UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PÓS-GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA

"Resolvendo adição de frações através de estimativas: um estudo exploratório"

Maria Soraia Silva Cruz

Orientadora: Dra. Alina Galvão Spinillo

Dissertação de Mestrado
Área de concentração: Psicologia Cognitiva

Recife, Maio de 2003.

Orientadora:
Dra. Alina Galvão Spinillo

Banca Examinadora:

Dra. Alina Galvão Spinillo (Presidente)
Dr. Jorge Tarcísio da Rocha Falcão (Examinador interno)
Dra. Verônica Gitirana (Examinador externo – UFPE/CE)

Coordenador da Pós-graduação
Maria da Conceição Lyra

7

"A ciência avança passo a passo, não aos saltos".

(Thomas Macaulay)

Agradecimentos

Confesso que até bem pouco tempo eu me perguntava sobre quem mereceria ser citado nesta página. Eu não queria ser hipócrita, mas também não queria ser injusta. Às vezes eu até achava estranho em alguns trabalhos que já tive a oportunidade de ler, agradecimentos a dezenas de pessoas. Pensava eu "Será que isso tudo é para ninguém ficar chateado porque ficou de fora?". Não precisei perguntar a alguém para encontrar a resposta. Os atropelos da vida me fizeram perceber como é que até as pessoas que não têm ligação direta com a academia também podem ajudar na dura construção de um trabalho desta importância. Digo isto porque àqueles que estiveram sempre próximos a mim sabem bem das dificuldades que tive que enfrentar, justamente na fase final desta dissertação.

Sendo assim, agradeço às minhas colegas de Mestrado: Avany Sobral, Geyser Ribeiro, Juliana Galindo, Mirtes Ribeiro e Shirley Malta pelos e-mails divertidos, pelo interesse, pelos momentos de desabafo e de descontração, enfim, pela palavra amiga.

Agradeço a Ivo José pela disponibilidade e paciência todas as vezes que busquei a sua ajuda no tratamento estatístico dos dados e a José Aires de Castro Filho que, apesar do pouco contado que tivemos, também soube dar valiosas explicações em torno deste assunto. Suas contribuições não foram só valiosas, mas confortantes.

À Zélia Higino, minha ex-orientadora de pesquisa na graduação, pelo incentivo que me deu a enveredar pela carreira acadêmica. Olha aí Zélia, concluí o Mestrado!

Gostaria também de agradecer a Antônio José Lopes (Bigode) pelos seus comentários e suas preciosas sugestões ainda no começo deste estudo.

Agradeço também a todas as professoras e coordenadoras das escolas nas quais pude coletar os dados desta pesquisa. Sei que por vezes atrapalhei suas aulas, mas agradeço sinceramente o apoio que me deram.

Merece também ser citado o apoio que o CNPq me deu alongo de dois anos de estudo. Somente quando meu prazo de financiamento foi concluído é que me dei conta do quanto isto estava me ajudando a estudar sem ter que me preocupar com papel e tinta para impressora, com xerox, com livros e com algumas contas a pagar, é claro.

Agradeço aos meus pais, Marluce e Barros que apesar de não morarmos mais sob o mesmo teto, sempre estiveram atentos ao que poderia estar tirando a minha serenidade. Eles que sempre telefonaram ou foram ao meu encontro na tentativa de resolver qualquer problema que estivesse aos seus alcances. Sei que tenho uma dívida enorme com vocês. E sei também que não há dinheiro que a pague. Muito obrigada!

Gostaria de fazer um agradecimento especial ao meu esposo Marcos. Ele que esteve dia-a-dia comigo, agüentando meu nervosismo, minhas reclamações, meu pranto. Ele que me conheceu no início deste mestrado e que não fazia idéia do quanto temos que nos dedicar a ele. Ele que nem sempre soube compreender a minha ausência e falta de atenção para come ele, e ainda assim continuou me dando forças para ir em frente. Obrigada meu Coração!

