

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE ENERGIA NUCLEAR**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM TECNOLOGIAS  
ENERGÉTICAS E NUCLEARES**

**RESOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE  
DE NÊUTRONS EM UM REATOR ANELAR COM FONTE  
PULSADA ROTATIVA**

**PAULO CLÉBER MENDONÇA TEIXEIRA**

**ORIENTADOR: Prof. Dr. RAJENDRA NARAIN**

**RECIFE - PERNAMBUCO - BRASIL  
DEZEMBRO - 2002**

**PAULO CLÉBER MENDONÇA TEIXEIRA**

**RESOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE  
DE NÊUTRONS EM UM REATOR ANELAR COM FONTE  
PULSADA ROTATIVA**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Tecnologias Energéticas e Nucleares da Universidade Federal de Pernambuco para obtenção do título de Mestre em Ciências, área de concentração: Engenharia de Reatores.

ORIENTADOR: Prof. Dr. RAJENDRA NARAIN.

**RECIFE - PERNAMBUCO - BRASIL**

**DEZEMBRO - 2002**

**RESOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE  
DE NÊUTRONS EM UM REATOR ANELAR COM FONTE  
PULSADA ROTATIVA**

## **DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho ao meu pai, José A. A. Teixeira (*In memoriam*), à minha mãe, Maria Ivanilde M. Teixeira, aos meus irmãos , sobrinhos e, especialmente, a minha sobrinha Renata Teixeira.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Professor Dr. Rajendra Narain, pela orientação segura durante todo o processo de elaboração deste trabalho. Obrigado, professor, por expor as diretrizes a serem seguidas sem abrir mão da fraternidade inerente às relações humanas duradouras.

A todos os professores do DEN e, em particular, aos doutores Clóvis A. Hazin, Carlos Brayner de Oliveira Lira, Elias S. Filho, Fernando Roberto Andrade Lima e Rajendra Narain, com os quais tive mais interação direta ao cursar disciplinas fundamentais para minha formação.

Aos professores que fizeram parte das bancas dos meus Seminários de Dissertação: Carlos Alberto Brayner de Oliveira, José Clemente C. da Silva, Elias Silva Filho, Ricardo Carvalho de Barros e Rita Cássia F. Lima.

Ao Professor Dr. Luiz Clispino por sua ajuda no tratamento matemático.

Aos colegas pertence ao Grupo de Engenharia de Reatores: Max, Mário, Antônio, Lázara e Jornandes.

A todos os colegas do DEN, especialmente a Willames, Wilson Vieira, Jaberson, Cleomácio, Ana Maia, Válter Dantas, Isabela e Mônica, pelo convívio, amizade e ajuda mútua.

Aos meus amigos João Herminio, Vasto, Angela, Kilvane, Fernando Marciano e Múcio, por serem amigos de todas as horas.

Aos colegas da UNITINS, professores, Fábio, Miranda, Kalina e Marinho, por compressão e amizade no final do trabalho.

A todos funcionários do DEN, que de forma direta ou indireta contribuíram para o desenvolvimento da dissertação.

Ao DEN/UFPE pela oportunidade de desenvolver a dissertação.

A UNITINS e CAPES pelo apoio financeiro.

## SUMÁRIO

	Página
Lista de Símbolos.....	VII
Lista de Figuras.....	X
Lista de Tabelas .....	XI
Resumo.....	XIII
Abstract.....	XIV
1. Introdução.....	1
2. Revisão da Literatura.....	3
2.1. Teoria de Transporte.....	3
2.1.1 Equação de transporte de nêutrons de uma velocidade e uma dimensão .....	4
2.1.2. Nêutrons Atrasados.....	5
2.1.3. Solução da teoria de transporte para um reator anelar.....	9
2.1.4. Análise numérica com método de diferenças finitas.....	9
2.2. Reatores Pulsados.....	9
2.2.1. Dinâmica de reatores pulsados.....	10
2.3. Reatores pulsados periodicamente.....	14
3. Exposição do problema.....	16
3.1. Equação de transporte de nêutrons a uma velocidade em uma dimensão .....	20

4.	Solução analítica do problema do reator anelar.....	23
4.1.	Estudos de alguns Casos especiais deste problema.....	28
4.1.1.	Estado estacionário.....	28
4.1.2.	Pulso de nêutrons prontos.....	29
4.1.3.	Comportamento global da equação do fluxo $\phi(x, t)$ .....	33
5.	Resultados e análise.....	35
5.1.	Para o parâmetro $c < 1$ .....	35
5.2.	Para o parâmetro $c > 1$ .....	39
5.3.	Caso de reator anelar pulsado.....	44
6.	Conclusões.....	48
	Bibliografia.....	49
	Apêndice.....	51
A.	Equação linear de transporte de Boltzmann.....	52
B.	A Função Delta de Dirac.....	53
C.	Transformada de Laplace.....	55
D.	Singularidades e pólos.....	57
E.	Termos Atômicos.....	60

## LISTA DE SÍMBOLOS

$B_T^2$	→	Buckling Transversal	(cm <sup>-2</sup> )
C	→	Concentração de Precursor	(cm <sup>-3</sup> )
c	→	Parâmetro regenerador	(adimensional)
D	→	Coefficiente de Difusão	(cm)
E	→	Energia do Nêutron	(j/kg)
E(t)	→	Energia Total Gerada	(j/kg)
f(m)	→	Parâmetro para existência do harmônico m	(adimensional)
g(m)	→	Parâmetro para estabilidade do harmônico m	(adimensional)
J	→	Números de precursores.	
$\vec{J}$	→	Corrente de Nêutron	
k	→	Fator de Multiplicação	(adimensional)
$k_\infty$	→	Fator de Multiplicação infinito	(adimensional)
$k_{ef}$	→	Fator de Multiplicação efetiva	(adimensional)
k'	→	Coefficiente de Condutividade	
L	→	Perímetro do pulsador.	(cm)
m	→	Número de Harmônico	(adimensional)
P	→	Potência	(W)
$P_{max}$	→	Potência Máxima	(W)
S	→	Fonte de Nêutron	(cm <sup>-3</sup> .s <sup>-1</sup> )
t	→	Tempo	(s)

$V$	→	Velocidade do Pulsador	(m/s)
$v$	→	Velocidade do Nêutron	(m/s)
$\bar{\nu}$	→	Número de Nêutrons Emitidos por Fissão	

## LETRAS GREGAS

$\alpha_0$	→	Rossi Alfa	( $s^{-1}$ )
$\beta_i$	→	Fração dos Nêutrons de fissão que são atrasados e gerados pelo i-ésimo precursor.	
$\delta$	→	Função Delta de Dirac	
$\gamma$	→	Coefficiente de realimentação de Reatividade	
$\phi$	→	Fluxo escalar dos Nêutrons	( $n/cm^2 s$ )
$\lambda_i$	→	Constante de Decaimento Radioativo do i-ésimo Precursor.	
$\Lambda$	→	Tempo de Vida efetivo dos Nêutrons Prontos	(s)
$\rho$	→	Reatividade total	
$\rho'$	→	Reatividade dos nêutrons prontos = $\rho - \beta$	
$\vec{\Omega}$	→	Vetor unitário da velocidade dos nêutrons.	
$\Sigma$	→	Seção de Choque Macroscópica Total	( $cm^{-1}$ )
$\Sigma_a$	→	Seção de Choque Macroscópica de Absorção	( $cm^{-1}$ )
$\Sigma_s$	→	Seção de Choque Macroscópica de Espalhamento	( $cm^{-1}$ )
$\Sigma_f$	→	Seção de Choque Macroscópica de Fissão	( $cm^{-1}$ )

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA	PÁGINA
1. A Origem dos Nêutrons Atrasados do Precursor Br <sup>87</sup> .....	6
2. Resultados das experiências de pulsos Godiva – II.....	14
3. Arranjo Esquemático Para Reator Pulsado Anelar.....	16
4. Geometria do combustível IBR-2.....	17
5. Forma do pulso giratório.....	18
6. Arranjo simplificado para Análise do reator.....	19
7. Movimento de nêutrons em geometria plana.....	21
8. Singularidade no Plano - p.....	30
9. Parâmetros f(m) e g(m) para os harmônicos.....	44
10. Análise do 1º harmônico, do comprimento L do pulsador variando de 20 a 50 e c =1,13 .....	46

## LISTA DE TABELAS

<b>TABELA</b>	<b>PÁGINA</b>
1. Precusores de nêutrons atrasados.....	7
2. Rendimento de nêutrons atrasados para materiais físseis e férteis.....	8
3. Estabilidade dos harmônicos para $c = 0,99$ e $\Sigma L = 10$ .....	35
4. Estabilidade dos harmônicos para $c = 0,95$ e $\Sigma L = 10$ .....	35
5. Estabilidade dos harmônicos para $c = 0,5$ e $\Sigma L = 10$ .....	36
6. Estabilidade dos harmônicos para $c = 0,99$ e $\Sigma L = 20$ .....	36
7. Estabilidade dos harmônicos para $c = 0,95$ e $\Sigma L = 20$ .....	36
8. Estabilidade dos harmônicos para $c = 0,5$ e $\Sigma L = 20$ .....	37
9. Estabilidade dos harmônicos para $c = 0,99$ e $\Sigma L = 50$ .....	37
10. Estabilidade dos harmônicos para $c = 0,95$ e $\Sigma L = 50$ .....	38
11. Estabilidade dos harmônicos para $c = 0,5$ e $\Sigma L = 50$ .....	38
12. Estabilidade dos harmônicos para $c = 1,01$ e $\Sigma L = 10$ .....	39
13. Estabilidade dos harmônicos para $C = 1,1$ e $\Sigma L = 10$ .....	39
14. Estabilidade dos harmônicos para $c = 1,5$ e $\Sigma L = 10$ .....	40
15. Estabilidade dos harmônicos para $c = 1,01$ e $\Sigma L = 20$ .....	40
16. Estabilidade dos harmônicos para $c = 1,1$ e $\Sigma L = 20$ .....	41
17. Estabilidade dos harmônicos para $c = 1,5$ e $\Sigma L = 20$ .....	41
18. Estabilidade dos harmônicos para $c = 1,01$ e $\Sigma L = 50$ .....	42

19. Estabilidade dos harmônicos para $c = 1,1$ e $\Sigma L = 50$ .....	42
20. Estabilidade dos harmônicos para $c = 1,5$ e $\Sigma L = 50$ .....	43
21. Análise do 1º harmônico, do comprimento L do pulsador variando de 20 a 50 e $c = 1,13$ ....	46

# RESOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE NÊUTRONS EM UM REATOR ANELAR COM FONTE PULSADA ROTATIVA

**Autor: Paulo Cléber Mendonça Teixeira**

**Orientador: Prof. Dr. Rajendra Narain**

## RESUMO

Neste trabalho, apresenta-se uma solução analítica da equação de transporte de nêutrons em um reator anelar com fonte curta e rotativa do tipo  $S(x)\delta(x - Vt)$ , onde  $V$  é a velocidade da fonte pulsada gerada em um novo conceito de reator anelar. O trabalho é uma extensão do estudo anterior de Williams [12], realizado com fonte pulsado do tipo  $S(x)\delta(t)$ . No novo conceito de reator anelar pulsado para produção de alto fluxo contínuo, o núcleo subcrítico consiste em uma geometria anelar pulsado por um pulsador rotativo, produzindo localmente um estado supercrítico pronto, dando origem a um pulso neutrônico rotativo. A solução analítica é obtida retificando-se a geometria anelar e aplicando a teoria de transporte a um grupo de energia em uma dimensão usando-se técnicas de matemática aplicada, como transformada de Laplace e variáveis complexas.

A solução geral para o fluxo consiste em um modo fundamental, um número finito de harmônicos e uma integral transitória. Deduz-se uma condição, a qual fornece o número máximo de harmônicos que podem existir para uma circunferência do anel. A inversa da transformada de Laplace é usada para analisar se há instabilidade no núcleo do reator anelar. Um parâmetro regenerador conjuntamente com o perímetro do anel e propriedades nucleares é usado para obter harmônicos estáveis e instáveis, e para verificar se os mesmos existem. É observado que a solução não apresenta instabilidade nas condições estipuladas no novo conceito do reator anelar pulsado.

# **ANALYTICAL SOLUTION OF NEUTRON TRANSPORT EQUATION IN AN ANNULAR REACTOR WITH A ROTATING PULSED SOURCE.**

**Author: Paulo Cléber Mendonça Teixeira**

**Advisor: Prof. Dr. Rajendra Narain**

## **ABSTRACT**

In this study, an analytical solution of the neutron transport equation in an annular reactor is presented with a short and rotating neutron source of the type  $S(x)\delta(x - Vt)$ , where  $V$  is the speed of annular pulsed reactor. The study is an extension of a previous study by Williams [12] carried out with a pulsed source of the type  $S(x)\delta(t)$ . In the new concept of annular pulsed reactor designed to produce continuous high flux, the core consists of a subcritical annular geometry pulsed by a rotating modulator, producing local super prompt critical condition, thereby giving origin to a rotating neutron pulse. An analytical solution is obtained by opening up of the annular geometry and applying one energy group transport theory in one dimension using applied mathematical techniques of Laplace transform and Complex Variables.

The general solution for the flux consists of a fundamental mode, a finite number of harmonics and a transient integral. A condition which limits the number of harmonics depending upon the circumference of the annular geometry has been obtained. Inverse Laplace transform technique is used to analyze instability condition in annular reactor core. A regenerator parameter in conjunction with perimeter of the ring and nuclear properties is used to obtain stable and unstable harmonics and to verify if these exist. It is found that the solution does not present instability in the conditions stated in the new concept of annular pulsed reactor.

## 1. INTRODUÇÃO.

Um dos requisitos fundamentais para o projeto de reatores nucleares é conhecer o comportamento da distribuição neutrônica que determina a operação segura de tais sistemas. Conseqüentemente, um dos problemas centrais em pesquisa de reatores é prever com detalhes esta distribuição.

Este problema é tratado pela teoria de transporte de nêutrons[1,2,3], que estuda a migração de nêutrons no meio multiplicativo ou não, e que obtém a distribuição do fluxo no espaço, no tempo e na energia. É necessário, então, um conhecimento das características, propriedades e grandezas microscópicas e macroscópicas do sistema físico, tais como seções de choque, composição do material, geometria, etc.

A equação fundamental que modela o transporte de nêutrons é uma equação linear de Boltzmann [Apêndice A], deduzida a partir do princípio da conservação (ou balanço) do número de nêutrons em um elemento de volume.

