frac{n\alpha_v\alpha_p}{n^2\alpha_v + n_B\alpha_p} \quad (4.29)$$

é a constante elástica (de Labusch) efetiva do sistema composto. Assim, o comprimento de penetração no modelo de duas espécies é do tipo Campbell, com

$$\lambda_C \equiv \lambda_{ac}(\omega \rightarrow 0) = \sqrt{\frac{\phi_0 B}{\mu_0 \alpha_L^{\text{eff}}}}. \quad (4.30)$$

Diferentemente dos sistemas que podem ser descritos pelo modelo de uma partícula, há aqui um terceiro regime dinâmico, compreendido entre as frequências  $\omega_v$  e  $\omega_p$ . Neste regime, a força restauradora de ancoragem,  $-\eta\omega_p \mathbf{u}$ , domina sobre

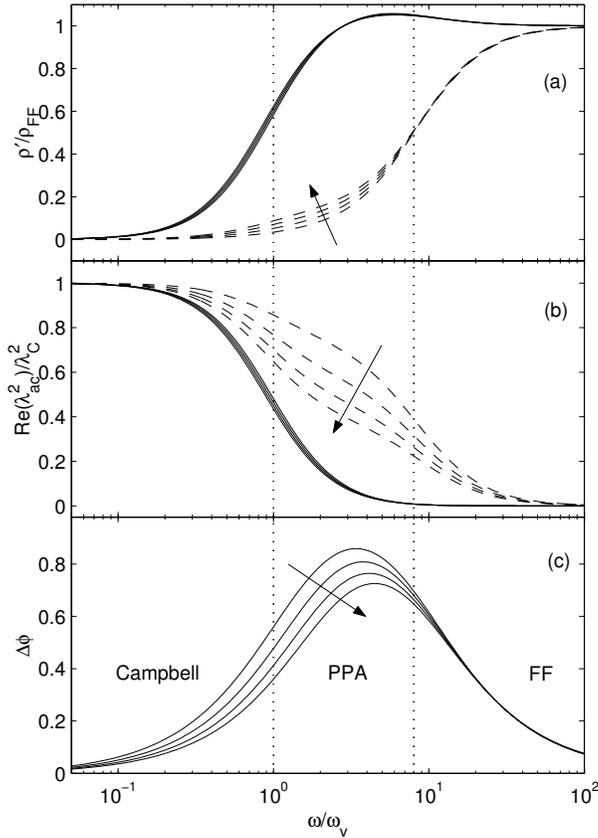


Figura 4.7: Espectro de frequência da resistividade ac e do comprimento de penetração para campos entre o primeiro e segundo campos de *matching*, com  $n = 1, 1\frac{1}{8}, 1\frac{1}{4}, \dots, 2$ . A seta indica o sentido crescente de  $n$ . Adotamos como escala de frequência a frequência de acoplamento vórtice-vórtice,  $\omega_v$ . A frequência de ancoragem escolhida foi  $\omega_p = 8\omega_v$ .

todas as outras forças, de modo que vórtices ancorados respondem de maneira bastante distinta dos vórtices intersticiais. A distinção entre as dinâmicas das duas espécies de vórtices pode ser vista de modo mais claro na Fig. 4.7. Perceba que em altas frequências,  $\omega \gg \omega_p$ , ambas as espécies de vórtices estão no regime de *flux-flow*, enquanto que em baixas frequências,  $\omega \ll \omega_v$ , ambas se encontram no regime Campbell. Porém, em frequências intermediárias,  $\omega_v < \omega < \omega_p$ , os vórtices ancorados têm sua resposta dominada pelo potencial de ancoragem, com baixa resistividade e um aumento no comprimento de penetração, enquanto os vórtices intersticiais, que não sofrem ação direta da força de ancoragem, parecem continuar no regime de *flux-flow*, com alta resistividade. Neste regime híbrido, os vórtices intersticiais apresentam um acentuado atraso de fase em relação aos vórtices ancorados, como mostrado na Fig. 4.7(c). Isto ocorre porque, como discutido anteriormente, no regime de flux-flow, o movimento dos vórtices é defasado de  $\pi/2$  em relação à força excitadora, enquanto que, no regime quase-estático de

Campbell, o movimento dos vórtices está em fase com a excitação.

#### 4.3.4 Simulação numérica e regime de validade do modelo de duas espécies

Como vimos o modelo de duas espécies é apropriado para configurações de vórtices em que há no máximo um vórtice intersticial para cada célula unitária da rede de ancoragem, ou seja, para densidades de fluxo entre o primeiro e o segundo campos de *matching*. Isso, porém, não significa que o modelo será bem sucedido para todas as configurações de vórtices nesse regime de campo. Na construção do modelo, impusemos severas restrições de simetria que podem não ser satisfeitas, mesmo que os vórtices formem uma rede perfeita.

Para avaliar a validade do modelo de duas espécies, fizemos simulações diretas, pelo método de dinâmica molecular, da resposta da rede de vórtices a uma pequena excitação ac para várias densidades de vórtices. As simulações consistem em integrar numericamente as equações acopladas do movimento, Eq. (4.13). O potencial de interação vórtice-vórtice é dado pela Eq. (4.1) e o potencial de ancoragem, pela Eq. (4.2).

É importante verificarmos se a resposta da rede de vórtices no regime linear é isotrópica, ou seja, se as constantes elásticas são de fato escalares bem definidos (ou ainda, numa visão mais geométrica, se o potencial sentido por um vórtice próximo a sua posição de equilíbrio é um parabolóide de revolução). Um maneira simples de implementar esta verificação é considerar uma força excitadora girante, i.e., ao invés de oscilar em apenas uma direção, a força ac tem duas componentes ortogonais que oscilam na mesma frequência mas com uma defasagem de  $\pi/2$ :

$$\mathbf{J}_{ac}(t) = \frac{\hat{x} - i\hat{y}}{\sqrt{2}} J e^{-i\omega t} \quad (4.31)$$

Definida desta forma, a densidade de corrente tem módulo constante e gira com uma frequência angular  $\omega$ . Assim, se a resposta for isotrópica, espera-se que o centro de massa dos vórtices efetue uma órbita circular. Caso contrário, haverá uma excentricidade na órbita, de modo que a constante elástica de Labusch não pode ser definida unicamente para todas as direções.

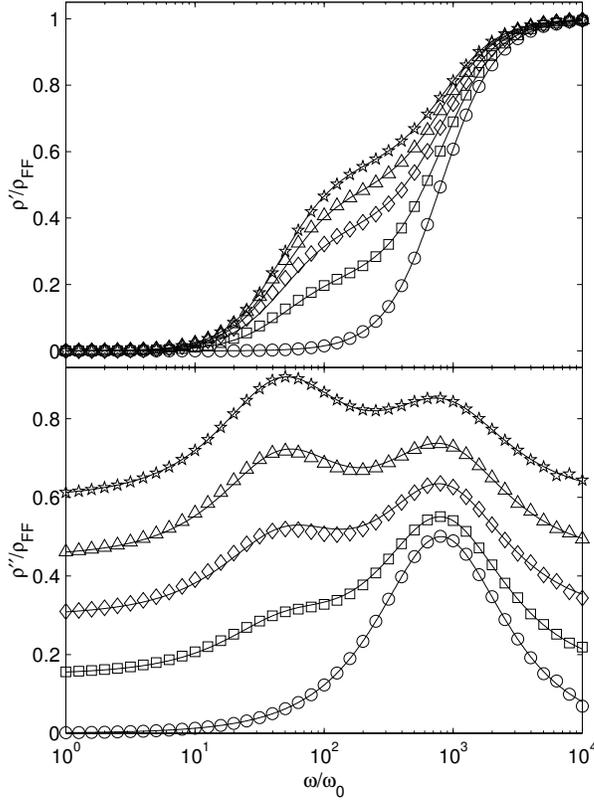


Figura 4.8: Partes real  $\rho'$  (painel superior) e imaginária  $\rho''$  (painel inferior) da resposta ac para um potencial periódico de ancoragem com periodicidade  $a_p = \Lambda/4$  e força restauradora de ancoragem  $\alpha_p = 8\pi\epsilon/a_p^2$ . Os símbolos são os resultados da simulação de dinâmica molecular para  $n = B/B_\Phi = 1$  ( $\circ$ ), 1.25 ( $\square$ ), 1.5 ( $\diamond$ ), 1.75 ( $\triangle$ ) e 2 ( $\star$ ). As linhas cheias correspondem ao resultado analítico do modelo de duas espécies [Eq. 4.25]. Nenhum parâmetro de ajuste foi usado. Os dados de  $\rho''$  foram deslocados verticalmente para melhor visualização.

Para simplificar a análise dos dados, usaremos as seguintes escalas. (i) Energia:  $\epsilon = \phi_0^2/2\pi\lambda^2$ ; (ii) comprimento:  $\Lambda = \lambda^2/d$ ; (iii) tempo:  $\tau_0 = \eta\lambda/\epsilon$ ; e (iv) frequência:  $\omega_0 = \tau_0^{-1}$ . Como condições iniciais da simulação, tomamos as configurações de equilíbrio obtidas pelo procedimento de *annealing* simulado na Sec. 4.1. Para garantir que um estado estacionário foi atingido, deixamos o sistema relaxar entre o instante inicial  $t = 0$  e o instante  $t = 128\tau_0$ . Na região de frequências que estudamos ( $\omega_0 \leq \omega \leq 10^4\omega_0$ ), verificamos que, após este intervalo de relaxação, a dinâmica encontra-se num regime estacionário, com os vórtices repetindo seu movimento a cada período de oscilação da força excitadora. Todas as médias de interesse foram calculadas a partir do instante  $t = 128t_0$  num intervalo de tempo mínimo igual a um período de oscilação. Como o movimento dos vórtices no regime estacionário é periódico, seria redundante considerarmos mais de um período.

Os dados da resistividade complexa ( $\rho_{ac} = \rho' - i\rho''$ ), obtida da simulação de

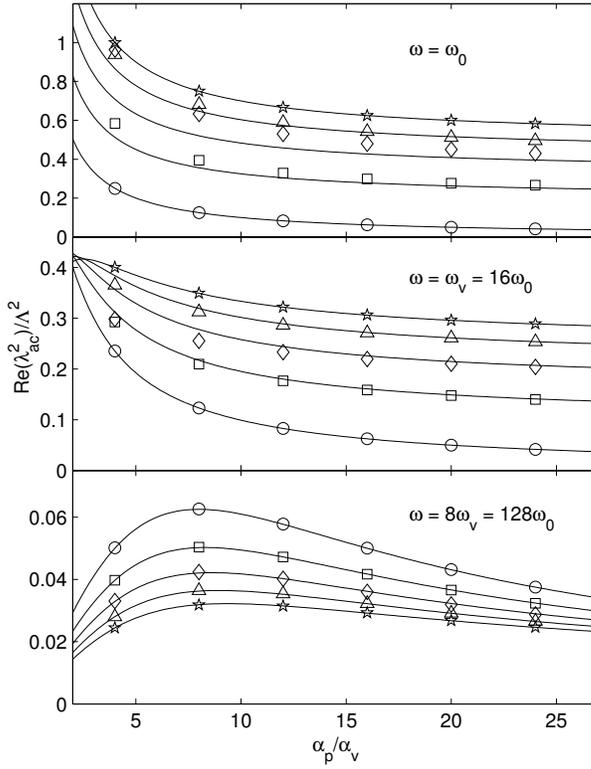


Figura 4.9: Parte real do comprimento de penetração ac  $\lambda_{ac}$  em função de  $\kappa_p$  para os valores de frequência  $\omega = \omega_0$ ,  $\omega_v$ , e  $8\omega_v$  (de cima para baixo). Os símbolos têm o mesmo significado que na Fig. 4.8. As linhas foram obtidas do modelo de duas espécies usando a Eq. 4.26.

dinâmica molecular para  $n = 1$  ( $\circ$ ),  $1\frac{1}{4}$  ( $\square$ ),  $1\frac{1}{2}$  ( $\diamond$ ),  $1\frac{3}{4}$  ( $\triangle$ ) e  $2$  ( $\star$ ), são apresentados na Fig. 4.8 e comparados com as respectivas curvas obtidas diretamente do modelo de duas espécies [Eq. (4.25)]. Os parâmetros do potencial periódico de ancoragem usados foram  $\alpha_p = 16\pi\epsilon/a_p^2$ ,  $a_p = 0.25\Lambda$  e  $r_p = 0.1a_p$ , o que produz um potencial de ancoragem forte em relação à energia elástica da rede de vórtices. Para estes valores, as linhas do modelo de duas espécies se ajustam quase que perfeitamente aos dados numéricos, embora nenhum parâmetro livre de ajuste tenha sido usado.

Realizando as mesmas simulações para diferentes forças de ancoragem (diferentes valores de  $\alpha_p$ ), observamos que para ancoragens mais fracas a concordância entre os dados numéricos e o modelo de duas espécies não é tão boa. Tal divergência é mais crítica em frequências mais baixas, onde a força de acoplamento vórtice-vórtice é mais relevante.

Para uma análise mais detalhada da concordância entre o modelo analítico e as simulações, calculamos a parte real do comprimento de penetração para vários

valores de  $\alpha_p$  em diferentes regimes de frequência. Optamos por analisar  $\lambda_{ac}$  ao invés de  $\rho_{ac}$  pois em baixas frequências a resistividade tende a zero, o que dificulta a comparação entre os dados numéricos e analíticos. Ao contrário,  $\lambda_{ac}$  tende a um valor máximo ( $\lambda_C$ ) neste limite. Os dados numéricos para  $\Re(\lambda_{ac}^2)$  em função de  $\alpha_p$  são mostrados na Fig. 4.9 para os valores de frequência  $\omega = \omega_0$  (em cima),  $\omega_v = 16\omega_0$  (meio) e  $8\omega_v = 128\omega_0$  (em baixo). Os símbolos correspondem às diferentes densidades de vórtices (entre  $n = 1$  e  $n = 2$ ), tendo o mesmo significado que na Fig. 4.8. Curvas teóricas (linhas) obtidas do modelo de duas espécies também são mostradas e comparadas com os respectivos dados numéricos. Observe que para campos de matching inteiros,  $n = 1$  e  $n = 2$ , o modelo se ajusta perfeitamente aos dados numéricos em todas as faixas de frequência. Isso se deve ao fato de que essas configurações são altamente simétricas e satisfazem a suposição de que as forças internas de cada sub-rede se cancelam totalmente. Para campos de matching fracionários, no entanto, as tensões internas nas sub-redes não são totalmente anuladas. Isso dá origem às discrepâncias entre os cálculos analíticos e numéricos encontradas na Fig. 4.9 para  $n = 1\frac{1}{4}$ ,  $1\frac{1}{2}$  e  $1\frac{3}{4}$ . Note que as discrepâncias ocorrem para frequências menores ou da ordem de  $\omega_v$  e para ancoragem fraca, i.e, para  $\alpha_p$  comparável com  $\alpha_v$ .