Por fim, agradeço a Alina Spinillo, minha orientadora neste Mestrado. Ela que me recebeu de portas abertas desde o início, quando eu ainda nem sabia direito que projeto propor. Agradeço a ela que sempre demonstrou acreditar no meu potencial. Que sempre buscou me dar alguma “injeção de entusiasmo” quando eu me mostrava desmotivada. Agradeço pelas suas preciosas dicas, por ter sabido valorizar as minhas idéias e por ter me mostrado que tudo isto é apenas o começo...

Resumo

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, o ensino de frações e o de operações com frações deve ser formalmente introduzido, respectivamente, na 3ª e 4ª séries do Ensino Fundamental; séries correspondentes ao período em que as crianças disporiam dos conhecimentos necessários para a compreensão de tais conteúdos escolares. Entretanto, vários pesquisadores têm demonstrado que crianças pequenas conseguem solucionar problemas que envolvem conceitos lógico-matemáticos (como a proporção e a probabilidade) através de estimativas quando são oferecidos pontos de referência que servem como âncoras ao raciocínio. Assim, o objetivo do presente estudo foi investigar se crianças que ainda não foram formalmente instruídas sobre frações resolveriam adições de frações através de estimativas, tendo por base dois pontos de referência: *metade* e *inteiro*. Participaram do estudo 42 crianças de classe média de escolas particulares da cidade do Recife, igualmente divididas em alunos da 2ª série e alunos da 3ª série do Ensino Fundamental I. Cada criança foi, individualmente, solicitada a resolver adições de fração em quatro tarefas. A Tarefa 1 era composta por seis adições de frações unitárias, formadas por duas parcelas iguais ou por duas parcelas diferentes. Nesta tarefa era fornecido o referencial de *metade* como âncora para a resolução das operações. A Tarefa 2 consistia na resolução de nove adições de frações unitárias, formadas por três parcelas iguais ou por duas parcelas iguais e uma diferente ou, então, por três parcelas diferentes. Nesta tarefa era oferecido o referencial de *inteiro* como âncora para a resolução. A Tarefa 3 consistia em uma tarefa de equivalência entre operações de fração. Eram apresentadas 12 adições de frações, sendo que em seis delas era fornecida a fração ½ (referencial de *metade*) como âncora para compor a equivalência, e nas outras seis adições eram fornecidos outras unidades fracionárias como referência (1/4 ou 1/6 ou 1/3). A Tarefa 4 era composta por seis adições de frações apresentadas em uma folha de papel através do simbolismo formal matemático próprio de frações. Os resultados foram analisados em relação às séries, ao número de acertos em cada item e em relação ao tipo de justificativa ou estratégia apresentada pelas crianças. De modo geral, não foram encontradas diferenças significativas entre as séries com relação ao número de acertos. Nas Tarefas 1 e 2, observou-se que adição de frações com parcelas iguais eram mais difíceis do que quando as parcelas eram diferentes. Na Tarefa 3, o desempenho das crianças foi significativamente superior nos itens em que era oferecida a fração ½ como referencial do que quando outras unidades fracionárias eram disponibilizadas como âncora na resolução das operações. Na Tarefa 4, não houve acerto por parte das crianças que tentaram resolver as operações utilizando a representação matemática formal, como solicitado. Com relação às justificativas e estratégias verificou-se que os acertos estavam freqüentemente associados àquelas em que *metade* e *inteiro* eram explicitamente utilizados como referenciais pelas crianças. A partir dos dados, concluiu-se que: (1) crianças, mesmo antes da instrução formal sobre frações, são capazes de resolver operações com frações através de estimativas e do uso referenciais como *metade* e *inteiro*; (2) o referencial de *metade*, como ocorre em relação a outros conceitos relacionais, é uma ferramenta importante na resolução de adições de fração; (3) as crianças de ambas as séries apresentam um mesmo nível de conhecimento intuitivo sobre frações. Os dados apresentam contribuições relevantes para a psicologia e para a educação matemática nas séries do ensino fundamental.