A equação de transporte é de difícil solução analítica em vista da complexidade das funções e do número de variáveis independentes que definem o problema. Em geral, na análise dos reatores nucleares usa-se uma aproximação da equação de transporte denominada equação de difusão. Portanto, encontrar soluções analíticas para equação de transporte, somente é factível se o sistema for simplificado ou idealizado de tal maneira que se obtenha uma solução matemática na forma fechada. No regime estacionário, o fluxo é considerado independente do tempo. A dependência espacial do problema com geometria arbitrária é difícil de ser tratada. O que se faz geralmente é considerar um modelo idealizado em geometria plana e, desta forma, os parâmetros dependerão somente de uma coordenada espacial.

Quanto à dependência energética da equação de transporte, tratamentos podem ser feitos: divide-se o intervalo de energia de interesse em um número finito de subintervalos, denominados grupos de energia[4]. Os parâmetros nucleares são obtidos através de médias ponderadas em cada intervalo.

Quanto ao fato de o espalhamento exibir o caráter anisotrópico, o que geralmente se faz para englobar este efeito é expandir a dependência angular das seções de choque em Polinômio de Legendre[5,6], truncando a expansão num determinado termo. Assim, truncando a série no termo correspondente à ordem zero, tem-se o modelo de espalhamento isotrópico; truncando no termo de primeira ordem, tem-se o modelo de espalhamento linearmente anisotrópico.

Um Reator Pulsado [7] é um equipamento para a produção de pulso (Bursts) periódico ou não-periódico. Reactores Pulsados Rápidos[8] são empregados para produzir radiações com finalidades experimentais.

Um novo conceito de reator anelar pulsado de alto fluxo contínuo [**Very Intense Continuous High Flux Pulsed Reactor (VICHFPR)**] com pulso giratório foi proposto para produção de alto fluxo de nêutrons, por Narain[9]. O objetivo deste trabalho é obter uma solução analítica em um caso com fonte curta e rotativa, como produzido no conceito de VICHFPR, descrita em espaço e tempo por uma função do tipo  $S_0\delta(x - Vt)$ , onde  $V$  é a velocidade linear da fonte, e  $\delta$  é a função Delta de Dirac. Também é analisada a questão da estabilidade do sistema do reator anelar pulsado em função de parâmetros nucleares e geométricos.

## 2. REVISÃO DA LITERATURA

### 2.1. Teoria De Transporte

Os primeiros trabalhos envolvendo problemas de transporte apareceram no fim do século XIX no campo da astrofísica. Pesquisa sobre diversos problemas de transferência radiativa levou a um aprofundamento da equação de Boltzmann e culminou num modelo formulado por Milne em 1921[10], para estudos da distribuição angular da radiação emitida por uma estrela, cuja solução matemática foi somente encontrada em 1931 por Wiener e Hopf[10], que utilizaram a técnica da transformada de Fourier. E, neste contexto, é que foram introduzidos os primeiros estudos em transporte de nêutrons.

A equação geral de transporte de nêutrons[1] é deduzida a partir do princípio da conservação do número de nêutrons num volume elementar localizado em  $\vec{r}$ :

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) + \vec{\Omega} \cdot \nabla \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) + \Sigma(\vec{r}, E, t) \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) = \int \int_{E' \Omega'} \Sigma(\vec{r}, E', t) f(\vec{r}, \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) \Phi(\vec{r}, \Omega', E', t) d\Omega' dE' + S(\vec{r}, \Omega, E, t), \quad (1)$$

onde:  $\vec{\Omega} = \frac{\vec{v}}{v}$  → vetor unitário que define direção de movimento do nêutron.

$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$  → fluxo angular de nêutrons definidos por:  $vN(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$ .

Sabendo que  $N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$  é a densidade angular, que representa o número médio de nêutrons no volume elementar localizado em  $\vec{r}$ , que migram na direção entre  $\vec{\Omega}$  e  $(\vec{\Omega} + d\vec{\Omega})$ , com energia entre  $E$  e  $(E + dE)$ , no instante  $t$ , por unidade de volume, ângulo e energia, e  $v$  é a velocidade escalar de nêutron.

$\Sigma(\vec{r}, E', t)$  → seção de choque macroscópica total definida como sendo a probabilidade de interação entre os nêutrons e os núcleos dos átomos do meio por unidade de comprimento.

$f(\vec{r}, \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E)$  → probabilidade de um nêutron migrando na direção  $\vec{\Omega}'$  e com energia  $E'$ , emergir após uma colisão com um núcleo do meio, na direção  $\vec{\Omega}$  e com energia  $E$ .

$S(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$  → número de nêutrons emitidos por fontes no volume elementar localizado em  $\vec{r}$ , com direção  $\vec{\Omega}$ , energia  $E$ , no instante  $t$ , por unidade de volume, ângulo sólido e energia.

### 2.1.1. Equação de Transporte de uma Velocidade e uma Dimensão

A equação (1) é a equação geral de transportes de nêutrons. Neste trabalho estaremos usando a simplificação de uma velocidade. É assumido, que todas as seções de choque são independentes da energia, portanto,  $\sum_{i=1}^g \Sigma_i(\vec{r}, t) = \Sigma(\vec{r}, t)$ , onde  $g$  é o número de grupo de energia. Por outro lado, a função distribuição angular de nêutrons emergentes após uma colisão, isto é,  $\int_E f(\vec{r}, \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) dE$  é independente da energia

$E'$ . Com isto, reescrevemos,  $\int_E f(\vec{r}, \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) dE = c(\vec{r}) f(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})$ , onde

$c(\vec{r})f(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})$  é normalizado pela unidade. Incorporando as considerações acima na equação (1) e integrando sobre a energia, a equação de transporte resulta independente da energia e num sentido geral significa que todos os nêutrons têm a mesma velocidade. Logo, a equação é definida como equação de transporte a uma velocidade[11] durante o fenômeno sendo estudado:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + \vec{\Omega} \cdot \nabla \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + \Sigma(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \int_{\Omega'} \Sigma(\vec{r}, t) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) d\Omega' + S(\vec{r}, \vec{\Omega}, t). \quad (2)$$

### 2.1.2. Nêutrons Atrasados

Um dos produtos mais importantes da fissão são os nêutrons que são emitidos no processo. A maioria destes aparecem instantaneamente, aproximadamente  $10^{-17}$  s após a fissão, e são chamados de nêutrons prontos.

Um número pequeno de nêutrons aparece depois que a fissão aconteceu, com um atraso substancial e estes são chamados nêutrons atrasados.

Embora menos que 1% dos nêutrons de fissão sejam atrasados[4], eles têm um papel importante na operação e na segurança de um reator. Os nêutrons atrasados originam-se do decaimento por emissão de nêutrons, em seguida a um decaimento- $\beta$  de certos produtos de fissões. Em algumas oportunidades o núcleo atômico resulta em estado excitado, podendo emitir um nêutron. Por exemplo, o produto de fissão  $\text{Br}^{87}$ , após o decaimento- $\beta$ , permanece em um estado virtual excitado,  $\text{Kr}^{87}$  com uma energia de aproximadamente 5,4 MeV, como mostra a Figura 1. Existem outros, como  $\text{I}^{137}$  e  $\text{Br}^{88}$ , que tradicionalmente são agrupados em seis grupos de nêutrons atrasados, conforme a Tabela 1.

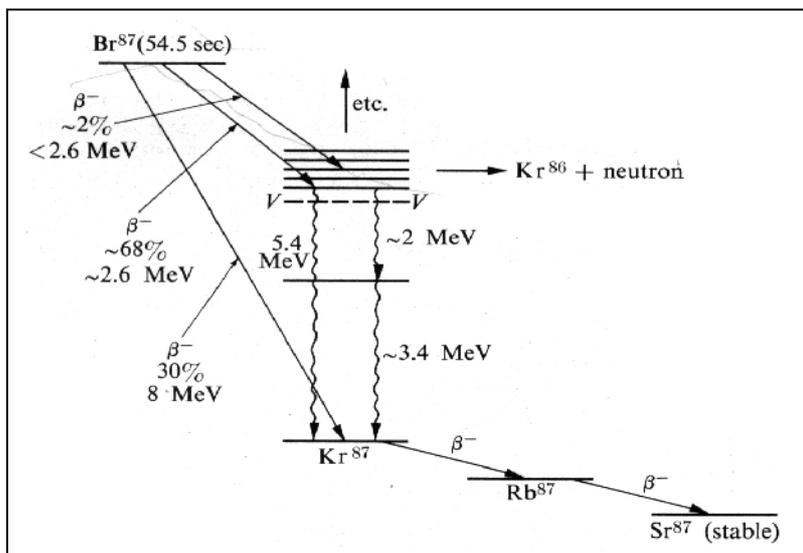


Figura 1: A origem de nêutrons atrasados do precursor  $Br^{87}$ .  
(LAMARSH, 1972)

Tabela 1: Precursores de Nêutrons Atrasados

Precusores	Meia – vida (s)	Grupo
<b>Br<sup>87</sup></b>	54,5	1
$I^{137}$ Br <sup>88</sup>	24 16,3	2
$I^{138}$ Br <sup>89</sup> Rb <sup>(93,94)</sup>	6,3 4,4 $\sim 6$	3
$I^{139}$ (Cs, Sb, ou Te) Br <sup>(90,92)</sup> Kr <sup>(93)</sup>	2,0 (1,6-2,4) 1,6 $\sim 1,5$	4
( $I^{140} + Kr$ )	0,5	5
(Br, Rb, As + ?)	0,2	6

(LAMARSH, 1972)

Os produtos de fissão que conduzem à emissão de nêutrons atrasados são chamados de precursores. A fração de nêutrons atrasados do material fissionável é a soma das frações dos 6 grupos de nêutrons atrasados, i. e.,

$$\beta = \sum_{i=1}^6 \beta_i . \quad (3)$$

A concentração esperada de precursores no grupo  $i$  é denotada como  $C_i(r,t)$  e a constante de decaimento radioativo correspondente é  $\lambda_i$  onde  $i = 1,2,\dots, 6$ , correspondente aos 6 grupos de nêutrons atrasados descrito na tabela 1. A taxa esperada de emissão de nêutrons atrasados é então  $\lambda_i C_i(r,t)$ . Esta taxa é determinada pela equação diferencial[4].

$$\frac{dC_i(r,t)}{dt} = -\lambda_i C_i(r,t) + \beta_i \frac{k_\infty}{p} \bar{\Sigma}_a \phi_T(r,t) \quad (4)$$

Na Tabela 2, temos listados os rendimentos dos nêutrons atrasados para materiais físseis e férteis. Matérias físseis são aqueles em que a fissão podem ser causada por nêutrons de baixa energia (nêutrons térmicos). A reação  $(n,\gamma)$  produz um isótopo de meia-vida menor e que decai rapidamente num isótopo físsil.  $U^{233}$  e  $Pu^{239}$  são radiativos, mas com meia-vida tão grande que não têm significado no tempo considerado. Essas reações são chamadas reações de Conversão, e o  $U^{238}$  e o  $Th^{232}$  são denominados materiais férteis. Os mais importantes matérias físseis são o  $U^{233}$ ,  $U^{235}$  e  $Pu^{239}$ . Desses, somente  $U^{233}$  é encontrado na natureza, em 0,70% do urânio natural. O  $U^{238}$  forma os outros 88,3%. Os outros dois isótopos são produtos de neutrônicos acompanhados de decaimento .

Tabela 2: Rendimento de nêutrons atrasados para materiais físseis e férteis.

Meia Vida $\tau_i$ , s	Constante de Decaimento $\lambda_i$ , s <sup>-1</sup>	Fração de Rendimento $\beta_i$	Rendimento Relativo $\alpha_i = \beta_i / \beta$
$U^{233}$ , $\beta = 0,0026$			
0,321	3,12	0,000061	0,023
0,788	1,27	0,000194	0,075
3,30	0,303	0,000845	0,325
7,65	0,131	0,000604	0,232
29,9	0,0335	0,00073	0,281
79,5	0,0125	0,000024	0,009
$U^{235}$ , $\beta = 0,0064$			
0,258	3,88	0,000168	0,026
0,715	1,40	0,000824	0,129
3,22	0,311	0,00263	0,411
8,65	0,116	0,00121	0,189
31,5	0,0317	0,00137	0,214
78,7	0,0127	0,000246	0,038
$U^{238}$ , $\beta = 0,0148$			
0,249	4,02	0,00111	0,075
0,709	1,41	0,00333	0,225
2,79	0,358	0,00574	0,388
7,19	0,139	0,00240	0,162
31,15	0,0321	0,00203	0,137
75,76	0,0132	0,00019	0,013
$Pu^{239}$ , $\beta = 0,0020$			
0,312	3,21	0,000073	0,037
0,793	1,26	0,000216	0,108
3,02	0,331	0,000687	0,344
7,50	0,133	0,000452	0,226
32,2	0,0311	0,000548	0,292
77,5	0,0129	0,000080	0,040
$Pu^{240}$ , $\beta = 0,0026$			
0,248	4,04	0,00008	0,024
0,735	1,36	0,00033	0,119
3,003	0,333	0,00091	0,315
7,41	0,135	0,00050	0,162
32,26	0,031	0,00071	0,238
76,92	0,013	0,00007	0,028

(LAMARSH, 1972)

### **2.1.3. Solução da Equação de Transporte para um Reator Anelar.**

Uma solução analítica da equação de transporte a uma velocidade para um pulso de nêutrons injetado em um reator anelar foi analisada por Williams [12] em 1987. A solução consiste em um modo fundamental, um número infinito de harmônicos e uma integral transitória. E também foi feita uma análise com nêutrons atrasados, onde foi encontrado harmônico instável só no início. Em geral, na medida que tamanho do reator crescer, o número de harmônicos instáveis aumenta.

### **2.1.4. Análise Numérica com Método das Diferenças Finitas.**

Um modelo a um grupo de energia para análise de fluxo de nêutrons foi estudado em 1993 por Narain[13] para avaliação numérica do conceito **VICHFPR** usando métodos de diferenças finitas.

A equação de difusão foi resolvida numericamente por uma generalização do método de Crank – Nicolson[14], onde os resultados obtidos indicam uma ordem de grandeza de vantagem do fluxo no novo conceito **VICHFPR**.

## **2.2. Reatores Pulsados.**

A história de reatores pulsados começou durante o Projeto Manhattan, onde sua aplicação teve início a partir do trabalho realizado por Otto Frisch [3] em 1945, onde foi alcançada a primeira reação em cadeia por meio das fissões com nêutrons prontos.

