

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**VÓRTICES EM SUPERCONDUTORES COM
INDENTAÇÃO E EM
GEOMETRIAS CONFINADAS**

Antonio Rodrigues de Castro Romaguera

Dissertação apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos pré-requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador:

José Albino Oliveira de Aguiar

Co-orientador:

Leonardo Ribeiro Eulálio Cabral

Março de 2003

Cidadezinha qualquer

*“Casas entre bananeiras
mulheres entre laranjeiras
pomar amor cantar.*

*Um homem vai devagar.
Um cachorro vai devagar.
Um burro vai devagar.
Devagar... as janelas olham.*

Eta vida besta, meu Deus.”

Carlos Drummond de Andrade

Dedicatória

Dedico esta dissertação a minha companheira, Karla, por estar a meu lado nos momentos difíceis, dando-me a força e a perseverança necessárias.

A minha Mãe, por estar silenciosamente presente neste trabalho.

Agradecimentos

Aos amigos da pelada de quarta às 17:00 horas, no complicado campo da prefeitura:
Seu Ivo, Seu Beбето, Marron, Ernesto, Fábio e Alexandre Carvalho.

Aos colegas de sala Jonas e Gustavo, por um convivência amigável e proveitosa.

Aos amigos da pelada de sábado: Ferraz, Marco Cesar, Ivanzinho e Leon.

À Secretária da pós-graduação Ana Caldeira, pelo apoio sempre prontamente.

Ao companheiro de almoço Wilson Barros.

Aos colegas de turma Caio, Marconi, Janete, Paola e outros.

Aos amigos de infância, e ainda amigos, Érico, Olímpio, Charles, Maurício, Ana Valéria, Sheila, Milton e outros.

Ao professor Flávio Aguiar por sua dedicação e competência no curso de Eletrodinâmica Clássica I.

Ao Professor Sérgio Coutinho pelo longo e proveitoso período de convivência nas disciplinas Mecânica Quântica I, Mecânica Quântica II e Teoria Quântica I.

A Clécio Clemente pela colaboração, discussões, esclarecimentos e auxílios.

A Leonardo R. E. Cabral, cuja ajuda foi fundamental no desenvolvimento deste trabalho.

A J. Albino Aguiar, pela sua grande paciência na relação orientador-orientado.

À Coordenação de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pela concessão da bolsa de estudo.

À Fundação de Amparo a Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco - FACEPE, pelo apoio em logística.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, pelo fomento a participação em eventos.

Resumo

Neste trabalho, utilizamos a teoria de London para determinar as respostas magnéticas em um sistema supercondutor semi-infinito e em um sistema confinado. O estudo dos campos magnéticos através da teoria de London permite investigar as propriedades eletrodinâmicas e introduzir ferramentas robustas para o uso de simulação computacional. Estudamos as modificações causadas pela forma do sistema em suas propriedades básicas, como o campo crítico inferior, H_{c1} , e o campo de penetração, H_{en} , analisando o impacto causado por defeitos estruturais na geometria. No sistema semi-infinito, consideramos uma interface plana com uma indentação na superfície. No sistema confinado, consideramos um supercondutor com simetria cilíndrica onde investigamos a formação de cadeias de vórtices e as mudanças configuracionais obtidas pela aplicação de campo magnético paralelo à superfície. A formação dessas cadeias é estudada utilizando simulação Monte Carlo.

- No capítulo 1 apresentamos a história do desenvolvimento da supercondutividade e seus principais formuladores segundo ordem cronológica, começando com sua descoberta por Heike Kamerlingh Onnes, em 1912, até os supercondutores de mais alta temperatura crítica, $T_c = 138 K$.
- No capítulo 2 discorremos sobre as duas principais teorias fenomenológicas da supercondutividade: a teoria de Ginzburg-Landau e a teoria de London. Descrevemos as duas teorias e definimos a notação a ser utilizada em todo o resto da dissertação. Em especial daremos atenção à equação de London e as equações de Ginzburg-Landau. E também apresentamos uma breve introdução sobre os métodos computacionais e abordagens numéricas que foram empregados neste trabalho.
- No capítulo 3, discutimos as propriedades eletrodinâmicas de um supercondutor semi-infinito com uma indentação. Investigamos a variação do campo de penetração, H_{en} ,

devido a indentação para várias configurações geométricas da interface.

- O capítulo 4 trata das propriedades de um sistema supercondutor confinado em duas dimensões, onde estudamos as configurações de vórtices, e sua dependência com os parâmetros geométricos envolvidos. Investigamos os campos de mudança configuracional (*matchingfields*) e a curva de energia livre em função do campo externo, $\mathcal{G}(H)$.
- O Capítulo 5 mostra as conclusões que obtivemos utilizando o sistema semi-infinito e o confinado.

Abstract

In this work, we determine the superconducting magnetic response in a semi-infinite system and in a confined system based in the London theory. The determination of the magnetic fields of superconductors in the London limit allows us to investigate vortex systems by using computational simulation. We study the modifications of basic superconducting properties, as the lower critical field H_{c1} and the penetration field H_{en} due to the shape of the system, in order to define the impact caused by structural defects in the geometry. In the semi-infinite system we consider a flat surface with a semicircular indentation on it. In the confined system, we consider a superconductor with cylindrical symmetry where the formation of vortex chains and its configurational changes induced by magnetic field applied parallel to surface are investigated. These vortex configurations were studied by using Monte Carlo simulated annealing methods.

- In chapter 1 we describe the history of superconductivity development and its main contributors following the chronological order. We begin from Heike Karmerlingh Onnes in 1912 to the highest critical temperature, *Hi- T_c* superconductor, with $T_c = 134 K$.
- In chapter 2 presents the main phenomenological theory of superconductivity, the Ginzburg-Landau and the London theories. We present in details both theories and we define the notation that we will adopt in the rest of this work. In special, we give attention to London. We also describe computational methods and numerical approach that were used.
- In chapter 3 depicts the electromagnetic behavior of a semi-infinite superconducting with a semicircular indentation. We investigate the penetration field, H_{en} , and the dependence on the indentation radius for some interface configuration .

- Chapter 4 deals with the properties of a semicircular superconductor where the vortex configurations and their dependence with the geometrical parameters involved were studied. We also analyze the the configurational changes and the curve of free energy $\mathcal{G}(H)$
- Chapter 5 shows the conclusions that we obtained in the semi-infinite and confined system.

Conteúdo

1	A supercondutividade	15
1.1	Histórico	15
1.2	Estado Meissner	16
1.3	Estado misto	17
1.4	Teoria de Ginzburg-Landau	18
1.5	Teoria BCS	19
1.6	Efeito Josephon	19
1.7	Supercondutores de alta temperatura crítica	20
1.8	Propriedades básicas da transição supercondutora	21
1.8.1	Propriedades preservadas	21
1.8.2	Propriedades não preservadas	22
2	Teorias fenomenológicas	23
2.1	Teoria de London	23
2.1.1	Dedução original	23
2.1.2	Dedução alternativa	24
2.1.3	Energia de uma interface normal supercondutora	25
2.1.4	Vorticidade quantizada	27
2.2	Teoria de Ginzburg-Landau	28
2.2.1	O comprimento de coerência de Ginzburg-Landau	29
2.3	Validade da teoria de London	29
2.4	Validade da teoria de Ginzburg-Landau	30
2.5	Métodos de simulação computacional	30
2.5.1	Monte Carlo	30
2.5.2	Relaxação	32
3	Supercondutor semi-infinito	33
3.1	Introdução	33
3.2	Metodologia	33
3.3	Correntes de blindagem	39
3.4	Aproximações	41
3.5	Energia livre	46
3.6	Energia a campo externo nulo	46
3.7	Energia a campo aplicado	47
3.8	Campo crítico H_{c1}	49
3.9	Força	49
3.10	Campo de entrada	51
3.11	Resultados e discussões	53

4	Sistema confinado	55
4.1	Introdução	55
4.2	Energia livre de Gibbs	58
4.2.1	Sistema com um único vórtice	59
4.2.2	Sistema com N vórtices	59
4.3	Minimização da energia	60
4.4	<i>Matching field</i> : campo de mudança configuracional	67
4.5	Campo de penetração	70
4.6	Regime aproximativo: supercondutor mesoscópico	71
4.7	Resultados e discussões	72
5	Conclusões	75
5.1	Supercondutor semi-infinito	75
5.2	Supercondutores confinados	75
A	Função de Green	87
A.1	Supercondutor Semi-infinito	87
A.2	Campo Meissner	89
B	Energia Livre em supercondutores	91
B.1	Energia livre	91

Capítulo 1

A supercondutividade

1.1 Histórico

A supercondutividade foi descoberta em 1911 pelo físico holandês Heike Kamerlingh Onnes quando ele investigava a resistência elétrica dos condutores. Na época, sabia-se que a resistência elétrica dos metais decrescia com a diminuição da temperatura. Lord Kelvin, um colaborador de Onnes, achava que a resistência elétrica deveria tornar-se infinita quando a temperatura alcançasse o zero absoluto, pois os elétrons no condutor se congelariam. Onnes achava que as vibrações dos elétrons no condutor, que são as responsáveis por dificultar a passagem dos elétrons pelo metal, deveriam diminuir gradativamente até que as vibrações cessariam no zero absoluto. Sendo ele o primeiro cientista a conseguir liquefazer o hélio em 1908, ele dispunha do melhor laboratório de baixas temperaturas de todo o mundo, capaz de alcançar temperaturas da ordem de 4 K . O metal escolhido por Onnes foi o mercúrio, pois podia ser altamente purificado.



Figura 1.1: O Físico Holandês Heike Kamerling Onnes

Hoje, o resultado da experiência foi surpreendente. Ao atingir $4,2\text{ K}$ a resistência elétrica do fio de mercúrio caiu subitamente a zero. Não foi caindo gradualmente, como pensava Onnes, nem foi para infinito, como queria Kelvin. Esse resultado foi apresentado [44] por Onnes em um artigo publicado em uma revista científica holandesa em Maio de 1911, com o título “*Sobre a variação da resistência elétrica de metais puros em temperaturas muito baixas. O desaparecimento da resistência do mercúrio*”. H. Kamerlingh Onnes recebeu [45] em 1912, o prêmio Nobel da Física por este trabalho e pela liquefação do hélio.

Nos anos seguintes, esse fenômeno - a supercondutividade - foi verificado em vários metais e ligas, mas sempre em temperaturas muito baixas¹. Essa limitação frustrante só foi vencida muitos anos depois, em 1986, com a descoberta dos supercondutores de alta temperatura crítica (*High T_c superconductors*)[9].

1.2 Estado Meissner

Um supercondutor caracteriza-se por dois efeitos: o material apresenta resistência elétrica nula, $R = 0$, e o campo de indução magnético dentro do material é zero, $B = 0$. A segunda condição é o chamado efeito Meissner que foi descoberto em 1933 por W. Meissner e R. Ochsenfeld [40]. Supercondutores que apresentam um completo efeito Meissner são ditos do tipo I. Esses supercondutores são, não apenas condutores perfeitos, mas também, diamagnéticos perfeitos. O primeiro tratamento eletrodinâmico aplicado a supercondutores foi dado pelos irmãos H. e F. London em 1935 [36]. O primeiro tratamento termodinâmico para este estado foi dado



Figura 1.2: Fritz London



Figura 1.3: Walter Meissner

por Gorter e Cassimir em 1934, definindo formalmente a supercondutividade como um novo

¹A supercondutividade é observada em metais puros apenas em temperaturas inferiores a 10 K .

estado termodinâmico [25]. Ele demonstraram que a transição de fase do estado normal para o supercondutores representa uma transição de segunda ordem na ausência de campo externo e de primeira ordem na presença de campo.



Figura 1.4: Cornelis Jacobus Gorter



Figura 1.5: Hendrik B. G. Casimir

1.3 Estado misto

O estado Meissner em supercondutores está definido dentro certas condições de campo aplicado e temperatura. Para supercondutores com temperaturas acima da temperatura crítica do sistema, T_c , o estado supercondutor é destruído. Supercondutores que apresentam apenas o estado Meissner tem suas propriedades destruídas quando submetidos a um campo externo acima do campo crítico termodinâmico, H_c . Para campos abaixo de H_c o material apresenta-se no estado Meissner. Esse tipo de supercondutor é denominado de tipo-I. Os supercondutores tipo-I são observados apenas em elementos puros e em ligas metálicas, o que faz com que esse tipo de material se apresente em pequena quantidade. A grande maioria dos supercondutores apresentam o efeito Meissner de forma “parcial”. Quando submetemos um supercondutor a um campo externo acima do valor H_{c1} , o material não apresenta um completo efeito Meissner. O fluxo magnético passa a penetrar no material de forma bem definida, até atingir o seu valor máximo quando o campo externo alcança o valor de H_{c2} . H_{c1} é definido como o campo crítico inferior e H_{c2} o campo crítico superior. A forma como o fluxo magnético penetra no material dá origem a uma nova estrutura, os chamados vórtices. Os vórtices penetram no material de forma quantizada onde o valor do fluxo magnético de um vórtice é precisamente o quantum de fluxo $\Phi_0 = \frac{hc}{2e}$. Supercondutores que apresentam essa propriedade são denominados supercondutores

tipo-II. Os supercondutores tipo-II que se encontram sob a aplicação de campo externo acima de H_{c1} encontram-se no estado misto. O estado misto é exclusivo de supercondutores tipo-II.

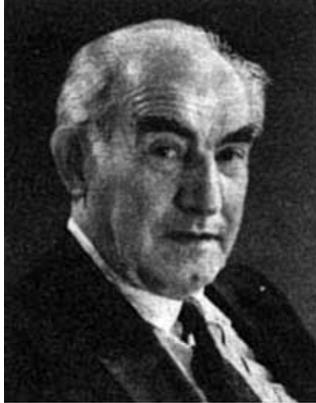


Figura 1.6: Vitaliĭ Lazarevich Ginzburg

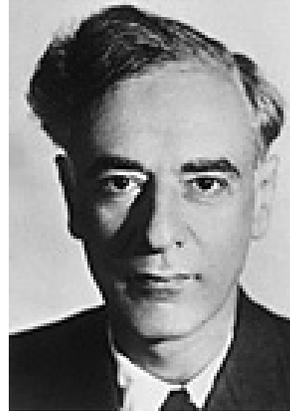


Figura 1.7: Lev Davidovic Landau

1.4 Teoria de Ginzburg-Landau

V. L. Ginzburg, um estudante do brilhante L. D. Landau, utilizou as idéias de seu professor para descrever a supercondutividade como uma expansão de um parâmetro de ordem, associado ao modelo de dois fluídos [23, 24]. Tal teoria permitiu explicar observações experimentais da supercondutividade em condições onde a teoria de London não se aplicava. O parâmetro de ordem utilizado representava a densidade dos elétrons supercondutores. A teoria de Ginzburg-Landau (TGL) introduz a temperatura no pressuposto inicial do funcional da energia do sistema. O grande resultado da TGL é que ela obtém a teoria de London como um caso particular em condições extremas. A partir da TGL, um novo critério para classificar os supercondutores foi desenvolvido, definido em relação ao parâmetro de Ginzburg-Landau, κ . Para supercondutores do tipo-I, o parâmetro de Ginzburg-Landau assume valores menores que 1. Para supercondutores do tipo-II, o parâmetro de Ginzburg-Landau assume valores maiores que 1. A separação exata ocorre quando $\kappa = 1/\sqrt{2}$. O parâmetro κ é definido como a razão entre o comprimento de penetração λ e o comprimento de coerência. $\kappa = \lambda/\xi$. Os supercondutores são então definidos como:

- supercondutor tipo-I: $\kappa < 1/\sqrt{2}$.
- supercondutor tipo-2: $\kappa > 1/\sqrt{2}$.

1.5 Teoria BCS

Uma explicação teórica para a supercondutividade demorou muito a ser encontrada. Só em 1957, John Bardeen, Leon Cooper e Robert Schrieffer propuseram uma teoria [4], a Teoria BCS, que explicava satisfatoriamente o fenômeno. Segundo esta teoria, os elétrons do supercondutor formam “pares”, a partir de uma interação atrativa, que possibilita o movimento desses elétrons pela rede cristalina do metal sem impedimentos. Por essa teoria, Bardeen, Cooper e Schrieffer ganharam [5] o prêmio Nobel de Física de 1972. John Bardeen, um dos maiores físicos teóricos desse século, já havia ganhado [3] o Nobel de Física em 1956 pela descoberta do transistor.



Figura 1.8: John Bardeen



Figura 1.9: Leon Neil Cooper



Figura 1.10: John Robert Schrieffer

1.6 Efeito Josephon

Uma importante avanço teórico na supercondutividade foi elucidado em 1962, quando Brian D. Josephson, um estudante de graduação na universidade de Cambridge, previu que a corrente elétrica fluiria entre dois materiais supercondutores sempre quando eles estiverem separados por um material não supercondutor ou isolante. Sua previsão foi confirmada posteriormente. Por seu trabalho Brian D. Josephson foi um dos ganhadores [31] do prêmio Nobel de física de 1973. O fenômeno do tunelamento é hoje conhecido como “Efeito Josephson” e tem sido aplicado a equipamentos eletrônicos, como o SQUID (*superconducting quantum interface device-equipamento de interface quântica supercondutora*), um instrumento capaz de detectar campos

magnéticos muito fracos.



Figura 1.11: Brian D. Josephson

1.7 Supercondutores de alta temperatura crítica

A temperatura em que um material passa do estado de condução normal para o estado supercondutor é chamada de “temperatura crítica”, ou T_c . O mercúrio usado na experiência pioneira de H. K. Onnes torna-se supercondutor a temperatura de $4,2K$. Até 1986, os valores de T_c dos materiais supercondutores conhecidos eram extremamente baixos. O mais alto era de uma liga de nióbio e germânio, com $T_c = 23K$. Durante anos, muito esforço foi feito na tentativa de achar supercondutores com maiores valores de T_c , mas os cientistas não obtinham sucesso. Essa dificuldade esmoreceu muitos e a pesquisa em supercondutores passou por uma fase de baixa produtividade. Até que, em janeiro de 1986, Karl Müller e Georg Bednorz mostraram [9] que uma cerâmica de óxido de bário, lantânio e cobre ficava supercondutora a $35 K$. Esse resultado teve tremendo impacto entre os pesquisadores do ramo. Em pouco tempo, novos materiais, com valores de T_c cada vez mais altos, foram sendo descobertos. Já em 1987, Paul Chu e colaboradores apresentaram [62] um óxido de ítrio, bário e cobre com $T_c = 93K$. A beleza desse achado consiste no fato de que $93K$ está acima da temperatura do nitrogênio líquido. Hoje, o recorde para T_c é de $138K$ pertencente a uma cerâmica de tálio dopado, cuprato de mercúrio contendo elementos de mercúrio, tálio, bário, cálcio, cobre e oxigênio [17]. Para se obter informações sobre o mais recente valor de T_c visite o endereço na internet <http://www.superconductors.org>.



Figura 1.12: J. Georg Bednorz

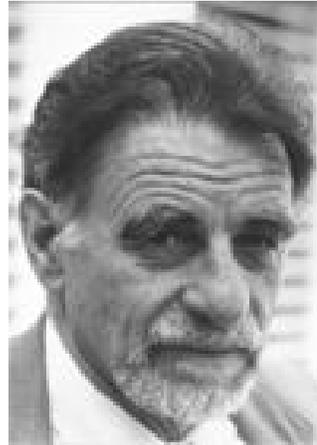


Figura 1.13: K. Alexander Müller

1.8 Propriedades básicas da transição supercondutora

Materiais supercondutores apresentam propriedades bastante diferentes quando efetuamos medições em temperatura acima e abaixo da temperatura de transição [57]. Muitas dessas mudanças estão associadas diretamente com as propriedades supercondutoras. Destacamos algumas propriedades que são preservadas, ou seja, não são alteradas por medições realizadas a temperatura abaixo e acima da temperatura crítica T_c , e algumas que não são preservadas. Uma lista mais extensa dessas propriedades pode ser encontrada em [57].

1.8.1 Propriedades preservadas

Difração de raios-X

O padrão de difração de raios-X em materiais supercondutores é o mesmo acima e abaixo da temperatura de transição [32]. Tal comportamento demonstra que a transição normal-supercondutora não envolve mudança na rede cristalina.

Reflexibilidade

Não existe mudança apreciável na reflexibilidade de metais, tanto na região do visível quanto no infravermelho [18, 29, 50], apesar das propriedades ópticas estarem usualmente conectadas com a condutividade elétrica.

Absorção de elétrons

Não existe mudança na absorção de elétrons rápidos ou lentos [39, 41], e as propriedades fotoelétricas também permanecem inmutáveis [38].

1.8.2 Propriedades não preservadas

Campo magnético

Materiais supercondutores expulsam o fluxo magnético de seu interior (Efeito Meissner), completamente para $H < H_{c1}$ e parcial para $H_{c1} < H < H_{c2}$.

Correntes

Em virtude da existência de um campo magnético crítico, existe uma corrente elétrica crítica, J_C para a qual valores acima desta destroem o estado supercondutor. Esta corrente foi pensada inicialmente como a necessária para criar o campo crítico, mas esta relacionado com outros parâmetros também. O conhecimento de J_c permite evitar acidentes em laboratórios. Supercondutores eram submetidos a altas correntes, ultrapassando a corrente crítica, gerando muito calor nos equipamentos (quench), ocasionando explosões.

Tensão

A temperatura de transição pode ser modificada adicionando tensão, e usualmente, uma tensão que incrementa o tamanho da amostra incrementa a temperatura de transição [57].

Frequência de corrente alternada

A resistividade nula de um supercondutor é modificada em alta frequência de correntes alternadas. Até 10 MHz a resistência ainda permanece nula dentro da resolução experimental [37], mas apresenta grandes variações acima dessa frequência [46, 47, 48].

Isótopos constituintes

Mesmo substâncias puras como o mercúrio apresentam uma variação na temperatura de transição. Detalhados experimentos indicam que T_c varia com a raiz quadrada da massa atômica do isótopo utilizado. Esta é uma clara assinatura da teoria BCS [56].

Capítulo 2

Teorias fenomenológicas

2.1 Teoria de London

Os irmãos H. e F. London propuseram uma teoria baseada em argumentos fenomenológicos para explicar as propriedades dos materiais supercondutores obtidas experimentalmente. Inicialmente eles propuseram uma teoria que explicasse as duas principais propriedades dos supercondutores tipo-I: O efeito Meissner e a ausência de resistência elétrica zero. Apresentaremos aqui duas derivações para o modelo proposto pelos irmãos London. A primeira derivação se baseia no modelo de Drude-Lorentz [33], e a segunda derivação se baseia no modelo de dois fluidos.

2.1.1 Dedução original

O modelo de Drude-Lorentz é equivalente a Lei de Newton para a velocidade \mathbf{v} de um elétron de massa m e carga e na presença de um campo elétrico \mathbf{E} com um arrastamento viscoso proporcional a \mathbf{v}/τ ,

$$m \left(\dot{\mathbf{v}} + \frac{1}{\tau} \mathbf{v} \right) = e \mathbf{E}. \quad (2.1)$$

Para um condutor perfeito, $\tau \rightarrow \infty$. Introduzindo a densidade de corrente $\mathbf{j} = ne\mathbf{v}$, onde n é a densidade de elétrons condutores, podemos reescrever a equação 2.1 como:

$$\mathbf{j} = \frac{ne^2}{m} \mathbf{E} \quad (2.2)$$

A equação 2.2 é conhecida pela literatura como a primeira equação de London. Aplicando a derivada temporal da quarta equação de Maxwell, lei de Ampère-Maxwell, em ambos os lados, obtemos a seguinte expressão:

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (2.3)$$

onde ϵ é a constante dielétrica do meio e \mathbf{h} é o campo magnético microscópico. Substituindo a equação 2.2 dentro da equação 2.3, obtemos,

$$\nabla \times \nabla \times \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \left(\frac{4\pi n e^2}{m c} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \nabla \times \mathbf{E}. \quad (2.4)$$

Utilizando em seguida a segunda equação de Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, \quad (2.5)$$

obtemos por fim uma expressão diferencial para o campo magnético,

$$\nabla \times \nabla \times \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + \left(\frac{1}{\lambda_L^2} + \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = 0, \quad (2.6)$$

onde nós introduzimos o comprimento de London, λ_L , definido por:

$$\frac{1}{\lambda_L^2} = \frac{4\pi n e^2}{m c^2}. \quad (2.7)$$

A equação 2.6 baseia-se em um condutor perfeito. Integrando os dois lados desta equação em relação ao tempo, nós obtemos que:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{h} + \left(\frac{1}{\lambda_L^2} + \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{h} = cte \quad (2.8)$$

Até esse ponto não foi imposto nenhuma condição ao tratamento aplicado, tendo então obtido um resultado geral. A suposição dos irmãos London foi impor que a constante de integração é zero.

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{h} + \left(\frac{1}{\lambda_L^2} + \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{h} = 0 \quad (2.9)$$

Para regimes estacionários, obtemos então a equação de London.

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{h} + \frac{\mathbf{h}}{\lambda_L^2} = 0 \quad (2.10)$$

2.1.2 Dedução alternativa

Uma derivação alternativa da equação 2.10 é motivada pela idéia de que o movimento dos elétrons comporta-se coletivamente como um superfluido [35], um líquido sem viscosidade. Essa demonstração alternativa foi baseada no modelo de dois fluidos aplicado ao Hélio líquido, onde uma parte se comporta como um material sem viscosidade, e a outra como um material viscoso.

Assumimos que a energia livre do sistema possui três componentes:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_N + E_{kin} + E_{mag}, \quad (2.11)$$

onde \mathcal{F}_N é a energia associada com o estado normal, E_{kin} é a energia cinética associada com o movimento do superfluido e E_{mag} é a energia associada com o campo magnético.