Abstract

According to the National Curriculum Parameters, the teaching of fractions and operations with fractions should be formally introduced, respectively, in the 3rd and 4th grades of Elementary School Education. These grades correspond to the period in which children have the necessary knowledge for the comprehension of such subjects. However, a number of researchers have demonstrated that younger children can solve problems that involve logical-mathematical concepts (such as proportion and probability) through estimations when they are offered reference points that serve as anchors in the thinking process. Thus, the aim of the present study was to investigate whether children who have not been formally instructed on fractions could solve the addition of fractions through estimations, having two reference points as their base: *half* and *whole.* 42 middleclass children from private schools in the city of Recife participated in the study, with equal divisions of 2nd and 3rd grade elementary school students. Each child was asked individually to solve the addition of fractions in four separate tasks. Task 1 was made up of 6 fraction addition units formed by two equal parcels and two unequal parcels. The reference given in this task as an anchor for solving the operations was *half.* Task 2 consisted of solving nine fraction addition units, formed by three equal parcels, or by two equal parcels and one different, or by three unequal parcels. The referential given in this task as the anchor for solving the problems was *whole.* Task 3 was a task of equivalence between fraction operations. 12 fraction addition units were presented. In six of these the ½ fraction was offered (reference of *half*) as the anchor for composing the equivalence. In the remaining six additions other fraction units were offered as references (1/4 or 1/6 or 1/3). Task 4 was made up of six fraction additions displayed on a sheet of paper using the formal mathematical symbolism. The results were analyzed in relation to the grades, the number of correct answers for each item and in relation to the type of justification or strategy the children exhibited. In general, no significant differences were found between the grades regarding the number of correct answers. In Tasks 1 and 2, it was observed that the addition of fractions with equal parcels was more difficult than when the parcels were different. In Task 3, the children's performance was significantly higher for the items in which the ½ fraction was offered as the referential than when other fraction units were given as anchors in the solving of the operations. In Task 4, the children were unsuccessful in arriving at correct answers when trying to solve the operations by using the formal mathematical representation. In regards to the justifications and strategies, it was verified that correct answers were often associated to the operations in which the children explicitly utilized *half* and *whole* as references. From the data it can be concluded that: (1) even before any formal instruction on fractions, children are able to solve operations with fractions through estimations and the use of references such as *half* and *whole*; (2) the reference of *half*, as occurs in regards to other relational concepts, is an important tool in the solving of fraction additions; (3) children in both grades display the same level of intuitive knowledge on fractions. The data represent relevant contributions to psychology and to mathematic education in elementary school teaching.

Apresentação

O objetivo do presente estudo foi investigar como crianças que ainda não foram formalmente instruídas sobre frações resolvem adições de frações através de estimativas, a partir de dois pontos de referência: *metade* e *inteiro*. A literatura tem apresentado vários estudos em que mostra o êxito de crianças pequenas ao tentar resolver problemas que envolvem conceitos lógico-matemáticos complexos como fração, proporção e probabilidade através de estimativas. A utilização de pontos de referência também tem sido apresentado como um aspecto importante para a estimativa das crianças, inclusive com relação a operações com frações numéricas, visto possibilitarem maior noção quanto à veracidade ou falsidade do resultado encontrado para o problema. Para esta investigação as crianças foram solicitadas a resolver quatro tarefas diferentes de adição de frações, nas quais eram oferecidos os referenciais de *metade* ou de *inteiro*, ou nenhum referencial, para as resoluções.

O Capítulo 1 apresenta as considerações teóricas acerca dos conceitos lógico-matemáticos; das estimativas; da utilização de pontos de referência; dos principais estudos sobre adição de frações; além de uma breve colocação sobre a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, mais especificamente do campo conceitual das estruturas multiplicativas.

O Capítulo 2 refere-se ao método. Nele são apresentados em detalhes os objetivos do estudo, o planejamento experimental e os procedimentos adotados.