Na Fig. 4.10, mostramos as partes real e imaginária das contribuições da rede de vórtices ancorados (pentagramas) e da rede de vórtices intersticiais (losangos) para o comprimento de penetração complexo (painel superior) e a resistividade complexa (painel inferior). Os dados foram obtidos da simulação realizada para  $n = 2$  e as linhas foram obtidas através das Eqs. (4.27) e (4.28) para  $\lambda_A^2$  e  $\lambda_B^2$ , respectivamente, e as Eqs. (4.23) e (4.24) para  $\rho_A$  e  $\rho_B$ , respectivamente, também usando  $n = 2$ . Os comprimentos de penetração ac estão normalizados pelos respectivos limites de baixa frequência ( $\lambda_C^{(A)}$  e  $\lambda_C^{(B)}$ ) e as resistividades, pelos respectivos limites de alta frequência ( $\rho_{FF}^{(A)}$  e  $\rho_{FF}^{(B)}$ ). Como discutido anteriormente, as frequências  $\omega_v$  e  $\omega_p$  definem três regimes dinâmicos: o regime de *flux-flow*, com ambas as sub-redes se movendo livremente; o regime dominado pelo PPA, onde os vórtices aprisionados nas armadilhas artificiais são fortemente ancorados enquanto os vórtices intersticiais se movem livremente, como no regime *flux-flow*; e o regime

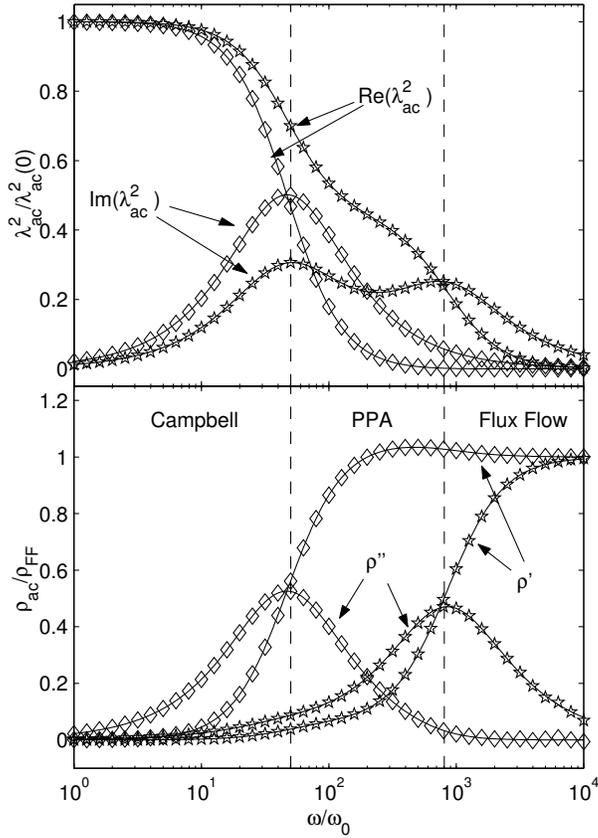


Figura 4.10: Contribuições parciais da rede de vórtices ancorados ( $\star$ ) e da rede de vórtices intersticiais ( $\diamond$ ) para o comprimento de penetração ac (em cima) e a resistividade ac (em baixo) para  $B = 2B_\Phi$ . Os comprimentos de penetração estão normalizados pelos respectivos limites de baixa frequência. As linhas intermitentes indicam as frequências características  $\omega_v$  (esquerda) e  $\omega_p$  (direita), as quais definem três regimes dinâmicos (veja texto).

quase-estático de Campbell, onde ambas as sub-redes estão fortemente ancoradas e respondem com uma imitação do efeito Meissner.



## Capítulo 5

# Transporte e fases dinâmicas de vórtices em nanoestruturas periódicas

Vimos na Sec. 2.3 que vórtices movidos por uma força de Lorentz para longe do equilíbrio interagem não só com a desordem térmica, mas também com a desordem intrínseca da matriz supercondutora. O efeito combinado das desordens térmica e material dão origem a uma variedade de fases dinâmicas e transições entre estas fases. Assim, vórtices, nestas condições, constituem um sistema ideal para estudar fases de não-equilíbrio.

Um sistema dinâmico igualmente interessante, porém menos estudado, é o sistema de vórtices em movimento interagindo com uma matriz periódica, como filmes supercondutores com nanoestruturas periódicas ou redes de junções Josephson. Assim como os sistemas de vórtices em meios desordenados, este sistema é caracterizado por uma variedade de fases dinâmicas. Mas aqui, o fato de o “substrato” sobre o qual os vórtices se movem ser periódico e não desordenado deve introduzir diferenças importantes nas propriedades de transporte dos vórtices e na natureza das diferentes fases de não-equilíbrio.

A maioria dos estudos realizados sobre o movimento de vórtices em substratos periódicos são recentes e essencialmente numéricos. Reichhardt, Olson e Nori (1997; 1998b) foram os primeiros autores a tratar o problema específico do movimento de vórtices sobre uma rede periódica de armadilhas. Eles realizaram uma série de simulações de dinâmica molecular a temperatura nula e encontra-

ram uma rica variedade de fases dinâmicas. Nenhuma das fases, no entanto, apresenta ordem de longo alcance ou quase-longo alcance. Posteriormente, Carneiro (1999, 2000), Marconi & Dominguez (1998, 2001) e Reichhardt & Zimányi (2000), através de simulações de dinâmica molecular a temperatura finita, mostraram que os vórtices se reordenam em uma rede, comensurável ou incomensurável com o potencial de ancoragem, quando movidos a uma velocidade suficientemente alta. Assim, as fases plásticas de alta velocidade encontradas por Reichhardt et al. (1997, 1998b) são provavelmente fases metaestáveis que podem ser corrigidas termicamente. Este fenômeno de cristalização dinâmica é semelhante àquele encontrado para o movimento de vórtices em meios desordenados (veja Sec. 2.3). Entretanto, não se sabe ainda o quão longe se pode levar esta analogia entre vórtices em meios desordenados e vórtices em meios periódicos. Além disso, a natureza da transição ainda não é conhecida e não se sabe se pode ser dado um caráter termodinâmico a estas fases dinâmicas.

Neste capítulo, propomos um modelo elástico simples para resolver as equações de Langevin que descrevem o movimento de uma rede de vórtices empurrada por uma força motriz sobre um potencial periódico. Usamos este modelo para calcular curvas características de voltagem–corrente e para a estimar a curva de cristalização dinâmica da rede vórtices, i.e. a fronteira entre as fases dinâmicas ordenadas e desordenadas encontradas em simulações numéricas.

## 5.1 Fusão da rede de vórtices revisitada: o modelo *cage* 2D

Como vimos na Sec. 2.3, o modelo *cage* propicia uma maneira simples de estudar flutuações em redes de vórtices no limite elástico. Podemos usar o mesmo modelo para obter a temperatura de fusão de uma rede de vórtices em filmes finos.

Assim como no caso 3D (Sec. 2.3), consideramos flutuações de um único vórtice, estando os demais vórtices da rede fixos em suas posições de equilíbrio. Se a espessura do filme  $d \ll \lambda$ , os vórtices podem ser tratados como linhas rígidas de comprimento  $d$ , ou seja, a auto-energia de cada vórtice é sempre a mesma e igual a  $d\epsilon_v$ , onde  $\epsilon_v$  é a energia de linha do vórtice dada pela Eq. 2.33. Assim, a única

contribuição para a variação da energia do vórtice engaiolado é devida à interação com seus vizinhos. O potencial efetivo sentido pelo vórtice engaiolado é essencialmente parabólico próximo à sua posição de equilíbrio e dado por  $E_{int} = \frac{1}{2}\kappa r^2$ . Consideraremos aqui densidades de vórtices tais que o espaçamento entre vórtices  $a \ll \Lambda = \lambda^2/d$ , ou seja, interações vórtice-vórtice logarítmicas [ $E_{vv} = d\epsilon \ln(r/\lambda)$ ]. Este tipo de interação é idêntico ao limite  $a \ll \lambda$  da interação de Bessel entre linhas de vórtices em 3D. Assim,  $\kappa$  é dado aproximadamente pela Eq. (2.56), o que resulta

$$\kappa = d \frac{\epsilon}{a^2} = \frac{\Phi_0^2}{2\pi\mu_0\Lambda a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\Phi_0 B}{2\pi\mu_0\Lambda}, \quad (5.1)$$

onde, na última igualdade, consideramos uma rede de vórtices triangular. Usando o teorema da equipartição da energia, temos  $k_B T = \frac{1}{2}\kappa \langle u^2 \rangle$ . Aplicando o critério de Lindemann, obtemos a temperatura de fusão em duas dimensões (2D),

$$k_B T_f = \frac{1}{2} \kappa c_L^2 a^2 = \frac{1}{2} \frac{c_L^2 \Phi_0^2}{2\pi\mu_0\Lambda}. \quad (5.2)$$

Assim, em duas dimensões, a temperatura de fusão de equilíbrio é independente de  $B$ . Este resultado é consistente com a teoria de Kosterlitz-Thouless (Kosterlitz, 1974; Kosterlitz & Thouless, 1973) de transições de fase em sistemas bidimensionais. Esta teoria propõe que a fusão de um cristal bidimensional ocorre pela quebra e proliferação de dislocações. A aplicação desta teoria a uma rede bidimensional de vórtices resulta em uma temperatura de fusão dada por (Doniach & Huberman, 1979; Fisher, 1980)

$$k_B T_{KT} = \frac{A_1}{16\pi\sqrt{3}} \frac{\Phi_0^2}{2\pi\mu_0\Lambda}, \quad (5.3)$$

onde  $A_1$  é uma constante de renormalização dos módulos elásticos compreendida no intervalo  $0,4 \lesssim A_1 \lesssim 0,75$  (Fisher, 1980). Comparando as Eqs. (5.2) e (5.3), obtemos que o modelo *cage* e a teoria de quebra de dislocações proporcionam o mesmo resultado para a temperatura de fusão se a constante de Lindemann no modelo *cage* for  $c_L \approx 0,095 - 0,13$ . Este resultado está consistente com os valores empíricos de  $c_L$  usualmente encontrados ( $c_L \approx 0,1 - 0,2$ ). Daqui em diante,

adotaremos o valor  $c_L = 0,12$  quando o valor numérico de  $c_L$  se fizer necessário.

Podemos usar o modelo *cage* 2D para obter uma solução aproximada das equações de Langevin para o sistema de vórtices em um filme homogêneo. A equação de Langevin que descreve as flutuações de um vórtice  $l$  arbitrário,  $\mathbf{u}_l \mathbf{r}_l(t) - \mathbf{R}_l$ , onde  $\mathbf{r}_l(t)$  é a posição do vórtice no instante  $t$  e  $\mathbf{R}_l$  sua posição de equilíbrio na rede, é

$$\eta \dot{\mathbf{u}}_l = \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_l^{v-v}(r_{lj}) + \mathbf{\Gamma}_l(t). \quad (5.4)$$

No limite de pequenas flutuações, podemos usar a aproximação harmônica de campo médio do modelo *cage*, eliminando assim o acoplamento entre as equações de Langevin.

$$\eta \dot{\mathbf{u}}_l = -\kappa \mathbf{u}_l + \mathbf{\Gamma}_l(t). \quad (5.5)$$

Aplicando a transformação de Fourier  $\mathbf{u}(t) = \int \frac{d\omega}{dt} \mathbf{u}(\omega) e^{-i\omega t}$  em ambos os lados de (5.5), obtemos:

$$i\omega \eta \mathbf{u}_l(\omega) = -\kappa \mathbf{u}_l(\omega) + \mathbf{\Gamma}_l(\omega),$$

ou

$$\mathbf{u}_l(\omega) = \frac{\mathbf{\Gamma}_l(\omega)}{i\omega \eta + \kappa}, \quad (5.6)$$

onde  $f(\omega) = \int dt f(t) e^{i\omega t}$ .  $\mathbf{u}_l(\omega)$  é também uma variável gaussiana de média zero. A média quadrática das flutuações do vórtice, ou seja, a média de  $|\mathbf{u}_l(\omega)|^2$  sobre todas as frequências e sobre a força aleatória, será então

$$u^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \langle |\mathbf{u}_l(\omega)|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\langle \mathbf{\Gamma}_l(\omega) \cdot \mathbf{\Gamma}_l(-\omega) \rangle}{\omega^2 \eta^2 + \kappa^2}, \quad (5.7)$$

onde usamos  $\bar{f}(\omega) = f(-\omega)$  para  $f(t)$  real. Usando o teorema da flutuação-dissipação, Eq. (A.3), obtemos

$$u^2 = 2\eta k_B T \frac{1}{\eta \kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta^2 + 1} = \frac{2k_B T}{\kappa}, \quad (5.8)$$

que coincide com o resultado obtido pelo teorema da equipartição de energia.

## 5.2 O modelo *cage* dinâmico

O modelo *cage* de equilíbrio, como descrito acima, considera deslocamentos do vórtice de sua posição de rede produzidos por flutuações térmicas. Quando os vórtices são empurrados por uma força externa, a interação com inhomogeneidades materiais ou artificiais também pode deformar a rede de vórtices ou mesmo destruir sua ordem topológica. Para esta situação de não-equilíbrio, devemos construir um modelo que inclua tanto flutuações térmicas quanto flutuações dinamicamente induzidas pela interação com a matriz supercondutora.

Nossa proposta é adaptar o modelo *cage* para incluir tais flutuações dinâmicas e descrever, de maneira simples, as propriedades de transporte e as possíveis fases e transições de fases dinâmicas de um sistema de vórtices em filmes com potenciais periódicos de ancoragem.

### 5.2.1 Equações do movimento

Iniciamos escrevendo as equações de Langevin para  $N_v$  vórtices em um potencial de ancoragem periódico bidimensional, que representa a interação com uma rede regular de armadilhas, e sob a ação de uma força motriz  $\mathbf{f}_d$ :

$$\eta \dot{\mathbf{r}}_l = \mathbf{f}_d + \mathbf{F}_l^{\mathbf{v}-\mathbf{v}} + \mathbf{F}_p(\mathbf{r}_l) + \mathbf{\Gamma}_l(t), \quad (5.9)$$

onde

$$\mathbf{F}_p(\mathbf{r}_l) = \sum_{\mathbf{Q}} (-i\mathbf{Q}) U_{\mathbf{Q}} e^{i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_l} \quad (5.10)$$

representa a força local de ancoragem, i.e., a força de interação de um vórtice com a rede periódica de armadilhas,  $\mathbf{Q}$  são os vetores da rede recíproca da rede de armadilhas e  $U_{\mathbf{Q}}$  são as componentes de Fourier do potencial efetivo de ancoragem. Para uma rede quadrada de centros de ancoragem de periodicidade  $a_p$ , por exemplo, temos  $\mathbf{Q} = \frac{2\pi}{a_p}(m, n)$ , onde  $m$  e  $n$  são inteiros.

Supomos, inicialmente, que o centro de massa (c.m.) dos vórtices se move com velocidade constante dada por  $\mathbf{v} = \frac{1}{N_v} \sum_{j=1}^{N_v} \dot{\mathbf{r}}_j(t)$ . Isso nos permite transformar o sistema de referência de laboratório para o do centro de massa através da equação

$$\mathbf{r}_l(t) = \mathbf{R}_l + \mathbf{v}t + \mathbf{u}_l(t). \quad (5.11)$$

$\mathbf{R}_j$  são as posições de rede não perturbadas (posições de equilíbrio) dos vórtices no referencial do centro de massa e  $\mathbf{u}_l(t)$  é o deslocamento do vórtice  $l$  em relação à sua posição de equilíbrio  $\mathbf{R}_l$ . Podemos agora usar a Eq. (5.11) para reescrever a equação de Langevin na forma:

$$\eta \dot{\mathbf{u}}_l(t) = \mathbf{f}_d - \eta \mathbf{v} + \mathbf{F}_l^{\text{y-v}} + \mathbf{F}^{\text{v-p}}(\mathbf{R}_l + \mathbf{u}_l(t) + \mathbf{v}t) + \mathbf{\Gamma}_l. \quad (5.12)$$

Tomando a média da Eq. (5.12) sobre todos os vórtices podemos obter uma expressão que relaciona  $\mathbf{v}$  e a força motriz  $\mathbf{f}_d$ , ou seja, a característica voltagem-corrente do sistema. Note que a média sobre a força aleatória é desprezível, pois  $\sum_{j=1}^{N_v} \mathbf{\Gamma}_j \sim \sqrt{N_v}$ . A média sobre as forças de interação vórtice-vórtice também é nula, pois em regime estacionário a soma das forças internas do sistema deve ser nula. Assim, temos

$$\eta \mathbf{v} = \mathbf{f}_d + \frac{1}{N_v} \sum_{j=1}^{N_v} \mathbf{F}_p(\mathbf{R}_j + \mathbf{u}_j(t) + \mathbf{v}t). \quad (5.13)$$

De acordo com essa equação,  $\mathbf{f}_d$  deve depender do tempo e da força aleatória, de modo a satisfazer o vínculo de que a velocidade do centro de massa deve ser constante. Para obter resultados físicos que possam ser diretamente relacionados a medidas experimentais, tomamos a média da Eq. (5.13) no tempo e no ruído térmico e obtemos

$$\eta \mathbf{v} = \mathbf{F}_L + \frac{1}{N_v} \sum_{j=1}^{N_v} \int_0^\tau \frac{dt}{\tau} \langle \mathbf{F}_p(\mathbf{R}_j + \mathbf{u}_j(t) + \mathbf{v}t) \rangle. \quad (5.14)$$

Podemos interpretar  $\mathbf{F}_L$ , que é a média térmica e temporal de  $\mathbf{f}_d$ , como *a força de Lorentz gerada por uma corrente uniforme e constante* e a Eq. (5.14) como aquela que nos fornece a característica voltagem-corrente.