Podemos escrever esses dois últimos termos como:

$$E_{mag} = \frac{1}{8\pi} \int |\mathbf{h}(\mathbf{r})|^2 d^3r, \quad (2.12)$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) v^2(\mathbf{r}) d^3r, \quad (2.13)$$

onde $\rho(\mathbf{r})$ é a densidade de massa do superfluido. Escrevendo $\rho = nm$ e $\mathbf{v} = \frac{1}{ne}\mathbf{j}$ e usando a quarta equação de Maxwell 2.3, obtemos:

$$E_{kin} = \frac{1}{8\pi} \int \frac{mc^2}{4\pi ne^2} |\nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r})|^2 d^3r, \quad (2.14)$$

onde n é agora interpretado como a densidade de elétrons. A expressão para a energia livre do sistema torna-se:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_N + \frac{1}{8\pi} \int |\mathbf{h}(\mathbf{r})|^2 d^3r + \frac{1}{8\pi} \int \frac{mc^2}{4\pi ne^2} |\nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r})|^2 d^3r \quad (2.15)$$

Os elétrons supercondutores ajustam seu movimento de forma a minimizar a energia livre total. A energia do estado normal representa uma contribuição constante para a energia livre, de forma que precisamos solucionar a equação $\delta(E_{kin} + E_{mag}) = 0$. Minimizando o funcional da equação 2.15, obtemos:

$$\delta\mathcal{F} = \int \left\{ \mathbf{h}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{h}(\mathbf{r}) + \frac{mc^2}{4\pi ne^2} [\nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r})] \cdot [\nabla \times \delta\mathbf{h}(\mathbf{r})] \right\} d^3r = 0 \quad (2.16)$$

Integrando o segundo termo por partes, nós obtemos:

$$\int [\mathbf{h}(\mathbf{r}) + \lambda_L^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r})] \cdot \delta\mathbf{h}(\mathbf{r}) d^3r = 0 \quad (2.17)$$

Como a variação $\delta\mathbf{h}$ é arbitrária, nós temos que o argumento da integral precisa ser nulo, obtendo assim a conhecida equação de London para supercondutores tipo-I ou para supercondutores tipo-II no estado Meissner.

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r}) + \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{h}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.18)$$

2.1.3 Energia de uma interface normal supercondutora

Para entendermos o que acontece com o estado supercondutor quando o mesmo está em contato com um meio normal, consideramos um caso simples de uma interface plana paralela

ao plano xy na presença de um campo magnético externo H aplicado na direção z . O material supercondutor ocupa a região $x > 0$. A energia livre total \mathcal{F} , no modelo de London é:

$$\mathcal{F} = \int \mathcal{F}_s d^3r + \frac{1}{8\pi} \int |\mathbf{h}(\mathbf{r})|^2 d^3r + \frac{\lambda_L^2}{8\pi} \int |\nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r})|^2 d^3r, \quad (2.19)$$

onde utilizamos

$$\mathcal{F}_N = \int_0^\infty \mathcal{F}_s d^3r = \mathcal{A} \int_0^\infty \mathcal{F}_s dx, \quad (2.20)$$

e \mathcal{A} é a área da interface normal-supercondutor e \mathcal{F}_s é a energia de condensação. Por definição, nós temos que a energia livre de Gibbs é contínua na transição, ou seja, $\mathcal{G}_N = \mathcal{G}_S$. A energia livre de Gibbs é:

$$\mathcal{G} = \mathcal{F} - \frac{\mathcal{A}}{4\pi} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{h}(x) dx, \quad (2.21)$$

A solução da equação de London 2.10 para esta interface plana é:

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}) = \mathbf{H} e^{-x/\lambda}. \quad (2.22)$$

Desenvolvendo esta expressão, obtemos que:

$$\mathcal{G} = \mathcal{A} \int_0^\infty \left[\mathcal{F}_s + H^2 \left(\frac{1}{8\pi} e^{-2x/\lambda} + \frac{1}{8\pi} e^{-2x/\lambda} - \frac{1}{4\pi} e^{-x/\lambda} \right) \right] dx. \quad (2.23)$$

onde \mathbf{H} é o campo aplicado. Resolvendo esta expressão, nós encontramos que:

$$\mathcal{G} = \int \mathcal{F}_N d^3r + \gamma \mathcal{A}, \quad (2.24)$$

sendo γ a energia por unidade de área.

$$\gamma = -\lambda_L \frac{H^2}{8\pi}. \quad (2.25)$$

Uma consequência direta desse resultado é que a energia da interface é negativa. Esse resultado sugere que a energia total do sistema pode ser minimizada aumentando a região de contato entre os estados normais e supercondutores. Esse é o principal motivo para o aparecimento do estado misto nos supercondutores tipo-II. A formação de regiões supercondutoras e não supercondutoras é estabelecida. A forma como são criadas regiões de interface normal-supercondutor é discutida na próxima seção. Supercondutores tipo-I e tipo-II no estado Meissner apresentam uma única região, para campos abaixo do campo crítico inferior, no caso de supercondutores tipo-II e H_c no caso de supercondutores tipo-I.

2.1.4 Vorticidade quantizada

Devido a energia da interface normal supercondutora ser negativa, para campos acima de H_{c1} , o estabelecimento de domínios supercondutores muito grandes torna-se instável, favorecendo a formação de regiões normal-supercondutor. Estas regiões não supercondutoras possuem fluxo magnético que são determinados a partir da equação 2.4.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla \times \nabla \times \mathbf{h} + \frac{4\pi ne^2}{mc^2} \mathbf{h} \right] = 0 \quad (2.26)$$

Integrando sobre uma seção transversal de área \mathcal{A} , e usando a lei de Ampère, temos :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left[\frac{mc}{ne^2} \nabla \times \mathbf{j} + \mathbf{h} \right] \cdot d\mathcal{A} = 0 \quad (2.27)$$

Integrando em relação ao tempo, obtemos a seguinte expressão:

$$\int \left[\frac{mc}{ne^2} \nabla \times \mathbf{j} + \mathbf{h} \right] \cdot d\mathcal{A} = \phi \quad (2.28)$$

Aplicando a lei de Stokes para o primeiro termo, temos :

$$\frac{mc}{ne^2} \oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} + \int \mathbf{h} \cdot d\mathcal{A} = \phi \quad (2.29)$$

Utilizando o potencial vetor \mathbf{A} e novamente a lei de Stokes, temos:

$$\oint \left[\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right] \cdot d\mathbf{l} = \phi \quad (2.30)$$

com $\mathbf{h} = \nabla \times \mathbf{A}$, $\mathbf{j} = nev = ne(\mathbf{p}/m)$. O integrando corresponde ao momentum canônico associado com o movimento de cargas elétricas na formulação da mecânica Hamiltoniana. F. London concluiu que a supercondutividade era um fenômeno quântico macroscópico e dessa forma precisava ser consistente com a quantização de Bohr-Sommerfeld [16]. Desta forma, chegamos a um valor para ϕ ,

$$\phi = n\phi_0, \quad (2.31)$$

com $n = 0, 1, 2, \dots$ e $\phi_0 = hc/2e$. ϕ_0 é precisamente o quantum de fluxo magnético. Se tomarmos um circuito de integração grande o suficiente para considerarmos que o potencial vetor seja muito pequeno em comparação com o momentum, na equação 2.30, temos que $2\pi pr = h$ ou $p = \hbar/r$. Concluímos então que:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2mr} \hat{\phi} \quad (2.32)$$

Este perfil de velocidade corresponde a grandes valores de r as propriedades de vórtices em um fluido. A integral sobre um caminho fechado $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$, pois podemos utilizar a lei de Stokes e junto com o rotacional de \mathbf{v} , obtemos a função delta de Dirac. Reescrevemos a equação de London de forma a absorver esses resultados.

$$\lambda_L^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{h} + \mathbf{h} = \phi_0 \delta(\mathbf{r}) \quad (2.33)$$

2.2 Teoria de Ginzburg-Landau

A teoria de Ginzburg-Landau [24] é um triunfo da intuição física, em que uma pseudofunção de onda, $\psi(\mathbf{r})$, foi introduzida como um parâmetro de ordem superconductor complexo. $|\psi(\mathbf{r})|^2$ representa a densidade local de elétrons supercondutores, $n(\mathbf{r})$. O postulado básico da TGL é que se ψ é pequeno e varia lentamente no espaço, a densidade de energia livre, \mathcal{F} , do sistema pode ser expandida em uma série da forma:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{n0} + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} \psi^4 + \frac{1}{2m} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 \quad (2.34)$$

Aplicando o princípio variacional nesta expansão da densidade de energia livre em relação a $|\psi(\mathbf{r})|^2$ e ao potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, encontramos as equações diferenciais 2.35 e 2.36.

$$\alpha(T)\psi + \beta |\psi|^2 \psi + \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi = 0 \quad (2.35)$$

e

$$\mathbf{j}_s = \frac{e\hbar}{im} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{4e^2}{mc} |\psi|^2 \mathbf{A} \quad (2.36)$$

Na ausência de correntes, numa interface superconductor-vácuo, temos a seguinte condição de contorno:

$$\left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \psi \Big|_n = 0 \quad (2.37)$$

O significado físico desta condição de contorno é que a corrente elétrica esta limitada ao meio superconductor. Para interfaces tipo superconductor-condutor, a condição de contorno é generalizada [19] da seguinte forma:

$$\left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \psi \Big|_n = \frac{i\hbar}{b} \psi \quad (2.38)$$

O parâmetro real b está associado com as propriedades condutoras do meio em questão. Para materiais isolantes, $b \rightarrow \infty$ e para materiais magnéticos $b \rightarrow 0$.

2.2.1 O comprimento de coerência de Ginzburg-Landau

Para entendermos o significado físico das equações 2.35 e 2.36, consideremos inicialmente o problema unidimensional na ausência de correntes e campo magnético externo. Escolhendo um calibre em que ψ assume apenas valores reais, a equação 2.35 torna-se,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha\psi + \beta\psi^3 = 0 \quad (2.39)$$

Para a equação 2.39 existem duas soluções triviais: *i*) $\psi(x) = 0$, que significa que todo o material está no estado normal e, $\psi(x) = \psi_0$, que significa que todo o material está no estado supercondutor. No segundo caso, temos que $\psi_0^2 = -\frac{\alpha}{\beta} > 0$. Quando o parâmetro α da segunda solução for negativo, ou seja, para $T < T_c$, a energia livre é dada por:

$$\mathcal{F} = \int [\alpha\psi(x) + \beta\psi(x)^3] dx. \quad (2.40)$$

Em busca de encontrar uma solução mais geral para o estado supercondutor com $\alpha < 0$, precisamos solucionar a equação 2.39. Fazendo a mudança de variável $\psi(x) = \psi_0 f(x)$, obtemos a seguinte equação diferencial:

$$-\xi(T) \frac{d^2 f}{dx^2} - f + f^3 = 0, \quad (2.41)$$

onde $\xi(T)$ tem unidade de comprimento e está relacionado com o parâmetro $\alpha(T)$ da seguinte forma:

$$\xi^2(T) = \frac{\hbar^2}{2m|\alpha(T)|} \quad (2.42)$$

Desenvolvendo a equação 2.41 com as seguintes condições de contorno $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, obtemos a seguinte solução:

$$f(x) = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi}\right). \quad (2.43)$$

Para distâncias muito maiores que ξ , o parâmetro de ordem $\psi(x)$ torna-se constante. Em outras palavras, a densidade de elétrons supercondutores torna-se constante. Para distâncias da ordem de ξ , o parâmetro de ordem varia de forma significativa, descrevendo a mudança de comportamento do material em torno daquela região. Na interface, $x = 0$, o material está no estado normal e passa a ser supercondutor a medida que “entramos” no material.

2.3 Validade da teoria de London

Para que possamos aplicar a teoria de London em sistemas supercondutores, precisamos ter as condições satisfeitas:

- O comprimento de penetração de London precisa ser muito maior do que o comprimento de coerência, $\lambda \gg \xi$. O comprimento de coerência pode ser definido pela TGL ou pela teoria BCS [35]. Segundo a teoria BCS, o comprimento característico envolve variáveis microscópicas, $\xi = (1/\xi_0 + 1/l)^{-1}$, com $\xi_0 = \hbar v_F / K_B T$, onde l é o livre caminho médio e v_F é a velocidade média.
- \mathbf{H} é pequeno e pode ser tratado como uma perturbação, i.e., para campos muito menor que H_{c2} podemos aplicar a teoria de London.
- A densidade de elétrons supercondutores, $n(\mathbf{r})$, é aproximadamente constante. Esta condição é equivalente a assumir que a temperatura do sistema não varia localmente.

2.4 Validade da teoria de Ginzburg-Landau

- A teoria de Ginzburg Landau é válida para Ψ pequeno, i.e., a temperaturas próximas da temperatura crítica T_c , de forma que $(T_c - T)/T_c \ll 1$.

2.5 Métodos de simulação computacional

Métodos computacionais são frequentemente usados no estudo de sistemas físicos com muitos corpos, devido ao grande número de interações envolvidas, ou quando a quantidade de parâmetros é muito grande como em moléculas. Dependendo do tipo de aplicação existe um método específico a ser empregado. Métodos de integração são utilizados para obter equações de movimento e dinâmica molecular para obter a evolução temporal do sistema a partir de uma determinada configuração inicial. Algumas simulações computacionais consistem em minimizar a energia do sistema em relação a alguns parâmetros. Em tais situações o emprego do método Monte Carlo é apropriado.

2.5.1 Monte Carlo

A quantidade de cálculo requerida para a solução exata de um problema da classe não-polinomial de tempo completo (*nondeterministic polynomial time complete, NP-complete*) aumenta exponencial com tamanho do sistema. Mesmo os super-computadores não podem “resolver” analiticamente problemas desta classe uma vez que excedam um determinado tamanho. O método Monte Carlo fornece [34] garantia probabilística de convergência sobre

um mínimo global. A função para ser otimizada é muitas vezes referida como *função custo*. Como parte das implementações numéricas que trabalharemos, empregamos o método de Monte Carlo [26, 49, 55]. A função do algoritmo Monte Carlo é realizar operações em sistemas com muitos graus de liberdade ou naqueles onde volume do espaço de fase do sistema é muito grande. O método Monte Carlo consiste em tentar aleatoriamente uma configuração e comparar a energia dessa nova configuração com a energia da configuração precedente. Se a energia da nova configuração for maior do que a energia da anterior, ignoramos a tentativa e tentamos novamente (critério de Glauber). A quantidade de tentativas é denominada de passos Monte Carlo (MCS). Implementações Monte Carlo aparecem associadas a alguns procedimentos auxiliares que otimizam a simulação. Entre essas implementações auxiliares mencionamos as duas que utilizamos em nosso trabalho: Metropolis e *Simulated Annealing*.

Metropolis

Um método de minimizar a temperatura consiste em comparar a energia de um estado prévio com a de um estado tentativo. Segundo o critério de Glauber, apenas estados tentativos com energia menor do que o estado prévio são aceitos [49]. O procedimento Metropolis [42] consiste em assumir a configuração tentativa se a energia da nova configuração for menor do que a atual e considerar uma probabilidade de Boltzmann [51] para assumir a nova configuração caso a energia da configuração tentativa seja maior. Este procedimento permite que o sistema mova-se consistentemente em direção dos estados de menor energia, contudo, pulos para fora dos mínimos locais são aceitos probabilisticamente em direção a estados de maior energia.

Simulated Annealing

O processo de *simulated annealing* [34] abaixa a temperatura do sistema utilizando o algoritmo Monte Carlo-Metropolis, por estágios lentos, até que o sistema se “congele” e nenhuma mudança posterior ocorra. Em cada temperatura a simulação deve realizar iterações suficientes para que o sistema alcance um estado constante ou um equilíbrio, isto é conhecido como termalização. O tempo¹ requerido para a termalização é o tempo de decorrelação; os microestados correlacionados são eliminados. É necessário decorrelacionar os estados em cada temperatura para garantir que o estado final obtido seja independente da configuração inicial. O estado

¹A terminologia para “tempo” serve para designar uma quantidade de iterações que a simulação precisa executar antes de modificar os seus parâmetros, levando dessa forma um certo “tempo” executando estas operações.

final precisa depender apenas dos parâmetros globais de controle. A seqüência das temperaturas e o número das iterações aplicadas para termalizar o sistema em cada temperatura compreende uma rotina do recozimento, [26]. Para aplicar o *simulated annealing*, o sistema é inicializado com uma configuração aleatória. Uma nova configuração é construída impondo um deslocamento aleatório na posição de cada elemento do sistema. Se a energia deste estado novo for mais baixa do que a energia do sistema precedente, a mudança é aceita incondicionalmente e o sistema é atualizado. Se a energia do novo sistema for maior, a configuração nova será aceita probabilisticamente. Esta é a etapa do Metropolis, o procedimento fundamental do *simulated annealing*. Se a temperatura for diminuída logaritmicamente, o *simulated annealing* garante uma solução otimizada [58]. Outras formas de modificar a temperatura também fornecem boa otimização como o decaimento exponencial. O decaimento linear é o menos indicado por levar mais tempo para descorelacionar os estados prévios.

2.5.2 Relaxação

Algoritmos utilizando mecanismos de relaxação [26, 49] são diferentes dos envolvendo métodos Monte Carlo. A relaxação consiste em acessar todos os estados do espaço de fase, de forma recursiva. O termo relaxação se deve ao fato que precisamos de um certo tempo para que o sistema estabilize em alguma configuração. Em geral, esse método é muito eficiente mas exige poder computacional muito maior do que o Monte Carlo. Entretanto, para sistema com poucos graus de liberdade, é o mais indicado.

Capítulo 3

Supercondutor semi-infinito

Estudamos os efeitos de uma indentação em um supercondutor semi-infinito na presença de um campo magnético estático e uniforme. Utilizamos para isso o método da função de Green para resolvermos as equações de London. Estudamos também a auto-energia associada a esse problema, determinando a densidade de energia livre de Helmholtz (\mathcal{F}) e à densidade de energia livre de Gibbs (\mathcal{G}). Investigamos ainda a dependência dessas últimas em relação a entrada e saída dos vórtice.

3.1 Introdução

O estudo do efeito de uma indentação em um supercondutor é de grande importância pois possibilita conhecer o comportamento de materiais com defeitos em suas superfícies. Em nosso problema, estamos considerando um supercondutor semi-infinito com um defeito circular na superfície (veja figura 1). Nesta geometria, temos dois parâmetros de controle: o raio da indentação a e o ângulo de corte β , onde $0 < a < \infty$ e $0 < \beta < 2\pi$.

3.2 Metodologia

Utilizamos a teoria de London [19] para determinarmos a equação diferencial que determina o campo magnético no interior do material.

$$-\nabla^2 \mathbf{h}(\rho, \phi) + \frac{\mathbf{h}(\rho, \phi)}{\lambda^2} = \frac{\phi_0}{\lambda^2} \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (3.1)$$

$\mathbf{h}(\rho, \phi)$ é o campo magnético local no interior do meio supercondutor, λ é o comprimento de penetração de London e ρ_i é a coordenada do vórtice i . As condições de contorno para o

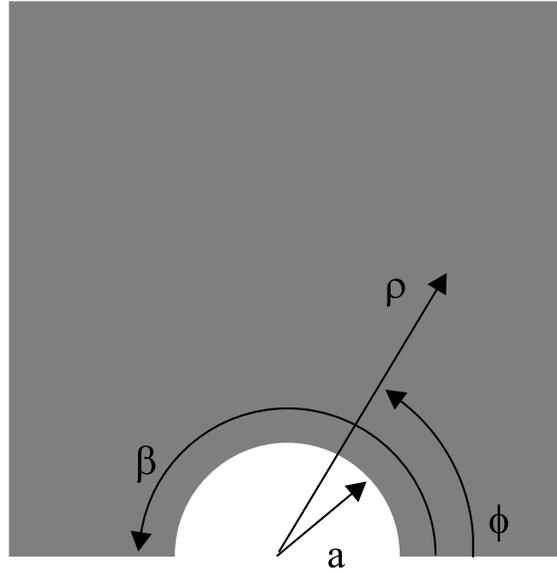


Figura 3.1: Supercondutor com uma indentação para o caso $\beta = \pi$. a é o raio da indentação, ρ e ϕ são as coordenadas polares. O supercondutor ocupa a região escura que preenche todo o semi-espaço $0 \leq \phi \leq \beta$ e $\rho \geq a$.

campo magnético são:

$$\mathbf{h}(a, \phi) = \mathbf{H} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{h}(\rho, 0) = \mathbf{h}(\rho, \beta) = \mathbf{H} \quad (3.3)$$

A função de Green correspondente à equação de London 3.1 (ver apêndice A) é:

$$-\lambda^2 \nabla^2 G + G = \delta(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}') \quad (3.4)$$

Aplicando condições de contorno de Dirichlet:

$$G(\rho, \beta; \rho', \phi') = 0 \quad (3.5)$$

$$G(a, \phi; \rho', \phi') = 0 \quad (3.6)$$

De posse das equações diferenciais e das condições de contorno, aplicamos um tratamento analítico [20, 21, 22] e encontramos a seguinte função de Green

$$G(\rho, \phi, \rho', \phi') = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\beta} \sin\left(\frac{m\pi\phi}{\beta}\right) \sin\left(\frac{m\pi\phi'}{\beta}\right) \left[I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_{<}) - \frac{I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a})}{K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a})} K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_{<}) \right] K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_{>}), \quad (3.7)$$

onde a notação com o símbolo \sim significa que estamos normalizando a variável envolvida pelo comprimento de penetração de London.

O campo devido a presença de vórtices no meio supercondutor é denominado auto-campo, h_{auto} , e a resposta magnética ao campo aplicado é denominado campo Meissner, h_M . O auto-campo é dado por:

$$h_{auto} = \frac{\phi_0}{\lambda^2} \sum_{i=1}^N G(\rho, \phi; \rho_i, \phi_i) \quad (3.8)$$

Como um caso particular estaremos considerando $\beta = \pi$. Utilizando a identidade [2, 30] envolvendo as funções de Bessel modificadas, descrita abaixo

$$K_0(|\tilde{\rho} - \tilde{\rho}_i|) = I_0(\tilde{\rho}_{<})K_0(\tilde{\rho}_{>}) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(m(\phi - \phi_i)) I_m(\tilde{\rho}_{<}) K_m(\tilde{\rho}_{>}), \quad (3.9)$$

podemos então reescrever a função de Green na forma:

$$G(\rho, \phi, \rho_i, \phi_i) = \frac{1}{2\pi} K_0(|\tilde{\rho} - \tilde{\rho}_i|) - \frac{1}{2\pi} K_0(|\tilde{\rho} - \tilde{\rho}_i^*|) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \sin(m\phi) \sin(m\phi_i) \frac{I_m(\tilde{a})}{K_m(\tilde{a})} K_m(\tilde{\rho}) K_m(\tilde{\rho}_i) \quad (3.10)$$

$$|\tilde{\rho} - \tilde{\rho}_i^*|^2 = \tilde{\rho}^2 + \tilde{\rho}_i^2 - 2\tilde{\rho}\tilde{\rho}_i \cos(\phi + \phi_i) \quad (3.11)$$

$$|\tilde{\rho} - \tilde{\rho}_i|^2 = \tilde{\rho}^2 + \tilde{\rho}_i^2 - 2\tilde{\rho}\tilde{\rho}_i \cos(\phi - \phi_i) \quad (3.12)$$

obtendo dessa forma a seguinte expressão para o auto campo:

$$h_{auto}(\rho, \phi) = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} \sum_{i=1}^N [K_0(|\tilde{\rho} - \tilde{\rho}_i|) - K_0(|\tilde{\rho} - \tilde{\rho}_i^*|)] - \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{\infty} 4 \sin(m\phi) \sin(m\phi_i) \frac{I_m(\tilde{a})}{K_m(\tilde{a})} K_m(\tilde{\rho}) K_m(\tilde{\rho}_i) \quad (3.13)$$

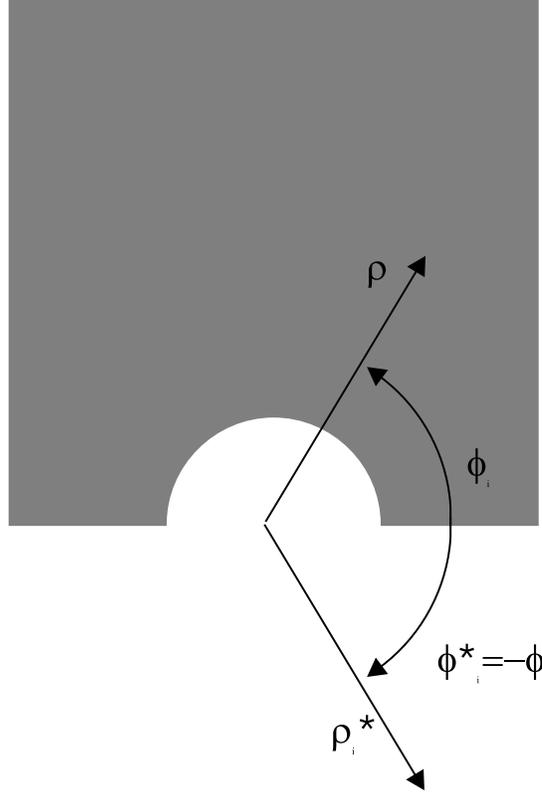


Figura 3.2: Supercondutor semi-infinito com uma indentação. A região supercondutora ocupa toda a área escura que se estende pela região $0 \leq \phi \leq \beta$, a é o raio da indentação, ρ_i e ϕ_i são as coordenadas polares do vórtice i , e ρ_i^* e $\phi_i^* = -\phi_i$ são as coordenadas polares do antivórtice i .

onde as funções $I_\nu(x)$ e $K_\nu(x)$ são as funções de Bessel modificadas. ρ_i^* representa a posição do vórtice imagem i . Na figura 3.2 mostramos o posicionamento dos vórtices imagens. Os detalhes da solução para o auto-campo, envolvendo a utilização da função de Green encontra-se no apêndice A.