O Capítulo 3 apresenta os resultados relativos ao desempenho geral das crianças em relação ao número de acertos e erros; e em relação ao tipo de justificativa ou estratégia apresentadas. A análise de cada tarefa é apresentada separadamente.

O Capítulo 4 apresenta as discussões dos principais resultados e as respectivas conclusões. Também são apresentadas neste capítulo as limitações do estudo bem como as contribuições à educação e sugestões para pesquisas futuras.

Índice

Índice de Quadros

Índice de Tabelas

CAPÍTULO 1
CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

1.1. Os conceitos lógico-matemáticos, as estimativas e os pontos de referência

Apesar dos avanços no ensino de matemática na educação fundamental, o ensino de frações continua se caracterizando por uma prática basicamente voltada para a aprendizagem da aplicação mecânica de algoritmos, sendo um grande desafio para os educadores que procuram desenvolver em seus alunos uma real compreensão deste conceito. O ensino de frações tem sido muito questionado nos últimos anos, recebendo críticas quanto à maneira como a escola e os livros didáticos tratam este conceito. Mesmo admitindo a complexidade conceitual, lingüística e notacional que caracterizam o tema, estudiosos e educadores apontam inúmeras limitações quanto ao ensino de frações no contexto escolar.

Com relação ao ensino da aritmética de frações, Hilton (1980) destaca que há, por trás do modo como esta é ensinada, a idéia da aritmética como a aprendizagem da técnica de manipulação algorítmica e não como um conteúdo matemático com suas riquezas conceituais e importância para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Por exemplo, ensina-se que para adicionar frações deve-se 'achar o menor denominador comum'. Entretanto, dependendo do caso, esta regra pode ter três diferentes conotações: 1) se os denominadores forem iguais este já é o menor denominador comum; 2) se um denominador é múltiplo de outro, deve-se utilizá-lo como o menor denominador comum; 3) se os denominadores não são múltiplos pode-se achar o menor denominador comum através da multiplicação ou da adição dos denominadores. Observa-se, então, que, ao longo do ensino, não há um processo sistemático que favoreça o aluno a identificar quando deve ou não multiplicar os denominadores para encontrar o menor múltiplo comum. Porém, o aluno acredita que aprendeu um procedimento para a resolução de adição de frações.

Segundo Hilton (1980) “a intuição deveria desempenhar um papel muito maior na aritmética de frações” (p. 7), no sentido de que não se deveria esperar que as crianças utilizassem o algoritmo como um auxílio para calcular operações como ½ + ½, ou ½ + ¾, uma vez que são operações passíveis de serem realizadas com base, apenas, nos conhecimentos das crianças sobre o que representa cada uma dessas frações.

Assim, este estudo tem por objetivo examinar as concepções iniciais das crianças para adicionar frações antes da instrução formal desse conteúdo no espaço escolar. A base para a resolução das operações será o uso de estimativas, visto que, como o mencionado por diversos autores (Correa, 1996; Correa & Meireles, 2000; Correa, Spinillo, Brito & Moro, 1998; Spinillo, 1996a; 1996b; 1997a; 1997b; Streefland, 1984; 1985) é mais fácil para as crianças pequenas raciocinarem com base em estimativas (porque privilegiam o raciocínio em termos relativos como mais/menos que, maior/menor que) do que com base em cálculos numéricos precisos (que exigem um raciocínio em termos absolutos). Aliás, estimativas tem se revelado um poderoso recurso na investigação no raciocínio matemático, principalmente ao que concerne às noções iniciais das crianças sobre proporção (Spinillo, 1992, 1997c; Spinillo & Bryant, 1991, 1999; Lo & Watanabe, 1997) e probabilidade (Spinillo, 1997a, 2002). Como o observado por Correa, Spinillo, Brito e Moro (1998), o uso de tarefas não-numéricas e de estimativas favorece a resolução de problemas que envolvem conceitos complexos, uma vez que é dada à criança a oportunidade de pensar através de relações lógicas e não, necessariamente, através de cálculos numéricos precisos.