Em 1952 no laboratório Los Álamos (E.U.A), reatores pulsados GODIVA foram usados inicialmente para experiências cinéticas básicas. O núcleo do GODIVA consistiu em 50 kg de urânio enriquecido organizado em dois hemisférios que foram feitos supercríticos movendo-se estes hemisférios rapidamente. O pulso (BURST) era na ordem de  $10^{16}$  nêutrons e foi alcançado aproximadamente em 50 microsegundos. O número de fissões em cada pulso passou de  $10^{17}$  para  $10^{18}$  fissões. Reatores pulsados térmicos como o TRIGA e TREAT foram usados extensivamente para

pesquisa e treinamento. Porém, o sistema pulsado não provê fluência  $\int \phi dt$  suficiente para teste de material e para produção de radioisótopos.

### 2.2.1. Dinâmica de Reatores Pulsados.

Suponha que a reatividade (simbolizado por  $\rho$ , é atribuído à relação  $\frac{k_{ef} - 1}{k_{ef}}$ ) é aumentada repentinamente, i. e., como uma função degrau, trazendo um valor supercrítico pronto  $\rho'$ , i.e.,  $\rho' = \rho - \beta$ . Uma suposição é feita agora que a reatividade devida a retroalimentação negativa é proporcional à energia gerada. Como a resposta à reatividade tem um aumento repentino e rápido, é justificável desprezar os nêutrons atrasados[3].

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} P(t). \quad (5)$$

A reatividade no tempo  $t$  é determinada por:

$$\rho(t) - \beta = \rho' - \gamma \int_0^t P(t') dt' = \rho' - \gamma E(t). \quad (6)$$

onde  $\gamma$  representa o coeficiente de reatividade e  $E(t)$  é a energia total gerada no período  $0 \leq t' \leq t$ . Ao combinar as equações (5) e (6), o resultado é:

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t) \left[ \alpha_0 - b \int_0^t P(t') dt' \right], \quad (7)$$

onde  $\alpha_0 = \frac{\rho'}{\Lambda}$  e  $b = \frac{\gamma}{\Lambda}$ .

Será notado que em  $t = 0$ ,  $dP(t)/dt = \alpha_0 P(0)$  e conseqüentemente  $\alpha_0$  é a taxa de multiplicação inicial. Equação (7) pode ser resolvida analiticamente e solução é

$$E(t) = \frac{\alpha_0 + c'}{b} \left[ \frac{1 - e^{-c't}}{Ae^{-c't} + 1} \right] \quad (8)$$

e

$$P(t) = \frac{2c'^2 Ae^{-c't}}{b(Ae^{-c't} + 1)^2}, \quad (9)$$

onde

$$c' \equiv \sqrt{\alpha_0^2 + 2bP_0} \quad (10)$$

e

$$A \equiv \frac{c' + \alpha_0}{c' - \alpha_0}. \quad (11)$$

Vários resultados interessantes podem ser derivados destas soluções. Em um reator pulsado, é prático em geral se começar com potência baixa para se conseguir um aumento do tipo degrau na reatividade com boa aproximação. Em uma potência alta, a inserção de reatividade não pode ser muito rápida.

Se então, é assumido que a potência é baixa antes da reatividade ser aumentada,  $c' \cong \alpha_0$  da equação (10), e então da equação (11) aparece como

$$A \approx \frac{2\alpha_0^2}{bP_0} \gg 1.$$

Então, é visto das equações (8) e (9) que,  $E(t)$  e  $P(t)$  aumentam exponencialmente com o tempo na forma  $e^{\alpha_0 t}$ . A potência alcança um máximo que pode ser achado igualando  $dP(t)/dt$  a zero, i.e.,

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{2c'^3 A e^{-c't} [Ae^{-c't} - 1]}{b [Ae^{-c't} + 1]^3} = 0.$$

Conseqüentemente, a potência é um máximo quando

$$Ae^{-c't} = 1,$$

de forma que

$$t_{p_{\max}} = \frac{\ln A}{c'}. \quad (12)$$

Da equação (9) encontra-se o valor da potência de pico:

$$P_{\max} \approx \frac{\alpha_0^2}{2b} = \frac{(\rho')^2}{2\Lambda\gamma}. \quad (13)$$

Após atingir o máximo, a potência diminui exponencialmente com  $e^{\alpha_0 t}$ , o pulso de potência é, então, aproximadamente simétrico no tempo. A potência não cai a zero diretamente, mas persiste por causa da fissão devida a nêutrons atrasados que foram desprezados no tratamento anterior. A contribuição destes nêutrons pode ser determinada calculando-se o número de nêutrons atrasados.

A energia total liberada com o tempo é

$$E(t_{p_{\max}}) \approx \frac{\alpha_0}{b},$$

e a energia total gerada é o valor em um tempo assintoticamente grande, isto é,

$$E(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{2\alpha_0}{b} = \frac{2\rho'}{\gamma}. \quad (14)$$

Os resultados descritos acima têm um fator importante no problema de acidentes de reator, que surgem com o aumento repentino de reatividade. Quando começa a fase operacional de baixa potência, a energia liberada total, é  $2\rho'/\gamma$  e é assim independente de  $\Lambda$ , a vida do nêutron pronto. Os parâmetros essenciais são então a reatividade e o coeficiente de retroalimentação.

O modelo descrito acima tem a vantagem de conter apenas dois parâmetros:  $\alpha_0$  ( $= \rho/\Lambda$ ) e  $\beta$  ( $= \gamma/\Lambda$ ). Por causa de sua simplicidade e conteúdo físico, foi extensivamente usado para a interpretação de experiências de reatores pulsados. Um bom exemplo é provido por **Godiva II**, a crítica de urânio sem refletor, altamente enriquecido (aproximadamente 93,5% urânio - 235 metálico). Por meio de varas ajustáveis do mesmo material, a reatividade pode ser aumentada de repentinamente através de quantias especificadas, enquanto causa o surgimento de uma potência. Isto é determinado pelo aumento da temperatura por causa do combustível que se expande, enquanto diminui sua densidade. A diminuição resultante nas seções de choques macroscópicas produz uma alimentação negativa, na reatividade, tornando o sistema subcrítico pouco tempo depois. A produção de potência (ou taxa de fissão) é determinada como uma função do tempo; o valor de  $\alpha_0$  é calculado a partir do aumento inicial na taxa de fissão.

São mostrados os resultados de uma série de experiências de pulso com Godiva II na Figura 2 para vários valores indicados  $1/\alpha_0$ , o período inicial do reator. O tempo no qual a potência máxima é atingida é aproximadamente proporcional a  $1/\alpha_0$  e a potência de máximo é aproximadamente proporcional a  $\alpha_0^2$ .

Há alguma divergência da teoria para as excursões mais fortes, com  $\alpha_0$  maior que  $5 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$  ( $1/\alpha_0$  menor que  $20 \text{ } \mu\text{sec}$ ). Os pulsos de potência são aproximadamente simétricos em torno do máximo, com exceção de tempos para os quais nêutrons atrasados ficarem perceptíveis.

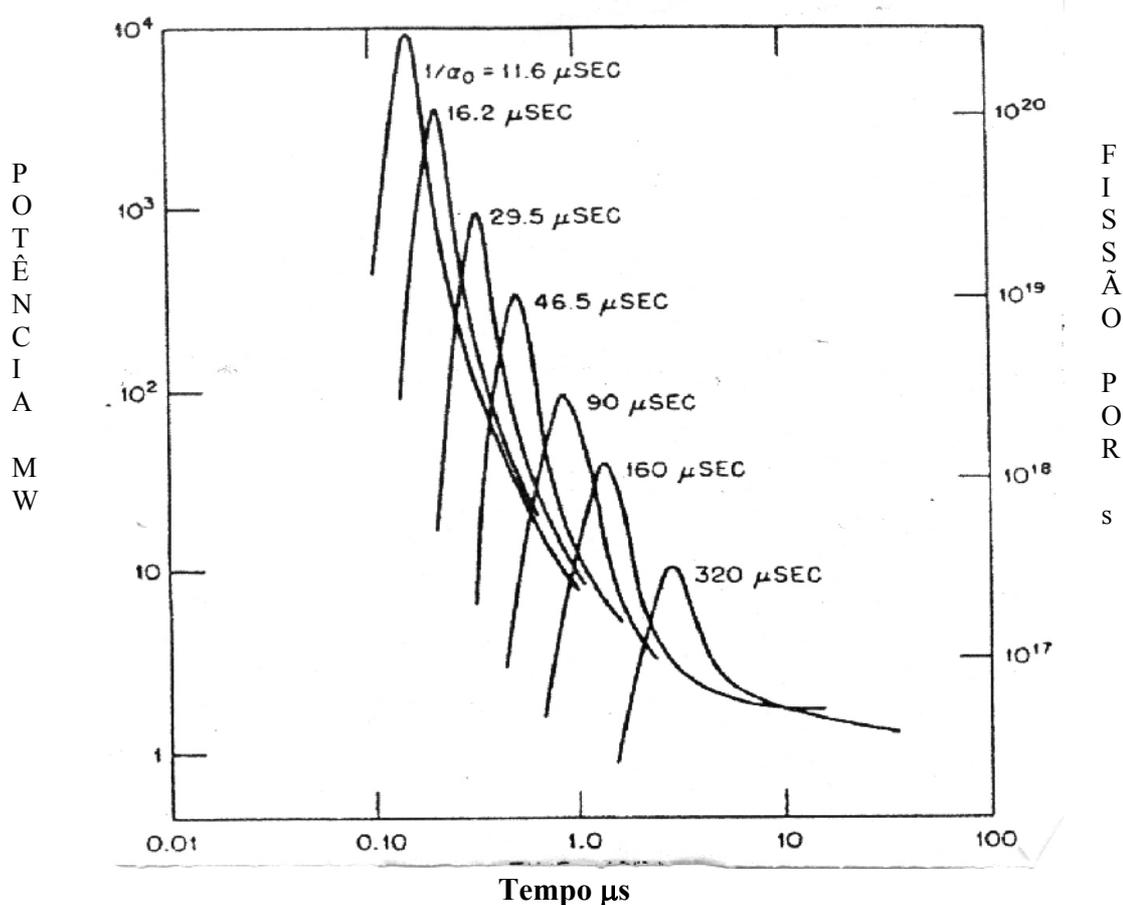


Figura 2: Resultados de Experiência de pulso GODIVA II  
(BELL e Glastone, 1970)

### 2.3. Reatores Pulsados Periodicamente

Quando a extinta União Soviética, em 1960, construiu o primeiro reator pulsado periodicamente, o IBR, houve um grande avanço técnico. É um reator resfriado a ar, que começou com uma potência energética de 1 kW e chegou à potência máxima de pulso de 5 MW, em uma frequência de 5 Hz. Porém, a potência média foi aumentando subsequentemente até 30 kW.

Em 1984, usando sódio líquido como refrigerante foi construído o IBR-2, com uma potência média de 2 MW e uma potência de pico de 1500 MW.

O Centro de Pesquisa Eurotran em Ispra, Itália, construiu um reator pulsado SORA, com uma potência de 1 MW.

Em 1975, no Japão, foi construído um reator pulsado YAYOI, que se tornou o segundo reator pulsado periódico no mundo. Ele foi equipado com cinco sistemas de mudança de reatividade, obteve uma potência de pulso de 1 GW e uma potência média de 2 KW. Foi usado para pesquisa em dosimetria, para resolver problemas de física de reatores, para investigar o efeito de nêutrons rápidos nas propriedades dos materiais e para pesquisa médico-biológica.

O ciclo operacional de um reator nuclear pulsado periódico[7] é alcançado por modulação de reatividade i.e., o reator periódico tem suas propriedades multiplicativas variando com o tempo.

### 3. EXPOSIÇÃO DO PROBLEMA.

Pretende-se estudar a resolução analítica da equação de transporte de nêutrons em Reator Anelar com Fonte Rotativa do tipo  $S(x)\delta(x - Vt)$ , baseado nas condições que existem em **VICHFPR**. O estudo é uma extensão do trabalho de Williams[12] realizado com fonte pulsado do tipo  $S(x)\delta(t)$ .

Na geometria do **VICHFPR**, um pulsador conduz a região perto do pulsador do estado subcrítico para o estado supercrítico pronto e um pulso de nêutrons é produzido. Com a rotação do pulsador, o pulso produzido gira ao redor do núcleo anelar, conforme a Figura 3. Assim o fator de multiplicação do perímetro do núcleo é essencialmente menor que a unidade, exceto na vizinhança do pulsador.

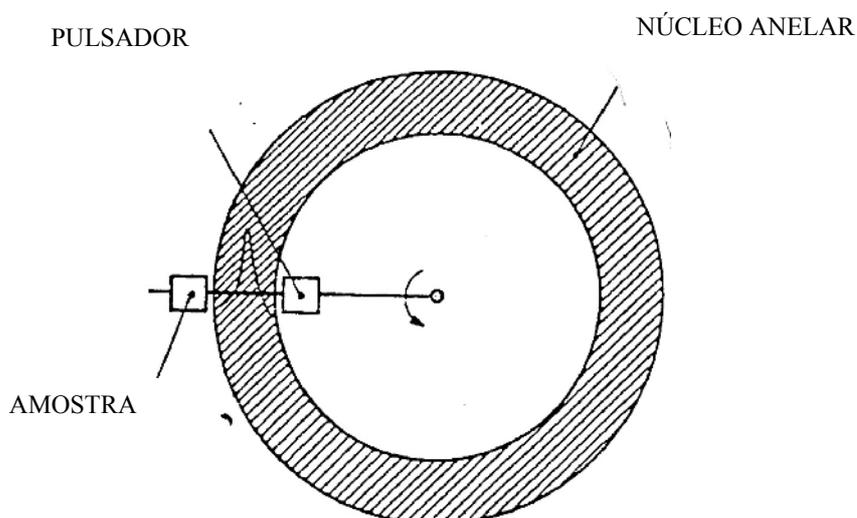
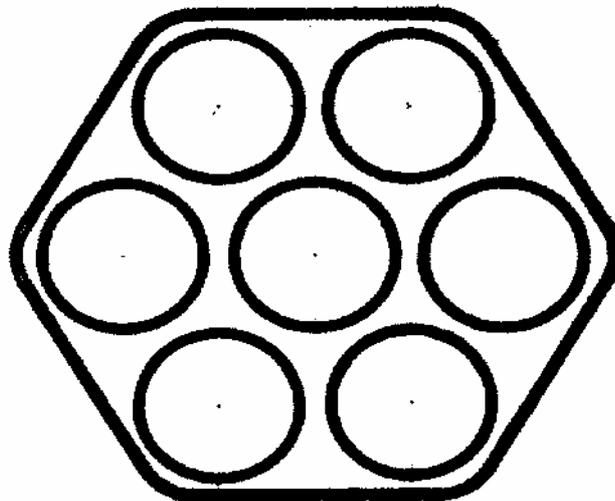


Figura 3. Arranjo esquemático para Reator Pulsado Anelar

Na avaliação de conceito do VICHFPR, foram utilizados os dados nucleares com um grupo efetivo para combustível do reator IBR-2. A composição do combustível consiste de 50,89% de  $\text{PuO}_2$ , 27,77% de refrigerante sódio (Na), e 21,34% de aço inoxidável como material de estrutura. A geometria de combustível consiste de 7 elementos usando pastilhas de  $\text{PuO}_2$ , com diâmetro de 8,65 mm, revestido com 0,45 mm de aço inoxidável, dispostos em uma malha triangular, dentro de uma caixa hexagonal, conforme mostrado na Figura 4.