Esta solução para o auto-campo pode, então, ser escrita como a solução da equação de London para um meio semi-infinito com uma interface plana [19],

$$h_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_i) = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} [K_0(|\tilde{\boldsymbol{\rho}} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i|) - K_0(|\tilde{\boldsymbol{\rho}} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i^*|)], \quad (3.14)$$

mais uma contribuição devido à indentação,

$$h_a(\rho, \phi) = -\frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{\infty} 4 \sin(m\phi) \sin(m\phi_i) \frac{I_m(\tilde{a})}{K_m(\tilde{a})} K_m(\tilde{\rho}) K_m(\tilde{\rho}_i) \quad (3.15)$$

$$h_{auto}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^N h_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_i) + h_a(\boldsymbol{\rho}) \quad (3.16)$$

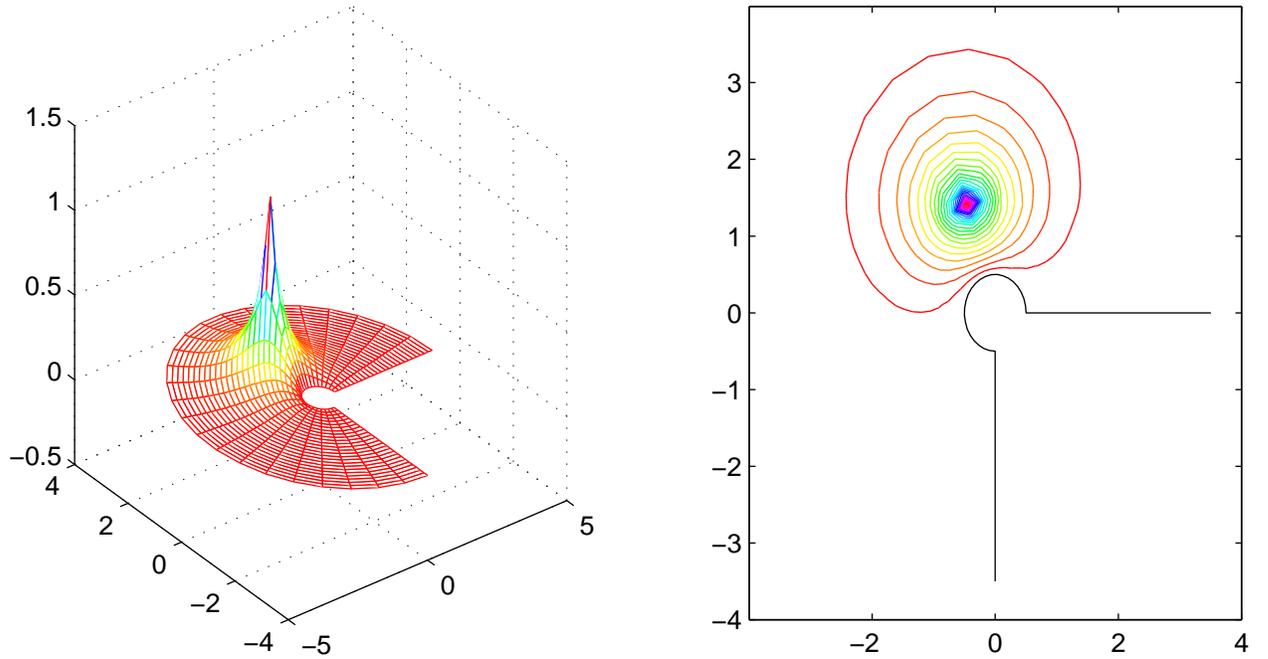


Figura 3.3: Supercondutor semi-infinito com uma indentação. À esquerda nós temos o auto-campo e à direita suas curvas de nível em função das coordenadas do problema. Os parâmetros utilizados foram: $a = 0.5\lambda$, $\beta = 1.5\pi$ e $\xi = 0.1\lambda$.

Devido a natureza singular da equação de London [2, 27], o auto-campo diverge nas posições dos vórtices. Para removermos esta divergência, introduzimos o comprimento de coerência de Ginzburg-Landau ξ . A menor distância que podemos determinar o campo magnético devido a um vórtice com a teoria de London é precisamente ξ . Introduzimos dessa forma o seguinte truncamento

$$|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_i| \rightarrow \sqrt{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_i|^2 + \xi^2}, \quad (3.17)$$

na equação 3.14. O resultado deste procedimento é mostrado na figura 3.3.

A solução homogênea para o campo Meissner é dado pela seguinte expressão integral (ver equação A.32).

$$h_M(\boldsymbol{\rho}, \phi) = H - \frac{H}{\phi_0} \int_0^\pi \int_a^\infty \rho_i d\rho_i d\phi_i [h_1(\boldsymbol{\rho}) + h_a(\boldsymbol{\rho})] \quad (3.18)$$

O campo magnético no interior do supercondutor é então:

$$h(\boldsymbol{\rho}, \phi) = h_M(\boldsymbol{\rho}, \phi) + h_{auto}(\boldsymbol{\rho}, \phi) \quad (3.19)$$

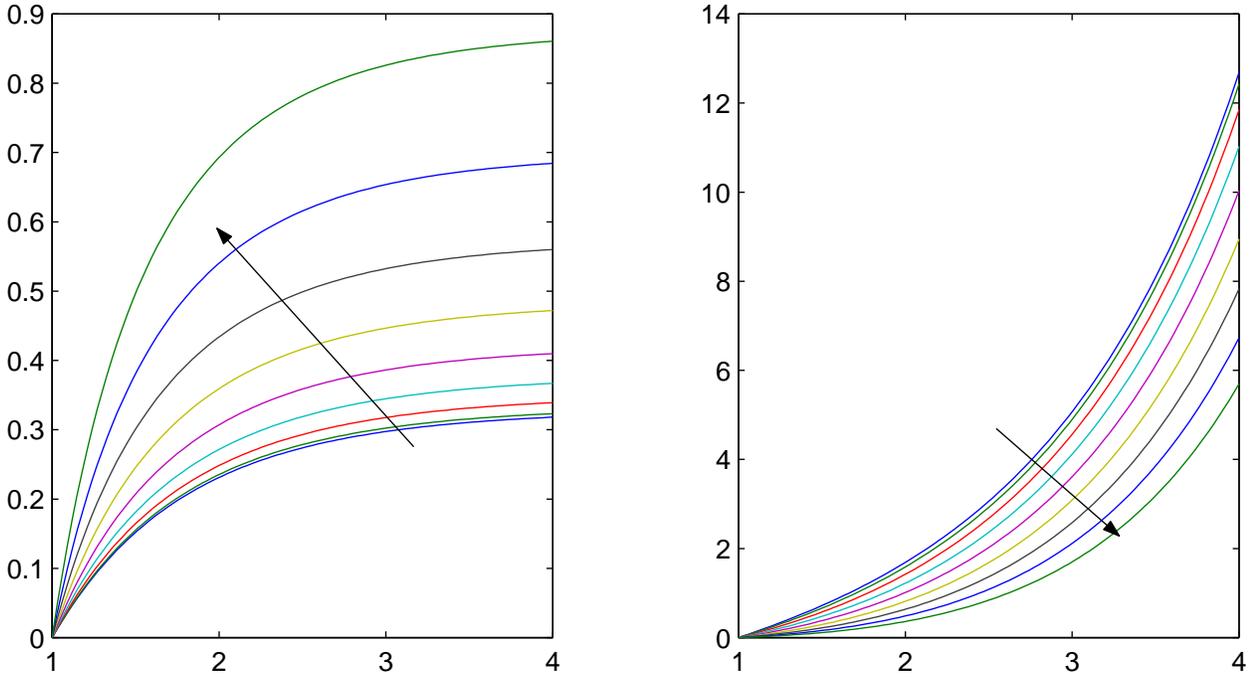


Figura 3.4: Gráfico das funções auxiliares. Dependência espacial de $\Omega_m(y)$ (esquerda) e $\Psi_m(y)$ (direita), para $m=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.50, 1.75$ e 2 . A seta indica o sentido do crescimento do índice m . As funções foram calculadas numericamente.

com as seguintes dependências para cada componente:

$$\begin{aligned} h_M(\rho, \phi) &= h_M(\rho, \phi; \beta, a, H) \\ h_{auto}(\rho, \phi) &= h_{auto}(\rho, \phi; \beta, a, \rho_i, \phi_i) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Para auxiliar na determinação do campo Meissner, definimos as seguintes funções:

$$\begin{aligned} \Omega_m(y) &= \int_1^y K_m(x) x dx \\ \Psi_m(y) &= \int_1^y I_m(x) x dx \end{aligned} \quad (3.21)$$

O comportamento das funções $\Psi_m(y)$ e $\Omega_m(y)$ pode ser observado na figura 3.4.

Portanto, temos que o campo Meissner expresso em termos das funções auxiliares é:

$$\begin{aligned} h_M &= H - H \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi\phi}{\beta}\right) \frac{2\beta}{m\pi} \times \\ &\times \left\{ K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) \left[\Psi_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) - \Psi_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a}) \right] + I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) \left[\Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\infty) - \Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) \right] - \right. \\ &\left. \frac{I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a})}{K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a})} K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) \left[\Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\infty) - \Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

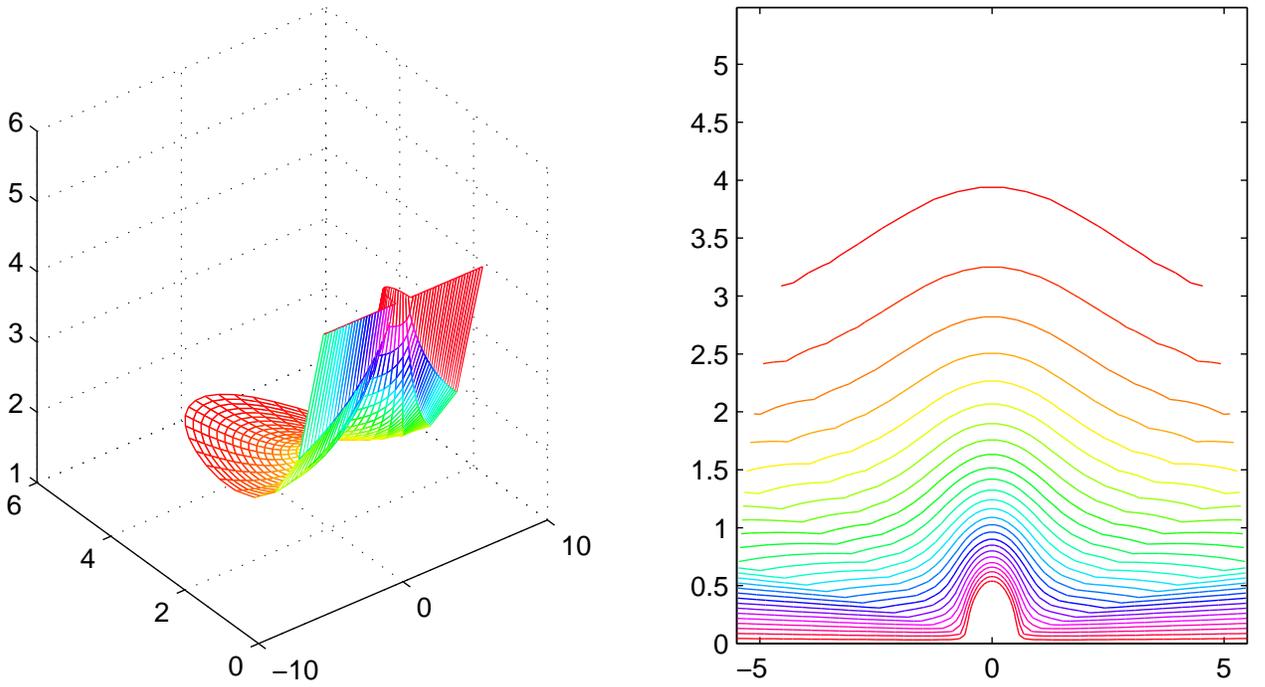


Figura 3.5: Dependência do campo magnético Meissner (a esquerda) e suas curvas de nível (a direita). Os parâmetros utilizados foram $a = 0.5\lambda$, $\beta = \pi$ e $H = 5 \frac{\phi_0}{\lambda^2}$.

O termo $\Omega_m(\infty)$ é uma constante que depende apenas do índice m e pode ser calculada utilizando-se grandes valores de x . A função $\Omega_m(x)$ torna-se rapidamente uma constante devido ao rápido decaimento da função $K_m(x)$. A figura 3.2 ilustra a dependência de h_M (3.22) com a posição no interior do supercondutor.

3.3 Correntes de blindagem

De posse do campo magnético local, podemos obter a configuração da corrente gerada pela distribuição de vórtices através da seguinte expressão:

$$\mathbf{j}(\rho, \phi) = \frac{c}{2\pi} \nabla \times h(\rho, \phi) \hat{\mathbf{z}} \quad (3.23)$$

escrevendo esta expressão em coordenadas cilíndricas, obtemos:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \phi} \hat{\rho} - \frac{\partial h}{\partial \rho} \hat{\phi} \quad (3.24)$$

onde,

$$j_{1\rho}(\rho, \phi) = \frac{c\phi_0}{8\pi^2\lambda^3} \times \sum_{i=1}^N \left\{ K_1(|\tilde{\rho} - \tilde{\rho}_i|) \frac{\rho_i \sin(\phi - \phi_i)}{|\rho - \rho_i|} - K_1(|\tilde{\rho} - \tilde{\rho}_i^*|) \frac{\rho_i \sin(\phi + \phi_i)}{|\rho - \rho_i^*|} \right\} \quad (3.25)$$

$$j_{1\phi}(\rho, \phi) = -\frac{c\phi_0}{8\pi^2\lambda^3} \times \sum_{i=1}^N \left\{ K_1(|\tilde{\rho} - \tilde{\rho}_i|) \frac{[\rho - \rho_i \cos(\phi - \phi_i)]}{|\rho - \rho_i|} - K_1(|\tilde{\rho} - \tilde{\rho}_i^*|) \frac{[\rho - \rho_i \cos(\phi + \phi_i)]}{|\rho - \rho_i^*|} \right\} \quad (3.26)$$

Nas equações 3.25 e 3.26 consideramos apenas os termos da corrente referente ao campo h_1 .

A densidade de corrente devido a indentação é dada pelo termo h_a , i.e.

$$j_{a\rho}(\rho, \phi) = \frac{8c\phi_0}{\pi^2\lambda^2} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(m\phi) \sin(m\phi_i) \frac{m}{\rho} \frac{I_m(\tilde{a})}{K_m(\tilde{a})} K_m(\tilde{\rho}) K_m(\tilde{\rho}_i) \quad (3.27)$$

$$j_{a\phi}(\rho, \phi) = -\frac{8c\phi_0}{\pi^2\lambda^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(m\phi) \sin(m\phi_i) \frac{I_m(\tilde{a})}{K_m(\tilde{a})} K_m(\tilde{\rho}_i) \times \left\{ -\frac{K_{m+1}(\tilde{\rho})}{\lambda} + \frac{m}{\rho} K_m(\tilde{\rho}) \right\} \quad (3.28)$$

Os campos vetoriais definidos pelas equações 3.25, 3.26, 3.27 e 3.28 estão representados na figura 3.6. Na presença de campo magnético, precisamos introduzir o termo devido ao campo homogêneo, equação 3.22. Esse termo corresponde justamente a corrente Meissner,

$$j_{M\rho} = -2\frac{c}{\lambda} H \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \cos\left(\frac{m\pi\phi}{\beta}\right) \times \quad (3.29)$$

$$\left\{ K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) \left[\Psi_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) - \Psi_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a}) \right] + I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) \left[\Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\infty) - \Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) \right] - \frac{I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a})}{K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a})} K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) \left[\Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\infty) - \Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a}) \right] \right\}$$

$$j_{M\phi} = -\frac{c}{\lambda} H \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi\phi}{\beta}\right) \frac{2\beta}{m\pi} \times \quad (3.30)$$

$$\left\{ K'_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) \left[\Psi_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) - \Psi_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a}) \right] + K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) \frac{\rho}{\lambda^2} + I'_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) \left[\Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\infty) - \Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) \right] + I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) \frac{\rho}{\lambda^2} - \frac{I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a})}{K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a})} K'_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) \left[\Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\infty) - \Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a}) \right] \right\}$$

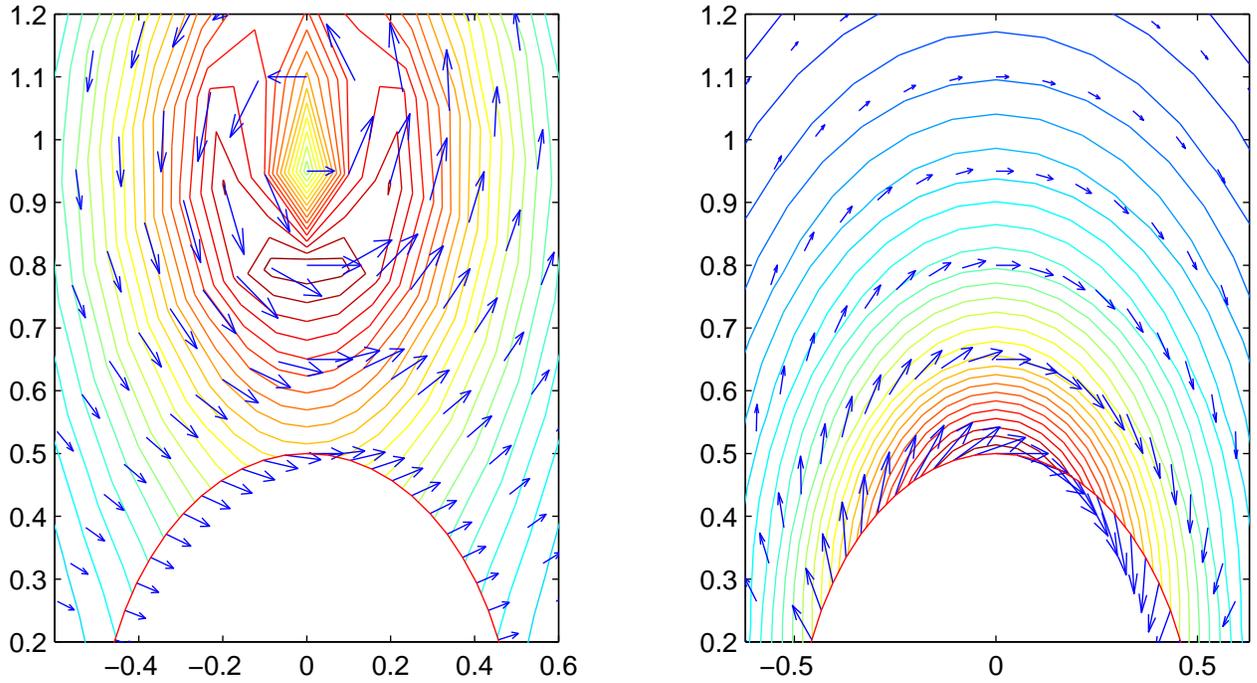


Figura 3.6: À esquerda nós temos o campo vetorial da densidade de corrente devido ao vórtice-antivórtice (Eqs. 3.25 e 3.26). Esta contribuição é devido ao termo h_1 . A direita nós temos o campo vetorial devido à indentação, (Eqs. 3.27 e 3.28). Esta contribuição é devido ao termo h_a . Os parâmetros utilizados foram $a = 0.5\lambda$, $\rho_i = \lambda$ e $\phi_i = \frac{\pi}{2}$.

Os termos que envolvem derivadas de funções de Bessel podem ser determinados a partir da seguinte identidade,

$$I'_\nu(x) = \frac{I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x)}{2} \quad (3.31)$$

$$K'_\nu(x) = -\frac{K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x)}{2} \quad (3.32)$$

3.4 Aproximações

Nesta seção, obteremos o campo magnético em casos limites, de modo a expressar as equações para o campo Meissner e o auto-campo de forma compacta. Consideremos inicialmente o caso em que $a \gg \lambda$. Dessa forma criamos uma situação onde é possível utilizar a expansão assintótica para as funções de Bessel.

$$K_m(\tilde{\rho}) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \exp(-x) \quad (3.33)$$

Como $\rho \geq a$, podemos expandir dois termos na expressão do auto-campo.

$$\frac{K_m(\tilde{\rho})}{K_m(\tilde{a})} \cong \sqrt{\frac{a}{\rho}} \exp(-\tilde{\rho} + \tilde{a}) \quad (3.34)$$

Substituindo a equação 3.34 na equação 3.13, podemos simplificar o terceiro termo da expressão para o auto-campo, h_a , com ajuda da identidade 3.9 e reescrevê-lo como:

$$\begin{aligned} \frac{2\phi_0}{\pi\lambda^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(m\phi) \sin(m\phi_i) \frac{I_m(\tilde{a})}{K_m(\tilde{a})} K_m(\tilde{\rho}) K_m(\tilde{\rho}_i) \cong \\ \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \exp(-\tilde{\rho} + \tilde{a}) \left[K_0(|\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i|) - K_0(|\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i^*|) \right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

obtendo então o campo magnético inhomogêneo¹,

$$\begin{aligned} h_{auto}(\rho, \phi) \cong \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} \sum_{i=1}^N \left\{ K_0(|\tilde{\boldsymbol{\rho}} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i|) - K_0(|\tilde{\boldsymbol{\rho}} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i^*|) \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{a}{\rho}} \exp(-\tilde{\rho} + \tilde{a}) \sum_{i=1}^N \left[K_0(|\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i|) - K_0(|\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i^*|) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$f_{\rho, a \gg \lambda} = \sqrt{\frac{a}{\rho}} \exp(-\tilde{\rho} + \tilde{a}) \quad (3.37)$$

$$|\boldsymbol{\rho}_i^* - \mathbf{a}|^2 = \rho_i^2 + a^2 - 2\rho_i a \cos(\phi + \phi_i) \quad (3.38)$$

$$|\boldsymbol{\rho}_i - \mathbf{a}|^2 = \rho_i^2 + a^2 - 2\rho_i a \cos(\phi - \phi_i) \quad (3.39)$$

Na figura 3.7 representamos o campo magnético especificado pela equação 3.36.

Para segundo caso limite, assumimos que $\rho \ll \lambda$, o que implica $a \ll \lambda$, pois a é sempre menor do que ρ . Esse regime de validade é restrito a uma região próxima indentação, em materiais em que o comprimento de penetração de London é muito maior do que o raio da indentação. Fazendo o mesmo procedimento anterior, obtemos então:

$$K_m(\tilde{\rho}) \cong \ln\left(\frac{2\lambda}{\eta\rho}\right); \quad \eta = e^\gamma \quad (3.40)$$

Onde γ é a constante de Euler com valor de aproximado 0.5772156649.

¹O termo inhomogêneo surge do fato que a equação diferencial de London possui um termo referente a presença de vórtices. A solução para o caso sem vórtices é denominado de homogêneo.

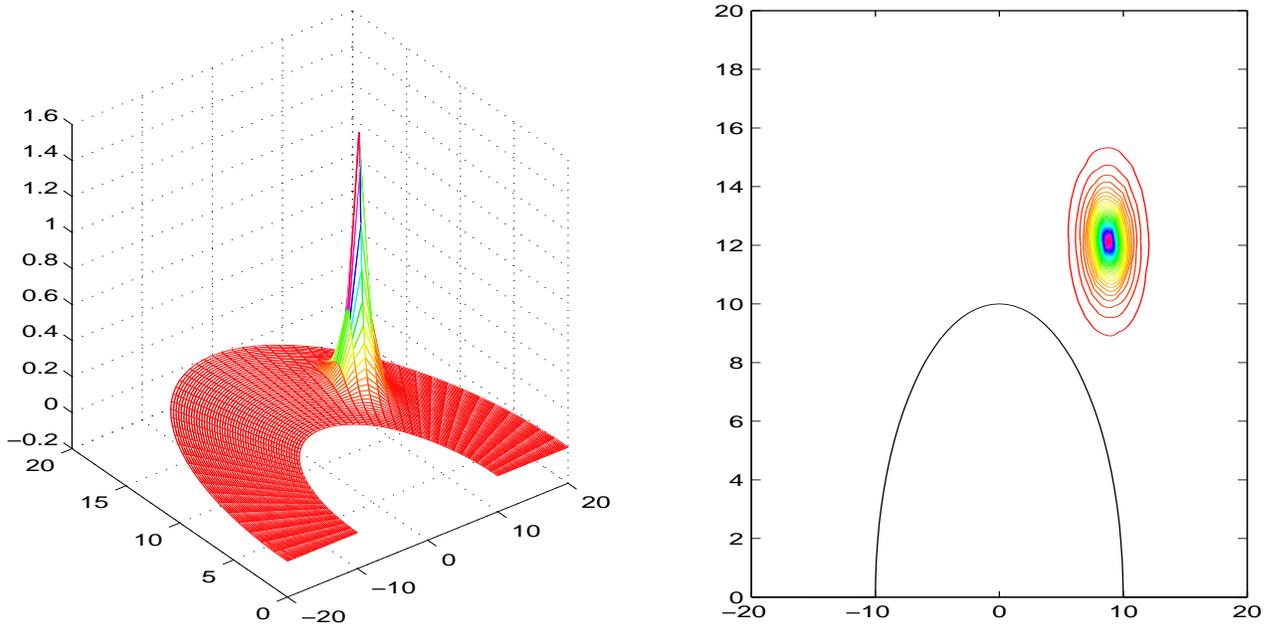


Figura 3.7: Auto-campo magnético em um supercondutor semi-infinito com uma indentação na superfície contendo um vórtice no interior no regime em que $\lambda \ll a$. À esquerda nós temos o auto-campo encontrado pelas equações 3.36 e à direita suas curvas de nível. Os parâmetros utilizados foram : $N = 1$, $a = 10\lambda$ e $\beta = \pi$.