Observe que toda a não linearidade da relação  $\mathbf{v}$ - $\mathbf{F}_L$  é proporcionada pela média da força de ancoragem,  $\langle \langle \mathbf{F}_p \rangle \rangle$  [segundo termo do lado direito da Eq. (5.14)],

que depende de maneira não trivial da própria velocidade do centro de massa e do ruído térmico. Tal dependência pode ser analisada, a grosso modo, como se segue: no limite  $\mathbf{v} \rightarrow 0$ ,  $\langle\langle \mathbf{F}_p \rangle\rangle$  é máxima e coincide com a força média de ancoragem estática. À medida que a velocidade aumenta em resposta à força motriz, a média de  $\mathbf{F}_p$  na direção do movimento diminui tendendo a zero no limite de altas velocidades. Neste limite, a fricção efetiva do movimento dos vórtices é dada aproximadamente pela constante de fricção de Bardeen-Stephen,  $\eta$ , pois  $\eta\mathbf{v} \approx \mathbf{F}_L$ .

A descrição acima também é válida para potenciais de ancoragem aleatórios. A diferença é que a quebra de simetria translacional de uma distribuição periódica de centros de ancoragem faz com que as propriedades de transporte do sistema de vórtices sejam anisotrópicas, ao contrário do que ocorre no caso de distribuições aleatórias. Assim, o segundo termo do lado direito da Eq. (5.14) merece uma análise cuidadosa para que possamos determinar como essa anisotropia afeta o movimento dos vórtices. Outra questão fundamental é se a lei de escala da velocidade de recristalização com a temperatura é semelhante àquela encontrada pela teoria de Koshelev-Vinokur (veja Sec. 2.3) para movimento em meios desordenados.

Propomos, aqui, uma adaptação do modelo *cage* para obtermos soluções para o problema de não-equilíbrio descrito acima. Neste modelo *cage dinâmico*, assumimos que, em velocidades suficientemente altas, os vórtices formam uma rede elástica aproximadamente triangular. Assim, consideramos flutuações de um vórtice, no referencial do c.m., em torno de sua posição de equilíbrio interagindo com seus vizinhos através de um potencial de campo médio parabólico determinado por uma constante elástica fenomenológica  $\kappa$ , dada pela Eq. (5.1). Reescrevemos a Eq. (5.12) como

$$\eta\dot{\mathbf{u}}_l(t) = \mathbf{f}_d - \eta\mathbf{v} - \kappa(\mathbf{u}_l - \bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{F}_p(\mathbf{R}_l + \mathbf{u}_l(t) + \mathbf{v}t) + \mathbf{\Gamma}_l, \quad (5.15)$$

onde  $\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{N} \sum_j \mathbf{u}_j(t)$  representa um possível deslocamento estático do centro de massa provocado pelo potencial de ancoragem. Este deslocamento estático pode

ser melhor entendido se escrevermos a força de ancoragem na forma

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_p(\mathbf{R}_l + \mathbf{u}_l(t) + \mathbf{v}t) &= \mathbf{F}_p^{\text{est}}(\mathbf{R}_l, \mathbf{u}_l(t)) + \mathbf{F}_p^{\text{din}}(\mathbf{R}_l, \mathbf{u}_l(t), t), \\
 \mathbf{F}_p^{\text{est}}(\mathbf{R}_l, \mathbf{u}_l(t)) &= \sum_{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} = 0} (-i\mathbf{Q})U_{\mathbf{Q}}e^{i\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{R}_l + \mathbf{u}_l(t))}, \\
 \mathbf{F}_p^{\text{din}}(\mathbf{R}_l, \mathbf{u}_l(t), t) &= \sum_{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} \neq 0} (-i\mathbf{Q})U_{\mathbf{Q}}e^{i\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{R}_l + \mathbf{u}_l(t) + \mathbf{v}t)}. \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

$\mathbf{F}_p^{\text{est}}(\mathbf{R}_l, \mathbf{u}_l(t))$  é a contribuição estática da força de ancoragem (não depende explicitamente do tempo) e  $\mathbf{F}_p^{\text{din}}(\mathbf{R}_l, \mathbf{u}_l(t), t)$  a contribuição dinâmica (com dependência explícita no tempo). A contribuição estática resulta dos modos em que  $\mathbf{Q} \perp \mathbf{v}$ , ou seja, é o equivalente a tomar a média da força de ancoragem ao longo da direção de movimento. O resultado é um potencial unidimensional periódico na direção perpendicular à do movimento, o chamado potencial de *washboard*, se este estiver orientado em uma das direções de rede do potencial de ancoragem, ou uma constante, se o movimento for em qualquer outra direção. A parte dinâmica do potencial de ancoragem produz flutuações na rede de vórtices em movimento que, como veremos, podem destruir a rede em velocidades suficientemente baixas. Para velocidades elevadas, no entanto, estas flutuações são desprezíveis e a rede de vórtices encontra-se em um estado de equilíbrio determinado pelo potencial estático de ancoragem.

Assumindo que o deslocamento estático é uniforme, as novas posições de equilíbrio são dadas por  $\mathbf{R}'_j = \mathbf{R}_j + \bar{\mathbf{u}}$ . Assim,  $\{\mathbf{R}_j\}$  corresponde às posições de equilíbrio dos vórtices na ausência do potencial de ancoragem e  $\{\mathbf{R}'_j\}$  corresponde às posições de equilíbrio dos vórtices na presença do potencial estático. É conveniente, então, expressarmos a Eq. (5.15) em termos de

$$\boldsymbol{\delta}_l(t) = \mathbf{u}_l(t) - \bar{\mathbf{u}}. \quad (5.17)$$

Note que é o desvio quadrático médio de  $\boldsymbol{\delta}_l(t)$ , e não de  $\mathbf{u}_l(t)$ , que determina a estabilidade da fase elástica. Substituindo as Eqs. (5.17) e (5.13) em (5.15),

obtemos

$$\eta \dot{\boldsymbol{\delta}}_l = -\kappa \boldsymbol{\delta}_l + \frac{1}{N} \sum_j (N\delta_{j,l} - 1) \mathbf{F}_p(\mathbf{R}'_j, \boldsymbol{\delta}_j, t) + \boldsymbol{\Gamma}_l(t). \quad (5.18)$$

As Eqs. (5.18) e (5.14) são as equações que descrevem o modelo *cage* dinâmico. A seguir, implementamos uma solução auto-consistente destas equações usando um método perturbativo.

### 5.2.2 Solução perturbativa: aproximação de 1<sup>a</sup> ordem

Analogamente ao cálculo desenvolvido na Sec. 5.1, tomamos a transformada de Fourier em ambos os lados da Eq. (5.18), o que resulta em

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}_l(\omega) &= \boldsymbol{\delta}_l^{(T)}(\omega) + \frac{1}{N} \sum_j (N\delta_{j,l} - 1) \times \\ &\quad \sum_{\mathbf{Q}} \mathbf{F}_{\mathbf{Q}} e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}'_j} \int \frac{dt}{\tau} e^{i\mathbf{Q}\cdot(\boldsymbol{\delta}_j(t)+\mathbf{v}t)} \frac{e^{i\omega t}}{-i\eta\omega + \kappa} \end{aligned} \quad (5.19)$$

onde  $\boldsymbol{\delta}_l^{(T)}(\omega) = \boldsymbol{\Gamma}(\omega)/(-i\eta\omega + \kappa)$  é o deslocamento térmico no espaço de Fourier.

A Eq. (5.19) pode ser resolvida perturbativamente, assumindo que  $\delta_j(t) \ll Q_0^{-1}$ , onde  $Q_0 = 2\pi/a_p$ , onde  $a_p$  é a periodicidade da rede de armadilhas. A aproximação de primeira ordem corresponde a usarmos  $e^{i\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\delta}_l(t)} \sim 1$  no lado direito de (5.19). O resultado é

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}_l^{(1)}(\omega) &= \boldsymbol{\delta}_l^{(T)}(\omega) + \frac{1}{N} \sum_j (N\delta_{j,l} - 1) \sum_{\mathbf{Q}} \mathbf{F}_{\mathbf{Q}} e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}'_j} \int \frac{dt}{\tau} \frac{e^{i(\omega+\omega_{\mathbf{Q}})t}}{-i\eta\omega + \kappa} \\ &= \boldsymbol{\delta}_l^{(T)}(\omega) + \frac{1}{N} \sum_j (N\delta_{j,l} - 1) \sum_{\mathbf{Q}} \mathbf{F}_{\mathbf{Q}} e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}'_j} \frac{\delta_{\omega, -\omega_{\mathbf{Q}}}}{-i\eta\omega + \kappa} \end{aligned} \quad (5.20)$$

onde  $\omega_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}$ . Tomando a transformada de Fourier inversa, temos

$$\boldsymbol{\delta}_l^{(1)}(t) = \boldsymbol{\delta}_l^{(T)}(t) + \sum_{\mathbf{Q}} \frac{\mathbf{F}_{\mathbf{Q}} e^{i\omega_{\mathbf{Q}}t}}{i\eta\omega_{\mathbf{Q}} + \kappa} \frac{1}{N} \sum_j (N\delta_{j,l} - 1) e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}'_j} \quad (5.21)$$

Assim, em primeira ordem de perturbação, o ruído térmico e o potencial dinâmico de ancoragem contribuem separadamente para as flutuações do vórtice engaiolado.

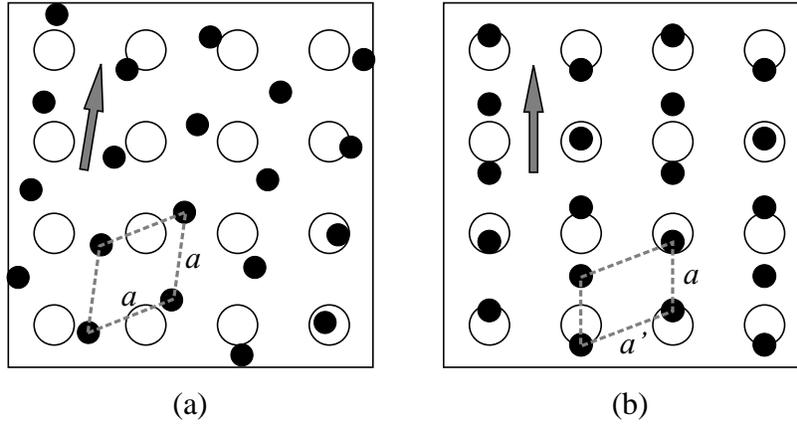


Figura 5.1: Movimento de uma rede de vórtices sobre um rede quadrada de centros de ancoragem. Em (a), a rede se move em uma direção (indicada pela seta) de baixa simetria do potencial de ancoragem. O movimento é incomensurável e a rede é essencialmente idêntica à rede de equilíbrio (triangular) pois o potencial de ancoragem não é capaz de deformá-la (veja texto). Em (b), o movimento é comensurável sobre uma direção de alta simetria da rede de ancoragem. A comensurabilidade é parcial, ocorrendo apenas na direção perpendicular ao movimento.

Devemos distinguir aqui dois tipos de movimento para a rede de vórtices em relação ao potencial de ancoragem: *movimento comensurável* e *movimento incomensurável*. Estas duas situações estão ilustradas na Fig. 5.1. Apesar de a estrutura da rede de vórtices não ser considerada explicitamente no modelo *cage*, a Eq. (5.21) captura a diferença entre estes dois tipos de movimento através do termo  $\frac{1}{N} \sum_j (N\delta_{j,l} - 1)e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}'_j}$ . Usando a identidade

$$\sum_j e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}_j} = N \sum_{\mathbf{G}} \delta_{\mathbf{Q},\mathbf{G}}, \quad (5.22)$$

onde  $\mathbf{G}$  são os vetores da rede recíproca da rede de vórtices não perturbada, a Eq. (5.21) pode ser escrita como

$$\delta_l^{(1)}(t) = \delta_l^{(T)}(t) + \sum_{\mathbf{Q}} \frac{\mathbf{F}_{\mathbf{Q}} e^{i\omega_{\mathbf{Q}}t}}{i\eta\omega_{\mathbf{Q}} + \kappa} e^{i\mathbf{Q}\cdot\bar{\mathbf{u}}} (e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}_l} - \sum_{\mathbf{G}} \delta_{\mathbf{Q},\mathbf{G}}) \quad (5.23)$$

Quando a rede de vórtices em movimento é *incomensurável* com o potencial de ancoragem, nenhum vetor não nulo  $\mathbf{G}$  da rede recíproca dos vórtices coincide

com um vetor  $\mathbf{Q}$  da rede recíproca dos centros de ancoragem, ou seja, o único termo que contribui para  $\sum_{\mathbf{G}}$  é aquele com  $\mathbf{G} = 0$ . Neste caso, o potencial de ancoragem não exerce força total sobre a rede de vórtices, pois

$$\frac{1}{N} \sum_j \mathbf{F}_p(\mathbf{R}_j) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{Q}} (-i\mathbf{Q}) U_{\mathbf{Q}} \sum_j e^{i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_j} = \sum_{\mathbf{Q}, \mathbf{G}} (-i\mathbf{Q}) U_{\mathbf{Q}} \delta_{\mathbf{Q}, \mathbf{G}} = 0. \quad (5.24)$$

Temos então o chamado “sólido flutuante”. No entanto, localmente, os vórtices experimentam forças provenientes do potencial de ancoragem. As flutuações causadas por estas forças (e pelo ruído térmico) podem desestabilizar a fase incomensurável.

Quando a rede de vórtices se move em uma das direções de alta simetria do potencial de ancoragem, existe a possibilidade de a rede de vórtices ser comensurável com a contribuição estática do potencial (a concretização desta possibilidade depende de quem sai ganhando da competição entre as energia elástica e de ancoragem). Neste caso, a comensurabilidade ocorreria na direção perpendicular ao movimento. Na direção do movimento, em geral, a rede é incomensurável (exceto quando  $a/a_p$  é um número racional). Assim, na fase comensurável existem vetores  $\mathbf{G}$  não nulos que coincidem com os vetores  $\mathbf{Q}$  e contribuem para  $\sum_{\mathbf{G}}$ . Cada um cancela com os termos  $e^{i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_i}$  correspondentes na Eq. (5.23), pois para  $\mathbf{Q} = \mathbf{G}$  as exponenciais se igualam a 1 (o vetor da rede recíproca é sempre perpendicular ao vetor da rede real correspondente).

A fase comensurável pode ser melhor entendida se considerarmos, como exemplo, a situação descrita na Fig. 5.1(b), onde os vórtices interagem com uma rede quadrada de centros de ancoragem. Para a simetria quadrada temos  $\mathbf{Q} = \frac{2\pi}{a_p}(n_1, n_2)$ , onde os  $n_i$  são inteiros. Os vetores da rede recíproca dos vórtices são expressos por  $\mathbf{G} = m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2$ , onde  $\mathbf{b}_1$  e  $\mathbf{b}_2$  são os vetores da célula unitária da rede recíproca que estão relacionados com os vetores  $\mathbf{a}_1$  e  $\mathbf{a}_2$  da célula unitária da rede real por  $\mathbf{b}_i = 2\pi \frac{\mathbf{a}_j \times \hat{z}}{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \times \hat{z}}$ , onde  $i, j = 1, 2$  e  $i \neq j$  (Ashcroft & Mermin, 1976; Kittel, 1986). Os vetores da célula unitária real [indicados na Fig. 5.1(b)] são

$$\mathbf{a}_1 = a_p \hat{\mathbf{x}} + \frac{a_v}{2} \hat{\mathbf{y}}; \quad \mathbf{a}_2 = a_v \hat{\mathbf{y}}, \quad (5.25)$$

Assim, os vetores da célula unitária da rede recíproca são

$$\mathbf{b}_1 = \frac{2\pi}{a_p} \hat{\mathbf{x}}; \quad \mathbf{b}_2 = -\frac{\pi}{a_p} \hat{\mathbf{x}} + \frac{2\pi}{a_v} \hat{\mathbf{y}}.$$

Portanto, nesta fase comensurável, os vetores  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{G}$  orientados na direção  $x$  (com  $n_2, m_2 = 0$ ) coincidem. É possível também haver comensurabilidade na direção  $y$  se  $a/a_p$  for um número racional. Aqui consideraremos apenas o caso mais geral, e mais simples, de comensurabilidade apenas na direção perpendicular à do movimento.