**Figura 4: Geometria do combustível IBR-2 com 7 elementos**

No conceito do VICHFPR, a espessura do pulsador será definida baseada em uma economia(reflector Saving) de refletor de 8 cm.

No IBR, diversos pulsadores físsil e não físsil foram utilizados, como exemplo (i) aço com raio de 55 cm e espessura de 3,5 cm e (ii) urânio 90% enriquecido de diâmetro de 10 cm e espessura 3 cm. No IBR-2, pulsador consiste de Berílio tipicamente de tamanho 20x24x45 cm. Diversos pulsadores foram avaliados e testados no IBR-2.

A geometria do núcleo VICHFPR[13], foi analisada pela teoria de difusão com os seguintes dados geométricos: o perímetro do núcleo de 360 cm, a altura do núcleo 40 cm e a largura do núcleo 24 cm, a economia do pulsador 8 cm. As relações dos fluxos após a convergência foi de  $\phi_{\max}/\phi_{\text{av}} = 7,79$  e  $\phi_{\max}/\phi_{\min} > 50.000$ , e aumenta linearmente com aumento do perímetro do anel.

O pulso é localizado na região do pulsador com largura do pulso de aproximadamente 1 ms, como mostrada na Figura 5. O Pulso gira a 300 m/s ao redor da região do núcleo que corresponde a 0,83 pulsos/s em todo ponto do núcleo anelar.

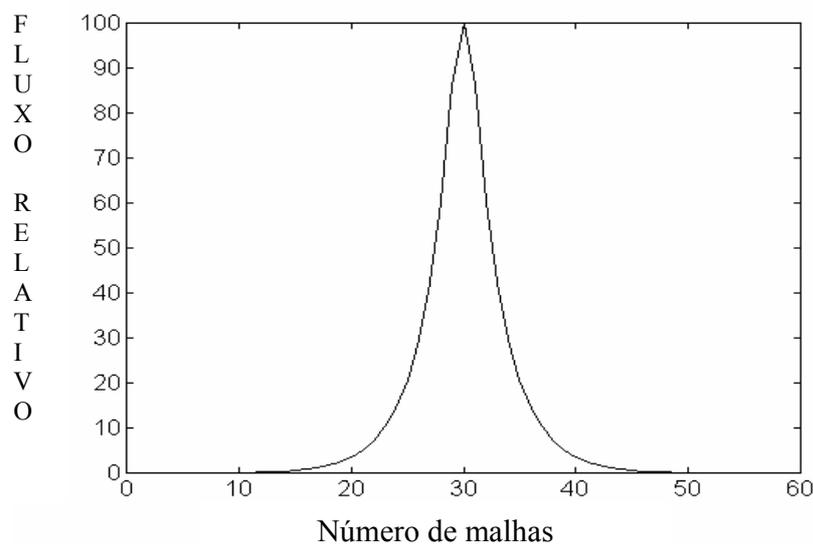


Figura 5: Forma do Pulso Giratório para perímetro de 360

Um modelo para análise de fluxo de nêutrons pode ser obtido retificando-se a geometria anelar para ficar na forma aproximada de um paralelepípedo de comprimento igual ao perímetro da geometria anelar. A Figura 6 mostra a geometria e dimensões quando a geometria anelar é retificada. O pulsador move-se na direção x com uma velocidade linear do pulsador  $V$ , e o pulsador está situado a  $x = Vt$  no tempo  $t$ .

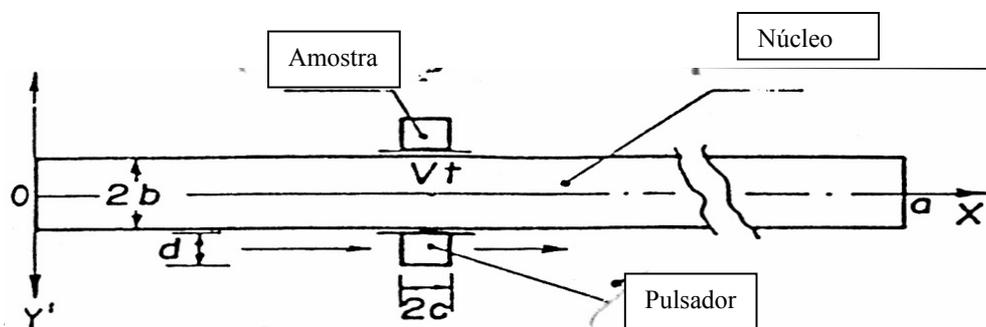


Figura 6: Arranjo simplificado para Análise do Reator.

O pulso giratório pode ser representado agora com dependência do tempo, por meio função Delta de Dirac[5] [Apêndice B]:  $\delta(x - Vt)$ .

Para simular a natureza anelar do sistema, é necessária a continuidade do fluxo como uma condição de contorno do sistema em  $x = L$  (perímetro).

$$\phi(0, \Omega, t) = \phi(L, \Omega, t), \quad \forall x \geq 0 \text{ e } \forall \Omega \quad (15)$$

Considerando-se que o núcleo é sujeito a um pulso de intensidade  $S(x)$ , a função Delta de Dirac[5] é representada por  $\delta(x - Vt)$ , que é introduzido em uma posição  $x = Vt$ , Isto é

$$S(x, t) = S(x)\delta(x - Vt). \quad (16)$$

O pulso giratório pode ser representado agora com dependência do tempo, usando a equação (1).

### 3.1. Equação de Transporte de Nêutrons a uma Velocidade em uma Dimensão

Se os nêutrons têm a mesma velocidade  $v_0$ , então podemos escrever:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, v, t) &= \delta(v - v_0) \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t), \\ f(\vec{v}', \vec{\Omega}' \rightarrow v, \vec{\Omega}) &= \delta(v - v_0) f(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}), \\ S(\vec{r}, \vec{\Omega}, v, t) &= \delta(v - v_0) S(\vec{r}, \vec{\Omega}, t),\end{aligned}$$

onde  $\delta(v - v_0)$  é a função Delta de Dirac. Portanto, o termo integral de fonte aparece como

$$\begin{aligned}\iint_{E' \Omega'} \Sigma(\vec{r}, E', t) f(\vec{r}, \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E', t) d\Omega' dE' = \\ \delta(v' - v_0) \int_{\Omega'} \Sigma(\vec{r}, t) f(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) d\Omega'.\end{aligned}$$

Integrando-se a equação de transporte (1) e considerando a função Delta de Dirac, escrevemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \nabla \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + \Sigma(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \\ \int_{\Omega'} \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \Sigma(\vec{r}, t) f(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) d\Omega' + S(\vec{r}, \vec{\Omega}, t).\end{aligned}\tag{17}$$

O integrante da equação (17) pode ser integrado sobre de todas as direções. Considere o espalhamento e uma fonte isotrópicos, onde  $f(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})$  e  $S(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  não são dependentes em  $\vec{\Omega}$  ou  $\vec{\Omega}'$ . Isto é,

$$\Sigma(\vec{r}, t) f(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \Sigma(\vec{r}, t).$$

e

$$S(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \frac{1}{4\pi} S(\vec{r}, t).$$

Em uma geometria plana, a densidade angular de nêutrons ( para uma velocidade) é uma função apenas de distância  $x$  e do ângulo  $\alpha$ , conforme Figura 7.

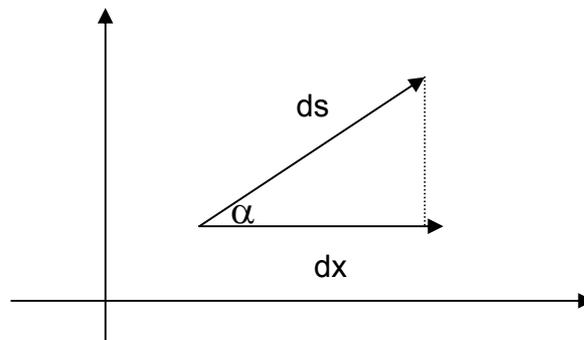


Figura 7: Movimento de nêutron em Geometria Plana.

$$\text{Logo: } \vec{\Omega} \cdot \nabla \phi = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \cos \alpha = \mu \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

onde  $\mu = \cos \alpha$ , para esta geometria, é conveniente que  $\phi(\vec{r}, \vec{\Omega})$  para ser escrito como  $\phi(x, \mu)$ , e ao integrar em todas as direções,  $d\Omega$  possa ser substituída por  $d\mu d\varphi$  em coordenadas polares. Como a distribuição de nêutrons em geometria plana tem simetria azimutal, a integral no ângulo azimutal  $\varphi$  resulta igual a  $2\pi$  e conseqüentemente a integração em  $\vec{\Omega} \cdot d\Omega$  resulta  $2\pi d\mu$ . Assim para geometria plana, escrevemos

$$\int \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) d\Omega = 2\pi \int_{-1}^1 \phi(x, \mu, t) d\mu.$$

Impondo-se as condições anteriores à equação (17), escrevemos a equação de transporte de nêutrons a uma velocidade e uma dimensão no eixo x.

$$\left( \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial x} + \Sigma \right) \phi(x, \mu, t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \phi(x, \mu', t) (\Sigma_s + \bar{v} \Sigma_f) d\mu' + \frac{1}{2} S(x, t), \quad (18)$$

onde  $\bar{v} \Sigma_f$  é o termo de fonte que corresponde à nêutrons de fissão, e consideramos o espalhamento como isotrópico.

Podemos reescrever a equação (18), com a inclusão de nêutrons atrasados, onde o termo de nêutrons prontos está multiplicado pelo fator  $(1 - \beta)$  e um termo novo devido ao decaimento de precursores, está incluído. Ademais incluímos uma equação diferencial para a concentração de precursores. Isto é,

$$\left( \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial x} + \Sigma \right) \phi(x, \mu, t) = \frac{1}{2} (\Sigma_s + (1 - \beta) \bar{v} \Sigma_f) \int_{-1}^1 \phi(x, \mu', t) d\mu' + \frac{1}{2} S(x, t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^J \lambda_i C_i \quad (19)$$

e

$$\frac{\partial C_i(x, t)}{\partial t} = -\lambda_i C_i(x, t) + \beta_i \bar{v} \Sigma_f \int_{-1}^1 d\mu \phi(x, \mu, t). \quad (20)$$

As equações (19) e (20) descrevem o comportamento da equação de transporte de nêutrons a uma velocidade em uma dimensão com contribuição devido aos nêutrons atrasados.

Enquanto que as equações (19) e (20) referem-se à geometria plana estendendo entre  $-\infty$  a  $+\infty$  (placa infinita), elas poderiam igualmente modelar o reator anelar cuja espessura é muito menor que seu raio. Neste caso, a seção de choque macroscópica de absorção  $\Sigma_a$  é aumentada para incluir a fuga transversal do anel.

#### 4. SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA DO REATOR ANELAR.

Para a solução analítica das equações (19) e (20), obtidos no capítulo anterior, a equação de transporte de nêutrons a uma velocidade em uma dimensão será resolvida retificando-se a geometria anelar e usando-se a técnica de Transformada de Laplace[6,15] [Apêndice C] e as condições das equações (15) e (16). Vale lembrar que o desenvolvimento matemático é similar ao trabalho de Williams[12] com mudança para fonte rotativa tipo  $\delta(x - Vt)$  baseado nas condições que existem em **VICHFPR**.

Definem-se:

$$\bar{\phi}(x, \mu, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \phi(x, \mu, t) dt \quad (21-a)$$

$$\phi_0(x, t) = \int_{-1}^1 \phi(x, \mu, t) d\mu. \quad (21-b)$$

Multiplicando as equações (19) e (20) por  $e^{-st}$ , integrando sobre  $t(0, \infty)$  e usando a equação (16) para  $S(x, t)$ , obtemos

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial x} + \Sigma \right) e^{-st} \phi(x, \mu, t) dt = \frac{1}{2} (\Sigma_s + (1 - \beta) \bar{v} \Sigma_f) \int_0^{\infty} e^{-st} dt \int_{-1}^1 \phi(x, \mu', t) d\mu' + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-st} S(x) \delta(x - Vt) dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-st} \sum_{i=1}^j \lambda_i C_i dt \quad (22)$$

e

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial C_i(x, t)}{\partial t} dt = -\int_0^{\infty} e^{-st} \lambda_i C_i(x, t) dt + \int_0^{\infty} e^{-st} \beta_i \bar{v} \Sigma_f \int_{-1}^1 du \phi(x, u, t) dt \quad (23)$$

Reescrevendo as equações (22) e (23), após a Transformada de Laplace, e usando as seguintes condições da função Delta de Dirac

I) A função Delta Dirac é uma função par,

$$\text{II) } \int_0^{\infty} \delta(x - Vt) f(t) dt = f(Vt),$$

escrevemos

$$\left[ \frac{s}{v} + \mu \frac{\partial}{\partial x} + \Sigma \right] \bar{\phi}(x, \mu, s) = \frac{1}{2} \left[ \Sigma_s (1 - \beta) \bar{v} \Sigma_f \right] \bar{\phi}_0(x, s) + \frac{1}{2} S(x) \frac{1}{V} e^{\frac{-sx}{V}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \lambda_i \bar{C}_i(x, s). \quad (24)$$

e

$$\bar{C}_i(x, s) = \frac{\beta_i \bar{v} \Sigma_f \bar{\phi}_0(x, s)}{s + \lambda_i}. \quad (25)$$