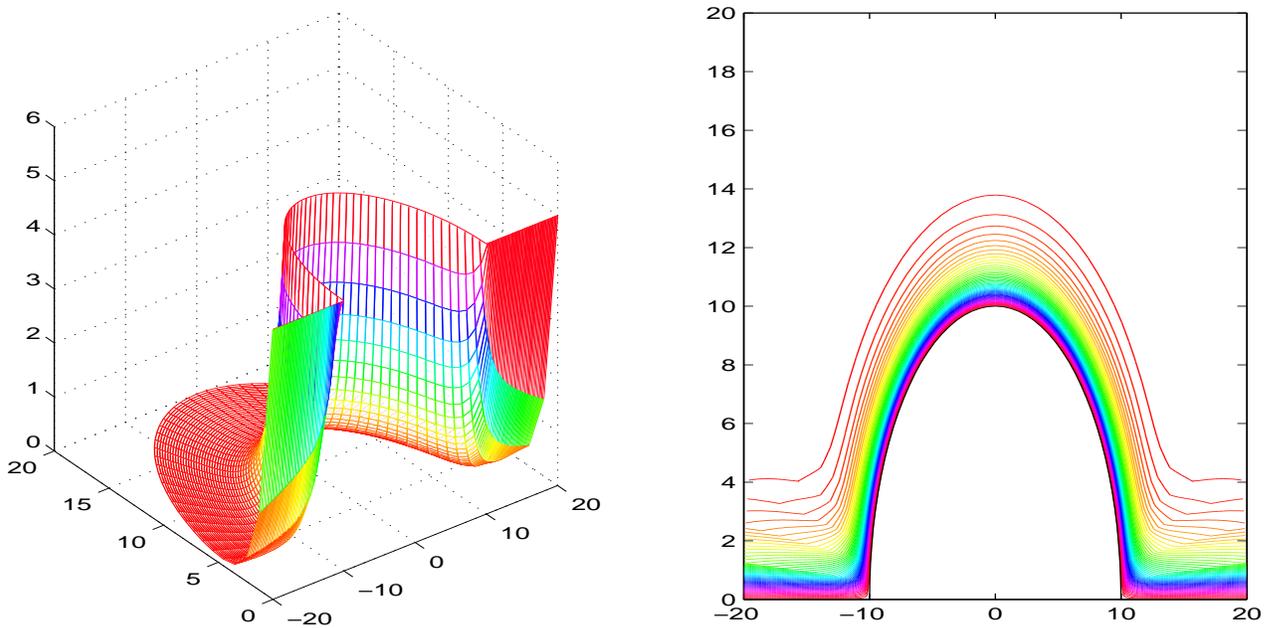


Figura 3.8: Campo Meissner de um supercondutor semi-infinito com uma indentação na presença de uma campo externo paralelo à superfície, no regime em que $\lambda \ll a$. Na esquerda temos o campo encontrado pela equação 3.46 e à direita suas curvas de nível. Os parâmetros utilizados foram : $N = 1$, $a = 10\lambda$, $\beta = \pi$ e $H = 5\frac{\phi_0}{\lambda^2}$.

O campo neste regime de aproximação é, então, obtido.

$$h_{auto}(\rho, \phi) \cong \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} \sum_{i=1}^N \left\{ K_0(|\tilde{\rho} - \tilde{\rho}_i|) - K_0(|\tilde{\rho} - \tilde{\rho}_i^*|) \right. \\ \left. - f_{\rho, a \ll \lambda} \left[K_0(|\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\rho}_i|) - K_0(|\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\rho}_i^*|) \right] \right\} \quad (3.41)$$

$$f_{\rho, a \ll \lambda} = \frac{\ln\left(\frac{2}{\eta\tilde{\rho}}\right)}{\ln\left(\frac{2}{\eta\tilde{a}}\right)} \quad (3.42)$$

onde o gráfico do campo magnético especificado pela equação 3.41 está apresentado na figura 3.9. A função f é determinada para cada situação de interesse a partir da expansão assintótica para a função de Bessel. Podemos então considerar as duas situações de interesse e obter:

$$f = \begin{cases} \ln\left(\frac{2}{\eta\tilde{\rho}}\right) / \ln\left(\frac{2}{\eta\tilde{a}}\right) & \text{se } \lambda \gg \rho, a \\ \sqrt{\frac{\tilde{a}}{\tilde{\rho}}} \exp(-\tilde{\rho} + \tilde{a}) & \text{se } \lambda \ll \rho, a \end{cases} \quad (3.43)$$

O significado físico da função f é justamente a distribuição de cargas imagens e tem o efeito de blindar a atuação do campo em torno da indentação com um potencial tipo Yukawa a distâncias maiores do que o comprimento de penetração, ou seja, no interior do material. O campo magnético inhomogêneo é então determinado dentro da validade das funções f ,

$$h_{auto}(\rho, \phi) \cong \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} \sum_{i=1}^N \left\{ K_0(|\tilde{\rho} - \tilde{\rho}_i|) - K_0(|\tilde{\rho} - \tilde{\rho}_i^*|) \right. \\ \left. - f(\rho) \left[K_0(|\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\rho}_i|) - K_0(|\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\rho}_i^*|) \right] \right\} \quad (3.44)$$

Com a utilização desse tratamento, obtemos uma expressão que satisfaz as condições de contorno imposta no problema. O campo Meissner é determinado pela seguinte expressão:

$$h_M(\boldsymbol{\rho}) = \int_0^\pi \int_0^\infty h_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \rho' d\rho' d\phi' - f(\rho) \int_0^\pi \int_0^\infty h_1(\mathbf{a}, \boldsymbol{\rho}') \rho' d\rho' d\phi' \\ - \int_0^a \int_0^\pi [h_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') + f(\rho) h_1(\mathbf{a}, \boldsymbol{\rho}')] \rho' d\rho' d\phi', \quad (3.45)$$

obtendo por fim a expressão final para o campo Meissner,

$$h_M(\boldsymbol{\rho}) = H e^{-\tilde{y}} - H f(\rho) [e^{-\tilde{a} \sin \phi} - 1]. \quad (3.46)$$

onde $\tilde{y} = y/\lambda = \rho/\lambda \sin(\phi)$. O gráfico para h_M no caso em que $\lambda \ll a$ encontra-se na figura 3.8 e no caso em que $\lambda \gg a$ encontra-se na figura 3.10.

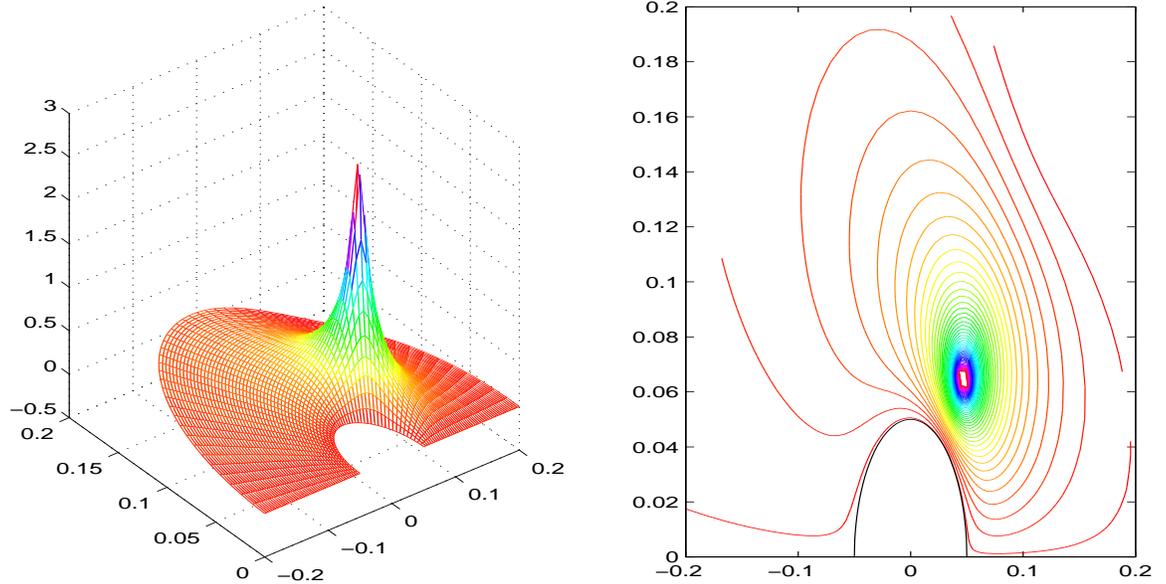


Figura 3.9: Auto-campo magnético em um supercondutor com uma indentação na superfície contendo um vórtice no interior no regime em que $\lambda \gg a$. À esquerda nós temos o auto-campo (3.44) e à direita suas curvas de nível. Os parâmetros utilizados foram : $N = 1$, $a = 0,05\lambda$, $\beta=\pi$ e $\xi = 0,1\lambda$.

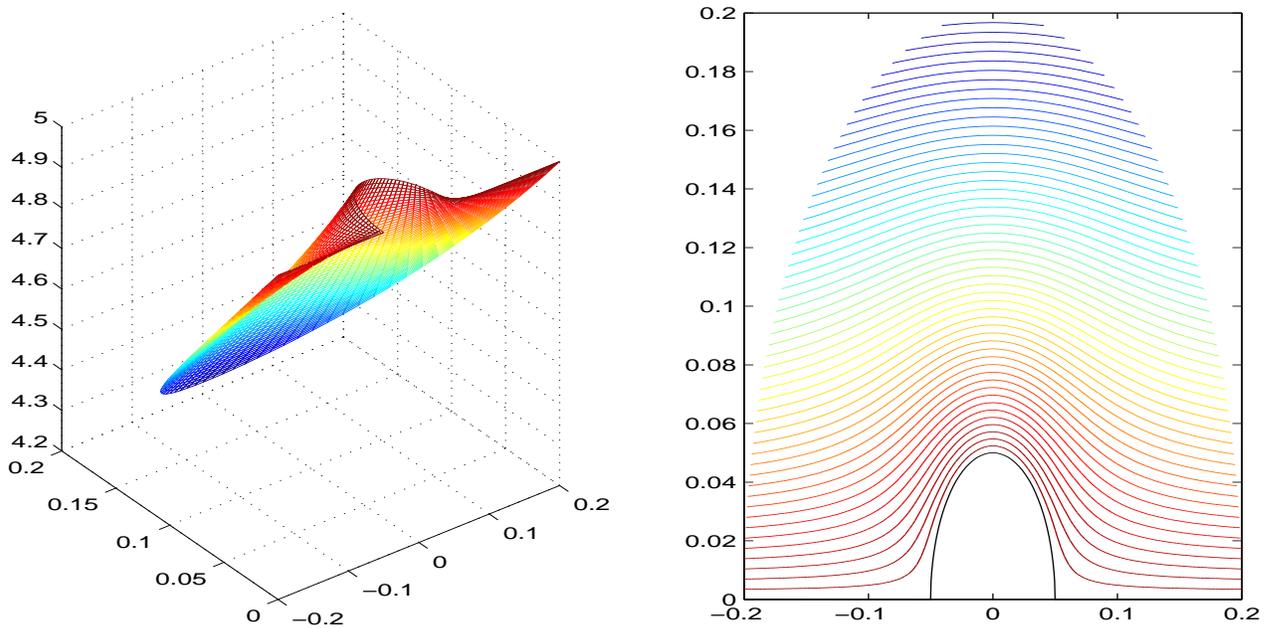


Figura 3.10: Campo Meissner de um supercondutor semi-infinito com uma indentação na presença de uma campo externo paralelo a superfície, no regime em que $\lambda \gg a$. À esquerda temos o campo obtido pela equação 3.46 e à direita suas curvas de nível. Os parâmetros utilizados foram : $N = 1$, $a = 0,05\lambda$, $\beta=\pi$ e $H = 5\frac{\phi_0}{\lambda^2}$.

3.5 Energia livre

A energia livre possui duas contribuições [53]: uma devido à energia magnética associada ao campo local no interior do supercondutor, e outra associada com a energia cinética dos elétrons supercondutores. Desta forma, temos que:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{8\pi} \int [h^2 + |\nabla \times \mathbf{h}|^2] d^3r \quad (3.47)$$

Como estaremos interessados em obter as configurações de equilíbrio para um sistema de vórtices, a energia livre de Helmholtz não é apropriada, já que considera o campo externo uma constante. Consideramos então a energia livre de Gibbs.

$$\mathcal{G} = \frac{1}{8\pi} \int [h^2 + |\nabla \times \mathbf{h}|^2] d^3r - \frac{H}{4\pi} \int h d^3r \quad (3.48)$$

Utilizando a equação de London (3.1) e algumas identidades geométricas, obtemos a seguinte expressão [19, 22, 52, 53]:

$$\mathcal{G} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \oint_c \left(\frac{\mathbf{h}}{2} - \mathbf{H} \right) \times (\nabla \times \mathbf{h}) \cdot d\mathbf{a} + \sum_{i=1}^N \int h(\boldsymbol{\rho}) \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_i) d\mathbf{a} \quad (3.49)$$

A região de integração consiste de toda a interface delimitadora do supercondutor. Desenvolvendo ainda mais a expressão acima, chegamos ao seguinte resultado para supercondutores fortemente tipo-II.

$$\mathcal{G} = \frac{\Phi_0}{8\pi} [h_{auto}(\boldsymbol{\rho}_i) + 2h_M(\boldsymbol{\rho}_i) - 2H] + \frac{H^2 \lambda^2}{8\pi} \quad (3.50)$$

3.6 Energia a campo externo nulo

A energia livre de Helmholtz é determinada pela expressão:

$$\mathcal{F} = \frac{\phi_0}{8\pi} \sum_{i=1}^N h(\rho_i, \phi_i) \quad (3.51)$$

substituindo a equação 3.44 na equação acima, temos:

$$\mathcal{F} \cong \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \sum_{i,j} \left\{ K_0(|\tilde{\boldsymbol{\rho}}_j - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i|) - K_0(|\tilde{\boldsymbol{\rho}}_j - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i^*|) - f(\rho_i) [K_0(|\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i|) - K_0(|\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i^*|)] \right\} \quad (3.52)$$

Utilizando o comprimento de coerência ξ conforme a equação 3.17, obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \cong & N \frac{\phi_0}{4\pi} H_{c1} - \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \sum_{i=1}^N K_0(2\tilde{y}_i) \\
& + \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \sum_{i \neq j}^N [K_0(|\tilde{\rho}_j - \tilde{\rho}_i|) - K_0(|\tilde{\rho}_j - \tilde{\rho}_i^*|)] \\
& - \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \sum_{i=1}^N f(\rho_i) [K_0(\tilde{\rho}_i - \tilde{a}) - K_0(|\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\rho}_i^*|)] \tag{3.53}
\end{aligned}$$

Onde $|\mathbf{a} - \rho_i^*| = \sqrt{\rho_i^2 + a^2 - 2\rho_i a \cos 2\phi_i}$ e $y_i = \rho_i \sin \phi_i$. O termo f_j é definido pelo conjunto de equações 3.43 e o termo H_{c1} é o campo crítico inferior [19], é dado por:

$$H_{c1} = \frac{\phi_0}{4\pi\lambda^2} \ln \left(\frac{\lambda}{\xi} \right). \tag{3.54}$$

3.7 Energia a campo aplicado

Considerado apenas a energia Meissner, $\mathcal{G}_M = \mathcal{G}(H) - \mathcal{G}(0)$, nós temos:

$$\mathcal{G}_M = \frac{\phi_0 H}{8\pi} \sum_{i=1}^N [e^{-\tilde{y}_i} - H f(\rho_i) (e^{-\tilde{a} \sin \phi_i} - 1)] - \frac{H}{8\pi} [B + N\phi_0] \tag{3.55}$$

A energia é então:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} \cong & N \frac{\phi_0}{4\pi} H_{c1} - \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \sum_{i=1}^N K_0(2\tilde{y}_i) \\
& + \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \sum_{i \neq j}^N [K_0(|\tilde{\rho}_j - \tilde{\rho}_i|) - K_0(|\tilde{\rho}_j - \tilde{\rho}_i^*|)] \\
& - \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \sum_{i=1}^N f(\rho_i) [K_0(\tilde{\rho}_i - \tilde{a}) - K_0(|\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\rho}_i^*|)] \\
& + \frac{\phi_0 H}{8\pi} \sum_{i=1}^N [e^{-\tilde{y}_i} - f(\rho_i) (e^{-\tilde{a} \sin \phi_i} - 1)] \\
& - \frac{H}{8\pi} [B + N\phi_0] \tag{3.56}
\end{aligned}$$

Se considerarmos um único vórtice, a expressão acima torna-se:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} \cong & \frac{\phi_0}{4\pi} H_{c1} - \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 K_0(2\tilde{y}_1) \\
& - \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 f(\rho_1) [K_0(\tilde{\rho}_1 - \tilde{a}) - K_0(|\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\rho}_1|)] \\
& + \frac{\phi_0 H}{8\pi} [e^{-\tilde{y}_1} - f(\rho_1) (e^{-\tilde{a} \sin(\phi_1)} - 1)] \\
& - \frac{H}{8\pi} [B + \phi_0]
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Na figura 3.11 representamos a dependência da energia livre (3.57) em relação a posição

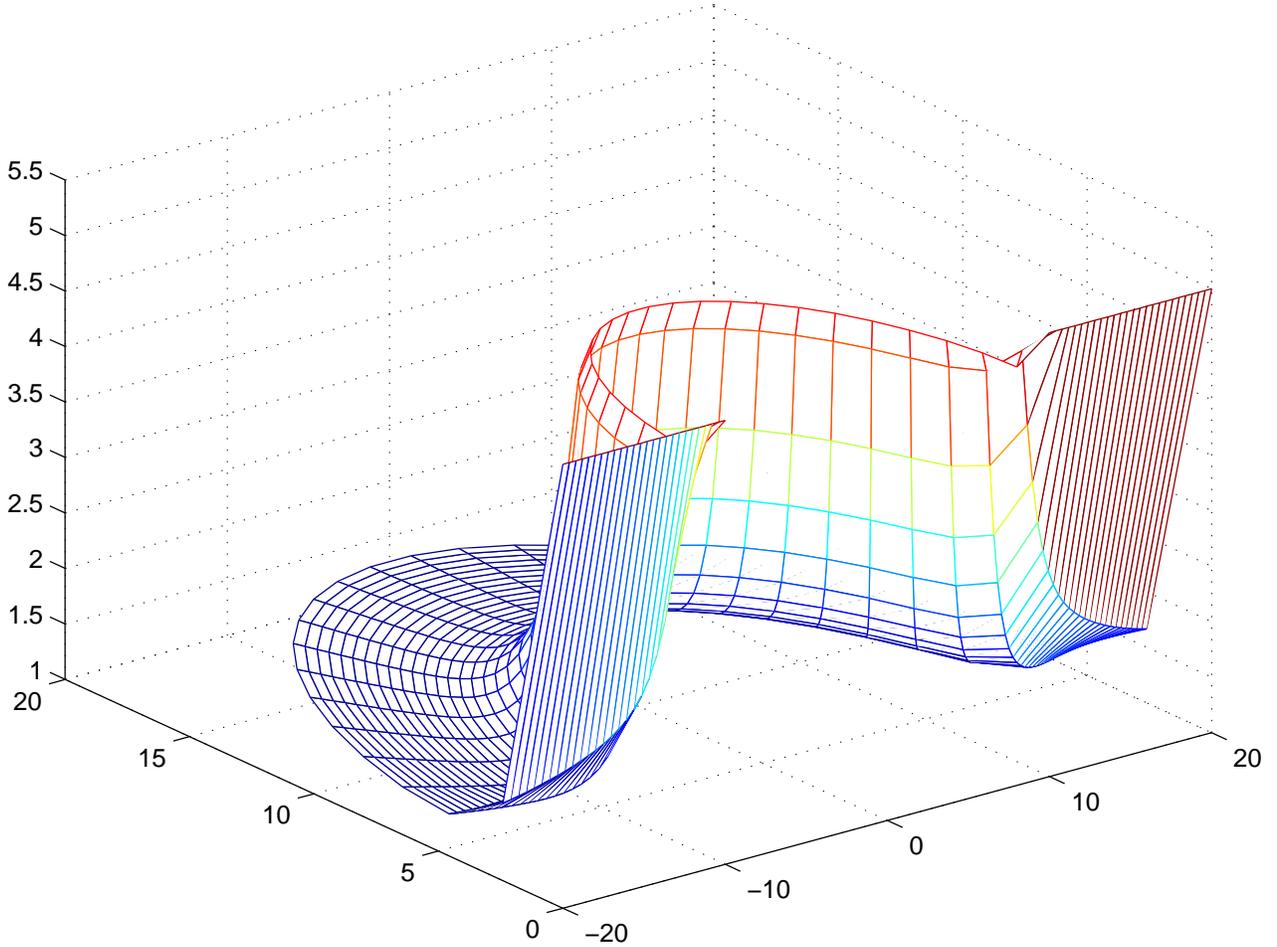


Figura 3.11: Energia livre de um supercondutor semi-infinito com uma indentação em função da posição de um vórtice no interior do meio. O material encontra-se no estado misto do supercondutores tipo-II. Os parâmetros utilizados foram: $N = 1$, $a = 0.5\lambda$, $\beta = \pi$ e $H = 5 \frac{\phi_0}{\lambda^2}$.

que um vórtice no interior do meio supercondutor. Podemos verificar o comportamento monotônico da energia em relação as variáveis ρ e ϕ .

3.8 Campo crítico H_{c1}

O campo crítico inferior H_{c1} separa o estado Meissner do estado misto. O estado Meissner para valores abaixo de H_{c1} e o estado misto para valores acima. O campo crítico inferior corresponde ao valor de campo externo necessário para tornar a energia livre de Gibbs contínua entres os dois estados, quando o estado intermediário possui apenas um vórtice na posição de menor energia. No caso de supercondutores semi-infinitos, a interação do vórtice com o campo externo produz uma força, a força Meissner, atuando sobre o vórtice de forma a impulsioná-lo para o interior do material. Com a entrada do vórtice para o interior do meio, o único termo na expressão da energia (3.56) que não se anula é a energia de cada linha de vórtice, $\mathcal{J} = \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda}\right) \frac{\phi_0}{4\pi} \mathcal{J}_0$. Esse resultado se deve ao fato do mínimo da energia encontrar-se em y_1 com $\lim y_1 \rightarrow \infty$. Este resultado é bastante geral. Todo supercondutor não confinado gera uma distribuição de vórtices que minimiza a energia livre. O campo crítico inferior é uma grandeza de caráter global, não sendo modificado por fatores locais como interfaces normal-supercondutor ou vácuo-supercondutor.

3.9 Força

A força que atua sobre um vórtice está associada com a energia de interação entre o seu vórtice imagem e com o campo externo. Definimos então a força de seguinte maneira:

$$\mathbf{F} = -\nabla\mathcal{G} \quad (3.58)$$

Esta expressão pode ser generalizada para a presença de N vórtices, onde passamos a considerar a energia de interação repulsiva entre os $N - 1$ vórtices no material.

$$\mathbf{F}_1 = -\nabla_1\mathcal{G} \quad (3.59)$$

Quando consideramos apenas $N = 1$, estamos tratando da auto-força, força que atua entre o vórtice e suas imagens². A auto-força pode ser tratada sem o regime de aproximação, mas a força Meissner precisa ser tratada no regime de aproximação para obtermos uma expressões analítica, do contrário é necessário o emprego do cálculo numérico. A auto-força é obtida

²Apenas nos casos de extrema simetria como em esferas, cilindros ou planos infinitos é possível associar um único vórtice imagem a um vórtice dentro de um meio supercondutor. Podemos fazer um paralelo com as cargas elétricas e suas cargas imagens dentro de um meio condutor. Veja [28, 30] para maiores detalhes.

aplicando a expressão 3.59 à energia obtida na equação 3.51.

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{F}_{auto}}{\frac{\phi_0}{2\pi\lambda^3}} &= -K_1(2\tilde{y}_1)\hat{y} \\ &+ \frac{4}{\tilde{\rho}} \sum_{m=1}^{\infty} mc_m K_m(\tilde{\rho}_i) \sin 2m\phi_i \hat{\phi} \\ &- 4 \sum_{m=1}^{\infty} c_m [K_{m+a}(\tilde{\rho}_i) + K_{m+1}(\tilde{\rho}_i)] \sin^2 m\phi_i \hat{\rho} \end{aligned} \quad (3.60)$$

com $c_m = I_m(\tilde{a})K_m(\tilde{\rho})/K_m(\tilde{a})$.