Baseados nas considerações acima, podemos escrever a Eq. (5.23) como

$$\delta_l^{(1)}(t) = \delta_l^{(T)}(t) + \sum'_{\mathbf{Q}} \frac{\mathbf{F}_{\mathbf{Q}} e^{i\omega_{\mathbf{Q}} t}}{i\eta\omega_{\mathbf{Q}} + \kappa} e^{i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}'_l}, \quad (5.26)$$

onde  $\sum'$  significa que os vetores  $\mathbf{Q}$  que coincidem com vetores  $\mathbf{G}$  da rede recíproca dos vórtices são excluídos da soma. Esta restrição equivale a excluir os termos em que  $\mathbf{Q} \perp \mathbf{v}$  ou  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} = 0$ , caso existam. Consistentemente, isto está de acordo com o fato de que não há contribuição estática para  $\delta_l(t)$  (lembre-se que a contribuição estática do potencial de ancoragem corresponde exatamente aos termos em que  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} = 0$ ).

### 5.2.3 Flutuações e característica voltagem–corrente

Na aproximação de primeira ordem, a média quadrática das flutuações dos vórtices em uma direção  $\alpha$  arbitrária do plano  $xy$  é dada por:

$$\begin{aligned} \delta_\alpha^2 &\equiv \frac{1}{N} \sum_j \int_0^\tau \frac{dt}{\tau} \langle [\delta_{\alpha,j}^{(1)}(t)]^2 \rangle \\ &= \frac{k_B T}{\kappa} + \sum'_{\mathbf{Q}, \mathbf{Q}'} \frac{Q_\alpha Q'_\alpha U_{\mathbf{Q}} U_{\mathbf{Q}'}}{(i\eta\omega_{\mathbf{Q}} + \kappa)(i\eta\omega_{\mathbf{Q}'} + \kappa)} \times \\ &\quad e^{i\mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{u}}} \frac{1}{N} \sum_j e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}_j} \int_0^\tau \frac{dt}{\tau} e^{i\omega_{\mathbf{K}} t} \end{aligned} \quad (5.27)$$

onde  $\mathbf{K} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}'$  e  $\omega_{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}$ . O indicativo linha no somatório duplo significa

que os vetores  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{Q}'$  que satisfazem  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} = 0$  e  $\mathbf{Q}' \cdot \mathbf{v} = 0$  são excluídos dos seus respectivos somatórios. Usando a Eq. (5.22) e a identidade  $\int \frac{dt}{\tau} e^{i(\omega-\omega')t} = \delta_{\omega,\omega'}$  obtemos

$$\delta_\alpha^2 = \frac{k_B T}{\kappa} + \sum'_{\mathbf{Q}, \mathbf{Q}'} Q_\alpha Q'_\alpha \frac{U_{\mathbf{Q}} U_{\mathbf{Q}'}}{\eta^2 \omega_{\mathbf{Q}}^2 + \kappa^2} e^{i\mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{u}}} \delta_{\omega_{\mathbf{K}}, 0} \sum_{\mathbf{G}} \delta_{\mathbf{K}, \mathbf{G}} \quad (5.28)$$

A característica voltagem-corrente pode ser obtida substituindo a solução aproximada para  $\delta_l(t)$ , dada pela Eq. (5.26), na Eq. (5.14). Em primeira ordem de aproximação temos

$$\begin{aligned} \eta \mathbf{v} &= \mathbf{F}_L + \frac{1}{N} \sum_j \sum_{\mathbf{Q}} \mathbf{F}_{\mathbf{Q}} e^{i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_j} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt e^{i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} t} \langle 1 + i\mathbf{Q} \cdot \delta_j^{(1)}(t) + \dots \rangle_{th} \\ &= \mathbf{F}_L + \frac{1}{N} \sum_j \sum_{\mathbf{Q}} \mathbf{F}_{\mathbf{Q}} e^{i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_j} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt e^{i\omega_{\mathbf{Q}} t} + \\ &\quad \frac{1}{N} \sum_j \sum_{\mathbf{Q}} \mathbf{F}_{\mathbf{Q}} e^{i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_j} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt e^{i\omega_{\mathbf{Q}} t} \langle i\mathbf{Q} \cdot \delta_j^{(T)}(t) \rangle_{th} + \\ &\quad \sum_{\mathbf{Q}} \sum'_{\mathbf{Q}'} \mathbf{F}_{\mathbf{Q}} \frac{i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}_{\mathbf{Q}'}}{i\eta\omega_{\mathbf{Q}'} + \kappa} e^{i(\mathbf{Q}+\mathbf{Q}') \cdot \bar{\mathbf{u}}} \times \\ &\quad \frac{1}{N} \sum_j e^{i(\mathbf{Q}+\mathbf{Q}') \cdot \mathbf{R}_j} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt e^{i(\omega_{\mathbf{Q}}+\omega_{\mathbf{Q}'} )t} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Calculando as somas sobre as partículas e as integrações no tempo, encontramos

$$\begin{aligned} \eta \mathbf{v} &= \mathbf{F}_L + \sum_{\mathbf{Q} \perp \mathbf{v}} \mathbf{F}_{\mathbf{Q}} e^{i\mathbf{Q} \cdot \bar{\mathbf{u}}} \sum_{\mathbf{G}} \delta_{\mathbf{Q}, \mathbf{G}} + \\ &\quad \sum_{\mathbf{Q}} \sum'_{\mathbf{Q}'} \frac{\mathbf{F}_{\mathbf{Q}} i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}_{\mathbf{Q}'}}{i\eta\omega_{\mathbf{Q}'} + \kappa} e^{i\mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{u}}} \delta_{\omega_{\mathbf{K}}, 0} \sum_{\mathbf{G}} \delta_{\mathbf{K}, \mathbf{G}} \end{aligned} \quad (5.30)$$

O segundo termo da Eq. (5.30) dá a contribuição do potencial de *washboard* para a resposta da rede dos vórtices. O fator  $\sum_{\mathbf{G}} \delta_{\mathbf{Q}, \mathbf{G}}$  indica que esta contribuição será não nula apenas se a fase for comensurável. Neste caso, o potencial de *washboard* tende a ancorar os vórtices em relação a uma componente da força motriz transversal ao movimento. O terceiro termo é bem mais complexo e está

relacionado à resposta não linear do movimento dos vórtices.

É possível obter a contribuição da temperatura para a relação  $\mathbf{v}-\mathbf{F}_d$  em primeira ordem de perturbação através do termo de segunda ordem da expansão de  $e^{i\mathbf{Q}\cdot\delta_j^{(1)}}$  na Eq. (5.30).

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_T &= \frac{1}{N} \sum_j \sum_{\mathbf{Q}} \mathbf{F}_{\mathbf{Q}} e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}'_j} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{v}t} \left\langle -\frac{1}{2} [\mathbf{Q} \cdot \delta_j^{(1)}(t)]^2 \right\rangle_{th} \\ &= -\frac{k_B T}{\kappa} \sum_{\mathbf{Q} \perp \mathbf{v}} Q^2 \mathbf{F}_{\mathbf{Q}} e^{i\mathbf{Q}\cdot\bar{\mathbf{u}}} \sum_{\mathbf{G}} \delta_{\mathbf{Q},\mathbf{G}} + \mathcal{O}(U^2)\end{aligned}\quad (5.31)$$

Como a força de *washboard*, esta contribuição é perpendicular à direção do movimento e, como esperado, se opõe à força de *washboard*, ou seja, o ruído térmico suaviza o efeito da ancoragem transversal. Incluindo este termo, a Eq. (5.30) se escreve

$$\begin{aligned}\eta\mathbf{v} &= \mathbf{F}_L + \sum_{\mathbf{Q} \perp \mathbf{v}} \left(1 - Q^2 \frac{k_B T}{2\kappa}\right) \mathbf{F}_{\mathbf{Q}} e^{i\mathbf{Q}\cdot\bar{\mathbf{u}}} \sum_{\mathbf{G}} \delta_{\mathbf{Q},\mathbf{G}} + \\ &\quad \sum_{\mathbf{Q},\mathbf{Q}'} \frac{\mathbf{F}_{\mathbf{Q}} i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}_{\mathbf{Q}'}}{i\eta\omega_{\mathbf{Q}'} + \kappa} e^{i\mathbf{K}\cdot\bar{\mathbf{u}}} \delta_{\omega_{\mathbf{K}},0} \sum_{\mathbf{G}} \delta_{\mathbf{K},\mathbf{G}}\end{aligned}\quad (5.32)$$

Nas próximas seções analisaremos os resultados do modelo *cage*, mas especificamente as Eqs. (5.32) e (5.28), para os dois tipos de movimento ordenado: incomensurável e comensurável.

## 5.3 Fases dinâmicas de uma rede incomensurável

### 5.3.1 Transporte e quebra de simetria rotacional

Como vimos, em uma rede incomensurável não há vetores  $\mathbf{G}$  da rede recíproca dos vórtices que coincidam com vetores  $\mathbf{Q}$  da rede recíproca do potencial de ancoragem. Assim,  $\sum_{\mathbf{G}} \delta_{\mathbf{Q},\mathbf{G}} = \delta_{\mathbf{Q},0}$ . Substituindo este resultado nas Eqs. (5.32) e (5.28), obtemos que o desvio quadrático médio das flutuações é

$$\delta^2 = \frac{2k_B T}{\kappa} + \sum_{\mathbf{Q}} \frac{Q^2 |U_{\mathbf{Q}}|^2}{\eta^2 (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v})^2 + \kappa^2}, \quad (5.33)$$

e, na mesma ordem de aproximação, a relação  $\mathbf{v}$  vs.  $\mathbf{F}_d$  é

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}_d}{\eta} - \sum_{\mathbf{Q}} \frac{\mathbf{Q} Q^2 |U_{\mathbf{Q}}|^2}{\eta^2 (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v})^2 + \kappa^2} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}. \quad (5.34)$$

Note que  $\delta^2 = u^2$ , pois no movimento incomensurável não há deformação estática da rede, ou seja,  $\bar{u} = 0$ .

Para analisar as Eqs. (5.33) e (5.34) mais detalhadamente e obter alguns resultados numéricos, consideraremos um potencial de ancoragem específico correspondendo a uma rede quadrada de armadilhas. Para simplificar nossa análise, consideraremos um potencial em que apenas as componentes de Fourier correspondendo às direções de mais alta simetria (direções  $[1,0]$ ,  $[0,1]$ ,  $[1,1]$  e  $[-1,1]$ ) são não nulas, ou seja,

$$U_{\mathbf{Q}} = \begin{cases} U_1 & \text{for } \mathbf{Q} = \pm \frac{2\pi}{a_p} \hat{x}, \pm \frac{2\pi}{a_p} \hat{y}, \\ U_2 & \text{for } \mathbf{Q} = \pm \frac{2\pi}{a_p} (\hat{x} \pm \hat{y}), \\ 0 & \text{qualquer outra direção.} \end{cases} \quad (5.35)$$

Os eixos  $x$  e  $y$  estão orientados ao longo das direções  $[1,0]$  e  $[0,1]$ , respectivamente, como mostrado na Fig. 5.2(a). Para obter resultados numéricos, escolheremos  $U_1/\kappa a_p^2 = 1/2\pi \simeq 0.16$ , correspondendo a ancoragem forte, e  $U_2 = U_1/2$ . Isso gera o potencial mostrado na Fig. 5.2(b). A força máxima que esse potencial exerce sobre um vórtice é  $F_{max} = 8\pi U_1/a_p = 4\kappa a_p$

Apresentaremos os resultados numéricos em função de  $\mathbf{F}_d$  ao invés de  $\mathbf{v}$ . Assim, podemos comparar nossos resultados com simulações e experimentos, onde usualmente a quantidade controlável é a corrente de transporte (ou, equivalentemente, a força de Lorentz). Para isso, invertemos a Eq. (5.34) auto-consistentemente através de um método iterativo. Começamos com uma força motriz de alta intensidade,  $F_d = 50\kappa a_p \gg F_{max}$ , e orientada a um ângulo  $\alpha$  da direção  $[1,0]$ . Para esta força,  $\mathbf{v}$  é aproximado pela solução de velocidades muito altas,  $\mathbf{v} = \mathbf{F}_L/\eta$ .  $F_d$  é então decrescido lentamente, a passos pequenos, mantendo  $\alpha$  fixo. A cada passo, o valor de  $\mathbf{v}$  é obtido substituindo no lado direito da Eq. (5.34) o valor de  $\mathbf{v}$  obtido no passo anterior. A relação  $\mathbf{v}-\mathbf{F}_d$  assim obtida é usada para calcular as

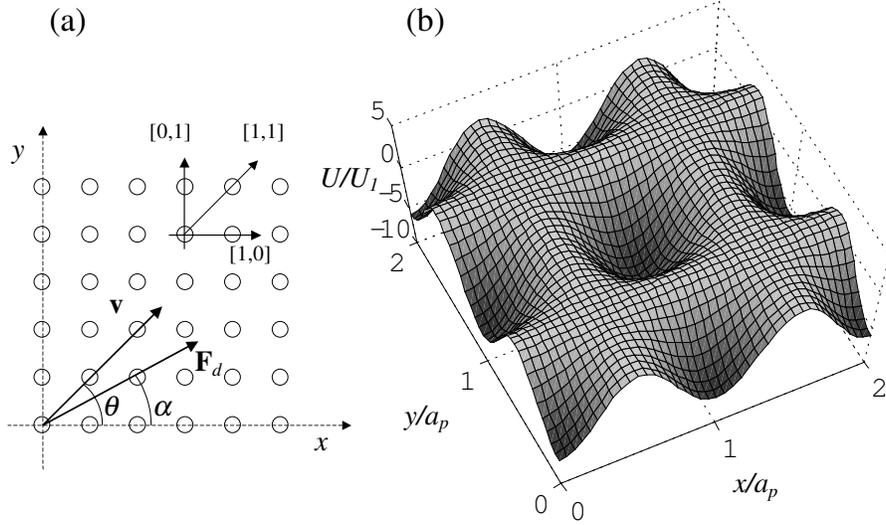


Figura 5.2: (a) Rede quadrada de armadilhas. As direções de maior simetria estão indicadas. Também é indicado o sistema de coordenada e são definidas as variáveis angulares da velocidade do centro de massa  $\mathbf{v}$  e da força motriz  $\mathbf{F}_d$ . (b) Potencial de ancoragem gerado pela Eq. (5.35) com  $U_2 = U_1/2$ .

curvas de  $\delta^2$  e  $T_{cr}$  em função de  $\mathbf{F}_d$ .

As grandezas envolvidas serão expressas nas unidades seguintes. (i) Força:  $F_{max} = 8\pi U_1/a_p =$  força máxima do potencial de ancoragem; (ii) Velocidade:  $\eta F_{max}$ ; (iii) Comprimento:  $a_p =$  periodicidade do potencial de ancoragem; e (iv) Temperatura:  $T_f =$  temperatura de fusão de equilíbrio.