Eliminando  $\bar{C}_i(x, s)$  da equação (24), obtemos

$$\begin{aligned} \left[ \frac{s}{v} + \mu \frac{\partial}{\partial x} + \Sigma \right] \bar{\phi}(x, \mu, s) = & \frac{1}{2} \left[ \Sigma_s (1 - \beta) \bar{v} \Sigma_f \right] \bar{\phi}_0(x, s) + \frac{1}{2} S(x) \frac{1}{V} e^{\frac{-sx}{V}} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \lambda_i \frac{\beta_i \bar{v} \Sigma_f \bar{\phi}_0(x, s)}{s + \lambda_i}. \end{aligned} \quad (26)$$

Após algumas operações algébricas, a equação (26) aparece como

$$\left[ \frac{s}{v} + \mu \frac{\partial}{\partial x} + \Sigma \right] \bar{\phi}(x, \mu, s) = \frac{1}{2} \left[ \Sigma_s + \bar{v} \Sigma_f \theta(s) \right] \bar{\phi}_0(x, s) + \frac{1}{2} S(x) \frac{1}{V} e^{-\frac{sx}{V}}, \quad (27)$$

$$\text{onde: } \theta(s) = 1 - \sum_{i=1}^j \frac{\beta_i s}{s + \lambda_i}. \quad (28)$$

Agora devido à natureza periódica do fluxo, definido na equação (15), pode-se buscar uma solução geral da seguinte forma.

$$\bar{\phi}(x, \mu, s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{A}_m(\mu, s) e^{\frac{2\pi i m x}{L}}. \quad (29)$$

Substituindo a equação (29) na equação (27), escrevemos

$$\left[ \frac{s}{v} + \mu \frac{\partial}{\partial x} + \Sigma \right] \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{A}_m(\mu, s) e^{\frac{2\pi i m x}{L}} = \frac{1}{2} \left[ \Sigma_s + \bar{v} \Sigma_f \theta(s) \right] \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{A}_{m0}(s) e^{\frac{2\pi i m x}{L}} + \frac{1}{2} S(x) \frac{1}{V} e^{-\frac{sx}{V}}. \quad (30)$$

Multiplicando a equação (30) por  $e^{-\frac{2\pi i m x}{L}}$ , obtemos:

$$e^{-\frac{2\pi i m x}{L}} \left[ \frac{s}{v} + \mu \frac{\partial}{\partial x} + \Sigma \right] \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{A}_m(\mu, s) e^{\frac{2\pi i m x}{L}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{2\pi i m x}{L}} \left[ \Sigma_s + \bar{v} \Sigma_f \theta(s) \right] \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{A}_{m0}(s) e^{\frac{2\pi i m x}{L}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{2\pi i m x}{L}} S(x) \frac{1}{V} e^{-\frac{sx}{V}}. \quad (31)$$

Integrando a equação (31) sobre  $x(0, L)$ , escrevemos

$$\left[ \frac{s}{v} + \frac{2\pi i m}{L} \mu + \Sigma \right] \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{A}_m(\mu, s) = \frac{1}{2} \left[ \Sigma_s + \bar{v} \Sigma_f \theta(s) \right] \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{A}_{m0}(s) + \frac{1}{2} S_m, \quad (32)$$

onde

$$S_m = \frac{1}{VL} \int_0^L S(x) e^{-\left(\frac{s}{v} + \frac{2\pi im}{L}\right)x} dx \quad (33)$$

É possível reescrever a equação (32) na forma

$$\sum_{m \rightarrow -\infty}^{\infty} \bar{A}_m(\mu, s) = \frac{1}{2} \frac{\left[ \sum_s + \bar{v} \sum_f \theta(s) \right] \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{A}_{m_0}(s)}{\left[ \frac{s}{v} + \frac{2\pi im}{L} \mu + \Sigma \right]} + \frac{1}{2} \frac{S_m}{\left[ \frac{s}{v} + \frac{2\pi im}{L} \mu + \Sigma \right]}. \quad (34)$$

Integrando-se a equação (34) em  $\mu(-1,1)$  conduz a

$$\bar{A}_{m_0}(s) = \frac{\frac{S_m L}{2\pi m} \cdot \tan^{-1} \left[ \frac{2\pi m}{L \left( \Sigma + \frac{s}{v} \right)} \right]}{1 - \frac{L \left( \sum_s + \bar{v} \sum_f \theta(s) \right)}{2\pi m} \cdot \tan^{-1} \left[ \frac{2\pi m}{L \left( \Sigma + \frac{s}{v} \right)} \right]}. \quad (35)$$

Substituindo-se a equação (21) na equação (29), obtemos

$$\int_0^{\infty} dt \cdot e^{-st} \phi(x, \mu, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{A}_m(\mu, s) e^{\frac{2\pi imx}{L}}. \quad (36)$$

Integrando-se em  $\mu(-1,1)$ , temos

$$\int_0^{\infty} dt \cdot e^{-st} \int_{-1}^1 \phi(x, \mu, t) d\mu = \int_{-1}^1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{A}_m(\mu, s) e^{\frac{2\pi imx}{L}} d\mu,$$

$$\int_0^{\infty} dt e^{-st} \phi_0(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{A}_{m_0}(s) e^{\frac{2\pi i m x}{L}},$$

$$\bar{\phi}_0(x, s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{A}_{m_0}(s) e^{\frac{2\pi i m x}{L}}. \quad (37)$$

Reescrevendo a equação (37) quando  $m = 0$ , obtemos:

$$\bar{\phi}_0(x, s) = \frac{S_0}{\left[ \Sigma + \frac{s}{v} \right] - \left[ \Sigma_s + v \Sigma_f \theta(s) \right]} + \sum_{m=-\infty}^{-1} \bar{A}_{m_0}(s) e^{\frac{2\pi i m x}{L}} + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{A}_{m_0}(s) e^{\frac{2\pi i m x}{L}}. \quad (38)$$

Fazendo-se:  $\bar{F}_m^*(s) = \frac{\bar{A}_{m_0}(s)}{S_m}$ , então:  $\bar{A}_{m_0}(s) = \bar{F}_m^*(s) S_m$ .

Substituindo-se o valor  $S_m$  da equação (33) e resolvendo o 2º termo do lado direito na equação (38), obtém-se

$$\sum_{m=-\infty}^{-1} \bar{F}_m^*(s) S_m e^{\frac{2\pi i m x}{L}} = \sum_{m=-\infty}^{-1} \bar{F}_m^*(s) e^{\frac{2\pi i m x}{L}} \cdot \frac{1}{vL} \int_0^L S(x') e^{-\left(\frac{s}{v} + \frac{2\pi i m}{L}\right)x'} dx'$$

$$\sum_{m=-\infty}^{-1} \bar{F}_m^*(s) S_m e^{\frac{2\pi i m x}{L}} = \sum_{m=-\infty}^{-1} \bar{F}_m^*(s) \cdot \frac{e^{-\frac{sx'}{v}}}{vL} \int_0^L S(x') \cdot \cos\left(\frac{2\pi m}{L}(x - x')\right) dx'. \quad (39)$$

Agora resolvendo o 3º termo do lado direito Equação (38), obtém-se

$$\sum_{m=1}^{\infty} \bar{F}_m^*(s) S_m e^{\frac{2\pi i m x}{L}} = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{F}_m^*(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{F}_m^*(s) \cdot e^{-\frac{sx'}{v}} \cdot \frac{1}{vL} \int_0^L S(x') e^{\left(\frac{2\pi i m}{L}(x-x')\right)} dx'$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{F}_m^*(s) \cdot e^{-\frac{sx'}{v}} \cdot \frac{1}{vL} \int_0^L S(x') e^{\left(\frac{2\pi i m}{L}(x-x')\right)} dx'$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \bar{F}_m^*(s) \cdot S_m \cdot e^{\frac{2\pi i m x}{L}} = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{F}_m^*(s) \cdot \frac{e^{-sx'}}{VL} \int_0^L S(x') \cdot \cos\left(\frac{2\pi m}{L}(x-x')\right) dx' . \quad (40)$$

A função cosseno é uma função par, logo o somatório para m(negativo) é igual ao somatório para m (positivo).

A Transformada de Laplace do fluxo total, é determinada reescrevendo-se a equação (38), determinada por:

$$\bar{\phi}_0(x,s) = \frac{S_0}{\left[\Sigma + \frac{s}{v}\right] - \left[\Sigma_s + v \Sigma_f \theta(s)\right]} + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{F}_m^*(s) \cdot \frac{2 \cdot e^{-sx'}}{VL} \int_0^L S(x') \cdot \cos\left(\frac{2\pi m}{L}(x-x')\right) dx' . \quad (41)$$

O inverso da Transformada de Laplace [Apêndice-C] desta expressão conduz a uma solução completa para o fluxo no Reator anelar.

#### 4.1. Estudos de Alguns Casos Especiais Deste Problema.

##### 4.1.1. Estado Estacionário.

- Se o reator é subcrítico e o fluxo é contínuo por uma fonte distribuída  $S(x)$ , então quando  $s = 0$  (parâmetro de Transformada de Laplace) na equação (41), chega-se à distribuição do fluxo:

$$\phi_0(x) = \frac{S_0}{\Sigma(1-c)} + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{F}_m(0) \frac{2}{VL} \int_0^L S(x') \cos\left[\frac{2\pi m}{L}(x-x')\right] dx' , \quad (42)$$

onde:

$$\bar{F}_m(0) = \frac{\tan^{-1}(\delta_m)}{\Sigma(\delta_m - c \tan^{-1}(\delta_m))} , \quad (43)$$

$$\delta_m = \frac{2\pi m}{L\Sigma} \quad \text{e} \quad c = \frac{\Sigma_s + \bar{\nu}\Sigma_f}{\Sigma}. \quad (44)$$

Podemos observar que o parâmetro  $c$ , chamado **parâmetro regenerador**, depende das seções de choques e regeneração de nêutrons através da fissão. O parâmetro regenerador é aproximadamente igual ao  $k_\infty$  do sistema se  $\Sigma_s \ll \Sigma_a$  e  $\Sigma_s \ll \Sigma_f$ .

#### 4.1.2. Pulso de Nêutrons Prontos.

- No caso,  $\beta = 0$  e  $\theta(s) = 1$  na equação (41), a transformada de Laplace então é reduzida para:

$$\bar{\phi}_0(x, s) = \frac{\nu S_0}{s + \nu \left[ \Sigma_a - \bar{\nu}\Sigma_f \right]} + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{F}_m^*(s) \frac{2}{VL} \int_0^L S(x') e^{\frac{-s}{\nu} x'} \cos \left[ \frac{2\pi m}{L} (x - x') \right] dx' \quad (45)$$

onde,

$$\bar{F}_m^*(s) = \frac{1}{\Sigma} \frac{\tan^{-1} \left( \frac{\delta_m}{1 + \frac{s}{\nu}\Sigma} \right)}{\left[ \delta_m - c \tan^{-1} \left[ \frac{\delta_m}{1 + \frac{s}{\nu}\Sigma} \right] \right]}. \quad (46)$$

A Inversa da transformada de Laplace no primeiro termo da equação (45) é:

$$\nu S_0 e^{[c-1]\nu\Sigma t}. \quad (47)$$

O segundo termo requer um exame mais detalhado. Assim, é necessário calcular,

$$F_m^*(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_s} e^{st} \bar{F}_m^*(s). ds. \quad (48)$$

Fazendo-se uma mudança de variável para:

$$p = \frac{\left(1 + \frac{s}{v\Sigma}\right)}{\delta_m}, \quad (49)$$

obtémos

$$F_m^*(t) = ve^{\frac{v}{v}\Sigma x' - v\Sigma t} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} e^{\left[\delta_m v \Sigma t - \frac{v}{v}\delta_m \Sigma x'\right]p} \frac{\text{tg}^{-1}(1/p)}{1 - \frac{c}{\delta_m} \text{tg}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]} dp. \quad (50)$$

O integrante da equação (50) tem no máximo um pólo[16,17] [Apêndice D] e uma ramificação em  $p = \pm i$ . Por causa do arcotangente, há vários valores, vários ramos, cada um correspondente a um ramo da função. A maneira pela qual  $L_p$  deve ser modificado encontra-se mostrada na Figura 8.

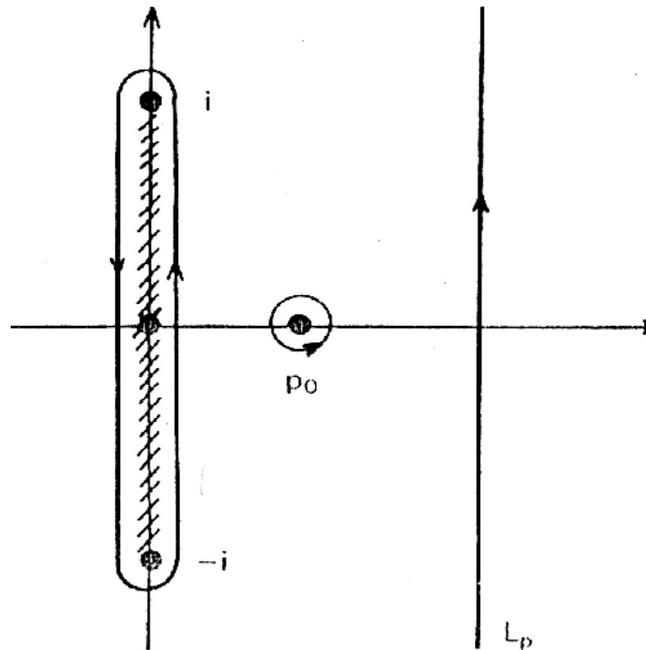


Figura 8: Singularidade no plano – p.

O pólo é a raiz de

$$1 - \frac{c}{\delta_m} \tan^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) = 0, \quad (51)$$

onde

$$P_{om} = \cot g\left(\frac{\delta_m}{c}\right). \quad (52)$$

Para o pólo existir é necessário que,

$$m \leq \frac{L}{4} \left( \Sigma_s + \bar{v} \Sigma_f \right). \quad (53)$$

Assim, o número das condições para  $m$  será restringido a um valor finito.

A contribuição para  $F_m^*(t)$  do pólo ( $P_0$ ), pela teoria dos resíduos, é então:

$$F_m^* = \frac{v \left( \frac{\delta_m}{c} \right)^2}{\text{sen}^2 \left( \frac{\delta_m}{c} \right)} \cdot e^{\frac{v}{V} \Sigma(x'-vt) \left[ 1 - \delta_m \cot g \left( \frac{\delta_m}{c} \right) \right]}.$$

As contribuições do corte são obtidas prontamente notando primeiro que a integral, ao redor das partes do semicírculo do contorno, são zero e sabendo que:

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{2i} \left[ \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| \pm i\pi \right], \quad (54)$$

onde  $p = \pm iy$ , e “+” se refere o lado direito e “-” o lado esquerdo do contorno.