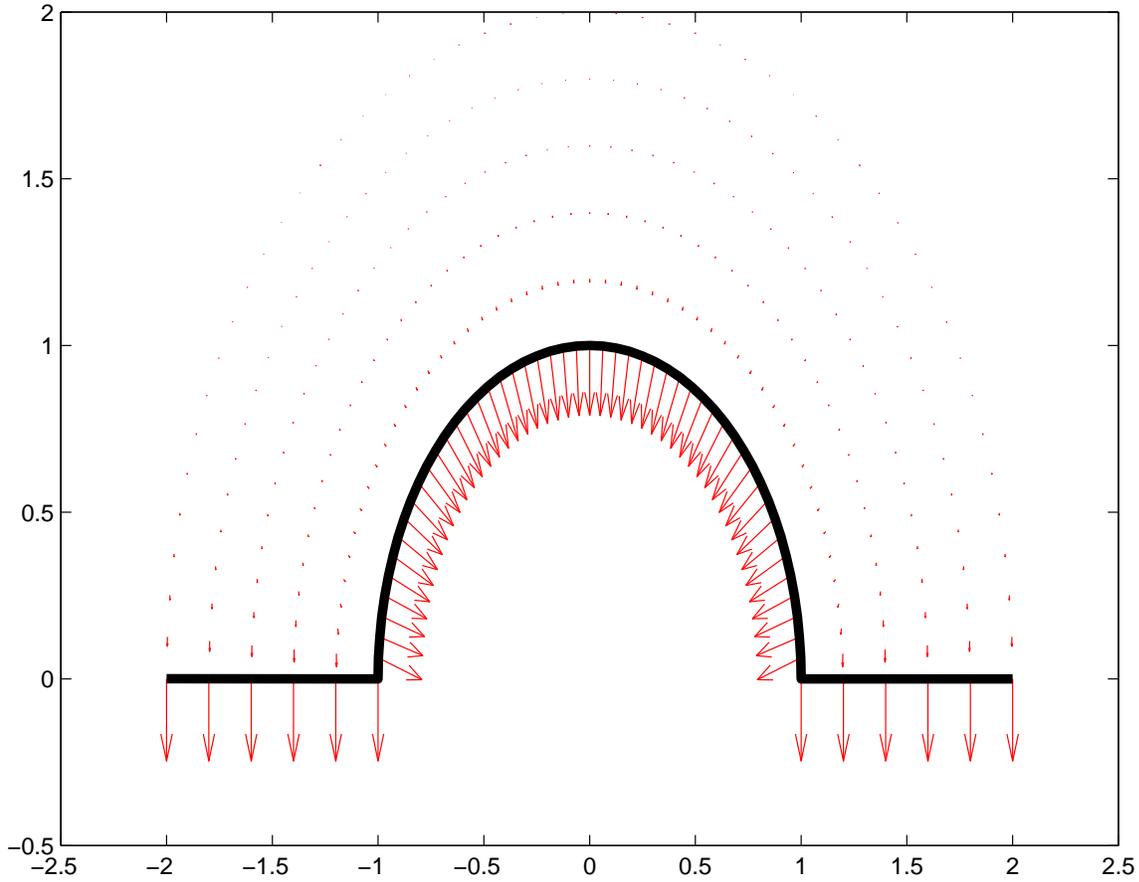


Figura 3.12: Força sofrida por um vórtice devido à interação atrativa com as suas imagens na ausência de campo externo. Os vetores representam a força descrita na equação 3.60. Os parâmetros envolvidos foram: $a = \lambda$, e $\xi = \lambda/60$

Na figura 3.12 temos o campo vetorial que representa a auto força 3.60. Observamos que o campo vetorial da figura 3.12 está sempre apontando em um direção normal à superfície, de forma a expulsar o vórtice do meio supercondutor. Com a utilização dos regimes de aproximação, podemos expressar o campo Meissner em termos de funções elementares e obter

uma expressão para a força Meissner de forma algébrica. Aplicando equação 3.59 a componente h_M obtem-se a força em questão.

$$\begin{aligned}
F_{1\rho} = & - \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \frac{2}{\lambda} K_1(2\tilde{y}_1) \sin \phi_1 \\
& + \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 f'(\rho_1) [K_0(\tilde{\rho}_1 - \tilde{a}) - K_0(|\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_1^*|)] \\
& + \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \frac{f(\rho_1)}{\lambda} \left[K_1(\tilde{\rho}_1 - \tilde{a}) - K_1(|\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_1^*|) \frac{\rho_1 - a \cos 2\phi_1}{|\mathbf{a} - \boldsymbol{\rho}_1^*|} \right] \\
& + \frac{\phi_0 H}{8\pi} [\lambda^{-1} \sin \phi e^{-\tilde{y}_1} + f'(\rho_1) e^{-\tilde{a} \sin \phi_1} - f'(\rho_1)]
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}
F_{1\phi} = & - \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \frac{2}{\lambda} K_1(2\tilde{y}_1) \cos \phi_1 \\
& + \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \frac{2}{\lambda} f(\rho_1) K_1(|\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_1^*|) \frac{a \sin 2\phi_1}{|\mathbf{a} - \boldsymbol{\rho}_1^*|} \\
& + \frac{\phi_0 H}{8\pi\lambda} \left[\cos \phi_1 e^{-\tilde{y}_1} - f(\rho_1) \frac{a}{\rho_1} \cos \phi_1 e^{-\tilde{a} \sin \phi_1} \right]
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Onde o termo $f'(\rho)$ assume os seguintes valores:

$$f' = \begin{cases} \frac{-1}{\ln\left(\frac{2\lambda}{\eta a}\right)\rho} & \text{se } \lambda \gg \rho, a \\ -\sqrt{\frac{a}{\rho}} \frac{1}{\lambda} e^{-\tilde{\rho} + \tilde{a}} \left(1 + \frac{1}{2\rho}\right) & \text{se } \lambda \ll \rho, a \end{cases} \tag{3.63}$$

Na superfície do supercondutor (região em negrito nas figuras 3.12 e 3.13), a componente da força é normal à superfície atuando sobre um vórtice dentro do meio de forma a impulsioná-lo para o interior. As equações 3.61 e 3.62 correspondem à força total sofrida por um vórtice nos regimes de aproximação. O campo vetorial produzido pela força Meissner está descrito na figura 3.13.

3.10 Campo de entrada

Mesmo estando com um campo aplicado abaixo de H_{c1} é possível que vórtices comecem a penetrar no material supercondutor. Assim como também é possível observar que para campos acima de H_{c1} não ocorra entrada de vórtices. O agente responsável por facilitar ou dificultar a entrada de vórtices em materiais com interface paralela ao campo aplicado é campo de penetração. Em outras situações onde os vórtices são “injetados” no sistema com uma certa energia cinética podemos ter a barreira de Bean-Livingston [8, 59] como um agente importante

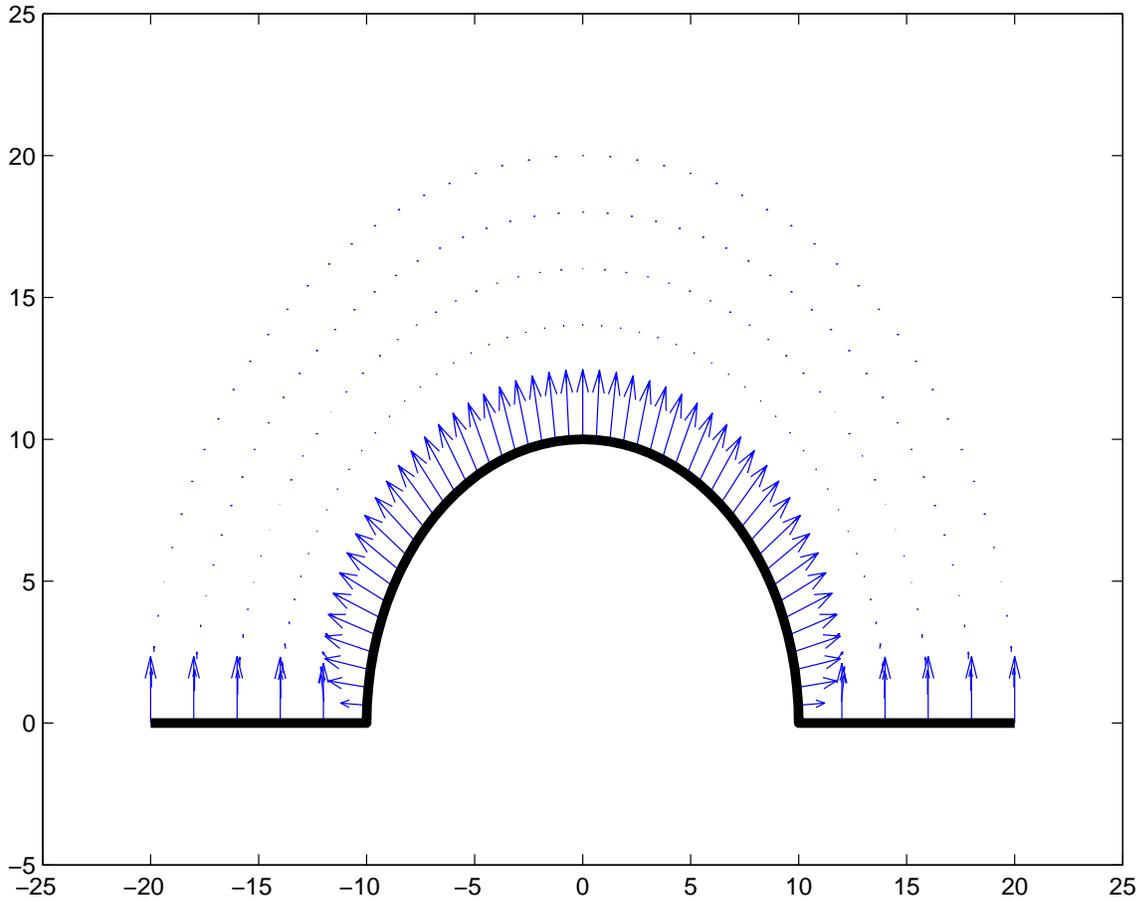


Figura 3.13: Força sofrida por um vórtice devido a presença do campo magnético externo em um supercondutor semi-infinito com uma indentação na superfície. As setas indicam que a força Meissner direciona os vórtices para o interior do material. Os parâmetros utilizados foram: $a = \lambda$, e $H = 5 \frac{\phi_0}{\lambda^2}$.

nos mecanismos de entrada dos vórtices. A barreira de Bean-Livingston surge do fato da energia Meissner ser negativa e a energia de interação é positiva, estabelecendo uma competição entre estas duas energias. Como estamos considerando vórtices com energia cinética nula, para que tenhamos a penetração de vórtices dentro do meio supercondutor precisamos que a força que atua sobre um determinado vórtice nas imediações da interface, seja positiva. Como os vórtices são constituídos de regiões de raio ξ onde o material não é supercondutor, a menor distância que podemos posicionar um vórtice próximo a superfície é a uma distância ξ [6, 7, 10, 19, 60, 61]. Com este procedimento, passamos a investigar qual o campo e em que posição, a uma distância ξ da superfície, a força que atua sobre um vórtice torna-se positiva. Quando a força torna-se positiva, a penetração de vórtices passa a ser privilegiada no balanço

de forças. A condição que precisa ser satisfeita é:

$$\vec{F} = -\nabla\mathcal{G}(\boldsymbol{\rho}_1) \Big|_{r_1=\xi} \geq 0, \quad (3.64)$$

onde a força é dada pelas equações 3.61 e 3.62.

$$\begin{aligned} H_{en} = & \frac{8\pi}{\phi_0} [\lambda^{-1} \sin \phi e^{-\xi/\lambda} + f'(a + \xi) e^{-\tilde{a} \sin \phi} - f'(a + \xi)]^{-1} \times \\ & \left\{ \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \frac{2}{\lambda} K_1 (2(\tilde{a} + \xi/\lambda) \sin(\phi)) \sin \phi \right. \\ & - \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 f'(a + \xi) \left[K_0 (\xi/\lambda) - K_0 (|\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}^*|) \Big|_{\rho=a+\xi} \right] \\ & \left. - \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \frac{f(a + \xi)}{\lambda} \left[K_1 (\xi/\lambda) - K_1 (|\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}^*|) \frac{\rho - a \cos 2\phi}{|\mathbf{a} - \boldsymbol{\rho}^*|} \right] \Big|_{\rho=a+\xi} \right\} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Esta expressão não impõe condições a variável ϕ . Para regiões muito longe da indentação, as equações se transformam no problema de uma interface plana. O nosso interesse é investigar a região em torno da indentação, de forma que as aproximações sejam úteis.

3.11 Resultados e discussões

Os vórtices em muitas situações [12, 13, 14] encontram os locais de mais fácil nucleação nas quinas de sistemas confinados e em defeitos topológicos dos sistemas em estudo. Tal situação é explicada porque a força Meissner tem maior intensidade em torno da interface separadora, agindo como termo determinante na penetração desses lugares. Mas dependendo da geometria considerada, a força Meissner pode agir não favoravelmente a entrada de vórtices em determinada posição, ou possuir uma componente tangente à superfície do material. No caso de uma interface lisa com uma indentação, a força Meissner é maior na região onde não há a indentação, favorecendo a entrada através da superfície lisa. Por outro lado a auto-força possui intensidade reduzida na região da indentação. Esse efeito se deve a dois fatores: *i*) na região em torno da indentação, a distância entre um vórtice prova e a sua imagem é maior do que em uma região próximo à superfície lisa. *ii*) O sentido da força devido a indentação que atua sobre um vórtice prova é oposto ao da interação vórtice-antivórtice. Esse resultado é facilmente entendido pois a energia de interação do vórtice com a indentação é

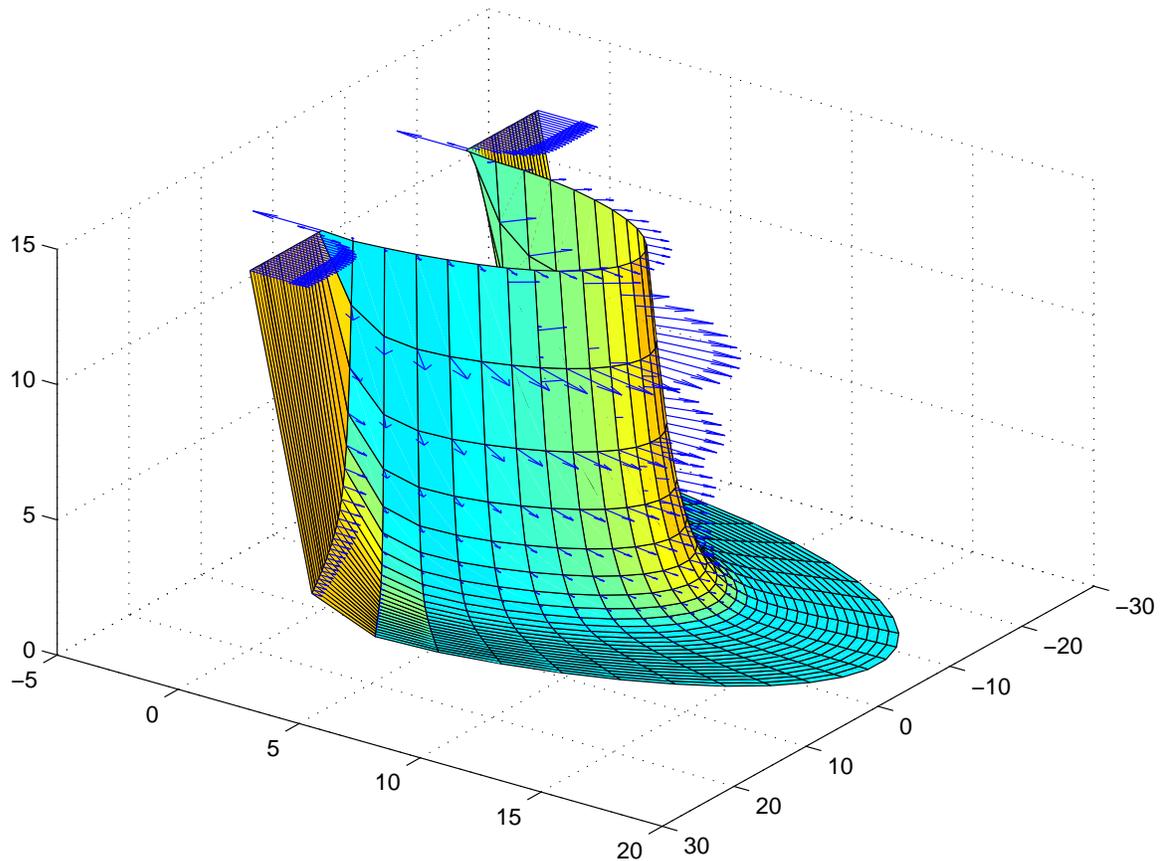


Figura 3.14: Força que atua sobre um vórtice dentro de um meio supercondutor semi-infinito com uma indentação na superfície. Os vetores da força sobre a superfície da energia após a força tornar-se positiva, ou seja, passar a atuar sobre um vórtice de forma a empurrá-lo para o interior do material. Os parâmetros envolvidos foram: $a = \lambda$ e $\xi = \lambda/60$

negativa, impondo assim uma interação atrativa. A força Meissner atua colocando os vórtices para dentro do material, como resultado de uma interação repulsiva com a superfície, e a auto-força, atuando para retirar os vórtices do interior do material, como resultado de uma interação atrativa com o anti-vórtice. A figura 3.10 mostra o campo vetorial da força (3.61 e 3.62) sobre a superfície de energia. Como a força Meissner se anula nas duas quinas, uma situação especial é criada já que a auto-força diferente de zero nestas duas posições. A presença da indentação produz uma região onde a saída de vórtices é facilitada.

Capítulo 4

Sistema confinado

Neste capítulo estudamos a resposta magnética de uma casca cilíndrica supercondutora, tipo-II, longa, de seção reta semicircular com uma indentação na superfície. Devido estarmos lidando com um material supercondutor confinado a uma região espacial, temos o rearranjo das cadeias de vórtices no interior do meio, provocando mudanças bruscas na energia livre de Gibbs (\mathcal{G}) para determinados valores do campo magnético externo *matching field*.

4.1 Introdução

Consideramos inicialmente um cilindro supercondutor, tipo-II, longo, com seção reta semicircular de raio interno a e raio externo b , na presença de um campo magnético aplicado coaxialmente conforme a figura 4.1. Existem muitas configurações semelhantes a esta na literatura [1, 20, 22, 52, 53, 54]. A escolha dessa configuração se deve ao fato de podermos escolher algumas situações de interesse. Em situações limite, podemos obter outros tipo de geometrias que não são cilíndricas como um quadrado, no limite que $\beta \ll 1$, $a \ll 1$ e $b - a \cong 0$. A função de Green apropriada para resolver a equação de London nessa geometria [veja o apêndice A para maiores detalhes], é:

$$G(\rho, \phi; \rho', \phi') = \frac{2}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi\phi}{\beta}\right) \sin\left(\frac{m\pi\phi'}{\beta}\right) \times \\ \left[I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_{<}) - \frac{I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a})}{K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a})} K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_{<}) \right] \left[-\frac{K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{b})}{I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{b})} I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_{>}) + K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_{>}) \right] \quad (4.1)$$

A notação $\rho_{<}$ e $\rho_{>}$ representa o menor e o maior entre ρ e ρ' respectivamente [30], e ρ está compreendido entre a e b . O auto campo h_{auto} definido em termos da função de Green encontrada é dado por:

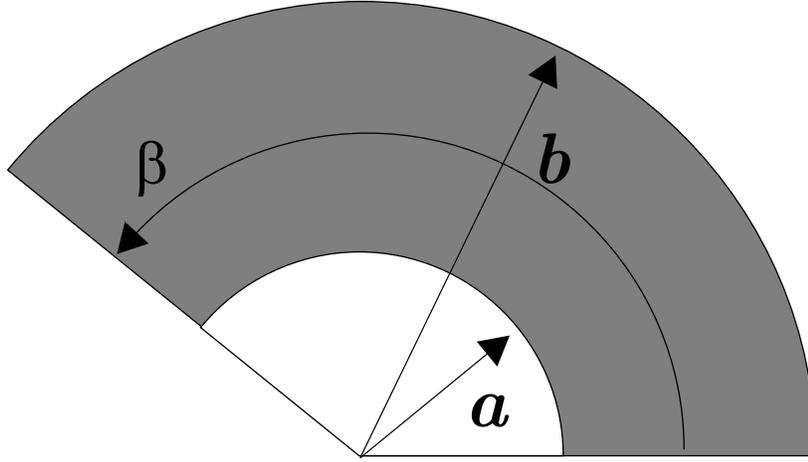


Figura 4.1: Sistema confinado. O supercondutor ocupa a região escura compreendida no intervalo $a \leq \rho \leq b$ e $0 \leq \phi \leq \beta$. a é o raio interno, b é o raio externo. O ângulo de corte β pode variar de zero até 2π . O campo H externo está paralelo ao eixo do cilindro na direção \hat{z} saindo na página.

$$h_{auto} = \frac{\phi_0}{\lambda^2} \sum_{i=1}^N G(\rho, \phi; \rho_i, \phi_i), \quad (4.2)$$

onde N é o número de vórtices no interior do meio. O campo fornecido pela equação 4.2 para o caso de $N = 5$ está ilustrado na figura 4.2. O Campo Meissner escrito como uma expressão integral da função de Green [ver detalhes no apêndice A] é:

$$h_M = H - \frac{H}{\lambda^2} \int_0^\beta d\phi' \int_a^b \rho' d\rho' G(\rho, \phi; \rho', \phi') \quad (4.3)$$

$$h_M = H - \frac{4}{\pi} H \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi\phi}{\beta}\right) \frac{1}{m} \times \left\{ \left[\Psi_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) - \Psi_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a}) - \alpha_m \Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) + \alpha_m \Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a}) \right] \left[-\gamma_m I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) + K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) \right] + \left[I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) - \alpha_m K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) \right] \left[-\gamma_m \Psi_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{b}) + \gamma_m \Psi_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) + \Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{b}) - \Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) \right] \right\}, \quad (4.4)$$

onde as constantes α_m e γ_m são dadas por:

$$\alpha_m = \frac{I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a})}{K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a})} \quad \text{e} \quad \gamma_m = \frac{K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{b})}{I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{b})}$$

e as funções auxiliares $\Omega_m(x)$ e $\Psi_m(x)$ são as mesmas definidas anteriormente:

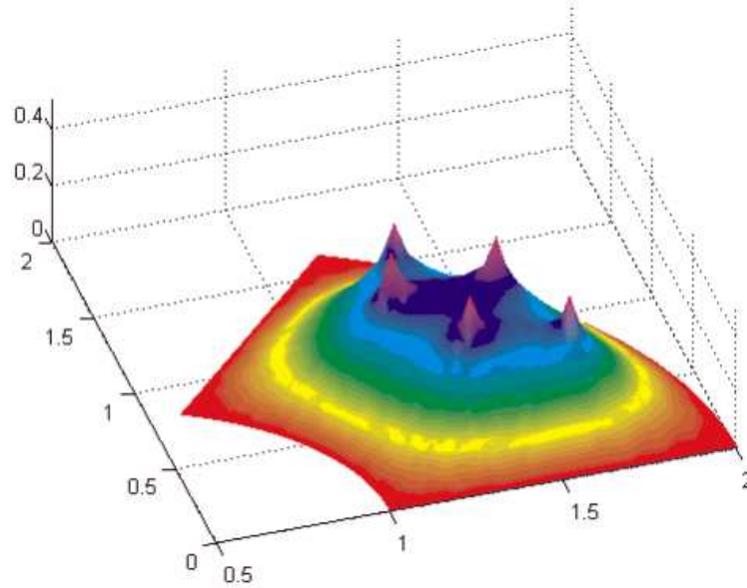


Figura 4.2: Auto-magnético no interior de um supercondutor tipo-II no estado misto contendo cinco vórtices no seu interior. Os parâmetros utilizados foram: $a = \lambda$, $b = 2\lambda$ e $\beta = 0.3\pi$. As cores indicam curvas equipotenciais.

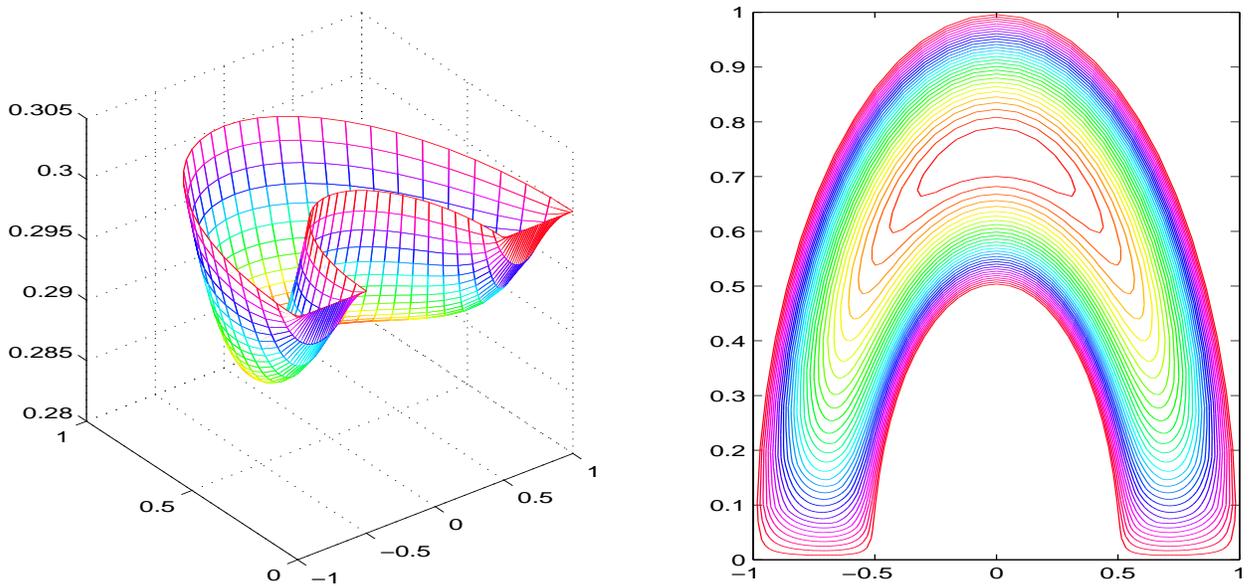


Figura 4.3: Campo Meissner de um supercondutor semi-infinito com uma indentação em um campo externo aplicado paralelamente à superfície do material. À esquerda temos o campo Meissner, h_M , e à direita sua curva de nível. Os parâmetros utilizados foram $a = 0.5\lambda$, $b = \lambda$ e $\beta = \pi$.

$$\Omega_m(y) = \int_1^y K_m(x) x dx \quad (4.5)$$

$$\Psi_m(y) = \int_1^y I_m(x) x dx \quad (4.6)$$

O campo Meissner (4.4) está ilustrado na figura 4.3.

4.2 Energia livre de Gibbs

A energia livre do sistema é definida por [19]:

$$\mathcal{G} = \frac{\phi_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} h(r_i) - H + \frac{1}{2} h_M(r_i) \right], \quad (4.7)$$

que pode ser reescrito em termos do auto-campo 4.2 e do campo Meissner 4.4 como:

$$\mathcal{G} = \frac{\phi_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} h_{auto}(r_i) - H + h_M(r_i) \right] \quad (4.8)$$

substituindo todos os termos, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = & \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \frac{\pi}{\beta} \sum_{j=i}^N \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi\phi_j}{\beta}\right) \sin\left(\frac{m\pi\phi_i}{\beta}\right) \times \\ & \left[I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_<) - \alpha_m K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_<) \right] \left[-\gamma_m I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_>) + K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_>) \right] \\ & - \left(\frac{\phi_0}{\lambda^2\pi^2} \right) H \sum_{i=1}^N \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi\phi_i}{\beta}\right) \frac{1}{m} \times \\ & \left\{ \left[\Psi_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_i) - \Psi_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a}) - \alpha_m \Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_i) + \alpha_m \Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a}) \right] \left[-\gamma_m I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_i) + K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_i) \right] + \right. \\ & \left. \left[I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_i) - \alpha_m K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_i) \right] \left[-\gamma_m \Psi_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{b}) + \gamma_m \Psi_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_i) + \Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{b}) - \Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_i) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Aqui, novamente, a notação $\rho_<$ e $\rho_>$ representa o menor e o maior entre ρ_i e ρ_j respectivamente. A expressão acima também pode ser obtida por superposição dos campos de vórtices e antivórtices isolados, de forma que a expansão acima divergirá sempre que $i = j$.