Para realizar estimativas, muitas vezes, as crianças se apóiam em âncoras ou pontos de referência para estimar quantidades e relações. Essas âncoras, como mencionado por Sowder (1995), auxiliam a criança a desenvolver um sentido numérico a respeito de vários conceitos matemáticos.

Nos estudos conduzidos por Spinillo (1992, 1997a, 1997c) é possível observar que crianças desde os seis anos de idade utilizam o referencial de metade como uma âncora para solucionar tarefas de proporção e probabilidade. Inclusive, como recentemente verificado por Spinillo (prelo). A autora examinou a possibilidade de que crianças pudessem aprender sobre proporções, usando este referencial de maneira sistemática, e transferindo sua aplicação para tarefas de proporção consideradas complexas. A partir de um planejamento experimental envolvendo pré, pós-teste e uma intervenção, 180 crianças de 6 a 8 anos foram divididas em três grupos: um em que apenas realizavam uma tarefa de proporção, um grupo controle e um grupo experimental. O desempenho no pós-teste foi melhor do que no pré-teste apenas para as crianças que receberam a intervenção, observando-se, inclusive que estas crianças haviam sido mais bem sucedidas no pós-teste do que as crianças dos demais grupos. Concluiu-se que crianças podem ser ensinadas a fazer julgamentos proporcionais, sendo a estratégia de 'metade' um referencial importante que auxilia a lidar com as quantidades e as relações cruciais ao raciocínio proporcional. Este referencial auxiliava as crianças a superar muitas das dificuldades iniciais experimentadas, passando, inclusive a adotar julgamentos proporcionais em suas respostas.

Zunino (1995) também destaca a importância do cálculo por estimativas no sentido de incentivar as crianças a antecipar e a julgar resultados como estratégia de resolução de problemas. Segundo ela, esta pode ser considerada uma estratégia importante do ponto de vista cognitivo, pois fornece à criança condições para avaliar se o resultado encontrado corresponde ou não às expectativas. Este é o caso, por exemplo, do que foi comentado por Sowder (1995) sobre a utilização do número *um* como âncora para estimar um valor aproximado para a adição de 7/8 e 9/10. Ela relata que, em situações semelhantes, as crianças podem calcular que 7/8 + 9/10, por ser uma adição onde ambas as frações são um pouco menores que um, terá como resultado um valor um pouco menor que dois. Com base em parâmetros como este, as crianças podem perceber com maior facilidade se o resultado encontrado está correto ou não.

Spinillo (2002) sobre probabilidade também investigou a capacidade de estimar de crianças de 7 a 8 anos de idade. A autora observou que crianças, mesmo numa série em que ainda não receberam a instrução formal sobre este conteúdo, são capazes de resolver problemas que envolvam tal noção com base em seus conhecimentos intuitivos.

Estes estudos mostram, portanto, que diversos conceitos lógico-matemáticos considerados complexos podem ser resolvidos através de estimativas e do uso de pontos de referência, como ocorre, por exemplo, com a fração, a proporção e a probabilidade.

Assim, cabe perguntar: Quais seriam os pontos de referência importantes para as crianças quando lidam com frações? É possível supor que a idéia de *metade* e a idéia de *todo* sejam pontos de referência relevantes para se estimar frações, em especial, para lidar com operações de adição de frações? Partindo dessa perspectiva e considerando que as noções iniciais espontâneas das crianças são relevantes para a aquisição de conceitos matemáticos diversos, o presente estudo tem por objetivo geral investigar se crianças seriam capazes de resolver adições de frações através de estimativas e através de pontos de referência importantes para o conceito de fração como *metade* e *todo*.