O corte do  $F_m^*(t)$  pode ser escrito:

$$F_m^*(t)|_{\text{corte}} = \frac{v \cdot e^{\frac{v}{V} \Sigma(x'-Vt)}}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-i+\varepsilon}^{i+\varepsilon} dp \cdot e^{\left[\alpha_m t - \frac{v}{V} \delta_m \Sigma t\right] p} \cdot \frac{\text{tg}^{-1}(1/p)}{1 - \frac{c}{\delta_m} \text{tg}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]} + \int_{i-\varepsilon}^{-i-\varepsilon} dp \cdot e^{\left[\alpha_m t - \frac{v}{V} \delta_m \Sigma t\right] p} \cdot \frac{\text{tg}^{-1}(1/p)}{1 - \frac{c}{\delta_m} \text{tg}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]} \right],$$

onde  $\alpha_m = v \Sigma \delta_m$ . Usando a equação (54), obtém-se:

$$F_m^*(t) = \frac{v \cdot e^{\frac{v}{V} \Sigma(x'-Vt)}}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-i+\varepsilon}^{i+\varepsilon} idy \cdot e^{\left[\alpha_m t - \frac{v}{V} \delta_m \Sigma t\right] iy} \cdot \frac{\frac{1}{2i} \left[ \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \pm i\pi \right| \right]}{1 - \frac{c_m}{2i} \left[ \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \pm i\pi \right| \right]} + \int_{i-\varepsilon}^{-i-\varepsilon} idy \cdot e^{\left[\alpha_m t - \frac{v}{V} \delta_m \Sigma t\right] iy} \cdot \frac{\frac{1}{2i} \left[ \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \pm i\pi \right| \right]}{1 - \frac{c_m}{2i} \left[ \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \pm i\pi \right| \right]} \right], \quad (55)$$

onde  $c_m = \frac{c}{\delta_m}$ .

Usando a equação (55), encontramos que:

$$F_m^*(t) = v e^{\frac{v}{V} \Sigma(x'-Vt)} [H(m, t) + H(-m, t)], \quad (56)$$

onde  $H(m, t)$  e  $H(-m, t)$  recorre aos valores do integrando em cada lateral do corte

$$H(m, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\left\{ \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| \sin \left( \alpha_m t - \frac{v}{V} \delta_m \sum x' \right) y + \left[ \pi - \frac{c_m}{2} \left( \pi^2 + \ln^2 \left| \frac{1+y}{1-y} \right| \right) \right] \cos \left( \alpha_m t - \frac{v}{V} \delta_m \sum x' \right) y \right\}}{\left[ \left( 1 - \frac{c_m \pi}{2} \right)^2 + \left( \frac{c_m}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| \right)^2 \right]} dy.$$

Para  $H(-m, t)$  a resolução é análoga a de  $H(m, t)$ .

A solução completa é então:

$$\begin{aligned} \phi(x, t) = & vS_0 e^{(c-1)v\Sigma t} + \\ & \frac{2}{VL} \int_0^L \sum_{m=1}^{\infty} S(x') \cos \left[ \frac{2\pi m}{L} (x - x') \right] \frac{v(\delta_m / c)^2}{\text{sen}^2(\delta / c)} \cdot e^{\frac{v}{V} \Sigma(x'-Vt) \left[ 1 - \delta_m \cot g \left( \frac{\delta_m}{c} \right) \right]} dx' \quad (57) \\ & + \frac{2}{VL} \int_0^L \sum_{m=1}^{\infty} S(x') \cos \left[ \frac{2\pi m}{L} (x - x') \right] e^{\frac{v}{V} \Sigma(x'-Vt)} dx' [H(m, t) + H(-m, t)] \end{aligned}$$

#### 4.1.3. Comportamento Global da Equação do Fluxo $\phi(x, t)$ .

A Equação (57) da seção 4.1.2 descreve o comportamento temporal do fluxo.

Este resultado possui uma quantidade de características interessantes. A primeira, e mais óbvia, é que o sistema só é estável se  $c < 1$  e  $t > 0$ . O expoente do 1º termo é negativo, o expoente do 2º termo da integral é negativo, pois  $\delta_m \cot g \left( \frac{\delta_m}{c} \right) < 1$  e quanto ao 3º termo, o expoente da integral é negativo, então  $\phi(x, t)$  decai com o tempo, isto é, que o pulso injetado  $S_0 \delta(x - Vt)$  fica decaindo no tempo. Por outro lado, para o sistemas supercríticos,  $c > 1$ , é possível que os harmônicos sejam instáveis se (i)  $\delta_m \cot g \left( \frac{\delta_m}{c} \right) > 1$  e (ii)  $\frac{\delta_m}{c} < \frac{\pi}{2}$ , onde  $g(m)$  e  $f(m)$  são parâmetros que definem a estabilidade e existência dos harmônicos  $m$ , respectivamente.

Pode-se ressaltar que os harmônicos não existem somente se  $\frac{\delta_m}{c}$  for maior do que  $\frac{\pi}{2}$  ou aproximadamente 1,57.

Finalmente, tem-se que considerar a contribuição do fluxo [Apêndice E] ao ramo externo correspondente ao terceiro termo no lado direito da equação (57). Não há qualquer ponto deste termo que conduza à instabilidade, já que este é governado pelo fator  $e^{\frac{v}{V}\Sigma(x'-Vt)}$ , que decai com tempo. O termo da integral representa a superposição de comprimento de ondas não maior que  $L/2\pi$ , movendo-se ao redor do anel.

## 5. RESULTADOS E ANÁLISES

Estudamos situações para o parâmetro regenerador  $c$ , para mostrar a estabilidade/instabilidade do sistema. Tabelas são apresentadas onde os resultados são ilustrados através de cálculos numéricos para ilustrar a estabilidade/instabilidade do sistema no harmônico para alguns valores do perímetro.

**5.1.**  $c < 1$  é inerentemente estável pela equação (57), obtida no capítulo anterior.

Mesmo nestas condições mostramos abaixo a existência dos harmônicos estáveis, os valores atribuídos para  $\Sigma L=10, 20$  e  $50$  e  $c = 0,99; 0,95$  e  $0,5$ , são usados principalmente para cálculos numéricos.

As tabelas 3, 4 e 5 mostram os dados da estabilidade dos harmônicos para  $\Sigma L=10$  e  $c = 0,99; 0,95$  e  $0,5$ , respectivamente.

Tabela 3: Estabilidade dos harmônicos para  $c = 0,99, \Sigma L=10$

m	$\delta_m / c$	$\delta_m \cot g\left(\frac{\delta_m}{c}\right)$	Observação
1	0,635	0,853	Estável
2	1,269	0,391	Estável
3	1,904	-----	Não existe

Tabela 4: Estabilidade dos harmônicos para  $c = 0,95, \Sigma L=10$

m	$\delta_m / c$	$\delta_m \cot g\left(\frac{\delta_m}{c}\right)$	Observação
1	0,661	0,807	Estável
2	1,323	0,318	Estável
3	1,964	-----	Não existe

Tabela 5: Estabilidade dos harmônicos para  $c = 0,5$ ,  $\Sigma L = 10$ 

m	$\delta_m / c$	$\delta_m \cot g\left(\frac{\delta_m}{c}\right)$	Observação
1	1,257	0,204	Estável
2	2,413	-----	Não existe

Existem dois harmônicos para  $c = 0,99$  e todos são estáveis; quando  $c = 0,95$  também há dois harmônicos e estáveis, e quando  $c = 0,5$  temos apenas um harmônico e estável. Logo o sistema é sempre estável, em todo decaimento exponencial. À medida que  $c$  fica perto da unidade o número de harmônicos aumenta.

As Tabelas 6, 7 e 8 mostram os dados da estabilidade dos harmônicos para  $\Sigma L = 20$  e  $c = 0,99$ ;  $0,95$  e  $0,5$ , respectivamente.

Tabela 6: Estabilidade dos harmônicos para  $c = 0,99$ ,  $\Sigma L = 20$ 

m	$\delta_m / c$	$\delta_m \cot g\left(\frac{\delta_m}{c}\right)$	Observação
1	0,317	0,957	Estável
2	0,635	0,854	Estável
3	0,952	0,671	Estável
4	1,269	0,391	Estável
5	1,587	-----	Não existe

Tabela 7: Estabilidade dos harmônicos para  $c = 0,95$ ,  $\Sigma L = 20$ 

m	$\delta_m / c$	$\delta_m \cot g\left(\frac{\delta_m}{c}\right)$	Observação
1	0,331	0,915	Estável
2	0,661	0,807	Estável
3	0,992	0,616	Estável
4	1,323	0,319	Estável
5	1,653	-----	Não existe

Tabela 8: Estabilidade dos harmônicos para  $c = 0,5$ ,  $\Sigma L = 20$ 

m	$\delta_m / c$	$\delta_m \cot g\left(\frac{\delta_m}{c}\right)$	Observação
1	0,628	0,432	Estável
2	1,257	0,204	Estável
3	1,885	-----	Não existe

Existem quatro harmônicos para  $c = 0,99$  e todos são estáveis. Quando  $c = 0,95$  também há quatro harmônicos e estáveis e quando  $c = 0,5$ , há apenas dois harmônicos e estáveis. Logo, o sistema é sempre estável, em todo decaimento exponencial. À medida que  $c$  aproxima-se da unidade o número de harmônicos aumenta.

As Tabelas 9, 10 e 11 listam os dados da estabilidade dos harmônicos para  $\Sigma L = 50$  e  $c = 0,99$ ;  $0,95$  e  $0,5$ , respectivamente.

Tabela 9: Estabilidade dos harmônicos para  $c = 0,99$ ,  $\Sigma L = 50$ 

m	$\delta_m / c$	$\delta_m \cot g\left(\frac{\delta_m}{c}\right)$	Observação
1	0,127	0,985	Estável
2	0,254	0,969	Estável
3	0,381	0,942	Estável
4	0,508	0,903	Estável
5	0,635	0,853	Estável
6	0,762	0,791	Estável
7	0,889	0,715	Estável
8	1,015	0,624	Estável
9	1,142	0,516	Estável
10	1,269	0,391	Estável
11	1,396	0,235	Estável
12	1,523	0,072	Estável
13	1,650	-----	Não existe

Tabela 10: Estabilidade dos harmônicos para  $c = 0,95$ ,  $\Sigma L = 50$ 

m	$\delta_m / c$	$\delta_m \cot g\left(\frac{\delta_m}{c}\right)$	Observação
1	0,132	0,944	Estável
2	0,265	0,928	Estável
3	0,397	0,900	Estável
4	0,529	0,860	Estável
5	0,661	0,807	Estável
6	0,794	0,742	Estável
7	0,926	0,662	Estável
8	1,058	0,566	Estável
9	1,190	0,452	Estável
10	1,323	0,318	Estável
11	1,455	0,161	Estável
12	1,586	-----	Não existe

Tabela 11: Estabilidade dos harmônicos para  $c = 0,5$ ,  $\Sigma L = 50$ 

m	$\delta_m / c$	$\delta_m \cot g\left(\frac{\delta_m}{c}\right)$	Observação
1	0,251	0,489	Estável
2	0,503	0,457	Estável
3	0,754	0,401	Estável
4	1,005	0,319	Estável
5	1,257	0,204	Estável
6	1,508	0,047	Estável
7	1,759	-----	Não existe

Existem doze harmônicos para  $c = 0,99$  e todos são estáveis. Quando  $c = 0,95$  existem onze harmônicos e estáveis, e quando  $c = 0,5$  tem-se apenas seis harmônicos e estáveis. Logo o sistema é sempre estável, em todo decaimento exponencial. À medida que  $c$  aproxima-se da unidade o número de harmônicos aumenta.

As tabelas acima indicam que quando maior for o perímetro representado pelo parâmetro  $\Sigma L$ , mais harmônicos são encontrados.

**5.2.  $c > 1$ .** É inerentemente estável ou instável pela equação (57), obtida no capítulo anterior. Mesmo nestas condições mostramos abaixo a existência dos harmônicos estáveis ou instáveis. Os valores atribuídos para  $\Sigma L = 10, 20$  e  $50$  é para simular a variação no perímetro e os valores atribuídos para o parâmetros regenerador  $c = 1,01; 1,1$  e  $1,5$ , são usados principalmente para cálculos numéricos.

Com as seguintes condições, para ser instável:

$$\delta_m \cot\left(\frac{\delta_m}{c}\right) > 1 \quad (58)$$

ao mesmo tempo;

$$\frac{\delta_m}{c} < \frac{\pi}{2}. \quad (59)$$

As Tabelas 12, 13 e 14, mostram os dados da estabilidade dos harmônicos para  $\Sigma L = 10$  e  $c = 1,01; 1,1$  e  $1,5$ , respectivamente.

Tabela 12: Estabilidade dos harmônicos para  $c = 1,01, \Sigma L = 10$

m	$\delta_m / c$	$\delta_m \cot g\left(\frac{\delta_m}{c}\right)$	Observação
1	0,622	0,876	Estável
2	1,244	0,426	Estável
3	1,866	-----	Não existe

Tabela 13: Estabilidade dos harmônicos para  $c = 1,1, \Sigma L = 10$

m	$\delta_m / c$	$\delta_m \cot g\left(\frac{\delta_m}{c}\right)$	Observação
1	0,521	0,978	Estável
2	1,142	0,426	Estável
3	1,714	-----	Não existe

Tabela 14: Estabilidade dos harmônicos para  $c = 1,5$ ,  $\Sigma L = 10$ 

m	$\delta_m / c$	$\delta_m \cot\left(\frac{\delta_m}{c}\right)$	Observação
1	0,413	1,411	Instável
2	0,838	1,131	Instável
3	1,257	0,612	Estável
4	1,676	-----	Não existe

Existem dois harmônicos para  $c = 1,01$  e todos são estáveis de acordo com a desigualdade (58). Quando  $c = 1,1$  novamente existem dois harmônicos estáveis e quando  $c = 1,5$  existem três harmônicos, mas os dois primeiros são instáveis. À medida que se aumenta o valor de  $c$ , aumenta-se o número de situações instáveis e também a de harmônicos.

As Tabelas 15, 16 e 17 listam os dados da estabilidade dos harmônicos para  $\Sigma L=20$  e  $c = 1,01$ ; 1,1 e 1,5, respectivamente.