4.2.1 Sistema com um único vórtice

A energia livre para um único vórtice na presença de campo aplicado é:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} = & \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \frac{\pi}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \left(\frac{m\pi\phi_1}{\beta} \right)^2 \times \\
& \left[I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) - \alpha_m K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) \right] \left[-\gamma_m I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) + K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) \right] \\
& - \left(\frac{\phi_0}{\lambda^2\pi^2} \right) H \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sin \left(\frac{m\pi\phi_1}{\beta} \right) \frac{1}{m} \times \\
& \left\{ \left[\Psi_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) - \Psi_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a}) - \alpha_m \Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) + \alpha_m \Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a}) \right] \left[-\gamma_m I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) + K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) \right] + \right. \\
& \left. \left[I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) - \alpha_m K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) \right] \left[-\gamma_m \Psi_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{b}) + \gamma_m \Psi_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) + \Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{b}) - \Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

onde ρ_1 e ϕ_1 são as coordenadas do vórtice 1. Minimizando a energia \mathcal{G} em relação a posição do vórtice 1,

$$\left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \rho_1} \right|_{\tilde{\rho}_1 = \bar{\rho}_1} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \phi_1} \right|_{\tilde{\phi}_1 = \bar{\phi}_1} = 0 \tag{4.11}$$

juntamente com a condição para que o ponto $(\bar{\rho}_1, \bar{\phi}_1)$ não seja um ponto de sela [2], encontramos a posição de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_1 &= \frac{\beta}{2} \\
&e \\
\bar{\rho}_1 &= \frac{\tilde{a} + \tilde{b}}{2}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Essas coordenadas correspondem precisamente ao centro do material, local mais distante das bordas do sistema, minimizando os efeitos da corrente de blindagem.

4.2.2 Sistema com N vórtices

Quando o sistema possui dois ou mais vórtices, a energia livre pode ser escrita de forma a conter três termos: a auto-energia (\mathcal{G}_{auto}), a energia Meissner (\mathcal{G}_M) e a energia de interação (\mathcal{G}_{int}).

$$\mathcal{G} = \sum_{i=1}^N \mathcal{G}_{auto}(\rho_i) + \sum_{i=1}^N \mathcal{G}_M(\rho_i) + 2 \sum_{\substack{j < i \\ i=2}}^N \mathcal{G}_{int}(\rho_i, \rho_j) \tag{4.13}$$

onde $\boldsymbol{\rho}_i$ é a posição do vórtice i . A determinação das coordenadas $\boldsymbol{\rho}_i$ representa fundamental importância para determinar as prioridades de um sistema real. Através dessas posições estaremos determinando a energia de equilíbrio em função do campo externo aplicado, possibilitando determinar a resposta do sistema. O método utilizado para determinar essas posições está descrito na próxima seção.

4.3 Minimização da energia

Para minimizar a energia, utilizamos os seguintes métodos computacionais: Relaxação [26, 49] e *simulated annealing* [34, 43, 58]. O método da relaxação recebe este nome porque o algoritmo faz com que o sistema “caminhe” para o estado de menor energia, levando um certo tempo “caminhando”. A idéia principal do algoritmo é verificar os z primeiros vizinhos, para cada vórtice do sistema, de forma cíclica, até que nenhum vórtice mude de posição, alcançando sua posição final. A grande vantagem desse método é a velocidade com que o sistema atinge o estado final quando há poucos vórtices no sistema. As dificuldades para minimizar a energia surgem devido à energia de interação ter sido escrita numa matriz de 4-D. O tamanho do sistema acessível aos vórtices é uma matriz $M \times M$, com M entre 20 e 50. O tamanho do espaço de fase rapidamente alcança valores enormes, ultrapassando a capacidade física dos computadores. O espaço de fase da energia de interação é:

$$\mathbb{U} = M \times M \times M \times M = M^4 \quad (4.14)$$

Para $N > 7$ observamos que em algumas situações não foi possível encontrar o mínimo global pois a configuração final não era simétrica. O problema da configuração final está associado com a configuração inicial. O método da relaxação analisa cada vórtice individualmente e tenta minimizar a energia total em relação a sua posição. Em algumas situações é necessário mudar a posição de mais de um vórtice simultaneamente, como em uma translação ou uma rotação. Este tipo de procedimento não está contemplado no método. Na tentativa de solucionar esse problema, associamos um passo Monte-Carlo para estabelecer a configuração inicial a ser utilizada pela relaxação.

O outro tipo de abordagem que também utilizamos foi o *simulated annealing* [34, 49]. Esse método consiste em realizar passos Monte Carlo-Metropolis começando em uma tempera-

tura alta¹, acima da temperatura de derretimento² [10, 11], e ir baixando a temperatura até “congelarmos” o sistema na configuração de menor energia. Esse método é mais robusto do que o primeiro e não apresenta o problema discutido anteriormente. Por outro lado, esse método apresenta algumas desvantagens. A quantidade de passos Monte-Carlo é uniforme, dispendendo muito tempo para obter situações com poucos vórtices no sistema. O método da relaxação foi predominantemente empregado em nossas simulações computacionais. Para campos acima de H_{c1} , nós temos a entrada de vórtices no material. A posição que esses vórtices assumem corresponde à posição que minimiza a energia total \mathcal{G} a uma temperatura muito baixa. A energia de Boltzmann associada à temperatura inicial é da ordem da energia do sistema, estabelecendo dessa forma uma temperatura inicial acima da temperatura de derretimento² do sistema [10, 11], permitindo que todos os estados configuracionais estejam acessíveis ao sistema. O número de passos Monte Carlo empregado foi de 100.000 a 500.000, e o número de passos para cada temperatura constante foi de 5.000 e 10.000. A partir da curva de energia, podemos identificar os valores de campo que provocam mudanças configuracionais da posição dos vórtices [15, 54], o *matching field*.

A energia do sistema é definida de forma que na ausência de vórtices, o sistema possui energia nula. O termo proporcional à energia magnética do campo Meissner em toda a região ($\propto \alpha H^2$) é omitido. Esta suposição faz com que a energia do sistema apresente uma dependência linear com o campo externo. A medida que o campo magnético cresce, a energia do sistema torna-se mais negativa. A entrada de um vórtice adiciona três termos a energia, descritos na equação 4.13. A energia de interação, \mathcal{G}_{int} , que existe a partir do segundo vórtice com uma contribuição positiva, a auto energia, \mathcal{G}_{auto} , com uma contribuição positiva, e a energia Meissner, \mathcal{G}_M , com uma contribuição negativa. É justamente esta última contribuição a responsável por permitir a entrada de vórtices no sistema. Analisamos em detalhes o caso em que $\beta = 0.3\pi$, na figura 4.4 onde a curva para a energia livre \mathcal{G} está ilustrada. Essa curva foi obtida com o algoritmo da relaxação. A figura da direita representa uma derivada numérica da energia livre (\mathcal{G}'), mas precisamente, a diferença entre dois valores consecutivos. É por essa curva que determinamos a quantidade de vórtices no sistema. Cada valor constante representa um estado final específico. Mudanças provocadas por qualquer natureza que não sejam o aumento do campo magnético externo produzem valores diferentes de \mathcal{G}' . Podemos fazer uma análise da relação

¹É necessário começar com uma temperatura alta para que todos os estados do sistema possam estar acessíveis, não privilegiando alguma configuração ou “prendendo” o sistema em um estado meta-estável.

²Temperatura de derretimento é a temperatura capaz de fornecer energia térmica suficiente ao sistema para impedir que os vórtices do sistema formem uma estrutura organizada, ou uma rede.

entre o número de vórtices no sistema com o campo aplicado, ver figura 4.5. Observamos que os valores das bandas de campo para os quais o número de vórtices é constante não obedece a um padrão, $H(N) \times N$. O número de graus de liberdade do sistema cresce com o número de vórtices, criando novas barreiras energéticas. Quando a quantidade de vórtices no sistema for suficientemente grande ($E_N \gg E_1$), a energia não sofre grandes variações devido a entrada de um novo vórtice, estabelecendo um padrão bem definido para a região de campo cujo número de vórtices é constante. A análise da figura 4.5 fornece mais informação em relação ao comportamento do material mas também omite informação em relação a mudanças estruturais. Por exemplo, apresentamos duas situações na figura 4.6 onde não podemos fazer a distinção entre os estados apenas analisando o número de vórtices em determinado campo. A situação **A** e a situação **B** estão especificadas nas figuras 4.6(a) e 4.6(b) e as situações **C** e **D** estão ilustradas nas figuras 4.6(c) e 4.6(d).

Na figura 4.7 analisamos os efeitos da minimização da energia sobre o sistema com $\beta = 1.3\pi$. Na figura 4.7(a) obtivemos uma configuração estacionária com um campo externo com valor $1,23\phi_0/\lambda^2$. A quantidade de vórtices nessa situação é $N = 14$. Devido ao formato da energia Meissner, as regiões próximas a bordas são regiões menos favoráveis a possuir vórtices. Dessa forma, a formação das cadeias acontecem do centro para as extremidades do sistema. A medida que mais vórtices entram no sistema, temos a formação completa da cadeia. Na figura 4.7(b) obtivemos uma situação com a segunda cadeia já formada mas ainda não com a quantidade máxima de elementos. Na figura 4.7(c) essa quantidade é obtida e o sistema está no limite para começar uma nova cadeia, o valor do campo externo nessa situação é de $1,34\phi_0/\lambda^2$. Sempre que o campo magnético é incrementado, a simulação começa de uma configuração aleatória e minimiza a energia em relação a posição. O efeito da mudança no arranjo dos vórtices torna-se mais evidente a medida que o número N aumenta.

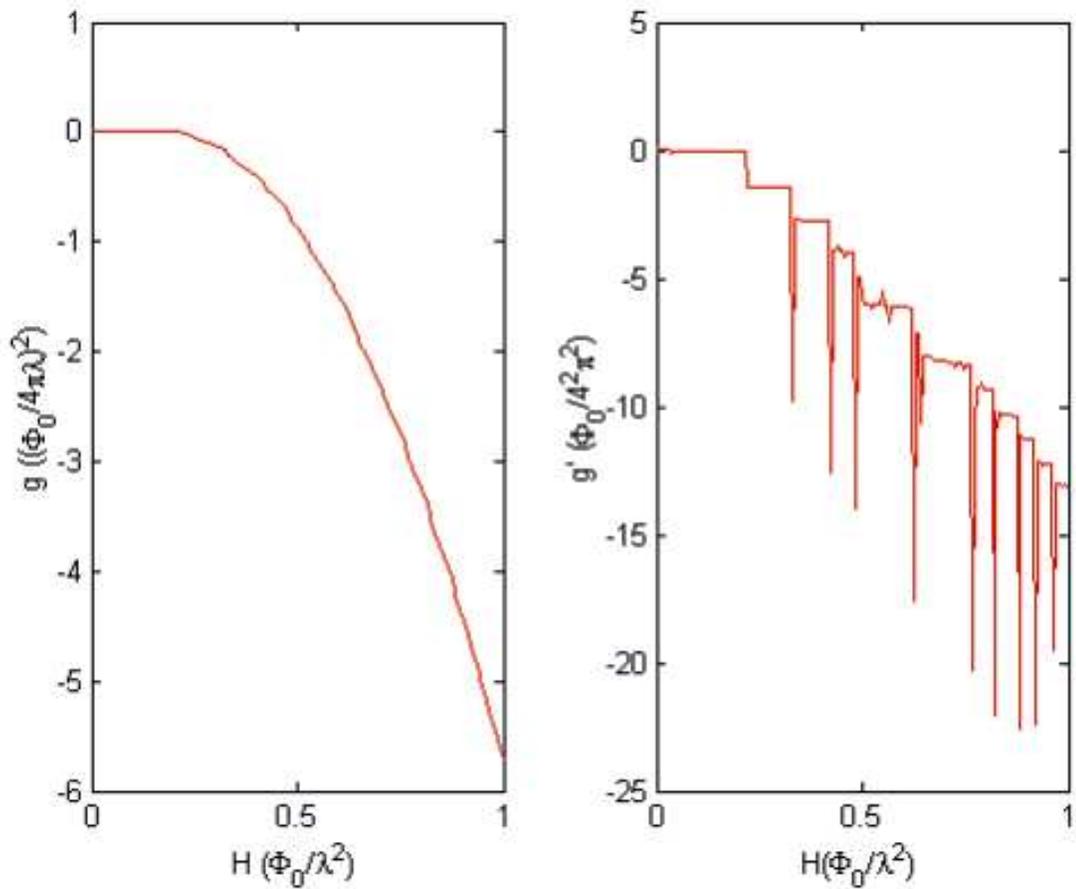


Figura 4.4: Energia de equilíbrio do sistema. Os parâmetros utilizados foram: $a = \lambda$, $b = 2\lambda$ e $\beta = 0.3\pi$. O campo H está variando de 0 até 1.1, com um incremento de 0.001. Estamos considerando apenas os termos associados ao sistema de vórtices: A energia de interação, a auto energia e a interação do campo externo com os vórtices.

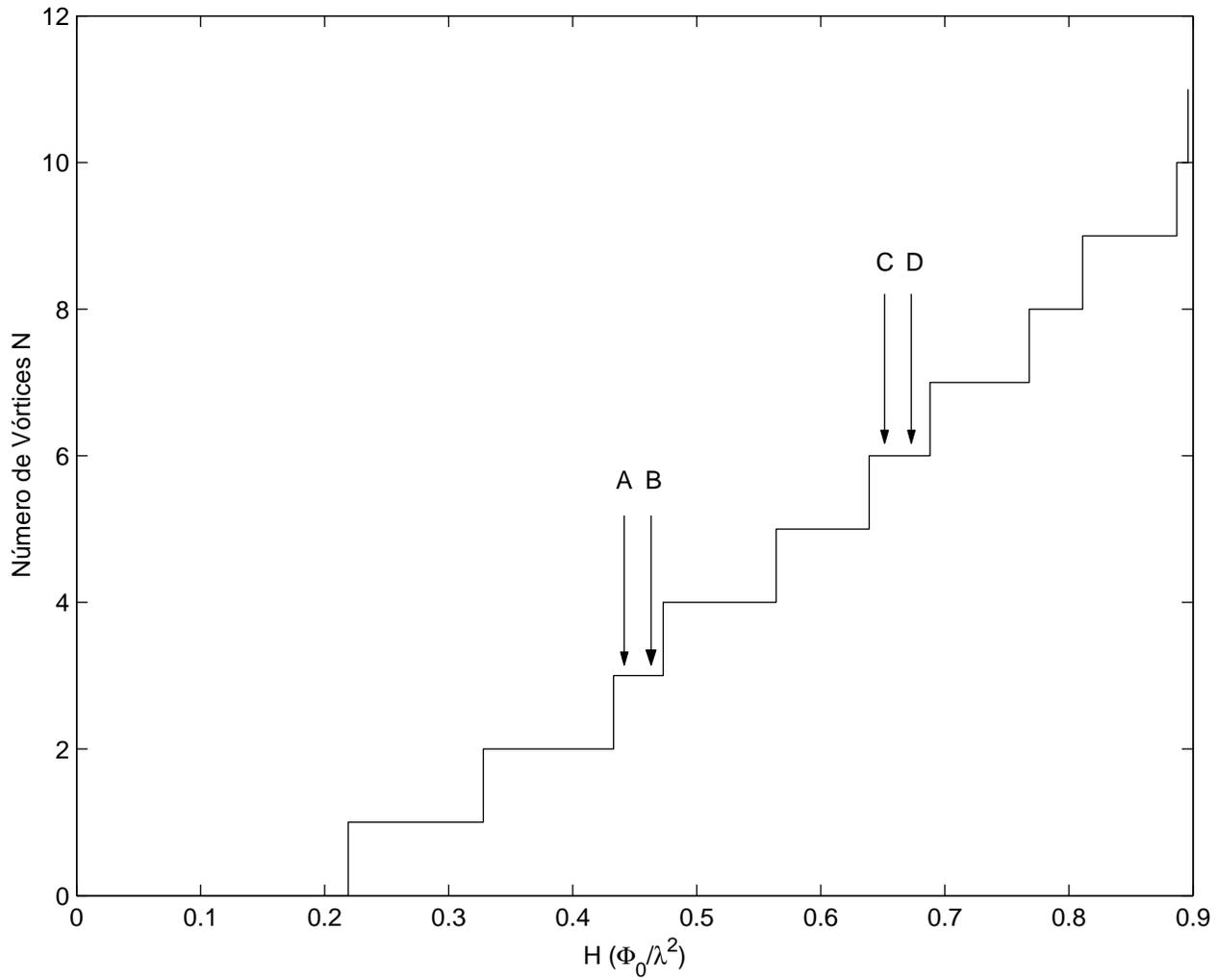
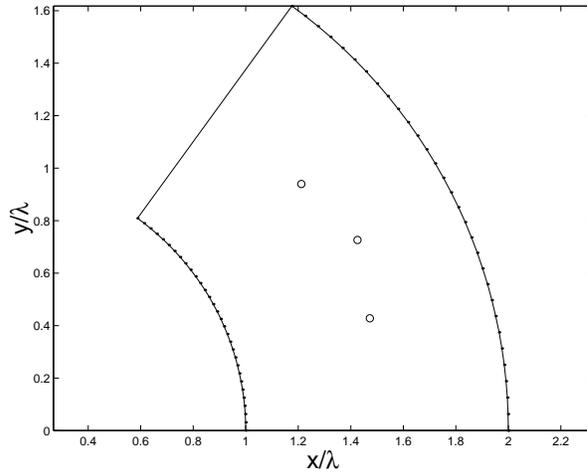
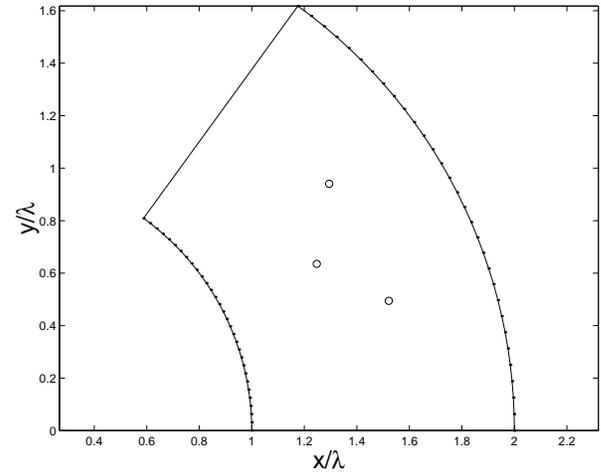


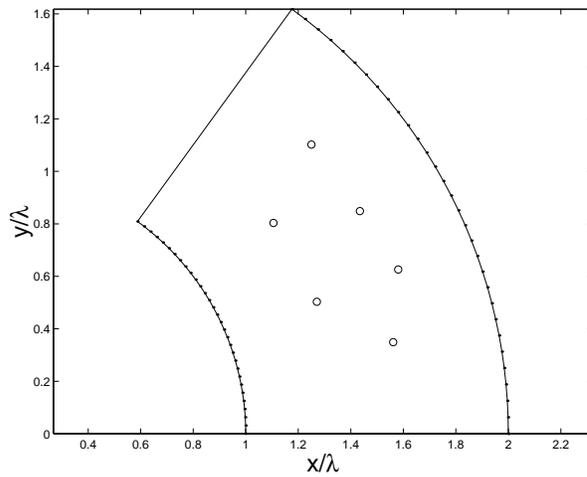
Figura 4.5: Dependência do número de vórtices em função do campo externo H . Os parâmetros utilizados foram: $a = \lambda$, $b = 2\lambda$ e $\beta = 0.3\pi$. O campo H está variando de 0 até 1.45, com um incremento de 0.001.



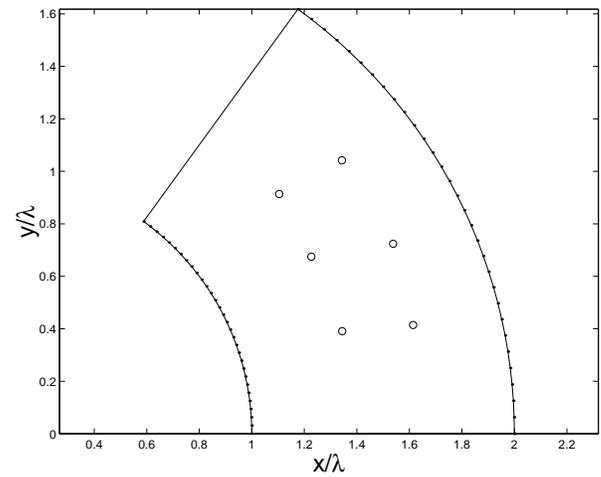
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.6: Casca cilíndrica supercondutora, tipo-II, sob um campo magnético externo. Configurações de vórtices que minimizam a energia livre do sistema. O valor do campo externo em unidades de ϕ_0/λ^2 , para as situações **A** e **B** são, respectivamente, 0.56 e 0.59. Para as situações **C** e **D** são 0.75 e 0.78. Os parâmetros utilizados foram: $a = \lambda$, $b = 2\lambda$ e $\beta = 0.3\pi$.

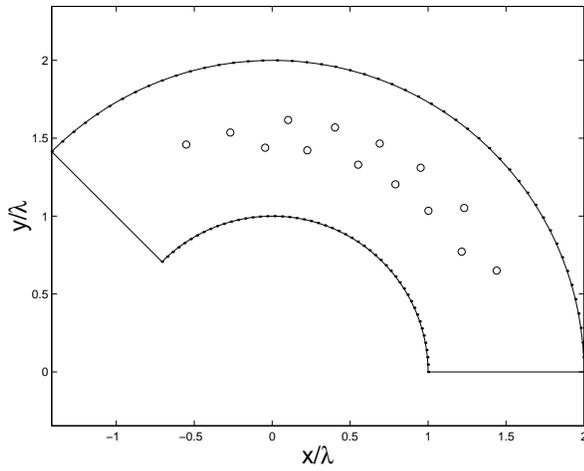
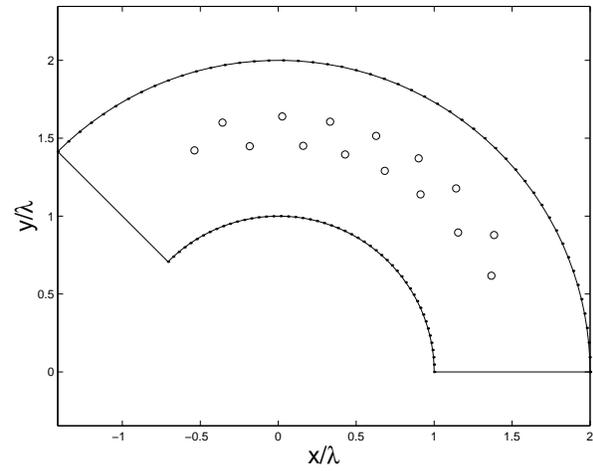
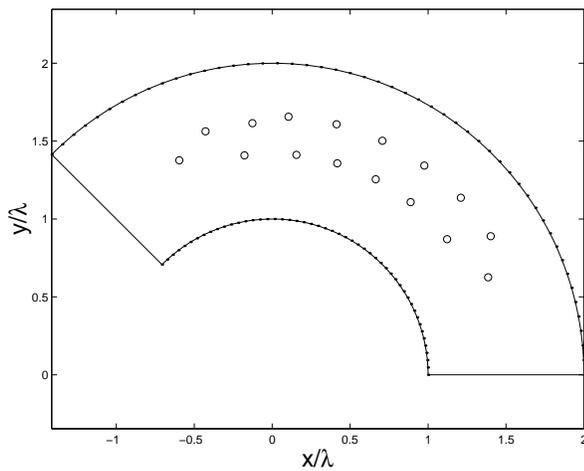
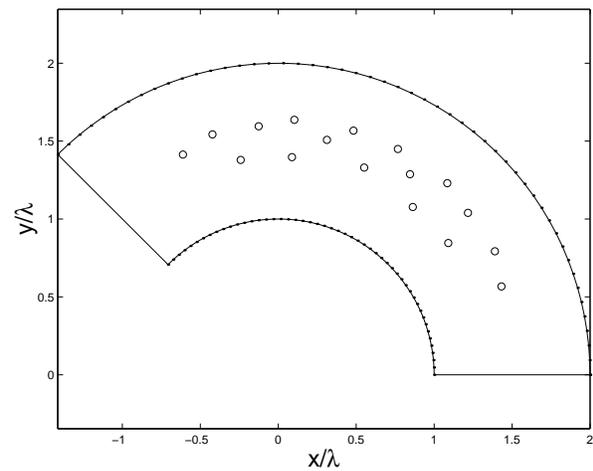
(a) $N=14$ (b) $N=15$ (c) $N=16$ (d) $N=17$

Figura 4.7: Formação de cadeias de vórtices em um supercondutor confinado. À medida que o campo externo aumenta, o sistema torna-se energeticamente favorável a possuir mais vórtices dando origem a estruturas e formação de cadeias. A quantidade de vórtices em cada situação é: $N=14, 15, 16$ e 17 . Os valores do campo externo H respectivamente são: $1.23, 1.26, 1.4$ e 1.38 , atribuídos às figuras (a), (b), (c) e (d).