Na Fig. 5.3, mostramos curvas de  $\mathbf{v}$  e de  $u = \sqrt{u^2}$  como funções de  $F_L$  para diferentes valores da direção  $\alpha$  da força motriz. As linhas horizontais correspondem ao comprimento de Lindemann  $u = c_L a_v$ , que determina uma estimativa para a destruição da fase elástica. Aqui, escolhemos  $c_L = 0.12^1$  e  $a_v = a_p/\sqrt{2}$ , o que é equivalente a termos dois vórtices por célula unitária do potencial de ancoragem ( $B = 2B_\Phi$ ). Como o modelo *cage* é um modelo elástico, ele só é estritamente válido para flutuações abaixo deste valor. As curvas  $v$  vs.  $F_d$  mostradas nesta

<sup>1</sup>veja discussão sobre a escolha da constante de Lindemann na Sec. 5.1

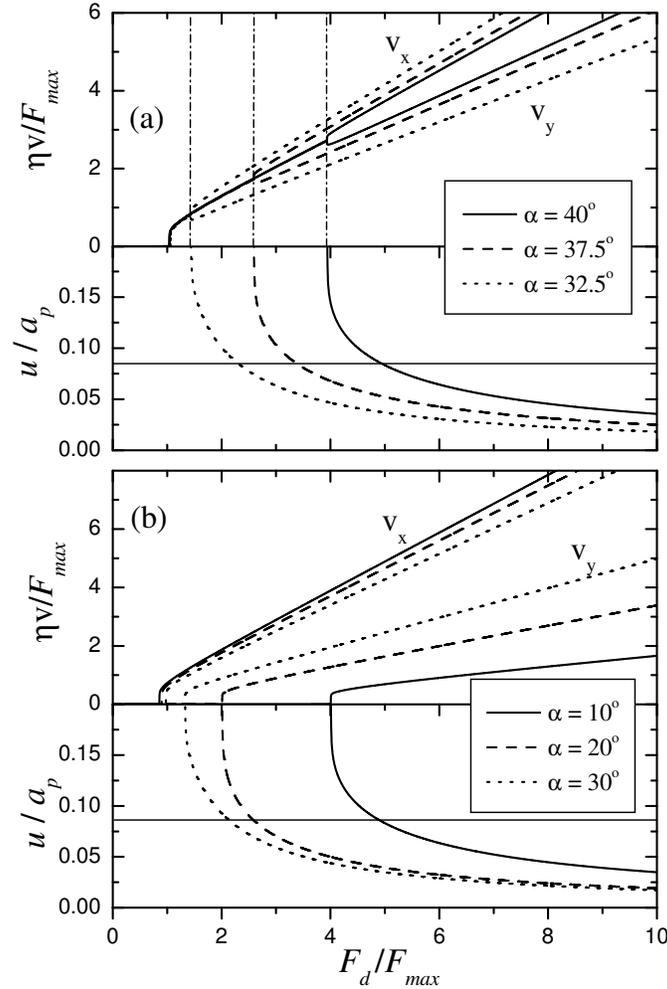


Figura 5.3: Componentes  $v_x$  e  $v_y$  da velocidade do centro de massa e raiz da média quadrática das flutuações  $u$  como funções da intensidade da força motriz  $F_d$  para várias direções  $\alpha$  da força motriz. (a)  $32,5^\circ \leq \alpha \leq 40^\circ$ : o movimento dos vórtices é capturado pela direção  $[1,1]$  do potencial de ancoragem ( $v_x = v_y$ ) para valores de  $F_d$  menores que os indicados pelas linhas ponto-tracejadas verticais. (b)  $0^\circ < \alpha < 32,5^\circ$ : o movimento é capturado na direção  $[1,0]$  ( $v_y = 0$ ). As linhas horizontais nos painéis inferiores de (a) e (b) correspondem a  $u = c_L a$  para  $B = 2B_\Phi$  e  $c_L = 0,12$  (veja texto), acima da qual a fase elástica se torna instável em relação a flutuações.

figura, evidenciam que a velocidade do c.m. não é, em geral, paralela à força motriz, o que leva a uma quebra da simetria rotacional das curvas  $V-I$ . Esta anisotropia pode ser melhor entendida se observarmos a dependência da direção do movimento  $\theta = \text{atan}(v_x/v_y)$  com a intensidade da força, como mostrado na Fig. 5.4 para diferentes direções da força motriz. Esta figura mostra que, em velocidades suficientemente baixas, a rede de vórtices é atraída para as direções de alta simetria  $[1,0]$  ou  $[1,1]$ , dependendo da direção da força motriz. O movimento dos vórtices é capturado pela direção  $[1,0]$  para  $0 < \alpha \lesssim 32,5^\circ$  e pela direção  $[1,1]$  para  $32,5^\circ \lesssim \alpha < 45^\circ$ .

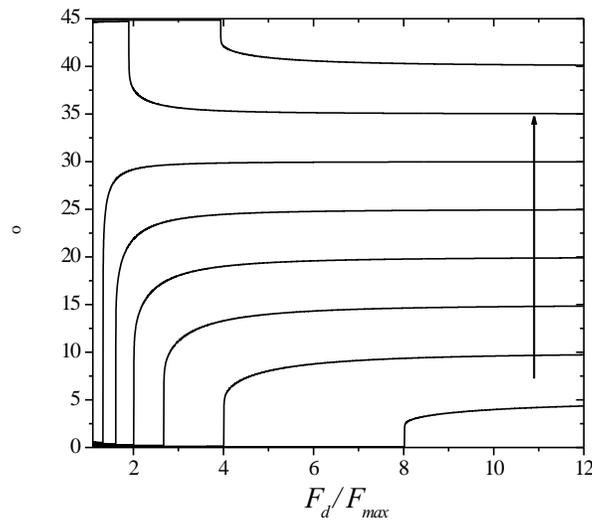


Figura 5.4: Direção do movimento  $\theta$  em função da intensidade da força motriz  $F_L$  para direções de  $\mathbf{F}_L$  no intervalo  $5^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$  em incrementos de  $5^\circ$ . A seta indica o sentido crescente de  $\alpha$ .

A preferência dos vórtices em se mover nas direções de alta simetria foi recentemente observada em simulações numéricas (Carneiro, 2002; Marconi & Dominguez, 1998, 2001; Reichhardt & Nori, 1998) e experimentos em redes de junções Josephson (Marconi et al., 2000) e filmes nanoestruturados com uma rede periódica de *antidots* (?). A captura dos vórtices nestas direções produz um fenômeno conhecido como ancoragem transversal, onde a rede de vórtices é ancorada em relação a uma força perpendicular à direção do movimento. Este fenômeno

também é encontrado em outros sistemas, como o problema de deslizamento de uma camada monoatômica sobre um substrato periódico (Granato & Ying, 2000). Uma condição necessária para que haja ancoragem transversal é que os vórtices se ordenem em uma fase comensurável com o potencial de ancoragem na direção perpendicular ao movimento.<sup>2</sup> Observe que, nos resultados mostrados na Fig. (5.3), as flutuações divergem no momento da captura. Isso indica que a fase incomensurável não é estável nesta região, devendo dar lugar a uma fase comensurável (que estudaremos em detalhes na Sec. 5.4) onde a deformação estática da rede produzida pelo potencial de *washboard* deve ser levada em conta. Portanto, é esperado que tenhamos uma transição sólido incomensurável–sólido comensurável (ou esmético transversal) quando o movimento dos vórtices se aproxima de uma direção de alta simetria. No entanto, as flutuações cruzam o limite de Lindemann antes de efetivamente divergirem (por artefato produzido por termos desprezado  $\bar{\mathbf{u}}$ ) e a captura ocorrer. Isso indica que podemos ter um fase líquida entre as fases sólidas comensurável e incomensurável. Em simulações numéricas recentes, Carneiro (2002) observou um cenário semelhante. Em seu diagrama de fases, a rede de vórtices passa do estado sólido incomensurável para um estado líquido e, em seguida, para um estado sólido comensurável na medida em que seu movimento se aproxima de uma direção de alta simetria.

### 5.3.2 Cristalização dinâmica

Aplicação do critério de Lindemann à Eq. (5.33), define a temperatura em que a fase elástica incomensurável se torna instável em relação a flutuações. Interpretamos esta temperatura como aquela em que ocorre uma transição de fase dinâmica entre uma fase desordenada e a fase elástica incomensurável e a denominaremos temperatura de cristalização dinâmica  $T_{cr}$ . Sua dependência com a velocidade é dada por

$$T_{cr}(\mathbf{v}) = T_f - T_{pp}(\mathbf{v}), \quad (5.36)$$

---

<sup>2</sup>Observe que neste caso há duas possibilidades: ou os vórtices se ordenam em um cristal bidimensional comensurável, ou em um cristal líquido esmético, com ordenamento apenas na direção perpendicular ao movimento.

onde  $T_f = \frac{1}{2}\kappa a_v^2 c_L^2$  é a temperatura de fusão de equilíbrio e

$$k_B T_{pp}(\mathbf{v}) \equiv \frac{\kappa}{2} \sum_{\mathbf{Q}} \frac{Q^2 |U_{\mathbf{Q}}|^2}{\eta^2 (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v})^2 + \kappa^2} \quad (5.37)$$

é identificada como uma temperatura efetiva que resulta das vibrações provocadas pelo potencial periódico de ancoragem. Em primeira ordem de perturbação, a cristalização dinâmica da rede de vórtices é uma soma dos efeitos da temperatura termodinâmica (a temperatura do material supercondutor) e desta temperatura efetiva, essencialmente dinâmica. Se prosseguirmos com o cálculo perturbativo, a contribuição de segunda ordem corresponde a um termo cruzado envolvendo a temperatura e o potencial de ancoragem (veja de Souza Silva & Carneiro, 2002). Mas, para o regime de velocidades que estudamos, este termo é muito pequeno.

$T_{pp}$  é semelhante à temperatura de *shaking*  $T_{sh}$  introduzida por Koshelev & Vinokur (1994) para movimento de vórtices em um potencial de desordem (veja Sec. 2.3). Há, no entanto, diferenças importantes entre estas duas temperaturas.  $T_{sh}$  resulta naturalmente de uma relação de flutuação–dissipação semelhante à teoria de flutuação–dissipação da força de Langevin, tendo, portanto, um significado semelhante ao de uma temperatura termodinâmica (Cugliandolo et al., 1997; Kolton et al., 2002).  $T_{pp}$  tem uma interpretação bem mais complicada, dada a sua natureza altamente anisotrópica (dependendo fortemente da direção de  $\mathbf{v}$ ). Além disso, para velocidades altas,  $T_{pp}$  escala com  $v^{-2}$ , enquanto que  $T_{sh}$  escala com  $v^{-1}$ . Este é um resultado importante do nosso modelo pois *permite distinguir as contribuições do potencial periódico e de um eventual potencial de desordem, intrínseco do material, para o processo de cristalização dinâmica dos vórtices.*

Na Fig. 5.5, apresentamos um diagrama de fases dinâmicas simplificado mostrando linhas de cristalização obtidas pelo modelo *cage* dinâmico. No painel superior, mostramos o diagrama  $T-F_d$  com linhas de cristalização para diferentes orientações da força motriz. Abaixo dessas linhas, temos uma fase sólida incommensurável, enquanto que acima, a fase é desordenada. O diagrama  $\alpha-F_d$  mostrado no painel inferior corresponde às intersecções das curvas  $T_{cr}(F_d)$  do  $T-F_d$  diagrama com a linha  $T = 0$ . Para outras temperaturas  $T < T_f$ , encontramos diagramas

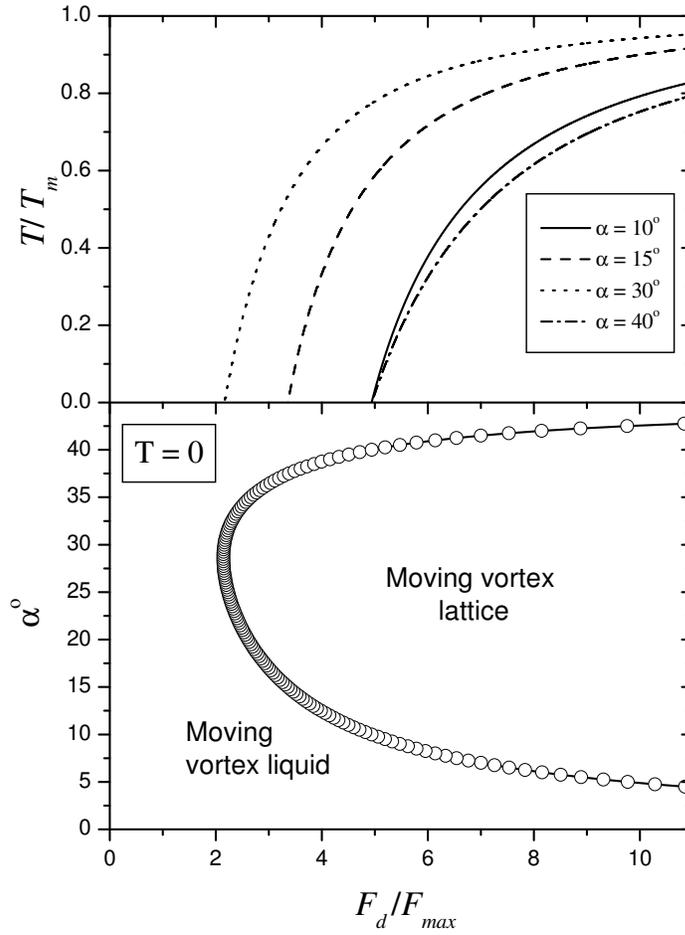


Figura 5.5: Em cima: Linhas de cristalização dinâmica para  $10^\circ \leq \alpha \leq 40^\circ$ . Em baixo: Diagrama de fases dinâmicas  $\alpha-F_L$  para  $T = 0$ .

$\alpha-F_d$  semelhantes.

## 5.4 Fases dinâmicas de uma rede comensurável

### 5.4.1 Ancoragem transversal

Como vimos, a fase comensurável só é possível quando a velocidade do centro de massa é orientada em uma das direções de alta simetria do potencial de ancoragem. Além disso, se a rede for comensurável apenas na direção perpendicular à  $\mathbf{v}$  (caso que estudamos aqui), a soma  $\sum_{\mathbf{G}} \delta_{\mathbf{Q},\mathbf{G}}$  equivale a selecionar vetores

$\mathbf{Q}$  satisfazendo  $\mathbf{Q} \perp \mathbf{v}$ , i.e.,  $\sum_{\mathbf{G}} \delta_{\mathbf{Q},\mathbf{G}} = \delta_{\omega_{\mathbf{Q}},0}$ . Neste caso, a Eq. (5.30) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \eta \mathbf{v} &= \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_a^{\text{est}} + \mathbf{F}_a^{\text{din}}, \quad \text{onde} \\ \mathbf{F}_a^{\text{est}} &= \sum_{\mathbf{Q} \perp \mathbf{v}} \mathbf{Q} U_{\mathbf{Q}} \left(1 - Q^2 \frac{k_B T}{2\kappa}\right) \sin \mathbf{Q} \cdot \bar{\mathbf{u}}, \\ \mathbf{F}_a^{\text{din}} &= \sum'_{\mathbf{Q}, \mathbf{Q}'} \mathbf{Q} \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}' U_{\mathbf{Q}} U_{\mathbf{Q}'}}{\eta^2 \omega_{\mathbf{Q}'}^2 + \kappa^2} (-\eta \omega_{\mathbf{Q}'} \cos \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{u}} + \kappa \sin \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{u}}) \delta_{\omega_{\mathbf{K}},0}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

$\mathbf{F}_a^{\text{est}}$  é uma espécie de força de atrito estática que se opõe a uma força transversal à direção de movimento e depende apenas do potencial estático de *washboard* e da temperatura.  $\mathbf{F}_a^{\text{din}}$  é a força de atrito dinâmica que se opõe ao movimento dos vórtices.