Tabela 15: Estabilidade dos harmônicos para  $c = 1,01$ ,  $\Sigma L = 20$ 

m	$\delta_m / c$	$\delta_m \cot g\left(\frac{\delta_m}{c}\right)$	Observação
1	0,311	0,977	Estável
2	0,622	0,876	Estável
3	0,933	0,698	Estável
4	1,244	0,426	Estável
5	1,555	0,025	Estável
6	1,866	-----	Não existe

Tabela 16: Estabilidade dos harmônicos para  $c = 1,1$ ,  $\Sigma L = 20$ 

m	$\delta_m / c$	$\delta_m \cot g\left(\frac{\delta_m}{c}\right)$	Observação
1	0,286	1,07	Instável
2	0,572	0,978	Estável
3	0,858	0,816	Estável
4	1,144	0,574	Estável
5	1,430	0,226	Estável
6	1,716	-----	Não existe

Tabela 17: Estabilidade dos harmônicos para  $c = 1,5$ ,  $\Sigma L = 20$ 

m	$\delta_m / c$	$\delta_m \cot g\left(\frac{\delta_m}{c}\right)$	Observação
1	0,209	1,478	Instável
2	0,419	1,411	Instável
3	0,628	1,297	Instável
4	0,838	1,131	Instável
5	1,047	0,907	Estável
6	1,257	0,612	Estável
7	1,466	0,231	Estável
8	1,678	-----	Não existe

Existem cinco harmônicos para  $c = 1,01$  e todos são estáveis de acordo com a desigualdade (58). Quando  $c = 1,1$  novamente obtemos cinco harmônicos, mas o mais baixo  $m = 1$  é instável. E quando  $c = 1,5$  existem sete harmônicos, mas os quatro primeiros são instáveis. À medida que se aumenta o valor de  $c$ , aumenta-se o número de situações instáveis e também o de harmônicos.

As Tabelas 18, 19 e 20, listam os dados da estabilidade dos harmônicos para  $\Sigma L = 50$  e  $c = 1,01$ ; 1,1 e 1,5, respectivamente.

Tabela 18: Estabilidade dos harmônicos para  $c = 1,01$ ,  $\Sigma L = 50$

m	$\delta_m / c$	$\delta_m \cot g\left(\frac{\delta_m}{c}\right)$	Observação
1	0,124	1,005	Instável
2	0,249	0,989	Estável
3	0,373	0,963	Estável
4	0,498	0,925	Estável
5	0,622	0,876	Estável
6	0,747	0,815	Estável
7	0,871	0,741	Estável
8	0,995	0,564	Estável
9	1,120	0,548	Estável
10	1,244	0,426	Estável
11	1,369	0,283	Estável
12	1,493	0,117	Estável
13	1,617	-----	Não existe

Tabela 19: Estabilidade dos harmônicos para  $c = 1,1$ ,  $\Sigma L = 50$

m	$\delta_m / c$	$\delta_m \cot g\left(\frac{\delta_m}{c}\right)$	Observação
1	0,114	1,095	Instável
2	0,228	1,081	Instável
3	0,343	1,057	Instável
4	0,457	1,022	Instável
5	0,571	0,978	Estável
6	0,685	0,922	Estável
7	0,800	0,855	Estável
8	0,914	0,775	Estável
9	1,028	0,682	Estável
10	1,142	0,574	Estável
11	1,257	0,449	Estável
12	1,371	0,306	Estável
13	1,485	0,140	Estável
14	1,599	-----	Não existe

Tabela 20: Estabilidade dos harmônicos para  $c = 1,5$ ,  $\Sigma L = 50$ 

m	$\delta_m / c$	$\delta_m \cot g\left(\frac{\delta_m}{c}\right)$	Observação
1	0,084	1,496	Instável
2	0,168	1,486	Instável
3	0,251	1,468	Instável
4	0,335	1,448	Instável
5	0,419	1,471	Instável
6	0,503	1,371	Instável
7	0,586	1,324	Instável
8	0,670	1,268	Instável
9	0,754	1,204	Instável
10	0,838	1,131	Instável
11	0,922	0,951	Estável
12	1,005	0,906	Estável
13	1,080	0,854	Estável
14	1,173	0,740	Estável
15	1,257	0,612	Estável
16	1,340	0,472	Estável
17	1,424	0,315	Estável
18	1,508	0,144	Estável
19	1,592	-----	Não existe

Existem doze harmônicos para  $c = 1,01$  mas o primeiro é instável de acordo com a desigualdade (58). Quando  $c = 1,1$  há treze harmônicos, mas os quatro primeiros são instáveis, e quando  $c = 1,5$  existem dezoito harmônicos, onde os dez primeiros são instáveis. Em geral à medida que se aumenta o valor de  $c$ , aumenta-se o número de situações instáveis e também o de harmônicos.

Dependendo do perímetro no sistema, pode-se ter alguns harmônicos instáveis e outros estáveis como foi observado nas tabelas anteriores.

Os resultados nas tabelas anteriores podem ser colocados na forma gráfica também em função do número do harmônicos  $m$ . Como um exemplo ilustrativo, a Figura 9, mostra as funções  $f(m) = \delta_m/c$  e  $g(m) = \delta_m \cot g(\delta_m/c)$  para o caso de  $c = 1,5$  e  $\Sigma L = 20$  e  $m = 1$  até 10. Podemos observar que para estas condições, os harmônicos correspondentes a  $m = 1, 2, 3$  e 4 são instáveis, e harmônicos correspondentes ao  $m = 5, 6$  e 7 são estáveis e harmônicos superiores, isto é  $m \geq 8$ , não existem. Podemos salientar que apenas harmônicos iniciais podem ser instáveis, e depois temos um número limitado de harmônicos estáveis.

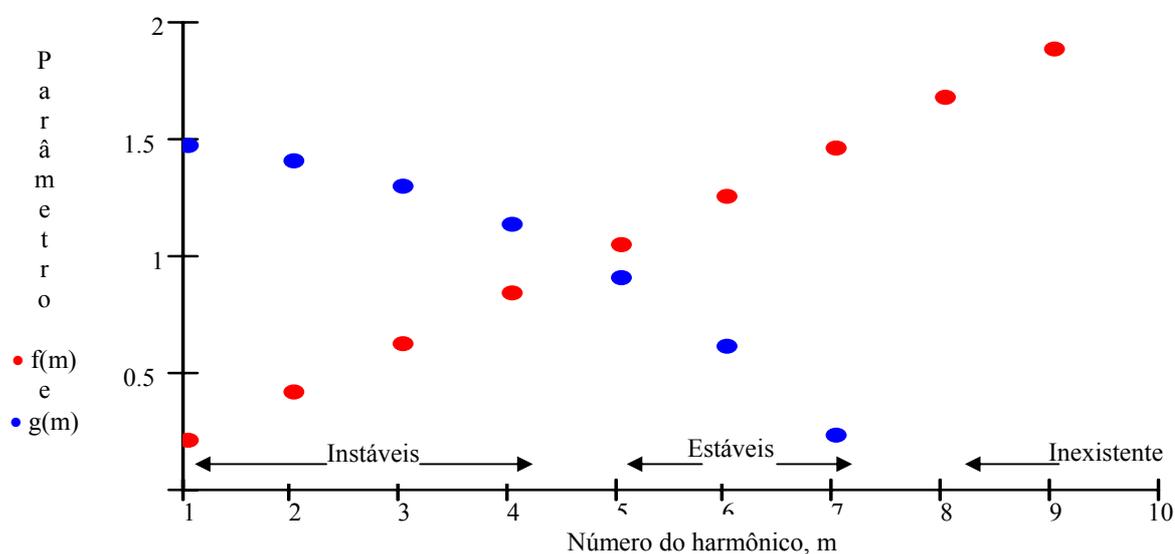


Figura 9. Parâmetros  $f(m)$  e  $g(m)$  para os Harmônicos.

## 5.2. Caso do Reator Anelar Pulsado.

Baseando-se no critério desenvolvido anteriormente e usando as mesmas propriedades geométricas e materiais utilizadas na avaliação do conceito VICHFPR, é possível analisar agora a estabilidade e/ou instabilidade de harmônicos no conceito. Além disso, é possível analisar o primeiro harmônico correspondente a  $m = 1$ , já que este é o primeiro a se tornar instável. Pode ser re-enfatizado que a análise pela teoria de transporte foi realizada em uma geometria unidimensional de uma placa infinita, tendo sido mostrada na seção 3.1 do capítulo 3. A aplicabilidade desta análise pode ser

estendida também para a geometria de um paralelepípedo para descrever as condições do Reator Anelar Pulsado, através da inclusão da fuga transversal do anel, para  $\Sigma_a$ . Com a inclusão da fuga transversal  $DB_T^2$ , a equação modificada para  $c$  torna-se :

$$c = \frac{\Sigma_s + \bar{v}\Sigma_f}{\Sigma + DB_T^2} = \frac{\Sigma_s + \bar{v}\Sigma_f}{\Sigma_s + \Sigma_a + DB_T^2} \cong \frac{\bar{v}\Sigma_f}{\Sigma_a + DB_T^2}$$

se  $\Sigma_s$  é pequeno quando comparado a  $\bar{v}\Sigma_f$  e  $(\Sigma_a + DB_T^2)$ .

Deve-se notar que estas aproximações são bem razoáveis para o conceito VICHFPR, que possui um núcleo com grande fuga de nêutrons, com um valor alto para  $DB_T^2$ . Sob estas condições, o valor do parâmetro regenerador  $c$  é aproximadamente igual ao  $k_{ef}$  do sistema. O requisito básico no projeto do conceito VICHFPR[18] é que a região próxima ao pulsador é supercrítica pronta de 20 \$ e, fora da região do pulsador, possui uma subcriticalidade de 15 \$. Então, usando  $\beta = 0,0065$  como sendo a fração de nêutrons atrasados, temos :

$$c \cong k_{ef} = (1+20 \beta) = 1,130 \text{ com pulsador};$$

$$c \cong k_{ef} = (1-15 \beta) = 0,912 \text{ sem pulsador.}$$

Analisaremos a instabilidade apenas na região do modulador, onde  $c > 1$ , e limitaremos a análise de limite para o primeiro harmônico, já que este é o primeiro a se tornar instável. A Tabela 21 fornece os resultados da estabilidade para o comprimento  $L$  do pulsador variando de 20 a 50 cm, com  $L = 24$  cm escolhido para o conceito VICHFPR.

Tabela 21: Análise do primeiro harmônico, para o comprimento L do pulsador variando de 20 a 50 cm e  $c = 1,13$ .

L(cm)	$\delta_1$	$\delta_1/c$	$\delta_1 \cot g\left(\frac{\delta_1}{c}\right)$	Observação
20	1,456	1,289	0,422	Estável
24	1,214	1,074	0,658	Estável
30	0,971	0,859	0,837	Estável
40	0,728	0,644	0,969	Estável
45	0,647	0,573	1,003	Instável
50	0,583	0,516	1,028	Instável

Os resultados são mostrados graficamente na Figura 10.

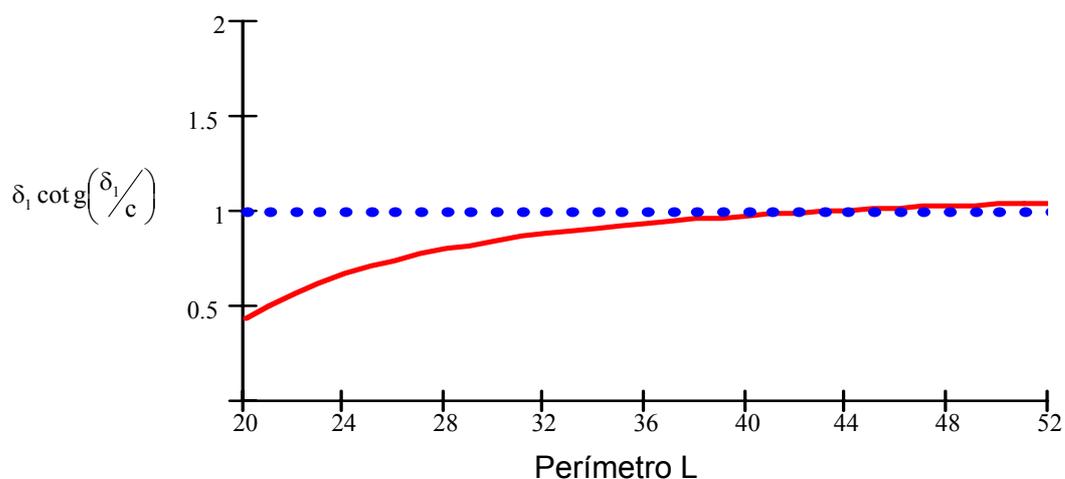


Figura 10: Análise do primeiro harmônico, para o comprimento L do pulsador variando de 20 a 50 cm e  $c = 1,13$

Pode-se notar da Tabela 21 que o conceito VICHFPR torna-se instável se o comprimento do pulsado aproxima de 45 cm. Com a escolha de  $L = 24$  cm, os parâmetros do projeto do conceito VICHFPR não geram qualquer instabilidade.

Esta instabilidade é similar à análise da teoria da difusão realizada por Narain e Seifritz[13] , onde a dimensão crítica calculada no comprimento do pulsador foi de 24,3 cm para combustível puro do urânio 235, ou seja, caso o pulsador apresente uma dimensão maior que a calculada, a instabilidade começar a surgir no sistema, devido a região perto do pulsador se tornar autônoma.

## 6. CONCLUSÕES.

O propósito deste trabalho tem sido a obtenção da solução analítica para obter evolução do fluxo no Espaço-Tempo devido a um pulso giratório de nêutrons injetado num Reator Anelar. Fazendo-se uso da condição de periodicidade tornou-se possível que métodos de meio infinito possam ser empregados, já que nenhuma fronteira surgiu explicitamente. A resolução analítica foi obtida para condição de nêutrons prontos, isto é, desprezando nêutrons atrasados. Uma condição é deduzida para dar o número máximo de harmônicos que pode existir para uma determinada circunferência do reator anelar. Os problemas gerais, incluindo os grupos de nêutrons atrasados, são mais complexo e requer um exame detalhado das singularidades.

Os resultados analíticos mostram que as condições de instabilidade e existência de harmônicos, para fonte pulsada do tipo  $S(x)\delta(t)$  e para a fonte rotativa do tipo  $S(x)\delta(x - Vt)$  são as mesmas.