4.4 *Matching field*: campo de mudança configuracional

Durante o processo de entrada dos vórtices, observamos mudanças na curva de energia que tem origem no reordenamento de todos os vórtices dentro do material. Foi observado esse tipo de mudança no início do processo quando o número de vórtices é bastante reduzido. Esse tipo de mudança estrutural está ilustrado nas figuras 4.8. Na figura analisamos as configurações finais geradas pela simulação baseada no algoritmo da relaxação. A partir da formação de cadeias de vórtices dentro do material, mudanças estruturais são responsáveis por variações descontínuas na energia livre. O campo responsável por tal efeito é particularmente importante. Na figura 4.7 analisamos a formação da terceira cadeia de vórtices. Começamos a analisar a partir da configuração 4.7(a) com $N=14$. Nós temos que a segunda cadeia ainda não está completamente formada. Em 4.7(b), com $N=15$, a segunda cadeia já está bem definida mas ainda não atingiu a quantidade máxima de vórtices na cadeia. Em 4.7(c), com $N=16$, a cadeia atingiu a quantidade máxima de vórtices. Em 4.7(d), com $N=17$, a estrutura começa a se modificar, apresentando a formação de zig-zag [15, 21]. Tal formação representa o início da formação da terceira cadeia. A energia que sofre uma grande variação quando mudanças de natureza estrutural ocorre. Esse tipo de mudança é diferente das que ocorrem com a entrada ou saída de um vórtice. Na figura 4.8(a), com $N = 4$ e $H = 0.56\phi_0/\lambda^2$, a energia de interação possui caráter dominante de modo que a distância entre os vórtices é máxima para reduzir a sua contribuição. Na figura 4.8(b) essa mesma situação ainda é observada, mas com $N = 5$ e $H = 0.59\phi_0/\lambda^2$. Na figura 4.8(c), ainda com $N = 5$ e $H = 0.67\phi_0/\lambda^2$ observamos um rearranjo dos vórtices dentro do sistema de modo a maximizar a contribuição Meissner, \mathcal{G}_M . A energia Meissner tem o seu mínimo exatamente no centro do sistema, conforme calculado na equação 4.12, de maneira que a energia é minimizada aproximando os vórtices. Na figura 4.8(d), o caso em que $N = 6$, $H = 0.77\phi_0/\lambda^2$, observamos que os vórtices “preferem” se alinhar com as paredes, formando estruturas simétricas. O argumento de simetria é muito importante para considerarmos as configurações estáveis. A formação da terceira cadeia de vórtices é investigada na configuração com $\beta = \pi$ na figura 4.9. Nós especificamos as configurações na iminência de produzir novas cadeias de vórtices. Na figura 4.9(a) estabelecemos a quantidade máxima de vórtices que a primeira cadeia permite, a um campo externo $H = 0.63\phi_0/\lambda^2$. Na figura 4.9(b), temos o começo da formação da segunda cadeia a um campo $H = 0.64\phi_0/\lambda^2$. Quando aplicamos o campo de $0.981\phi_0/\lambda^2$ nós atingimos a capacidade máxima de vórtices na segunda cadeia, figura 4.9(c). Com o campo de $H = 0.988\phi_0/\lambda^2$, temos o início da formação da terceira cadeia,

figura 4.9(d). Realizamos este procedimento de forma a obtermos 45 vórtices no sistema. Um

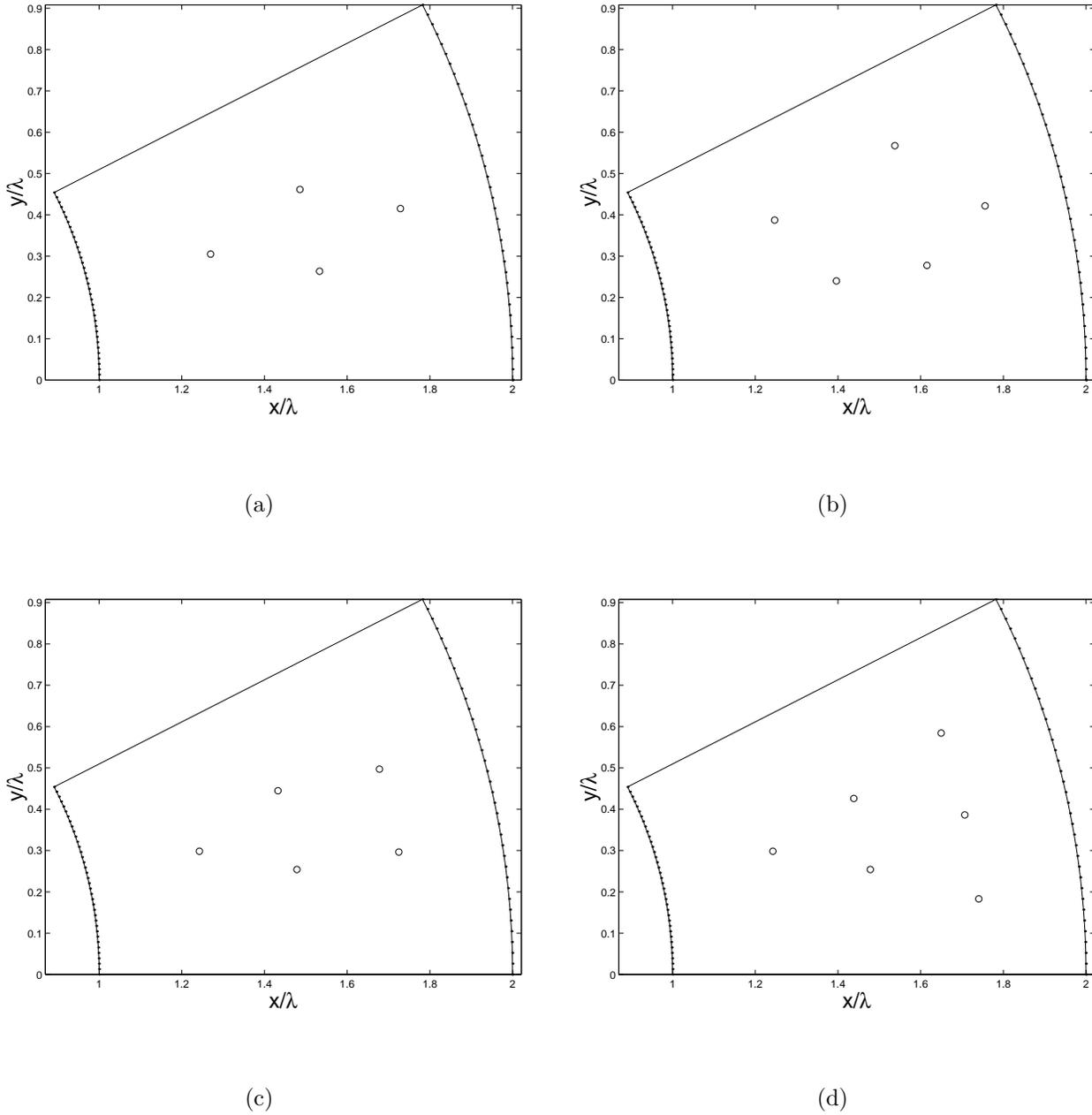
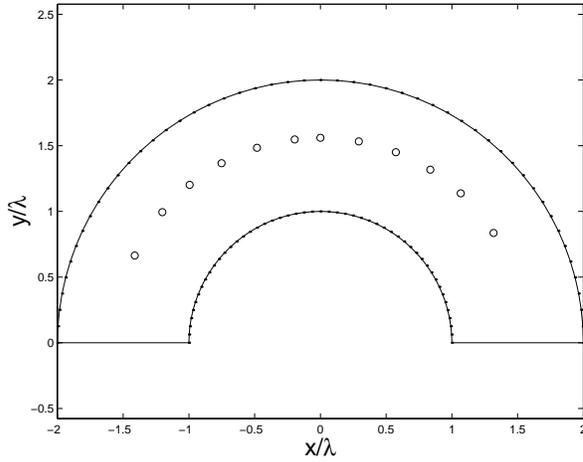


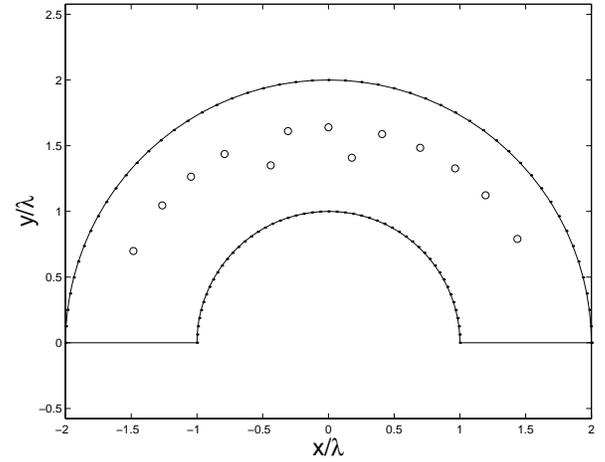
Figura 4.8: Posicionamento de vórtices no interior de um supercondutor. Os vórtices se posicionam de forma a minimizar a energia livre de Gibbs. As posições foram obtidas numericamente. Os parâmetros utilizados foram: $a = \lambda$, $b = 2\lambda \beta = 0.2\pi$. Os valores de campo H , em unidades de Φ_0/λ^2 , atribuídos no sentido horário a partir do canto superior esquerdo, são: 0.56, 0.59, 0.67 e 0.77

sistema de interesse que foi muito pouco estudado consiste em fazer o ângulo de corte β muito próximo de 2π . Com esse tipo de procedimento, criamos uma situação muito semelhante

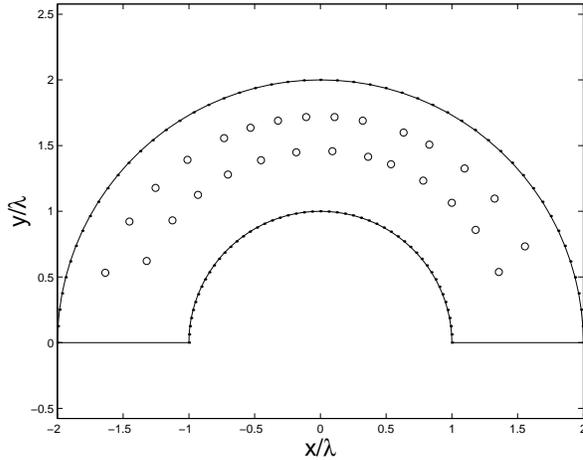
aos dispositivo utilizado pelo SQUID - *Superconductor Quantum Interface Device*. Como exemplo, realizamos uma simulação utilizando o algoritmo *simulated annealing* para alguns vórtices conforme ilustrado na figura 4.10. Determinamos a posição de equilíbrio para o caso com 3 vórtices 4.10(a) e para o caso com 4 vórtices 4.10(b).



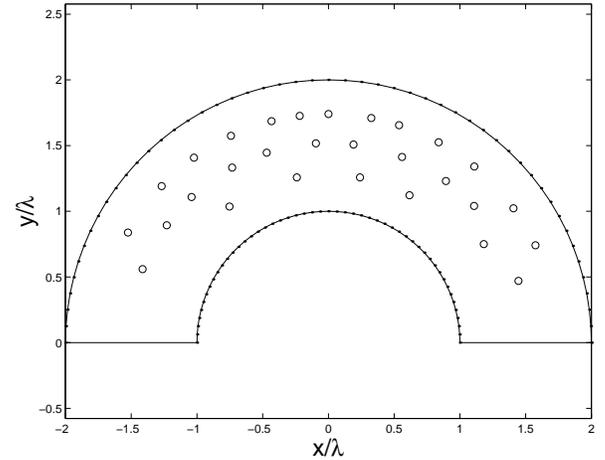
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.9: Configurações de vórtices obtidas numericamente para um sistema supercondutor sob a aplicação de um campo magnético paralelo a superfície (saindo do papel). O valor de campo em (a) foi $H = 0.636\phi_0/\lambda^2$, em (b) $H = 0.644\phi_0/\lambda^2$, em (c) foi $H = 0.981\phi_0/\lambda^2$ e em (d) $H = 0.988\phi_0/\lambda^2$. Os parâmetros utilizados foram: $a = \lambda$, $b = 2\lambda$ e $\beta = \pi$.

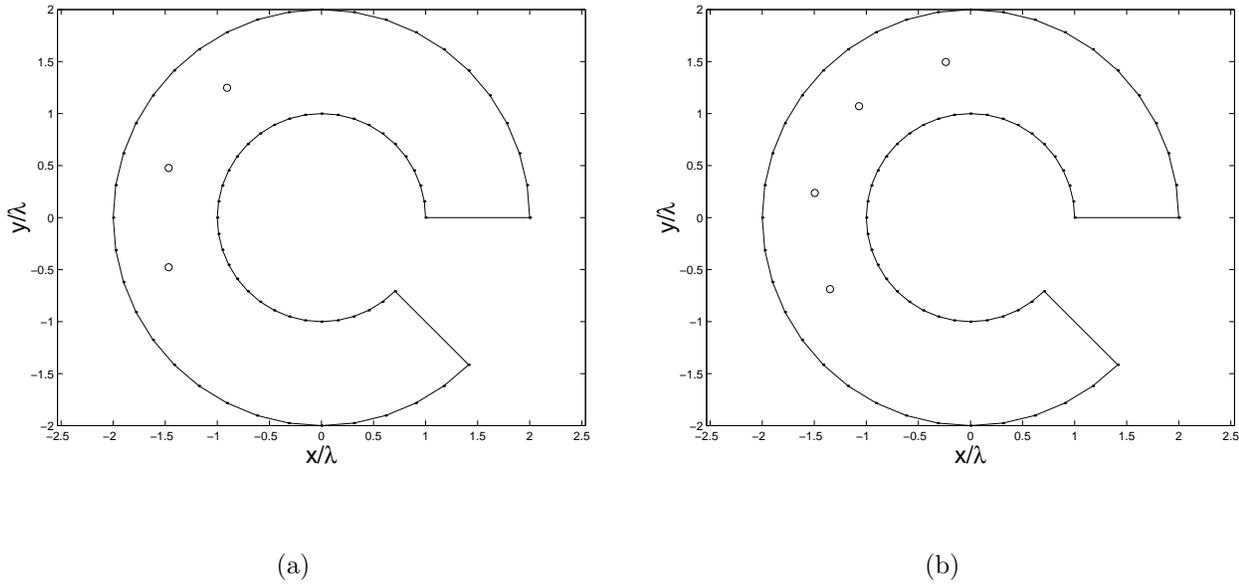


Figura 4.10: A medida que o ângulo β cresce, a geometria aproxima-se de um dispositivo SQUID. Os parâmetros utilizados foram: $a = \lambda$, $b = 2\lambda$ e $\beta = 1,8\pi$

4.5 Campo de penetração

De maneira a determinar o campo de entrada H_{en} , precisamos calcular a força sofrida por um vórtice a uma distância ξ da superfície. H_{en} corresponde ao campo externo H capaz de tornar tal força positiva, “empurrando-o” para o interior do material. A força pode ser determinada pela seguinte expressão:

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{\phi}_0 \quad (4.15)$$

Onde \vec{J} é a corrente na posição do vórtice, devido às imagens e à corrente de blindagem. Procedimento equivalente pode ser desenvolvido utilizando a força obtida pela energia livre do sistema.

$$\vec{F}(\rho_1, \phi_1) = -\nabla \mathcal{G}(\rho_1, \phi_1) \quad (4.16)$$

esta última expressão é mais prática uma vez que já calculamos a energia livre. A condição para que determinemos o campo de entrada torna-se então:

$$\vec{F}(r_1 = \xi, \phi_1) \Big|_{H_{en}} = 0 \quad (4.17)$$

Onde r_1 é o módulo do vetor distância em relação a superfície do sistema.

A condição 4.16 nos confere liberdade para investigar qual a posição angular que produz o

menor campo de entrada. Com essa liberdade em ϕ_1 , podemos investigar as quinas do material ($\phi_1 = 0$ ou $\phi_1 = \beta$). Nessas posições, a força sofre grande variação devendo representar a posição mais provável a entrada de vórtices.

A componente angular da força é:

$$\begin{aligned}
F_\phi = & \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \left(\frac{\pi}{\beta} \right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} m \sin \left(\frac{2m\pi\phi_1}{\beta} \right) \times \\
& \left[I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) - \alpha_m K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) \right] \left[-\gamma_m I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) + K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) \right] \\
& - H\phi_0\lambda^2 \frac{\pi}{\beta} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} m \cos \left(\frac{m\pi\phi_1}{\beta} \right) \times \\
& \left\{ \left[\Psi_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) - \Psi_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a}) - \alpha_m \Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) + \alpha_m \Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a}) \right] \left[-\gamma_m I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) + K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) \right] + \right. \\
& \left. \left[I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) - \alpha_m K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) \right] \left[-\gamma_m \Psi_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{b}) + \gamma_m \Psi_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) + \Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{b}) - \Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

a componente radial da força é:

$$\begin{aligned}
F_\rho = & \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \frac{\pi}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \left(\frac{m\pi\phi_1}{\beta} \right)^2 \times \\
& \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left[I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) - \alpha_m K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) \right] \left[-\gamma_m I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) + K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) \right] \\
& - H\phi_0\lambda^2 \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sin \left(\frac{m\pi\phi_1}{\beta} \right) \times \frac{\partial}{\partial \rho_1} \\
& \left\{ \left[\Psi_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) - \Psi_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a}) - \alpha_m \Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) + \alpha_m \Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{a}) \right] \left[-\gamma_m I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) + K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) \right] + \right. \\
& \left. \left[I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) - \alpha_m K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) \right] \left[-\gamma_m \Psi_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{b}) + \gamma_m \Psi_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) + \Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{b}) - \Omega_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}_1) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

onde foi necessário utilizar a seguinte identidade:

$$\Omega'_m(x) = xK_m(x) \quad e \quad \Psi'_m(x) = xI_m(x) \tag{4.20}$$

4.6 Regime aproximativo: supercondutor mesoscópico

Uma importante situação a ser considerada ocorre quando $b \ll \lambda$. Neste caso, estamos considerando uma configuração mesoscópica. Neste regime as equações são extremamente simplificadas pois passamos a utilizar as expansões assintóticas para as funções de Bessel de índice

não nulo.

$$\lim_{y \rightarrow 0} I_\nu(y) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{y}{2}\right)^\nu \quad (4.21)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} K_\nu(y) \rightarrow \begin{cases} \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{2}{y}\right)^\nu & , \text{ se } \nu = 0 \\ \ln\left(\frac{1}{y}\right) - \gamma & , \text{ se } \nu \neq 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

onde γ é a constante de Euler de valor aproximado 0.5772. Expandindo as funções auxiliares Ω e Ψ similarmemente as funções de Bessel acima, obtemos:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \Omega_m(y) = \frac{\Gamma(m)2^{m-1}}{2-m} (y^{2-m} - 1) \quad (4.23)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \Psi_m(y) = \frac{y^{2+m} - 1}{\Gamma(m+1)2^m(2+m)} \quad (4.24)$$

O campo magnético da expressão 4.4 expresso em termos das expressões assintóticas torna-se:

$$\begin{aligned} h_M = H - H4\lambda^2\pi \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi\phi}{\beta}\right) \times \\ \left\{ \left[\frac{\rho^{2+\frac{m\pi}{\beta}} - a^{2+\frac{m\pi}{\beta}}}{\lambda^{2+\frac{m\pi}{\beta}} \Gamma\left(\frac{m\pi}{\beta} + 1\right) 2^{\frac{m\pi}{\beta}} \left(2 + \frac{m\pi}{\beta}\right)} - \alpha_m \frac{\Gamma\left(\frac{m\pi}{\beta}\right) 2^{\frac{m\pi}{\beta}-1}}{2 - \frac{m\pi}{\beta}} \left(\rho^{\frac{2-m\pi}{\beta}} - a^{2-\frac{m\pi}{\beta}}\right) \right] \times \right. \\ \left[-\gamma_m I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) + K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) \right] + \\ \left[I_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) - \alpha_m K_{\frac{m\pi}{\beta}}(\tilde{\rho}) \right] \times \\ \left. \left[\gamma_m \frac{\rho^{2+\frac{m\pi}{\beta}} - b^{2+\frac{m\pi}{\beta}}}{\lambda^{2+\frac{m\pi}{\beta}} \Gamma\left(\frac{m\pi}{\beta} + 1\right) 2^{\frac{m\pi}{\beta}} \left(2 + \frac{m\pi}{\beta}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{m\pi}{\beta}\right) 2^{\frac{m\pi}{\beta}-1}}{2 - \frac{m\pi}{\beta}} \left(\rho^{\frac{2-m\pi}{\beta}} - b^{2-\frac{m\pi}{\beta}}\right) \right] \right\} \quad (4.25) \end{aligned}$$

4.7 Resultados e discussões

Com o tratamento aplicado, obtivemos as equações das forças que atuam sobre os vórtices em um sistema confinado. A determinação de tal força possibilita investigar mecanismos dinâmicos e propriedades de transporte do sistema. Os algoritmos utilizados se mostraram satisfatórios dentro da validade de cada método. Os estados de mínima energia foram obtidos observando a formação de cadeias bem definidas. O comportamento da curva de energia livre apresenta descontinuidades ocasionadas por dois motivos: *i*) a entrada de um novo vórtice no sistema, e *ii*) uma mudança estrutural na configuração dos vórtices. A geometria da rede formada pelos vórtices dentro do sistema não pode ser determinada devido ao reduzido número de vórtices

considerado no sistema. Os efeitos de superfície mostraram-se extremamente importantes, especialmente para um ângulo de corte pequeno, $\beta = 0.2\pi$. Tal efeito pode ser entendido considerando que o sistema adquire uma geometria similar a um filme fino, onde os vórtices se alinham com a superfície.

Capítulo 5

Conclusões

Estudamos dois sistemas sob a aplicação de um campo magnético aplicado paralelamente à superfície dos sistemas na abordagem da teoria de London. Investigamos de forma distinta os dois problemas.

5.1 Supercondutor semi-infinito

Como resultado da presença de uma indentação, a energia total do sistema é reduzida, pois área da interface separadora NORMAL-SUPERCONDUTORA é aumentada. Com o formalismo aplicado, conseguimos obter o campo magnético local (o auto campo e o campo Meissner) de forma compacta, onde as equações retornam ao problema de uma interface lisa no limite em que o raio da indentação vai para zero. A presença da indentação não facilita a nucleação de vórtices em sua região mas cria uma região onde a auto-força é dominante, facilitando a saída dos vórtices.

5.2 Supercondutores confinados

Observamos a formação de cadeias de vórtices bem definidas como em geometrias retangulares mas que devido à curvatura das paredes do sistemas, os estados degenerados são removidos, devido a ausência de simetria. Não podemos identificar o tipo de arranjo de rede devido ao tamanho reduzido do sistema e a quantidade de vórtices no sistema. As configurações de equilíbrio se re-arranjam em determinados campos, sem que haja entrada ou saída de vórtices similarmente nas geometrias retangulares.

Atividades Científicas desenvolvidas durante o Mestrado

Participações em escolas, cursos e workshop

- III - Escola de Verão do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF, Rio de Janeiro - RJ, de 05 de 23 de fevereiro de 2001.
- I Workshop on Materials, Mechanisms and Applications of Superconductivity, Recife - PE, de 10 a 12 de dezembro de 2001.
- V EBS - Escola Brasileira de Supercondutividade, Recife - PE, de 10 a 12 de dezembro de 2001.
- VI EBS - Escola Brasileira de Supercondutividade, Caxambu - MG, de 8 a 10 de maio de 2002.

Trabalhos apresentados em congressos e encontros

Eventos nacionais

- **RODRIGUES, Antonio**; CABRAL, Leonardo R. E.; AGUIAR, J. Albino. *Superconducting properties of mesoscopic specimens with cylindrical symmetry*. XXVI ENCONTRO NACIONAL DE FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA, 2003, Caxambu.
- **RODRIGUES, Antonio**; CABRAL, Leonardo R. E.; AGUIAR, J. Albino. *Efeito de uma indentação na propriedade supercondutoras em um supercondutor semi-infinito*. XXV ENCONTRO NACIONAL DE FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA, 2002, Caxambu.

- CABRAL, Leonardo R. E.; **RODRIGUES, Antonio**; AGUIAR, J. Albino. *Magnetic response of hard type-II superconductor with a semicircular indentation*. XX ENCONTRO DE FÍSICOS DO NORTE E NORDESTE, 2002, Recife.
- **RODRIGUES, Antonio**; CABRAL, Leonardo R E; AGUIAR, J Albino. *Resposta magnética de uma semicasca cilíndrica supercondutora do tipo-II*. XX ENCONTRO DE FÍSICOS DO NORTE E NORDESTE, 2002, Recife.
- MONTARROYOS, Erivaldo; **RODRIGUES, Antonio**. *Um método experimental simples para obtenção da intensidade da luz nos padrões de interferência e difração*. XIV SNEF - SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE FÍSICA, 2001, Natal

Eventos internacionais

- **RODRIGUES, Antonio**; CABRAL, Leonardo R. E.; AGUIAR, J. Albino. *Superconducting properties of mesoscopic specimens with cylindrical symmetry*. M2S-HTSC-VII 7th INTERNATIONAL CONFERENCE ON MATERIALS AND MECHANISMS OF SUPERCONDUCTIVITY AND HIGH TEMPERATURE SUPERCONDUCTORS, 2003, Rio de Janeiro.
- CABRAL, Leonardo R. E.; **RODRIGUES, Antonio**; AGUIAR, J. Albino. *Magnetic response of hard type-II superconductor with a semicircular indentation*. In: THE 23rd INTERNATIONAL CONFERENCE ON LOW TEMPERATURA PHYSICS, 2002, Hiroshima.

Trabalhos em periódicos

- CABRAL, Leonardo R. E., **RODRIGUES, Antonio**, AGUIAR, J. Albino. *Magnetic response of hard type-II superconductor with a semicircular indentation*. Physica B - Condensed Matter. Aceito para publicação em 10 de Dezembro de 2002 e será publicado em 2003.
- **RODRIGUES, Antonio**, CABRAL, Leonardo R. E.; AGUIAR, J. Albino. *Superconducting properties of mesoscopic specimens with cylindrical symmetry*. Em preparação para ser submetido a Physica C - Superconductivity em 2003.

- **RODRIGUES, Antonio**, Leonardo R. E. Cabral, J. Albino Aguiar *Penetration field in a semi-infinite type-II superconductor*. Em preparação para ser submetido a Physica C - Superconductivity em 2003.