Por construção, a direção da velocidade do c.m. é constante e orientada em uma das direções de simetria da rede de armadilhas. Além disso,  $\bar{\mathbf{u}}$  tem componente apenas na direção perpendicular a  $\mathbf{v}$  pois a rede é considerada incomensurável na direção de  $\mathbf{v}$ . Podemos então separar a Eq. (5.38) em duas equações:

$$\eta v = F_{d,\parallel} + \sum'_{\mathbf{Q}, \mathbf{Q}'} Q_{\parallel} \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}' U_{\mathbf{Q}} U_{\mathbf{Q}'}}{\eta^2 \omega_{\mathbf{Q}'}^2 + \kappa^2} (-\eta \omega_{\mathbf{Q}'} \cos \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{u}} + \kappa \sin \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{u}}), \quad (5.39)$$

para a direção paralela ( $\parallel$ ) ao movimento do c.m., e

$$\begin{aligned} 0 &= F_{d,\perp} + \sum_{\mathbf{Q} \perp \mathbf{v}} Q U_{\mathbf{Q}} \left(1 - Q^2 \frac{k_B T}{2\kappa}\right) \sin \mathbf{Q} \cdot \bar{\mathbf{u}} + \\ &\quad \sum'_{\mathbf{Q}, \mathbf{Q}'} Q_{\perp} \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}' U_{\mathbf{Q}} U_{\mathbf{Q}'}}{\eta^2 \omega_{\mathbf{Q}'}^2 + \kappa^2} (-\eta \omega_{\mathbf{Q}'} \cos \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{u}} + \kappa \sin \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{u}}), \end{aligned} \quad (5.40)$$

para a direção perpendicular ( $\perp$ ) ao movimento do c.m. A componente transversal  $F_{d,\perp}$  da força motriz deve ser pequena o suficiente para garantir a estabilidade da fase comensurável (o quão pequena será discutido mais adiante). A Eq 5.40 define implicitamente  $\bar{\mathbf{u}}$  como função de  $\mathbf{v}$  e  $T$ . Através desta equação, é possível obter também a maior força transversal  $F_{\perp,c}$  que garante a estabilidade da fase comensurável, ou seja, a força crítica necessária para desancorar a rede de vórtices

do potencial de *washboard*.

Para prosseguir com o cálculo, consideremos o potencial específico definido pela Eq. (5.35). Consideramos inicialmente que a rede de vórtices é comensurável e se move na direção  $[0,1]$  do potencial de ancoragem (eixo  $y$ ). Para velocidades muito altas ( $F_x \gg F_m a x$ ), o termo de “atrito” dinâmico se anula, restando apenas a força estática transversal. Assim, neste limite, teremos

$$v \approx F_x/\eta \quad \text{e} \quad (5.41)$$

$$F_x \approx -F_{a,x}^{\text{est}} = -2Q_0 U_1 \left(1 - Q_0^2 \frac{k_B T}{2\kappa}\right) \sin Q_0 \bar{u}, \quad (5.42)$$

A Eq. (5.42) define a força crítica transversal para velocidades muito altas pois só existe solução para  $\bar{u}$  se  $|F_x| \leq F_{x,c}(v \rightarrow \infty, T)$ , onde

$$F_{x,c}(v \rightarrow \infty, T) = 2Q_0 |U_1| \left(1 - Q_0^2 \frac{k_B T}{2\kappa}\right). \quad (5.43)$$

De acordo com esta equação, para  $F_x = F_{x,c}$ , o máximo deslocamento transversal que a rede comensurável pode sofrer é  $\bar{u} = a_p/4$ . Note que, em  $T = 0$ ,  $F_{x,c}(v \rightarrow \infty, T)$  corresponde exatamente à máxima força que o potencial de *washboard* exerce sobre a rede vórtices.

Para velocidades mais baixas, a contribuição do termo  $\mathbf{F}_a^{\text{din}}$  se torna importante. Os termos que contribuem para a soma  $\sum_{\mathbf{Q}, \mathbf{Q}'}$  são aqueles que satisfazem, simultaneamente  $Q_{\parallel} = -Q'_{\parallel} \neq 0$  e  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}' \neq 0$ . Os vetores  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{Q}'$  que satisfazem estas condições são dados na Tabela 5.1. Com a ajuda desta tabela, obtemos a componente longitudinal da força dinâmica,

$$F_{a,y}^{\text{din}} = -2 \frac{Q_0^4 U_1^2}{\eta^2 Q_0^2 v^2 + \kappa^2} \eta v - 8 \frac{Q_0^4 U_2^2}{\eta^2 Q_0^2 v^2 + \kappa^2} \eta v - 8 \frac{Q_0^4 U_1 U_2}{\eta^2 Q_0^2 v^2 + \kappa^2} \eta v \cos Q_0 \bar{u},$$

o que nos dá a relação  $v-F_y$ :

$$\eta v = F_y - \eta v \frac{2Q_0^4}{\eta^2 Q_0^2 v^2 + \kappa^2} (U_1^2 + 4U_1 U_2 \cos Q_0 \bar{u} + 4U_2^2). \quad (5.44)$$

$\mathbf{Q}/Q_0$	$\mathbf{Q}/Q_0$	$\mathbf{K}/Q_0$	$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}'/Q_0^2$	$\omega_{\mathbf{Q}'}/Q_0v$
$+\hat{y}$	$-\hat{y}$	0	-1	-1
	$+\hat{x} - \hat{y}$	$+\hat{x}$	-1	
	$-\hat{x} - \hat{y}$	$-\hat{x}$	-1	
$-\hat{y}$	$-\hat{y}$	0	-1	+1
	$+\hat{x} - \hat{y}$	$+\hat{x}$	-1	
	$-\hat{x} - \hat{y}$	$-\hat{x}$	-1	
$+\hat{x} + \hat{y}$	$-\hat{y}$	$+\hat{x}$	-1	-1
	$-\hat{x} - \hat{y}$	0	-2	
$-\hat{x} + \hat{y}$	$-\hat{y}$	$-\hat{x}$	-1	-1
	$+\hat{x} - \hat{y}$	0	-2	
$+\hat{x} - \hat{y}$	$+\hat{y}$	$+\hat{x}$	-1	+1
	$-\hat{x} + \hat{y}$	0	-2	
$-\hat{x} - \hat{y}$	$+\hat{y}$	$-\hat{x}$	-1	+1
	$+\hat{x} + \hat{y}$	0	-2	

Tabela 5.1:  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{Q}'$  que satisfazem as condições do somatório duplo nas Eqs. (5.38) e (5.47) para o potencial de ancoragem da Eq. (5.35).  $Q_0 = 2\pi/a_p$ .

A componente transversal é

$$F_{a,x}^{\text{din}} = -4 \frac{Q_0^4 U_1 U_2}{\eta^2 Q_0^2 v^2 + \kappa^2} \kappa \sin Q_0 \bar{u},$$

o que nos dá

$$0 = F_x - 2Q_0 U_1 \left( 1 - Q_0^2 \frac{k_B T}{2\kappa} - 2 \frac{Q_0^3 U_2}{\eta^2 Q_0^2 v^2 + \kappa^2} \right) \sin Q_0 \bar{u}. \quad (5.45)$$

Usando o mesmo raciocínio que nos levou à Eq. (5.43), obtemos uma equação para a força crítica de desancoragem transversal dependente da velocidade e da temperatura

$$F_{x,c}(v, T) = 2Q_0 |U_1| \left( 1 - Q_0^2 \frac{k_B T}{2\kappa} - 2 \frac{Q_0^3 U_2}{\eta^2 Q_0^2 v^2 + \kappa^2} \right). \quad (5.46)$$

Observe que  $F_{x,c}$  é função crescente de  $v$  e decrescente de  $T$ . Isso indica que tanto flutuações térmicas quanto flutuações induzidas dinamicamente pelo potencial de

ancoragem contribuem para diminuir  $F_{x,c}$  e, eventualmente, desancorar a rede de vórtices e destruir a fase comensurável.

Na Fig. 5.6, mostramos as características voltagem–corrente e a curva da força crítica transversal para movimento comensurável ao longo de  $[0,1]$ . Usamos para o potencial de ancoragem os mesmos valores numéricos usados na seção anterior, i.e.,  $U_1 = -0,16\kappa a_p$  e  $U_2 = U_1/2$ . Usando as Eqs. (5.44) e (5.44), podemos eliminar  $\bar{u}$  e calcular como a velocidade  $v$  do c.m. varia com a força transversal  $F_x$  para uma dada força longitudinal  $F_y$ . O resultado para diferentes forças longitudinais é mostrado na Fig. 5.6(a). Observamos que  $v$  é uma função crescente de  $F_x$ . Esse fato pode parecer surpreendente, pois seria esperado que  $v$  crescesse com a  $F_y$ , mas que  $F_x$  não tivesse qualquer influência sobre  $v$ , uma vez que  $\mathbf{v}$  está vinculado pelo potencial de ancoragem a manter-se orientado na direção  $y$ . No entanto, à medida que a força transversal aumenta, os vórtices se afastam dos mínimos do potencial de *washboard*, onde a rugosidade por eles sentida é máxima, para regiões de menor rugosidade, onde a resistência ao movimento é menor. Em outras palavras, a força de “atrito” dinâmico  $\mathbf{F}_a^{\text{din}}$  diminui quando  $\bar{u}$  aumenta. Observe que para forças longitudinais altas, o crescimento de  $v$  com  $F_x$  é quase imperceptível pois neste limite tende a zero e, portanto, o efeito da rugosidade é desprezível.

Na Fig. 5.6(b), mostramos uma curva de  $v$  em função de  $F_y$  (curva voltagem–corrente) para  $F_x = 0$  (ou seja  $\bar{u} = 0$ ). A curva foi calculada a partir de uma solução auto-consistente da Eq. (5.44) (usando o mesmo método usado na Sec. 5.3). Esta solução também é usada para obter  $F_{x,c}$  em função de  $F_y$ .

### 5.4.2 Flutuações anisotrópicas e cristalização dinâmica

Usando  $\sum_{\mathbf{G}} \delta_{\mathbf{Q},\mathbf{G}} = \delta_{\omega_{\mathbf{Q}},0}$  para a fase comensurável, a Eq. (5.28) pode ser reescrita como

$$\delta_{\alpha}^2 = \frac{k_B T}{\kappa} - \sum_{\mathbf{Q},\mathbf{Q}'} \frac{Q_{\alpha} Q'_{\alpha} U_{\mathbf{Q}} U_{\mathbf{Q}'}}{\eta^2 \omega_{\mathbf{Q}}^2 + \kappa^2} \cos(\mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{u}}) \delta_{\omega_{\mathbf{K}},0}. \quad (5.47)$$

Vamos agora analisar esta equação mais de perto aplicando nosso potencial de ancoragem modelo. Os vetores  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{Q}'$  que contribuem para o para o somatório

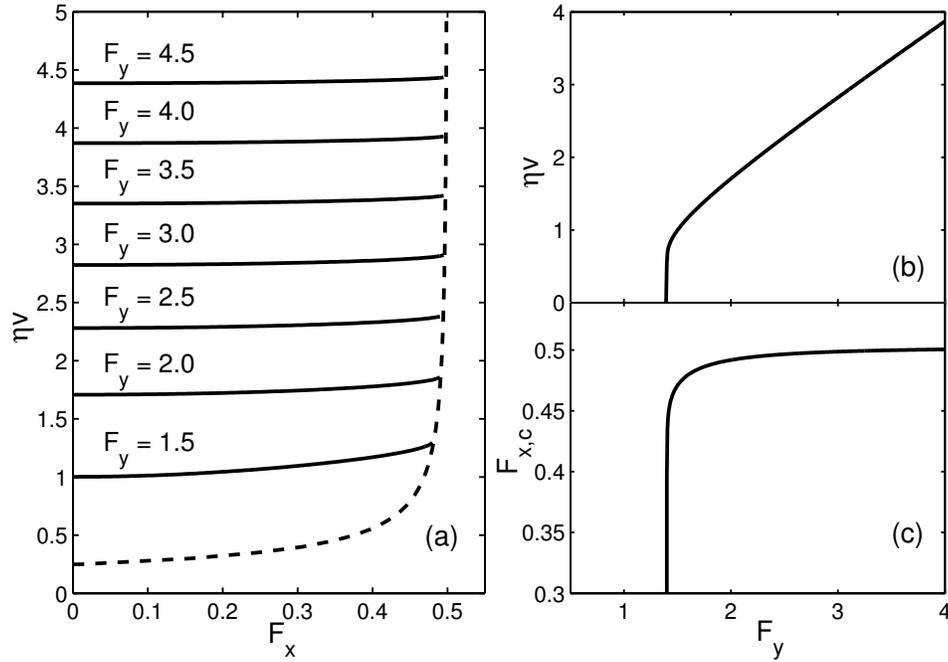


Figura 5.6: Resultados do modelo *cage* dinâmico para movimento comensurável ao longo da direção  $[0,1]$  e a  $T = 0$ , mostrando a dependência da velocidade longitudinal,  $v$ , com as componentes transversal  $F_x$  (a) e longitudinal  $F_y$  (b) da força motriz. A linha intermitente corresponde à força crítica transversal, a partir da qual a fase comensurável se torna instável. (c)  $F_{x,c}$  em função de  $F_y$ . As forças estão normalizadas pela força máxima de ancoragem  $F_{max} = 8\pi|U_1|/a_p$ .

duplo na Eq. (5.47) devem satisfazer as mesmas condições do somatório duplo da Eq. (5.47). Podemos, então usar a Tabela 5.1 para efetuar a soma.

O resultado para as flutuações na direção do movimento é

$$\delta_y^2 = \frac{k_B T}{\kappa} - \left[ -2 \frac{Q_0^2 U_1^2}{\eta^2 Q_0^2 v^2 + \kappa^2} - 4 \frac{Q_0^2 U_2^2}{\eta^2 Q_0^2 v^2 + \kappa^2} - 8 \frac{Q_0^2 U_1 U_2}{\eta^2 Q_0^2 v^2 + \kappa^2} \cos Q_0 \bar{u} \right],$$

ou

$$\delta_y^2 = \frac{k_B T}{\kappa} + \frac{2Q_0^2}{\eta^2 Q_0^2 v^2 + \kappa^2} (U_1^2 + 4U_1 U_2 \cos Q_0 \bar{u} + 2U_2^2), \quad (5.48)$$

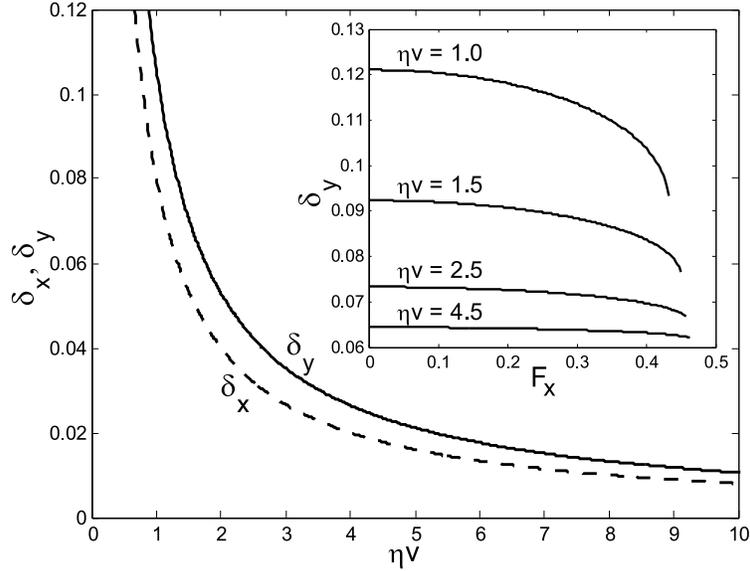


Figura 5.7: Raiz do desvio quadrático médio das flutuações transversais ( $\delta_x$ ) e longitudinais ( $\delta_y$ ) para movimento na direção  $[0,1]$  e  $T = 0$  em função da velocidade do c.m.,  $v$ . As forças estão normalizadas pela força máxima de ancoragem  $F_{max} = 8\pi|U_1|/a_p$  e os comprimentos estão normalizados pela periodicidade do potencial de ancoragem. Gráfico menor: Dependência de  $\delta_y$  com a força transversal  $F_x$  para valores fixos de  $v$ .

e, para as flutuações na direção perpendicular a  $\mathbf{v}$ , temos

$$\delta_x^2 = \frac{k_B T}{\kappa} + \frac{4Q_0^2 U_2^2}{\eta^2 Q_0^2 v^2 + \kappa^2}. \quad (5.49)$$

Comparando estas duas equações, podemos perceber que as flutuações causadas pelo movimento dos vórtices são anisotrópicas, com  $\delta_y > \delta_x$  (veja Fig. 5.7. O máximo de anisotropia ocorre quando  $\bar{u} = 0$ , ou seja, para  $F_x = 0$ . Neste caso, os vórtices estão se movendo nos mínimos do potencial de *washboard*, onde o ruído longitudinal é máximo. Para  $F_x \neq 0$ , o desvio padrão das flutuações longitudinais,  $\delta_y$ , decresce com a força transversal  $F_x$  para valores fixos de  $v$ , como mostrado na Fig. 5.7. Isso ratifica nosso argumento de que o ruído causado pelo movimento dos vórtices sobre o potencial de ancoragem diminui com a força transversal, sendo este o motivo da velocidade aumentar com o aumento de  $F_x$ .