Os resultados numéricos mostram que a instabilidade dos harmônicos pode surgir quando o reator é supercrítico, e o perímetro é suficientemente grande. Não há nenhuma instabilidade antecipada na solução da teoria de transporte para as condições nominais estipuladas no novo conceito do Reator Anelar Pulsado. Isto é, devido ao fato que o fator regenerador  $c$  do sistema é menor que a unidade, com exceção na região do reator anelar perto do pulsador de 24 cm onde o pulso giratório é produzido. Contudo, a instabilidade pode surgir se o comprimento do pulsador for maior que 45 cm.

**BIBLIOGRAFIA**

- [1] TAIT, J. H., **An Introduction to Neutron Transport Theory**. London, LONGMANS 1964
- [2] CASE, Kenneth e Paul F.Zweifel., **Linear Transport Theory**. Addison – Wesley – Estados Unidos, 1967.
- [3] BELL. George I. e Glasstone Samuel, **Nuclear Reactor Theory** - Van Nostrand Reinhold Company. 1970.
- [4] LAMARSH, John R. **Introduction to Nuclear Reactor Theory**. 2 ed 1972.
- [5] BOYCE, William E. e DiPrima Richard C. **.Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 3ª ed. Guanabara, Rio de Janeiro, 1988.
- [6] BUTKOV, Eugene, **Física Matemática**. Guanabara, Rio de Janeiro, 1978.
- [7] SHABALIN, E. P. **Fast Pulsed and Burst reactors**. First Edition, 1979.
- [8] MURRAY, Raymond L. **Engenharia Nuclear**. Rio de Janeiro, Livro Técnico, 1963.
- [9] NARAIN, Rajendra, **Production of Very Intense Continuous High Flux in a Pulsed Annular Reactor**. IX ENFIR, Brazil, pg 222-226 1992.
- [10] MAIO, C.R.M., **Cálculos em Teoria de Transporte no Modelo de um grupo para células de três regiões**, São Paulo. Dissertação: Instituto de Energia Atômica, nº148, 1979.
- [11] ZWEIFEL, P.F. **Reactor Physics** . McGraw - Hill Book Company.
- [12] WILLIAMS, M.M.R., **Neutron Transport Theory in a Ring Reactor**. **Nuclear Science and Engineering**. Vol. 96, 234 - 240, 1987.

- [13] NARAIN, Rajendra, **An Alternate Approach For Analysis Of Quasi-Static Neutron flux Distribution in a Pulsed Annular Reactor**. XI ENFIR, Poço de Caldas - Brasil, 1997-
- [14] AMES, F.W., **Numerical Methods for Partial Differential Equation**. 2<sup>a</sup>. Academic Press. New York - 1977.
- [15] SPIEGEL, Murray, **Transformada de Laplace**. McGraw-Hill. São Paulo, 1965.
- [16] CHURCHILL, R. V. **Variáveis Complexas e suas Aplicações**. Mc.Graw-Hill, São Paulo, 1975.
- [17] SPIEGEL, Murray, **Variáveis Complexas**. McGraw-Hill. São Paulo, 1973.
- [18] NARAIN, RAJENDRA., **Very Intense Continuous High Flux Pulsed Reactor**. PhD Thesis, Georgia Institute of Technology, USA, 1997.
- [19] Narain, R; Seifritz, W, **A Pulsed Ring Reactor For Burning of Nuclear Wastes**, Annual Meeting ou Nuclear Technology, Bonn, Alemanha, 2000.

## **APÊNDICES**

## APÊNDICE A

### Equação de Transporte Linear de Boltzmann

A equação de transporte linear de Boltzmann é uma equação diferencial parcial, que modela matematicamente o transporte de nêutrons em meios materiais. Para problemas estacionários, de geometria finita, são necessárias condições de contorno. Estas condições de contorno especificam a distribuição das partículas incidentes na superfície do domínio do problema. A equação de Boltzmann, junto com as condições de contorno apropriadas, ( e uma condição inicial no caso do problema dependente do tempo), constitui matematicamente um problema que tem solução única. Esta solução é completa. i. e., modela a distribuição das partículas em função da posição, da energia, da direção e do tempo no domínio do problema e se escreve como

$$\frac{\partial N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)}{\partial t} = -v\vec{\Omega} \cdot \nabla N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) - vN(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) + S(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \quad (\text{A.1})$$

Onde  $N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$  é a densidade angular, que representa o número médio de nêutrons no volume elementar localizado em  $\vec{r}$ , migrando na direção entre  $\vec{\Omega}$  e  $\vec{\Omega} + d\vec{\Omega}$ , energia entre  $E$  e  $E + dE$ , no instante  $t$ , por unidade de volume, ângulo e energia, e  $v$  é a velocidade escalar de nêutron.

## APÊNDICE B

### A Função Delta de Dirac

A função delta  $\delta(x)$ , é definida:

$$\delta(x) = 0 \quad \text{se } x \neq 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\int_a^b \delta(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{se } a < 0 < b, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

As relações definindo não incluem a possibilidade que  $a$  ou  $b$  pode ser zero, e é necessário estender a definição de  $\delta(x)$  como segue:

$$\int_0^a \delta(x) dx = - \int_a^0 \delta(x) dx = \frac{1}{2} \quad (\text{B.3})$$

Podem ser avaliadas integrais que envolvem funções de delta facilmente. Por exemplo, considere a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0) \quad (\text{B.4})$$

Se  $f(x)$  é singular em  $x = 0$ , a integral não existe. Embora os limites na integral são de  $-\infty$  a  $+\infty$ , a Eq. (B.4) é válido para qualquer faixa de integração que inclui o ponto  $x = 0$ .

Portanto,

$$\int_a^b f(x) \delta(x) dx = \begin{cases} f(0), & \text{se } a < 0 < b \\ \frac{1}{2} f(0), & \text{se } a = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

deste que  $f(0)$  existir.

Em termos das definições anteriores é fácil de derivar as relações seguintes:

$$\delta(x - x') = 0, \quad x \neq x'. \quad (\text{B.6})$$

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x')dx = \begin{cases} f(x'), & \text{se } a < x' < b, \\ \frac{1}{2}f(x'), & \text{se } a = x' \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

se  $f(x')$  existir.

A função Delta de Dirac é não analítica, porém pode ser obtida como um limite de funções  $\delta(x)$  analíticas ou seccionalmente contínuas.

Portanto podemos ter as seguintes aproximações:

$$\text{a) } \delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \forall x < -a/2 \\ 1/a & \forall -a/2 < x < a/2 \\ 0 & \forall x > a/2 \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

$$\text{b) } \delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi a}} e^{-x^2/a} \quad (\text{B.9})$$

$$\text{c) } \delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2} \quad (\text{B.10})$$

$$\text{d) } \delta(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } ax}{\pi x} \quad (\text{B.11})$$

## APÊNDICE C

### Transformada de Laplace

#### Definição da Transformada de Laplace.

Seja  $F(t)$  uma função de  $t$  definida para  $t > 0$ . Então, a transformada de Laplace de  $F(t)$ , denotada por  $\bar{F}(s)$ , é definida por ( $s > 0$ ):

$$F(t) = \bar{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt. \quad (\text{C.1})$$

Diz-se que a transformada de Laplace de  $F(t)$  existe se a integral (C.1) converge para algum valor de  $s$ .

#### Definição da Transformada Inversa de Laplace

Se a transformada de Laplace de uma função  $F(t)$  é  $f(s)$ , isto é, se  $\bar{F}(t) = f(s)$  então  $F(t)$  é chamada transformada inversa de Laplace de  $f(s)$  e escrevemos simbolicamente

$$F(t) = \bar{f}(s)^{-1}.$$

#### A Fórmula Complexa de Inversão.

Se  $f(s) = \bar{F}(t)$ , então  $\bar{f}(s)^{-1}$  é dada por

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} f(s) ds, \quad t > 0$$

e

$$F(t) = 0 \quad \text{para} \quad t < 0$$
(C.2)

A integral em (C.2) deve ser efetuada ao longo de uma reta  $s = \gamma$  no plano complexo, onde  $s = x + iy$ . O número real  $\gamma$  é escolhido de modo que  $s = \gamma$  esteja à direita de todas as singularidades ( pólos, pontos de ramificação ou singularidade essenciais.)

## APÊNDICE D

### SINGULARIDADE E PÓLOS

Derivada.

Seja  $f(z)$  uma função definida numa região do plano  $z$ . A derivada de  $f(z)$  é definida por

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \quad (\text{D-1})$$

deste que o limite indicado exista, e seja independente do modo como  $\Delta z$  tende a zero.

#### Função Analítica

Uma função  $f(z)$  se diz analítica num ponto  $z_0$ , se sua derivada  $f'(z)$  existe não só em  $z_0$  como também em todo ponto  $z$  de uma vizinhança de  $z_0$ ,  $f$  é analítica num domínio do plano  $z$  se ela é analítica em todo ponto desse domínio.

Se uma função é analítica em algum ponto de cada vizinhança de um ponto  $z_0$ , exceto no próprio ponto  $z_0$ , então  $z_0$  é chamado ponto singular, ou singularidade.

As condições de Cauchy - Riemann. Suponha que uma função tenha derivada em  $z_0$ . Escrevemos  $z = u + iv$ , para ter função analítica

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

#### Resíduos

Se existe alguma vizinhança de um ponto singular  $z_0$  de uma função  $f$  onde  $f$  é analítica, exceto no próprio ponto  $z_0$ , então  $z_0$  se diz ponto singular isolado de  $f$ .

Quando  $z_0$  é um ponto singular isolado de  $f$ , existe um número positivo  $r_1$  tal que a função é analítica em cada ponto  $z$  o qual  $0 < |z - z_0| < r_1$ . Nesse domínio a função é representada pela série de Laurent.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots, \quad (\text{D.2})$$

onde os coeficiente são dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{D.3})$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)^{-n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{D.4})$$

Em particular,

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) dz,$$

onde  $C$  é um caminho fechado envolvendo  $z_0$ , percorrido no sentido positivo, tal que  $f$  é analítica sobre  $C$  e no interior de  $C$ , exceto no próprio ponto  $z_0$ . Nesse desenvolvimento,  $b_1$ , coeficiente de  $(z - z_0)^{-1}$ , é chamado resíduo de  $f$  no ponto singular isolado  $z_0$ .

Teorema do Resíduo.

Seja  $C$  um caminho fechado tal que uma função  $f$  é analítica sobre  $C$  e no interior de  $C$  exceto num número finito de pontos singulares  $z_1, z_2, \dots, z_n$  interiores a  $C$ . Se  $k_1, k_1, \dots, k_n$  são os resíduos de  $f$  nesses pontos singulares, então

$$\int_c f(z) dz = 2\pi i (k_1 + k_2 + \dots + k_n) \quad (\text{D.5})$$

onde a integral é calculada no sentido anti-horário ao longo de  $C$ .

### Pólos

Na série de Laurent (5.3.1), que representa uma função  $f$  num domínio  $0 < |z - z_0| < r_1$  em torno de um ponto singular isolado  $z_0$ , a série de potências negativas de  $(z - z_0)$  é chamada parte principal de  $f(z)$  em torno de  $z_0$ .

Suponha que a parte principal contenha somente um número finito de termos, então existe um inteiro  $m$  tal que os coeficientes  $b_{m+1}, b_{m+2}, \dots$  são todos nulos, e

$$f(z) = \frac{b}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (\text{D.6})$$

quando  $0 < |z - z_0| < r_1$ , para algum número positivo  $r_1$ , onde  $b_m \neq 0$ . O ponto singular isolado  $z_0$  é então chamado polo de ordem  $m$  da função  $f$ .

## APÊNDICE E

### Têrmos Atômicos

- **Barra de controle** Barra usada para controlar as reações que se produzem no reator. Tem o poder de absorver os nêutrons que normalmente fragmentariam os átomos do combustível. Esta barra tem duas funções: (1) reduzir ou incrementar a liberação da energia nuclear (pela sua inserção ou retirada), (2) Manter o regime de potência do reator.
- **Buckling ( $B^2$ )** É uma medida da “curvatura” do fluxo.
- **Combustível nuclear** Material suscetível de sofrer uma reação em cadeia por nêutrons, com liberação de energia.
- **Dólar** É uma unidade que representa o valor da reatividade quando esta, é igual à função de nêutrons atrasados. Com reatividade igual a 1\$ o sistema fica pronto crítico, isto é a reação em cadeia mantida mesma na ausência de nêutrons atrasados.
- **Energia nuclear** Energia liberada em reações nucleares. É particularmente interessante a energia liberada quando o nêutron fragmenta o núcleo do átomo em partículas menores (fissão) ou quando 2 núcleos se unem sob a ação de temperaturas da ordem de centenas de milhões de graus centígrados (fusão).
- **Fissão** À fragmentação do núcleo depois da absorção de um nêutron. Quando se procede a cisão, ou desintegração deste núcleo, liberta-se grande quantidade de energia nuclear e produzem-se dois fragmentos de fissão além de vários nêutrons. À fissão ocorre sómente com elementos pesados como urânio e plutônio.
- **Físsil** Núcleo que se biparte sob a influência de nêutrons.  $U^{235}$  e Plutônio são elementos físsis.
- **Fluxo** representar o produto da velocidade pelo número de nêutrons que possuam determinada velocidade, por unidade de volume.

- **Livre percurso médio** é a distância média percorrida por um nêutron entre duas colisões consecutivas (em vôo livre) considerando a natureza caótica dos processos.
- **Radioatividade** A emissão de vários tipos de radiação ~ alfa, beta e gama ~ pelos núcleos instáveis. À emissão da energia em forma de radiação, representa o mecanismo pelo qual os radiosótipos instáveis, transforma-se em núcleos estáveis.
- **Reação em cadeia** Processo automantido, no qual a fissão é propagada de núcleo para núcleo de um isótopo físsil, como o  $U^{235}$  ou  $Pu^{239}$ , por meio dos nêutrons emitidos durante a referida fissão. A reação em cadeia aumenta rapidamente em intensidade, é incontrolável, quando propagada numa bomba atômica, e pode ser controlada quando efetuada no reator.
- **Reação nuclear** O resultado do bombardeio do núcleo por partículas atômicas ou por radiação de alta energia.
- **Reatividade** simbolizado por  $\rho$ , é atribuído à relação  $\frac{k_{ef} - 1}{k_{ef}}$ .
- **Refletor** O moderador que envolve a parte central do reator; tem como objetivo devolver ao centro do reator uma fração dos nêutrons que tendem a escapar.
- **Reator pulsado** É um equipamento para produção de pulso.
- **Seção de choque** É um parâmetro relacionado a uma probabilidade de ocorrência de uma dada reação.