Bibliografia

- [1] AKKERMANS, E., GANGARDT, D. M., AND MALLICK, K. Mesoscopic superconductors in the london limit: Equilibrium properties and metastability. *Phys. Rev. B* 63 (January 2001), 064523.
- [2] ARFKEN, G. B., AND WEBER, H. J. *Mathematical Methods for Physicists*, 5th. ed. Academic Press, 2001.
- [3] BARDEEN, J. Nobel prize of Physics. Royal Society of Sweden, 1956. <http://www.nobel.se/physics/laureates/1956/>.
- [4] BARDEEN, J., COOPER, L. N., AND SCHRIEFFER, J. R. Theory of superconductivity. *Phys. Rev.* 108 (December 1957), 1175.
- [5] BARDEEN, J., COOPER, L. N., AND SCHRIEFFER, J. R. Nobel prize of Physics. Royal Society of Sweden, 1972. <http://www.nobel.se/physics/laureates/1972/>.
- [6] BEAN, C. P. Magnetization of hard superconductors. *Phys. Rev. Lett.* 8, 6 (March 1962), 250.
- [7] BEAN, C. P. Magnetization of high-field superconductor. *Rev. Mod. Phys.* 8 (January 1964), 31.
- [8] BEAN, C. P., AND LIVINGSTON, J. D. Surface barrier in type-II superconductors. *Phys. Rev. Lett.* 12, 1 (January 1964), 14.
- [9] BEDNORZ, J. G., AND MÜLLER, K. A. Possible High T_c Superconductivity in the Ba-La-Cu-O System. *Zeitschrift für Physik Condensed Matte* 64 (April 1986), 189.
- [10] BLATTER, G., FEIGEL'MAN, M. V., GESHKENBEIN, V. B., LARKIN, A. I., AND VINOKUR, V. M. Vortices in high temperature superconductors. *Rev. Mod. Phys.* 66, 4 (1994), 1125.

- [11] BRANDT, E. H. Electromagnetic response of type-II superconductors: effects of specimen shape, field orientation, and london depth. *Physica C* 369 (2002), 187–192.
- [12] BUZDIN, A., AND DAUMENS, M. Electromagnetic pinning of vortices on different types of defects. *Physica C* 294 (1998), 257–269.
- [13] BUZDIN, A., AND FEINBERG, D. Eletromagnetic pinning of vortices by non-superconducting defects and their influence on screening. *Physica C* 256 (1996), 303–311.
- [14] BUZDIN, A. I. Multiple quanta vortices at columnar defects. *Phys. Rev. B* 47, 17 (May 1993), 11416.
- [15] CARNEIRO, G. Equilibrium vortex-line configuration and critical currents in thin films under a parallel field. *Phys. Rev. B* 57, 10 (march 1998), 6077.
- [16] COHEN-TANNOUJDI, C., DIU, B., AND LALOE, F. *Quantum Mechanics*, vol. 1. John Wiley and Sons, 1992.
- [17] DAI, P., CHAKOUMAKOS, B. C., SUN, G. F., WONG, K. W., XIN, Y., AND LU, D. F. Synthesis and Neutron Powder Diffraction Study of the Superconductor $HgBa_2Ca_2Cu_3O_{8+\delta}$ by Tl Substitution. *Physica C* 243 (1995), 201–206.
- [18] DAUNT, J. G., KEELEY, T. C., AND MENDELSSOHN, K. *Phil. Mag.* 23 (1937), 264.
- [19] DE GENNES, P. G. *Superconductivity in Metals and Alloys*, 2nd. ed. Persus Book, 1989.
- [20] DORIA, M. M., AND ANDRADE, S. C. B. Magnetic properties of the transition to localized superconductivity around a columnar deffects. *Phys. Rev. B* 60, 18 (November 1999), 13164.
- [21] DORIA, M. M., GUBERNATIS, J. E., AND RAINER, D. Solving Ginzburg-Landau equations by simulated annealing. *Phys. Rev. B* 41 (1990), 6335.
- [22] DORIA, M. M., AND ZEBENDE, G. F. Vortex configurations on mesoscopic cylinders with square cross section. *Brazilian J. Phys.* 32, 2 (June 2002).
- [23] GINZBURG, V. L. *Fiz. Tverd. Tela* 2 (1960), 2031. *idem*, *Sov. Phys. Sol. State* 2 (1961), 1824.

- [24] GINZBURG, V. L., AND LANDAU, L. On the theory of superconductivity. *Zhurnal Eksperimentalnoi I Teoreticheskoi Fiziki* 20 (1950), 1064–1082.
- [25] GORTER, C. J., AND CASIMIR, H. B. G. *Phys. Z* 35 (1934), 963.
- [26] GOULD, H., AND TOBOCHNIK, J. *An Introduction to Computer Simulation Methods: Applications to Physical Systems*, 2nd. ed. Pearson Education POD, January 1996.
- [27] GRADSHTEYN, I. S., AND RYZHIK, I. M. *Table od Integrals, Series, and Products*, 4th. ed. Academic Press, Inc, 1965, ch. 4.
- [28] GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Eletrodynamics*, 3rd. ed. Prentice Hall, 1999.
- [29] HIRSCHLAFF, E. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 33 (1937), 140.
- [30] JACKSON, J. D. *Classical Eletrodynamics*, 3rd. ed. John Wiley & Sons, January 1999.
- [31] JOSEPHSON, B. D. Nobel prize of Physics. Royal Society of Sweden, 1973. <http://www.nobel.se/physics/laureates/1973/>.
- [32] KEESOM, W. H., AND ONNES, H. K. *Comun. Phys. Lab. Univ. Leiden*, 124b (1924).
- [33] KETTERSON, J. B., AND SONG, S. N. *Superconductivity*, 3rd. ed. Cambrigde University Press, 1999.
- [34] KIRKPATRICK, S., JR., D. G., AND VECCHI, M. P. Optimization by simmulated annealing. *Science* 220, 4598 (May 1983), 671–680.
- [35] LONDON, F. *Superfluids: Macroscopic theory of superconductivity*, 2nd. ed., vol. 1. Dover Publications, 1961.
- [36] LONDON, F., AND LONDON, H. The electromagnetic equations of the supraconductor. *Proc. Roy. Soc. (London) A* 141 (1935), 71–88.
- [37] LONDON, H. *Proc. Roy. Soc. A* 176 (1940), 522.
- [38] MCLENNAN, J. C., HUNTER, R. G., AND MCLEOD, J. H. *Trans. Roy. Soc. Can.* 24, III (1930), 3.
- [39] MCLENNAN, J. C., MCLEOD, J. H., AND WILHELM, J. O. *Trans. Roy. Soc. Can.* 23, III (1929), 269.

- [40] MEISSNER, W., AND OCHSENFELD, R. Ein neuer effect bei eintritt der supraleitfihigkeit. *Naturwinssenschaft 21* (1933), 787–788.
- [41] MEISSNER, W., AND STEINER, K. *Z. Phys. 76* (1932), 201.
- [42] METROPOLIS, N., ROSENBLUTH, A. W., ROSENBLUTH, M. N., TELLER, A. H., AND TELLER, E. Equation of state calculations by fast computing machines. *J. Chem. Phys. 21* (1953), 1087–1092.
- [43] MOLDOVER, R., AND CODDINGTON, P. More efficient global optimization. <http://www.npac.syr.edu/REU/reu94/ramoldov/proposal/myprop.html> (1994).
- [44] ONNES, H. K. On the change of the electrical resistance of pure metals at very low temperatures: The disappearance of the resistance of mercury. *Akad. Van Wetenschappen (Amsterdam) 14* (1911), 113–818.
- [45] ONNES, H. K. Nobel prize of Physics. Royal Society of Sweden, 1913. <http://www.nobel.se/physics/laureates/1913/>.
- [46] PIPPARD, A. B. *Proc. Roy. Soc. A 191* (1947), 370.
- [47] PIPPARD, A. B. *Proc. Roy. Soc. A 191* (1947), 385.
- [48] PIPPARD, A. B. *Proc. Roy. Soc. A 191* (1947), 399.
- [49] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., AND FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes in C: the art of scientific computing*, 2nd. ed. Cambridge University Press, 1992, ch. 4.
- [50] RAMANATHAN, K. G. *Proc. Roy. Soc. A* (1952).
- [51] REIF, F. *Fundamentals os Statistical and Thermal Physics*, 3rd. ed. McGraw-Hill International, 1985.
- [52] SARDELLA, E. Magnetic field of an in-plane vortex inside and outside a layered superconducting film. *Phys. Rev. B 62*, 14 (October 2000), 9757.
- [53] SARDELLA, E., AND DE A. FREIRE, R. Vortex lattice of a long superconducting wire with a columnar defect. *Brazilian J. Phys. 32*, 2 (June 2002).

- [54] SARDELLA, E., DORIA, M. M., AND NETTO, P. R. S. Matching field of a long superconducting film. *Phys. Rev. B* 60, 18 (November 1999), 13158–13163.
- [55] SCHILDT, H. *C Completo e Total*, 3rd. ed. Makron Books, 1997.
- [56] SCHRIEFFER, J. R. *Theory of Superconductivity*. Persos Book, 1999.
- [57] SHOENBERG, F. R. S. D. *Superconductivity*, 2nd. ed. Cambridge University Press, 1965.
- [58] SHORE, MATTHEW, CODDINGTON, PAUL, FOX, GEOFFREY, AND MARINARI, E. A new automatic simulated annealing-type global optimization scheme. *Journal of Undergraduate Research in High-Performance Computing* (1993).
- [59] SILVA, C. C. S., AND AGUIAR, J. A. Irreversible matching effects in homogeneous and layered superconducting films. *Physica C - Superconductivity* 354 (2001), 6232–236.
- [60] SILVA, C. C. S., CABRAL, L. R. E., AND AGUIAR, J. A. Flux penetration, matching effect, and hysteresis in homogeneous superconducting films. *Physical Review B - Condensed Matter* 63, 13 (2001), 1–5.
- [61] SILVA, C. C. S., CABRAL, L. R. E., AND AGUIAR, J. A. Vortices in superconducting strips: interplay between surface effects and the pinning landscape. *Physica C - Superconductivity* 369 (2002), 217–221.
- [62] WU, M. K., ASHBURN, J. R., TORNG, C. J., HOR, P. H., MENG, R. L., GAO, L., HUANG, Z. J., WANG, Y. Q., AND CHU, C. W. Superconductivity at 93 K in a new mixed-phase Yb-Ba-Cu-O compound system at ambient pressure. *Phys. Rev. Lett.* 58 (March 1987), 908910.

Apêndice A

Função de Green

A função de Green satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$-\lambda^2 \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{A.1})$$

Aplicando separação de variáveis em coordenadas cilíndricas, escrevemos da seguinte forma:

$$-\frac{\lambda^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial G}{\partial \rho} \right) - \frac{\lambda^2}{\rho^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \rho^2} + G = \frac{\delta(\rho - \rho') \delta(\phi - \phi')}{\rho} \quad (\text{A.2})$$

A.1 Supercondutor Semi-infinito

As condições de contorno são:

$$G(\rho, \beta, \rho', \phi') = G(\rho, \phi, \rho', \beta) = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$G(a, \phi, \rho', \phi') = G(\rho, \phi, a, \phi') = 0 \quad (\text{A.4})$$

i. e., a função de Green é simétrica quanto à troca de variáveis conjugadas.

Expandindo em série de Fourier o parâmetro azimutal, temos:

$$\delta(\phi - \phi') = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\beta} \sin\left(\frac{m\pi\phi}{\beta}\right) \sin\left(\frac{m\pi\phi'}{\beta}\right) \quad (\text{A.5})$$

Podemos então re-escrever a função de Green como:

$$G(\rho, \phi, \rho', \phi') = \frac{2}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi\phi}{\beta}\right) \sin\left(\frac{m\pi\phi'}{\beta}\right) g_m(\rho, \rho') \quad (\text{A.6})$$

Impondo que a expressão acima satisfaz a equação diferencial (3.1), obtemos uma equação diferencial para a função $g_m(\rho, \rho')$.

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial g_m}{\partial \rho} \right) + \left[\left(\frac{m\pi}{\rho\beta} \right)^2 + \frac{1}{\lambda^2} \right] g_m = \frac{\delta(\rho - \rho')}{\lambda^2 \rho} \quad (\text{A.7})$$

Fazendo mudança de variável para, ρ , re-escrevemos a expressão acima de forma mais compacta.

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\lambda} \quad (\text{A.8})$$

$$-\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} \left(\tilde{\rho} \frac{\partial g_m}{\partial \tilde{\rho}} \right) + \left[\left(\frac{m\pi}{\beta \tilde{\rho}} \right)^2 + 1 \right] g_m = \frac{\delta(\tilde{\rho} - \tilde{\rho}')}{\lambda^2 \tilde{\rho}} \quad (\text{A.9})$$

Integrando cada termo em torno de $\tilde{\rho}$, obtemos que a derivada é descontínua.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial g_m}{\partial \tilde{\rho}} \Big|_{\tilde{\rho}=\tilde{\rho}'+\epsilon} - \frac{\partial g_m}{\partial \tilde{\rho}} \Big|_{\tilde{\rho}=\tilde{\rho}'-\epsilon} = \frac{1}{\tilde{\rho}} \quad (\text{A.10})$$

Onde assumimos que a função g_m é contínua. Para garantir a simetria da função de Green utilizando separação de variáveis, escrevemos g_m da seguinte forma:

$$g_m(\tilde{\rho}, \tilde{\rho}') = \Psi_1(\rho_{<}) \Psi_2(\rho_{>}) \quad (\text{A.11})$$

Onde a notação ρ_{\geq} representa o menor ou maior entre $\tilde{\rho}$ e $\tilde{\rho}'$. Substituindo esta definição na expressão que define a descontinuidade de g_m , obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{\partial g_m}{\partial \tilde{\rho}} \Big|_{\tilde{\rho}=\tilde{\rho}'+\epsilon} - \frac{\partial g_m}{\partial \tilde{\rho}} \Big|_{\tilde{\rho}=\tilde{\rho}'-\epsilon} = \Psi_1(\tilde{\rho}') \Psi_2'(\tilde{\rho}') - \Psi_1'(\tilde{\rho}') \Psi_2(\tilde{\rho}') - \frac{1}{\tilde{\rho}} \quad (\text{A.12})$$

Onde esta última expressão representa o Wroskiano de $\Psi_1(\tilde{\rho}')$ e $\Psi_2(\tilde{\rho}')$, $W[\Psi_1(\tilde{\rho}'), \Psi_2(\tilde{\rho}')]$.

Para $\rho \neq \rho'$ nós temos que a equação diferencial que governa g_m é, precisamente, a equação de Bessel modificada, e cuja solução satisfaz ao Wroskiano apresentado.

$$W[I_\alpha(x), K_\alpha(x)] = -\frac{1}{x} \quad (\text{A.13})$$

Onde $I_\alpha(x)$ e $K_\alpha(x)$ representam as funções de Bessel modificadas de ordem α , de primeira e segunda espécie, respectivamente.

No caso do supercondutor descrito no capítulo 3, temos que as condições de contorno específicas são:

$$\lim_{\tilde{\rho} \rightarrow \infty} g_m(\tilde{\rho}, \tilde{\rho}') \rightarrow 0 \quad (\text{A.14})$$

A solução encontrada é:

$$\Psi_1(\rho_{<}) = a_m I_\alpha(\tilde{\rho}_{<}) + b_m K_\alpha(\tilde{\rho}_{<}) \quad (\text{A.15})$$

$$\Psi_2(\rho_{>}) = K_\alpha(\tilde{\rho}_{>}) \quad (\text{A.16})$$

Com o Wroskiano, obtemos:

$$a_m = -1 \quad (\text{A.17})$$

Com a condição de contorno para as bordas temos:

$$g_m(\tilde{a}, \tilde{\rho}') = 0$$

$$b_m = -\frac{I_\alpha(\tilde{a})}{K_\alpha(\tilde{a})} \quad (\text{A.18})$$

$$\alpha = \frac{m\pi}{\beta} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\rho, \phi, \rho', \phi') &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\beta} \sin\left(\frac{m\pi\phi}{\beta}\right) \sin\left(\frac{m\pi\phi'}{\beta}\right) \times \\ &\quad \left[I_{\frac{m\pi}{\beta}}\left(\frac{\rho_{<}}{\lambda}\right) - \frac{I_{\frac{m\pi}{\beta}}\left(\frac{a}{\lambda}\right)}{K_{\frac{m\pi}{\beta}}\left(\frac{a}{\lambda}\right)} K_{\frac{m\pi}{\beta}}\left(\frac{\rho_{<}}{\lambda}\right) \right] K_{\frac{m\pi}{\beta}}\left(\frac{\rho_{>}}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

A.2 Campo Meissner

Determinamos o campo Meissner a partir da função de Green relacionando as equações diferenciais para os duas variáveis em questão.

$$-\lambda^2 \nabla^2 h(\mathbf{r}) + h(\mathbf{r}) = \Phi_0 \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (\text{A.21})$$

$$-\lambda^2 \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{A.22})$$

Multiplicando a equação (A.21) por G e (A.22) por h , e calculando a diferença, obtemos:

$$\begin{aligned} -\lambda^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 h(\mathbf{r}) + \lambda^2 h(\mathbf{r}) \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \\ \Phi_0 \sum_{i=1}^N G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) - h(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') & \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Isolando a campo h , obtemos que:

$$h(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \Phi_0 \sum_{i=1}^N G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) + \lambda^2 [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\nabla^2 h(\mathbf{r}) - h(\mathbf{r})\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \quad (\text{A.24})$$

Integrando sobre toda a seção transversal do meio supercondutor, temos:

$$\begin{aligned} \int h(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')dv &= \Phi_0 \sum_{i=1}^N \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)dv + \\ &\lambda^2 \int [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\nabla^2 h(\mathbf{r}) - h(\mathbf{r})\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] dv \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$h(\mathbf{r}') = \Phi_0 \sum_{i=1}^N G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}') + \lambda^2 \int [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\nabla^2 h(\mathbf{r}) - h(\mathbf{r})\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] dv \quad (\text{A.26})$$

Usando o primeiro Teorema de Green, re-escrevemos a integral de volume em termos da integral de superfície.

$$h(\mathbf{r}') = \Phi_0 \sum_{i=1}^N G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}') + \lambda^2 \oint \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial h(\mathbf{r})}{\partial n} - h(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right] da \quad (\text{A.27})$$

Temos as seguintes condições de contorno:

$$\frac{\partial h(\mathbf{r})}{\partial n} = 0 \quad (\text{A.28})$$

Pois as correntes estão confinadas ao meio.

$$h(\mathbf{r}) \Big|_{\text{superfície}} = H \quad (\text{A.29})$$

$$\int [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\nabla^2 h(\mathbf{r}) - h(\mathbf{r})\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] dv = -H \oint \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \quad (\text{A.30})$$

Usando o Teorema na forma inversa, combinado com a equação de Green.

$$\int [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\nabla^2 h(\mathbf{r}) - h(\mathbf{r})\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] dv = -H \int \left[\frac{1}{\lambda^2} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] dv \quad (\text{A.31})$$

Integrando esta última expressão, obtemos o campo Meissner em termos de da função de Green.

$$h(\mathbf{r}') = \Phi_0 \sum_{i=1}^N G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}') + H \left[1 - \frac{1}{\lambda^2} \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv \right] \quad (\text{A.32})$$

Apêndice B

Energia Livre em supercondutores

Determinamos a energia livre de Helmholtz (\mathcal{F}) e a energia livre de Gibbs (\mathcal{G}) utilizando o formalismo de de Gennes.

B.1 Energia livre

A energia associada com o campo magnético Meissner e o auto-campo é :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{8\pi} \int_{vol} [h^2 + \lambda^2 |\nabla \times \mathbf{h}(\rho, \phi)|^2] dv \quad (\text{B.1})$$

Com $\mathbf{h} = h\hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{H} \parallel \mathbf{h}$. A energia livre de Gibbs é:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{8\pi} \int_{vol} \lambda^2 [h^2 + \lambda^2 |\nabla \times \mathbf{h}(\rho, \phi)|^2 - 2\mathbf{H} \cdot \mathbf{h}(\rho, \phi)] dv \quad (\text{B.2})$$

Utilizando a identidade

$$|\nabla \times \mathbf{h}|^2 = \nabla \cdot [\mathbf{h} \times (\nabla \times \mathbf{h})] - h\nabla^2 h \quad (\text{B.3})$$

e utilizando a equação de London, re-escrevemos a energia \mathcal{G} como:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{8\pi} \int_{vol} \left[\lambda^2 \nabla \cdot [\mathbf{h} \times (\nabla \times \mathbf{h})] + \Phi_0 \sum_{i=1}^N h(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) - 2hH \right] dv \quad (\text{B.4})$$

Para removermos as singularidades, nós retiramos os vórtices da região de integração introduzindo cilindros de material não supercondutor de raio ξ . No limite de supercondutores fortemente tipo-II, temos que $\xi \rightarrow 0$. Com esse formalismo, simplificamos a expressão acima para a seguinte forma:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{8\pi} \int_{vol} [\lambda^2 \nabla \cdot [\mathbf{h} \times (\nabla \times \mathbf{h})] + -2hH] dv \quad (\text{B.5})$$

A equação de London para a região sem vórtices é:

$$\mathbf{h} = -\lambda^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{h} \quad (\text{B.6})$$

$$\mathcal{G} = \frac{1}{8\pi} \int_{vol} [\lambda^2 \nabla \cdot [\mathbf{h} \times (\nabla \times \mathbf{h})] + -2\mathbf{H} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{h}] dv \quad (\text{B.7})$$

Usando o teorema da divergência, re-escrevemos a integral de volume como uma integral de superfície.

$$\mathcal{G} = \frac{\lambda^2}{8\pi} \oint (\mathbf{h} - 2\mathbf{H}) \times (\nabla \times \mathbf{h}) da \quad (\text{B.8})$$

A área de integração desta última expressão pode ser desenvolvida em dois termos:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}' + \mathcal{G}'' \quad (\text{B.9})$$

$$\mathcal{G}' \rightarrow \text{contribuição devido aos vórtices.} \quad (\text{B.10})$$

$$\mathcal{G}'' \rightarrow \text{contribuição devido à superfície.}$$

$$\mathcal{G}' = \frac{\lambda^2}{8\pi} \oint_{core} (\mathbf{h} - 2\mathbf{H}) \times (\nabla \times \mathbf{h}) da \quad (\text{B.11})$$

O elemento de área em um cilindro em torno da posição do vórtice i é:

$$da = \xi d\phi \quad (\text{B.12})$$

Removendo a notação vetorial

$$\mathcal{G}' = \frac{\lambda^2}{8\pi} \sum_{i=1}^N \left[h(\mathbf{r}_i + \vec{\xi}) - 2H \right] \int_0^{2\pi} (\nabla \times \mathbf{h}) \Big|_{\rho=\rho_i+\xi} \xi d\phi \quad (\text{B.13})$$

Estamos assumindo que os $N - 1$ vórtices ao redor do vórtice i estão a uma distância grande o suficiente para considerarmos o campo em torno do vórtice i independente de ϕ .

Desenvolvendo a última integral, temos:

$$\int_0^{2\pi} (\nabla \times \mathbf{h}) \Big|_{\rho=\rho_i+\xi} \xi d\phi = \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \xi} h(\rho_i + \xi, \phi) \xi d\phi \quad (\text{B.14})$$

Assumindo então que h é:

$$h = \frac{\Phi_0}{\lambda^2} K_0 \left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}{\lambda} \right) \quad (\text{B.15})$$

Utilizando a expansão assintótica para a função de Bessel modificada K_0 , temos que:

$$\int_0^{2\pi} (\nabla \times \mathbf{h}) \Big|_{\rho=\rho_i+\xi} \xi d\phi = \frac{\Phi_0}{\lambda^2} \quad (\text{B.16})$$

E por fim, o termo \mathcal{G}' .

$$\mathcal{G}' = \frac{\Phi_0}{8\pi} \sum_{i=1}^N [h(\mathbf{r}_i) - 2H] \quad (\text{B.17})$$

calculando a segunda parte, nós temos:

$$\mathcal{G}'' = \frac{\lambda^2}{8\pi} \oint (\mathbf{h} - 2\mathbf{H}) \times (\nabla \times \mathbf{h}) da \quad (\text{B.18})$$

Escrevemos o campo magnético local como a soma do campo Meissner e o Auto-campo, $h = h_M + h_{auto}$.

Utilizando o fato que $h_{auto} = 0$ em todas as superfícies consideradas, obtemos

$$\mathcal{G}'' = \frac{\Phi_0}{8\pi} \sum_{i=1}^N h_M(\mathbf{r}_i) + \frac{H^2 \lambda^2}{8\pi} \quad (\text{B.19})$$

A energia livre do sistema é então:

$$\mathcal{G} = \frac{\Phi_0}{8\pi} [h_{auto}(\mathbf{r}_i) + 2h_M(\mathbf{r}_i) - 2H] + \frac{H^2 \lambda^2}{8\pi} \quad (\text{B.20})$$

Índice

- Absorção de elétrons, 22
- Auto-campo de 5 vórtices, 57
- Auto-força, 49
- Brian D. Josephson, 20
- Comprimento de coerência ξ , 29
- Condição de contorno
 - de Dirichlet, 34
 - de Neumann, 35
 - equação de Ginzburg-Landau, 28
 - equação de London, 28, 34
- Constante de Euler, 42
- Cornelis Jacobus Gorter, 17
- Correntes de blindagem, 39
- Densidade de Corrente, 39
- Energia livre
 - de Gibbs, 46
 - de Helmholtz, 46
- Equação
 - de Ginzburg-Landau, 9, 28
 - de Green, 34
 - de London, 9, 24, 33
- Expansão
 - assintótica, 42
 - da função de Bessel, 35
- Fluxo magnético, 22
- Força Meissner, 49
- Força, 49
- Frequência
 - de corrente alternada, 22
- Fritz London, 16
- Função
 - de Bessel, 35
 - de Bessel I_ν , 35
 - de Bessel K_ν , 35
 - de Green, 34, 35
- H. B. G. Casimir, 17
- H. London, 16
- Heike Kamerlingh Onnes, 9
- Hendrik B. G. Casimir, 17
- J. Georg Bednorz, 21
- John Bardeen, 19
- John Robert Schrieffer, 19
- K. Alexander Müller , 21
- Leon Neil Cooper , 19
- Lev Davidovic Landau, 18
- Matching field, 61
- Metropolis, 31
- Monte Carlo, 30, 61
- Monte Carlo - Metropolis, 31
- Paul Chu, 20

Propriedades básicas, 21
Propriedades Preservadas, 21

Raio-x, 21
Reflexibilidade, 21
Relaxação, 32

Simulated Annealing, 31

Tensão, 22
Teorema
 de Green, 90
Teoria
 de Ginzburg-Landau, 9, 28
 de London, 9, 23
Transformada Integral
 auxiliar, 38
Transição supercondutora, 21

Vórtice imagem, 35
Vitaliĭ Lazarevich Ginzburg, 18

Walter Meissner, 16