A anisotropia nas flutuações dos vórtices sugere que a ordem longitudinal das cadeias de vórtices estabilizadas nos canais do potencial de *washboard* pode

ser destruída com os vórtices ainda ancorados nos canais, ou seja, com a ordem transversal ainda mantida. Isto deve ser verdade para  $B = \frac{\Phi_0}{a_v a_p} \gtrsim B_\Phi = \frac{\Phi_0}{a_p^2}$  (ou  $a_v \lesssim a_p$ ). O ordenamento nas cadeias é determinado pela razão  $\delta_y/a_v$ . De acordo com o critério de Lindemann, este ordenamento é perdido quando  $\delta_y/a_v \geq c_L$ . O ordenamento transversal, entre as cadeias, está relacionado com a razão  $\delta_x/a_p$ , que, devido a anisotropia das flutuações que determinamos, pode ser consideravelmente menor que  $\delta_y/a_v$ . Assim, a fase comensurável elástica deve fundir para uma fase esmética, longitudinalmente desordenada, mas com ordenamento transversal comensurável com o potencial de *washboard*. Esta conclusão é consistente com resultados de simulações numéricas de dinâmica de Langevin (Carneiro, 1999, 2000; Marconi & Dominguez, 1998, 2001; Reichhardt & Zimányi, 2000), onde transições de fase dinâmicas entre um sólido comensurável e um esmético são encontradas para baixas temperaturas. Em temperaturas elevadas, i.e, próximas da temperatura de fusão de equilíbrio,  $T_f$ , a transição é de um sólido para um líquido isotrópico.

# Capítulo 6

## Conclusões

Estudamos o efeito da barreira de superfície na penetração de vórtices em filmes mesoscópicos e na estrutura e termodinâmica da rede de vórtices nestes filmes. Esta barreira superficial é gerada pela competição entre a força das correntes de blindagem, que empurram o vórtice para o interior da amostra, e a interação atrativa entre o vórtice e as interfaces do filme. O cálculo da barreira de superfície e das interações entre vórtices foi realizado para filmes homogêneos de espessura arbitrária e no limite de London. Mostramos que, para estes filmes, o campo em que a barreira superficial se anula, permitindo a entrada de vórtices, decresce monotonicamente com o aumento da espessura  $D$  do filme e atinge um valor essencialmente constante para um certo valor de  $D$  ( $\sim 8\lambda$  para  $\kappa = 20$ ). Usamos um algoritmo de dinâmica de Langevin para simular a penetração e evolução dinâmica de vórtices no interior do filme. No decorrer da dinâmica, os vórtices se organizam em uma rede composta de cadeias de vórtices paralelas às superfícies do filme. Esta rede sofre transições estruturais envolvendo a criação ou destruição de uma única cadeia de vórtices à medida que o campo externo é variado, como previsto por cálculos de equilíbrio (Brongersma et al., 1993; Carneiro, 1998). Aqui, o fato de termos considerado explicitamente a nucleação de vórtices na superfície do filme e sua eventual incursão sobre a barreira superficial, nos permitiu estudar com detalhes a formação destes estados em um processo de magnetização onde o campo magnético externo é lentamente varrido de zero até um valor máximo e depois decrescido, retornando a zero. Para filmes livres de imperfeições, este processo gera uma histerese na curva de magnetização. Tal histerese é provocada

pela barreira superficial que atrasa tanto a entrada quanto a saída de vórtices. Este processo gera estados metaestáveis profundos, fazendo com que as transições estruturais sejam fortemente dependentes da história magnética do filme.

Desenvolvemos um modelo simples para estudar a resposta linear da rede de vórtices comensurável com uma rede quadrada de armadilhas artificiais. O modelo é apropriado para distribuições de vórtices  $n$  entre um e dois vórtices por armadilha. Neste caso, podemos considerar a rede de vórtices como composta de duas sub-redes: uma rede de vórtices aprisionados pelas armadilhas e a outra rede de vórtices intersticiais. O espectro de frequências da resistividade complexa, obtido através deste modelo, sugere que a dinâmica do sistema é determinada por duas frequências características. Uma frequência corresponde ao acoplamento entre a rede de vórtices e a rede de armadilhas. A outra frequência corresponde ao acoplamento entre a rede de vórtices ancorados e a rede de vórtices intersticiais e foi calculada analiticamente como função da periodicidade da rede de vórtices ancorados. Calculamos também a constante de Labusch efetiva  $\alpha_L$  como uma função das duas constantes elásticas características. Deste modo, a partir de medidas macroscópicas de  $\alpha_L$ , é possível determinar experimentalmente estas duas frequências e, assim, obter informações úteis sobre a interação dos vórtices com a nanoestrutura periódica e sobre propriedades elásticas da rede de vórtices. Realizamos uma série de simulações de dinâmica molecular para verificar a aplicabilidade do modelo. Os vários estados comensuráveis da rede de vórtices foram obtidos através de um processo de *annealing* simulado. Observamos que o modelo se ajusta perfeitamente aos resultados numéricos de dinâmica molecular para estruturas de alta simetria, como o estado  $n = 1$  e  $n = 2$ , para todas as frequências e forças de ancoragem estudadas. Para ocupações fracionárias de vórtices, o modelo funciona bem apenas para frequências intermediárias e altas ou forças de ancoragem fracas.

A partir de um modelo de campo médio simples, estudamos as propriedades de transporte de vórtices sobre uma rede periódica de armadilhas artificiais. Assumindo que, em alta velocidade, os vórtices fluem como uma rede elástica, calculamos, através de um método perturbativo, a relação entre a velocidade do

---

centro de massa da rede de vórtices e a força motriz, que é equivalente à relação voltagem–corrente acessível experimentalmente. Calculamos também o desvio padrão das flutuações dos vórtices em função da velocidade e da temperatura do filme supercondutor. Consideramos separadamente os dois casos possíveis de movimento ordenado: movimento incomensurável e movimento comensurável. Para o movimento de uma rede incomensurável, a relação voltagem–corrente é altamente anisotrópica, com movimento preferencial em direções de alta simetria do potencial de ancoragem. Quando o movimento cai exatamente sobre uma destas direções, a suposição de que a rede de vórtices é incomensurável deixa de ser verdadeira se o potencial de ancoragem for forte o suficiente. Para estes casos, assumimos que a rede é comensurável e calculamos a força transversal crítica acima da qual o potencial de ancoragem não mais consegue manter o movimento numa direção de alta simetria específica. Estes resultados estão de acordo com uma série de simulações de dinâmica molecular recentes (Carneiro, 2002; Marconi & Dominguez, 1998; Reichhardt & Zimányi, 2000). Usando o critério de Lindemann, estudamos a estabilidade destas fases elásticas. Deste critério, resulta que a temperatura de cristalização dinâmica, ou seja, a temperatura em que o movimento plástico desordenado dos vórtices cristaliza em uma fase ordenada elástica, escala com o inverso do quadrado da velocidade da rede. Este resultado, obtido para o movimento de vórtices em um potencial periódico, contrasta com o resultado de Koshelev & Vinokur (1994) para o movimento de vórtices em um potencial de desordem, onde a temperatura de cristalização escala com o inverso da velocidade.



# Apêndice A

## Dinâmica de Langevin

### A.1 Equação de Langevin e o teorema da flutuação-dissipação

Uma partícula imersa em um fluido viscoso está sujeita a forças de caráter aleatório provocadas pelo impacto da partícula com as moléculas termicamente agitadas do fluido. Assim a equação do movimento para esta partícula, supondo que ela sofre ainda ação de uma força externa  $\mathbf{F}$ , é usualmente dada pela equação de Langevin (veja, p.ex., Kubo, Toda & Sato, 1992):

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \eta \mathbf{v} = \mathbf{F} + \mathbf{\Gamma}(t) \quad (\text{A.1})$$

onde  $-\eta \mathbf{v}$  é a força viscosa e  $\mathbf{\Gamma}(t)$  é uma força estocástica gaussiana com as seguintes propriedades

$$\langle \mathbf{\Gamma}(t) \rangle = 0, \quad (\text{A.2})$$

ou seja, em média, o impacto provocado pelas moléculas do fluido é nulo, e

$$\langle \Gamma_\alpha(t) \Gamma_\beta(t') \rangle = \eta^2 \mathcal{D} \delta_{\alpha,\beta} \delta(t - t'), \quad (\text{A.3})$$

Aqui,  $\langle \dots \rangle$  significa média no *ensemble* de forças aleatórias. Os índices  $\alpha$  e  $\beta$  indicam as componentes do vetor  $\mathbf{\Gamma}$ . Esta equação significa que os impactos são decorrelacionados, independentes. A relação (A.3) é conhecida como teorema da flutuação-dissipação, onde o coeficiente de difusividade  $\mathcal{D}$  é dado pela relação de

Einstein-Smoluchowski

$$\mathcal{D} = \frac{2k_B T}{\eta}. \quad (\text{A.4})$$

A força de Langevin  $\Gamma(t)$  que satisfaz as propriedades enunciadas acima é também chamada de ruído branco, pois seu espectro de potência, dado por

$$\int dt e^{i\omega t} \langle \Gamma_\alpha(t) \Gamma_\beta(0) \rangle = 2\eta k_B T \delta_{\alpha,\beta},$$

é independente da frequência.

## A.2 Integração numérica da equação de Langevin

Vamos agora obter um algoritmo para a simulação do movimento de uma partícula de massa desprezível em um meio viscoso sob a ação de uma força  $\mathbf{F}$  e de um ruído gaussiano representado pela força de Langevin. A equação de Langevin na direção  $\alpha$  é

$$\eta \frac{dr_\alpha}{dt} = F_\alpha + \Gamma_\alpha(t) \quad (\text{A.5})$$

Aplicaremos aqui um método de diferenças finitas. Este método consiste em discretizar o tempo em intervalos regulares de duração  $h$ . As funções temporais são então avaliadas nos instantes  $t_n = t_{n-1} + h$ , onde  $n$  é um inteiro positivo. Iniciamos integrando a Eq. (A.5) no intervalo  $t_n < t < t_{n+1}$ . Para  $r_\alpha = x$ , temos

$$\eta \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt \frac{dx}{dt} = \eta [x(t_{n+1}) - x(t_n)] = \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt F_x(t) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt \Gamma_x(t) \quad (\text{A.6})$$

Supondo que  $F(t)$  é uma função bem comportada, o primeiro termo do lado direito de (A.6) pode ser aproximado por

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} dt F_x(t) = F_x(t)h + \mathcal{O}(h^2), \quad (\text{A.7})$$

que corresponde ao método clássico de integração de Euler. O segundo termo é a integral de uma variável estocástica gaussiana, sendo, portanto, também uma

variável gaussiana. Assim, definimos

$$\Omega_h(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt \Gamma_x(t),$$

cujo valor médio é

$$\langle \Omega_h(t_n) \rangle = \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt \langle \Gamma_x(t) \rangle = 0$$

e a correlação temporal é

$$\langle \Omega_h(t_n) \Omega_h(t_k) \rangle = \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt' \langle \Gamma_x(t) \Gamma_x(t') \rangle = \eta^2 \mathcal{D} \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt' \delta(t - t').$$

A integral em  $t'$  é igual a 1 se  $t$  pertence ao intervalo  $[t_k, t_k + h]$  e nula se  $t$  estiver fora do intervalo. Assim, podemos reescrever a equação acima como

$$\langle \Omega_h(t_n) \Omega_h(t_k) \rangle = \eta^2 \mathcal{D} (h - |t_n - t_k|) \theta(h - |t_n - t_k|)$$

onde  $\theta(x - a)$  é a função teta de Heaviside, ou seja, assume os valores 1 para  $x > a$  e 0 para  $x < a$ . Para  $k \neq n$ , temos  $|t_n - t_k| \geq h$ . Neste caso, a função teta nos retorna sempre o valor 0. Para  $k = n$ , temos  $|t_n - t_k| = 0$  e a função teta assume o valor 1. Assim a correlação de  $\Omega_h(t_n)$  é dada simplesmente por

$$\langle \Omega_h(t_n) \Omega_h(t_k) \rangle = \eta^2 \mathcal{D} h \delta_{n,k}.$$

Logo, a variância da variável gaussiana  $\Omega_h(t_n)$  é  $\langle \Omega_h(t_n)^2 \rangle = \eta^2 \mathcal{D} h$ . Assim podemos escrevê-la como

$$\Omega_h(t_n) = u(t_n) \sqrt{\eta^2 \mathcal{D} h}$$

onde  $u(t_n)$  é uma variável gaussiana de média 0 e variância unitária. Assim, na menor ordem de aproximação, a equação que descreve o movimento da partícula é

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \frac{1}{\eta} F_x(t_n) h + u(t_n) \sqrt{\mathcal{D} h}. \quad (\text{A.8})$$



# Referências Bibliográficas

- Abrikosov, A. A. (1957). *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 32, 1442 [Sov. Phys. JETP 5,1174 (1957)].
- Akkermans, E., Gangardt, D. M., & Mallick, K. (2001). *Phys. Rev. B*, 63, 064523.
- Ashcroft, N. W. & Mermin, D. (1976). *Solid State Physics*. Saunders.
- Avraham, N., Khaykovich, B., Myasoedov, Y., Rappaport, M., Shtrikman, H., Feldman, D. E., Tamegai, T., Kes, P. H., Li, M., Konczykowski, M., van der Beek, K., & Zeldov, E. (2001). *Nature*, 411, 451.
- Bardeen, J., Cooper, L. N., & Schrieffer, J. R. (1957). *Phys. Rev.*, 108, 1175.
- Bardeen, J. & Stephen, M. J. (1965). *Phys. Rev.*, 140, 1197A.
- Barnejee, S. S., Soibel, A., Myasoedov, Y., Rappaport, M., Zeldov, E., Menghini, M., Fasano, Y., de la Cruz, F., van der Beek, C. J., Konczykowsky, M., & Tamegai, T. (2003). *Phys. Rev. Lett.*, 90, 087004.
- Bean, C. P. & Livingston, J. D. (1964). *Phys. Rev. Lett.*, 12, 14.
- Bednorz, J. G. & Müller, K. A. (1986). *Z. Phys. B*, 64, 189.
- Bezryadin, A., Ovchinnikov, Y. N., & Pannetier, B. (1996). *Phys. Rev. Lett.*, 53, 8553.
- Blatter, G., Feigel'man, M. V., Geshkenbein, V. B., Larkin, A. I., & Vinokur, V. M. (1994). *Rev. Mod. Phys.*, 66, 1125.

- Brandt, E. H. (1986). *Phys. Rev. B*, 34, 6514.
- Brandt, E. H. (1991). *Int. J. Mod. Phys. B*, 5, 751.
- Brandt, E. H. (1994a). *Phys. Rev. B*, 50, 4034.
- Brandt, E. H. (1994b). *Phys. Rev. B*, 50, 13833.
- Brandt, E. H. (1995). *Rep. Prog. Phys.*, 58, 1465.
- Brongersma, S. H., Verweij, E., Koeman, N. J., de Groot, D. G., Griessen, R., & Ivlev, B. I. (1993). *Phys. Rev. Lett.*, 71, 2319.
- Carneiro, G. (1998). *Phys. Rev. B*, 57, 6077.
- Carneiro, G. (1999). *J. Low Temp. Phys.*, 117, 1323.
- Carneiro, G. (2000). *Phys. Rev. B*, 62, 14661.
- Carneiro, G. (2002). *Phys. Rev. B*, 66, 054523.
- Charalambous, M., Chaussy, J., Lejay, P., & Vinokur, V. (1993). *Phys. Rev. Lett.*, 71, 436.
- Chibotaru, L. F., Ceulemans, A., Bruyndoncx, V., & Moshchalkov, V. V. (2000). *Nature*, 86, 1323.
- Chibotaru, L. F., Ceulemans, A., Bruyndoncx, V., & Moshchalkov, V. V. (2001). *Phys. Rev. Lett.*, 408, 833.
- Clem, J. R. (1974). In K. D. Timmerhaus, W. J. O'Sullivan, & E. F. Hammel (Eds.), *Low Temperature Physics*, volume 3 (pp. 102). New York: Plenum.
- Clem, J. R. (1975). *J. Low Temp. Phys.*, 18, 427.
- Clem, J. R., Kerchner, H. R., & Sekula, T. S. (1976). *Phys. Rev. B*, 14, 1893.
- Cooper, L. N. (1956). *Phys. Rev.*, 104, 1189.
- Cugliandolo, L. F., Kurchan, J., & Peliti, L. (1997). *Phys. Rev. E*, 55, 3898.

- de Gennes, P. G. (1965). *Solid State Communications*, 3, 127 – 130.
- de Gennes, P. G. (1966). *Superconductivity in Metals and Alloys*. W. A. Benjamin. reprinted by Addison-Wesley, Reading, MA (1989).
- de Souza Silva, C. C. (1999). Desenvolvimento de substratos para filmes supercondutores de alta  $T_c$  e dinâmica de vórtices em multicamadas supercondutoras. Master's thesis, Departamento de Física - Universidade Federal de Pernambuco.
- de Souza Silva, C. C. & Aguiar, J. A. (2001). *Physica C*, 354, 232.
- de Souza Silva, C. C. & Aguiar, J. A. (2003). *Physica C*, 391/2, 203.
- de Souza Silva, C. C., Cabral, L. R. E., & Aguiar, J. A. (2001). *Phys. Rev. B*, 63, 134526.
- de Souza Silva, C. C. & Carneiro, G. (2002). *Phys. Rev. B*, 66, 054514.
- Deo, P. S., Schweigert, V. A., Peeters, F. M., & Geim, A. K. (1997). *Phys. Rev. Lett.*, 79, 4653.
- Doniach, S. & Huberman, B. A. (1979). *Phys. Rev. Lett.*, 42, 1169.
- Doria, M. (1991). *Physica C*, 178, 51.
- Dufrense, E. R. & Grier, D. G. (1998). *Rev. Sci. Instrum.*, 69, 1974.
- Field, S. B., James, S. S., Barentine, J., Metlushko, V., Crabtree, G., Shtrikman, H., Ilic, B., & Brueck, S. R. J. (2002). *Phys. Rev. Lett.*, 88, 067003.
- Fink, H. J. & Presson, A. G. (1966). *Phys. Rev.*, 151, 219.
- Fisher, D. S. (1980). *Phys. Rev. B*, 22, 1190.
- Fisher, D. S. (1997). *Phys. Rev. Lett.*, 78, 1964.
- Frey, E., Nelson, D. R., & Fisher, D. S. (1994). *Phys. Rev. B*, 49, 9723.
- Frölich, H. (1950). *Phys. Rev.*, 79, 845.

- Geim, A. K., Dubonov, S. V., Grigorieva, I. V., Novoselov, K. S., Peeters, F. M., & Schweigert, V. A. (2000). *Nature*, 407, 55.
- Geim, A. K., Grigorieva, I. V., Dubonov, S. V., Lok, J. G. S., Maan, J. C., Filipov, A. E., & Peeters, F. M. (1997). *Nature*, 390, 256.
- Giamarchi, T. & Le Doussal, P. (1995). *Phys. Rev. B*, 52, 1242.
- Giamarchi, T. & Le Doussal, P. (1996). *Phys. Rev. Lett.*, 76, 3408.
- Giamarchi, T. & Le Doussal, P. (1997). *Physica C.*, 282, 363.
- Giamarchi, T. & Le Doussal, P. (1998). *Phys. Rev. B*, 57, 11356.
- Gingras, M. J. P. & Huse, D. A. (1996). *Phys. Rev. B*, 53, 15193.
- Ginzburg, V. L. & Landau, L. (1950). *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 20, 1064.
- Gittleman, J. I. & Rosenblum, B. (1966). *Phys. Rev. Lett.*, 16, 734.
- Gradshteyn, I. S. & Ryzhik, I. M. (1965). *Table od Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 4th. edition.
- Granato, E. & Ying, S. C. (2000). *Phys. Rev. Lett.*, 85, 5368.
- Grigorenko, A. N., Howells, G. D., Bending, S. J., Bekaert, J., Bael, M. J. V., Look, L. V., Moshchalkov, V. V., Bruynseraede, Y., Borghs, G., Kaya, I. I., & Stradling, R. A. (2001). *Phys. Rev. B*, 63, 052504.
- Grønbech-Jensen, M. (1996). *Int. J. Mod. Phys. C*, 7, 873.
- Grønbech-Jensen, M. (1999). *Comput. Phys. Commun.*, 119, 115.
- Guimpel, J., Civale, L., de la Cruz, F., Murdock, J. M., & Schuller, I. K. (1988). *Phys. Rev. B*, 38, 2342.
- Harada, K., Kamumura, O., Kasai, H., T. Matsuda, A. T., & Moshchalkov, V. V. (1996). *Science*, 271, 1393.

- Henderson, W., Andrei, E. Y., Higgins, M. J., & Battacharya, S. (1998). *Phys. Rev. Lett.*, 80, 381.
- Hetzel, E. E., Sudbø, A., & Huse, D. A. (1992). *Phys. Rev. Lett.*, 68, 518.
- Houghton, A., Pelcovits, R. A., & Sudbø, A. (1989). *Phys. Rev. B*, 40, 6763.
- Jackson, J. D. (1999). *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., 3rd. edition.
- Kierfeld, J., Nattermann, T., & Hwa, T. (1997). *Phys. Rev. B*, 55, 626.
- Kittel, C. (1986). *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley & Sons, Inc., 6th. edition.
- Klein, T., Joumard, I., Blanchard, S., Marcus, J., Cubbit, R., Giamarchi, T., & Doussal, P. L. (1998). *Nature*, 396, 348.
- Kleiner, W. H., Roth, L. M., & Autler, S. H. (1964). *Phys. Rev.*, 133, A1226.
- Kolton, A. B., Dominguez, D., & Grønbech-Jensen, N. (2001). *Phys. Rev. Lett.*, 86, 41112.
- Kolton, A. B., Exartier, R., Cugliandolo, L. F., Dominguez, D., & Grønbech-Jensen, N. (2002). *Phys. Rev. Lett.*, 89, 227001.
- Koshelev, A. E. & Vinokur, V. M. (1994). *Phys. Rev. Lett.*, 73, 3580.
- Kosterlitz, J. M. (1974). *J. Phys. C*, 7, 1046.
- Kosterlitz, J. M. & Thouless, D. J. (1973). *J. Phys. C*, 6, 1181.
- Kötzler, J., Kauffmann, M., Nakaelski, G., & Behr, R. (1994a). *Phys. Rev. Lett.*, 72, 2081–2084.
- Kötzler, J., Nakielski, G., Baumann, M., Behr, R., Goerke, F., & Brandt, E. H. (1994b). *Phys. Rev. B*, 50, 3384.

- Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. (1960). *Electrodynamics of continuous media, Course of Theoretical Physics, Vol. 8*. Pergamon, 1st edition.
- Lindemann, F. (1910). *Phys. Z. (Leipzig)*, 11, 69.
- London, F. & London, H. (1935). *Proc. Roy. Soc. (London)*, A 141, 71.
- Lütke-Entrup, N., Plaçais, B., Mathieu, P., & Simon, Y. (1997). *Phys. Rev. Lett.*, 79, 2538.
- Marconi, V. I., Candia, S., Balenzuela, P., & Dominguez, D. (2000). *Phys. Rev. B*, 62, 4096.
- Marconi, V. I. & Dominguez, D. (1998). *Phys. Rev. Lett.*, 82, 4922.
- Marconi, V. I. & Dominguez, D. (2001). *Phys. Rev. B*, 63, 174509.
- Mawatari, Y. & Yamafuji, K. (1994). *Physica C*, 228, 336.
- Meissner, W. & Ochsenfeld, R. (1933). *Naturwissenschaften*, 21, 787.
- Mel'nikov, A. S., Nefedov, I. M., Ryzhov, D. A., Shereshevskii, I. A., Vinokur, V. M., & Vysheslavtsev, P. P. (2002). *Phys. Rev. B*, 65, 140503.
- Moshchalkov, V., Qiu, X., & Bruyndoncx, V. (1997). *Phys. Rev. B*, 55, 11793.
- Moshchalkov, V. V., Baert, M., Metlushko, V. V., Rosseel, E., Bael, M. J. V., Temst, K., Bruynseraede, Y., & Jonckheere, R. (1998). *Phys. Rev. B*, 57, 3615.
- Moshchalkov, V. V., Baert, M., Metlushko, V. V., Rosseel, E., Bael, M. J. V., Temst, K., Jonckheere, R., & Bruynseraede, Y. (1996). *Phys. Rev. B*, 54, 7385.
- Moshchalkov, V. V., Gielen, L., Strunk, C., Jonckheere, R., Qiu, X., Haesendonck, C. V., & Bruynseraede, Y. (1995). *Nature*, 373, 319.
- Olson, C. J., Reichhardt, C., & Nori, F. (1998). *Phys. Rev. Lett.*, 81, 3757.
- Olson, C. J., Reichhardt, C., Scalettar, R., Zimanyi, G. T., , & Grønbech-Jensen, N. (2003). *Physica C*, 384, 143.

- Onnes, H. K. (1911). *Akad. Van Wetenschappen (Amsterdam)*, 14, 113, 818.
- Onsager, L. (1949). *Nuovo Cimento*, 6, 249.
- Pardo, F., de la Cruz, F., Gammel, O. L., Bucher, E., & Bishop, D. J. (1998). *Nature*, 396, 348.
- Pasquini, G., Civale, L., Lanza, H., & Nieva, G. (1999). *Phys. Rev. B*, 57, 9627.
- Pasquini, G., Civale, L., Lanza, H., & Nieva, G. (2002). *Phys. Rev. B*, 65, 214517.
- Pautrat, A., Goupil, C., Simon, C., Lütke-Entrup, N., Plaçais, B., Mathieu, P., Simon, Y., Rykov, A., & Tajima, S. (2001). *Phys. Rev. B*, 63, 054503.
- Pearl, J. (1964). *Appl. Phys. Lett.*, 5, 65.
- Peeters, F. M., Schweigert, V. A., & Baelus, B. J. (2002). *Physica C*, 369, 158.
- Pokrovsky, V. L. & Talapov, A. L. (1984). *Theory of Incommensurate Crystals*. Harwood.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. (1992). *Numerical Recipes in C: the art of scientific computing*. Cambridge University Press, 2nd. edition.
- Reichhardt, C. & Nori, F. (1998). *Phys. Rev. Lett.*, 82, 414.
- Reichhardt, C., Olson, C. J., Grønbech-Jensen, N., & Nori, F. (2001). *Phys. Rev. Lett.*, 86, 4354.
- Reichhardt, C., Olson, C. J., & Nori, F. (1997). *Phys. Rev. Lett.*, 78, 2648.
- Reichhardt, C., Olson, C. J., & Nori, F. (1998a). *Phys. Rev. B*, 57, 7937.
- Reichhardt, C., Olson, C. J., & Nori, F. (1998b). *Phys. Rev. B*, 58, 6534.
- Reichhardt, C. & Zimányi, G. T. (2000). *Phys. Rev. B*, 61, 14354.
- Rusinov, A. I. & Mkrtchan, G. S. (1971). *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 61, 773 [Sov. Phys. JETP **34**, 413 (1972)].

- Ryu, S., Hellerqvist, M., Doniach, S., Kapitulnik, A., & Stroud, D. (1996). *Phys. Rev. Lett.*, 77, 5114.
- Safar, H., P. L. Gammel, D. J. B., Lee, W. C., & Ginsberg, D. M. (1993). *Phys. Rev. Lett.*, 70, 3800.
- Safar, H., P. L. Gammel, D. J. B., Rice, J. P., & Ginsberg, D. M. (1992). *Phys. Rev. Lett.*, 69, 824.
- Saint-James, D. (1965). *Phys. Lett.*, 15, 13.
- Sardella, E., Doria, M. M., & Netto, P. R. S. (1999). *Phys. Rev. B*, 60, 13158.
- Schmid, A. & Hauger, W. (1973). *J. Low Temp. Phys.*, 11, 667.
- Schweigert, V. A., Peeters, F. M., & Deo, P. S. (1998). *Phys. Rev. Lett.*, 81, 2783.
- Sengupta, S., Dasgupta, C., Krishnamurthy, H. R., Menon, G. I., & Ramakrishnan, T. V. (1991). *Phys. Rev. Lett.*, 67, 3444.
- Shmidt, V. V. (1969). *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 57, 2095 [Sov. Phys. JETP **30**, 1137 (1970)].
- Shmidt, V. V. (1971). *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 61, 398 [Sov. Phys. JETP **34**, 211 (1972)].
- Silhanek, A. V., Raedts, S., Lange, M., & Moshchalkov, V. V. (2002). *Phys. Rev. B*, 67, 064502.
- Tinkham, M. (1996). *Introduction to Superconductivity*. McGraw-Hill, Inc., 2nd. edition.
- Toda, M., Kubo, R., & Saito, N. (1992). *Statistical Mechanics II (Nonequilibrium Statistical Mechanics)*. Springer Verlag, 2nd. edition.
- van der Beek, C. J., Geshkenbein, V. B., & Vinokur, V. M. (1993). *Phys. Rev. B*, 48, 3393.

van Otterlo, A., Scalettar, R. T., & Zimanui, G. T. (1998). *Phys. Rev. Lett.*, 81, 1497.

Venegas, P. A. & Sardella, E. (1998). *Phys. Rev. B*, 58, 5789.

Zeldov, E., Majer, D., Konczykowski, M., Geshkenbein, V. B., Vinokur, V. M., & Shtrikman, H. (1995). *Nature*, 375, 373.

Ziese, M., Esquinazi, P., P.Wagner, Adrian, H., Brongersma, S. H., & Griessen, G. (1996). *Phys. Rev. B*, 53, 8658.



# Lista de publicações

## Artigo aceito para publicação

- Clécio C. de Souza Silva, J. Albino Aguiar & V. V. Moshchalkov *Linear ac dynamics of vortices in a periodic pinning array*, Physical Review B (2003).

## Artigos publicados durante o doutorado

- Clécio C. de Souza Silva & Gilson Carneiro, *Transverse pinning and vortex displacement fluctuations of moving vortex lattices interacting with periodic pinning*, Physica C **391/2**, 203–210 (2003).
- Clécio C. de Souza Silva and J. Albino Aguiar, *Vortex dynamics in mesoscopic strips*, Physica C **388-389**, 673-674 (2003).
- Clécio C. de Souza Silva & Gilson Carneiro, *A simple model for dynamical melting of moving vortex lattices interacting with periodic pinning*, Physical Review B **66**, 054514-1–7 (2002).
- Leonardo R. E. Cabral, Clécio C. de Souza Silva, J. Albino Aguiar & E. H. Brandt, *Geometric barrier in  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{7+\delta}$* , Physical Review B **65**, 134514-1–7 (2002).
- Clécio C. de Souza Silva, Leonardo R. E. Cabral & J. Albino Albino. *Vortices in superconducting strips: interplay between surface effects and the*

- pinning landscape*, Physica C **369/1-4**, 217–221 (2002).
- Leonardo R. E. Cabral, Clécio C. de Souza Silva, J. Albino Aguiar & E. H. Brandt, *Magnetization curves and geometric barrier in BSCCO - 2212*, Physica C **369/1-4**, 196–199 (2002).
  - Clécio C. de Souza Silva, Leonardo R. E. Cabral & J. Albino Aguiar, *Vortex dynamics in superconducting films: comensurability and surface effects*, Physica Status Solidi A **187**, 209–213 (2001).
  - Clécio C. de Souza Silva, Leonardo R. E. Cabral & J. Albino Aguiar, *Flux penetration, matching effect, and hysteresis in homogeneous superconducting films*, Physical Review. B **63**, 134526-1–5 (2001).
  - Clécio C. de Souza Silva & J. Albino Aguiar, *Irreversible matching effects in homogeneous and layered superconducting films*, Physica C **354**, 232–236 (2001).