Antes, porém, de descrever o estudo propriamente dito e seus resultados, torna-se necessário apresentar vários aspectos considerados como importantes para o estudo de adição de frações. Primeiramente, será realizada uma breve descrição da origem histórica dos números racionais, destacando a sua importância para o desenvolvimento da cognição humana. Em seguida, será realizada uma breve apresentação da teoria dos campos conceituais de Vergnaud; mais especificamente, o campo conceitual das estruturas multiplicativas como forma de situar a inserção das frações nesta área. Em seguida serão apresentados estudos recentes sobre a formação do conceito de fração, suas dificuldades epistemológicas e didáticas. E, por fim, serão relatados alguns estudos mais específicos sobre adição de frações.

1.2. A construção do número fracionário: perspectiva histórica

Na escola, as crianças pequenas quando são introduzidas ao conceito de fração, aprendem que fração significa 'um pedacinho de alguma coisa', uma parte não específica de um todo ou algo menor que o todo. Esta parece ser a primeira idéia que a criança desenvolve sobre fração (Lima & Brito, 2001).

Simbolicamente, a fração é representada por um *numerador* e um *denominador*, separados por uma linha horizontal ou traço de fração. Enquanto que o numerador indica quantas partes são tomadas do inteiro, isto é, o número inteiro que é escrito sobre o traço de fração; o denominador indica em quantas partes o inteiro é dividido, sendo este número, necessariamente diferente de zero. Na linguagem matemática, a fração é utilizada para representar os elementos que não fazem parte do conjunto dos números inteiros, constituindo-se como uma das formas de representação do número racional (representados em seu conjunto pela letra Q) (Silva & Sodré, 2000).

A noção de fração, diferentemente do número inteiro que é o mais antigo na história da matemática, surgiu relativamente muito tarde. Ao que parece, as tribos primitivas praticamente não tinham necessidade de usar o número fracionário. Para as suas necessidades quantitativas era possível escolher unidades bastante pequenas para eliminar a necessidade de usar frações (Boyer, 1974).

Historicamente, o homem introduziu o uso de frações quando começou a medir e representar medidas. As frações surgiram a 3000 anos antes de Cristo, quando os geômetras dos faraós do Egito, que marcavam as terras às margens do rio Nilo para a sua população, tinham seus trabalhos prejudicados devido ao período de inundação do rio (de junho a setembro). Com a inundação, as marcações eram destruídas e os geômetras precisavam remarcar as terras utilizando uma marcação com cordas. Esse tipo de marcação, que era uma espécie de medida, era denominado *estiradores de cordas* (Silva & Sodré, 2000).

Nesta época, as cordas eram marcadores muito úteis, pois podiam ser esticadas servindo para verificar quantas vezes a unidade de medida utilizada estava contida nos lados do terreno. Mas, como nem sempre cabia um número inteiro de vezes nos lados do terreno, surgiu a necessidade de se criar um novo tipo de número: *o número fracionário*. Durante muito tempo, os egípcios usaram apenas as frações que possuíam o número 1 dividido por um número inteiro (frações unitárias): 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 etc. Essas frações ficaram conhecidas por frações egípcias (Silva & Sodré, 2000).

As frações egípcias, entretanto, não eram consideradas como números, pois os egípcios não tinham a noção da fração geral *m/n,* como *m* vezes o inverso de *n*. Para eles, a noção de número estava relacionada, unicamente, aos números naturais. As frações ordinárias, por sua vez, foram descobertas através da adição de frações unitárias (5/6=1/2+1/3) sendo, posteriormente, também utilizadas por eles (Lima & Brito, 2001).

Outros povos também passaram a utilizar os números fracionários. Os babilônios, por exemplo, foram os primeiros a atribuir às frações uma notação racional. Eles usavam, em geral, frações com denominador 60, possivelmente porque o número 60 é um número menor do que 100 e com uma maior quantidade de divisores inteiros. Já os romanos usavam constantemente frações com denominador 12, talvez porque o número 12, apesar de pequeno, possui um grande número de divisores inteiros (Banzatto & Sodré, 2000).

Os chineses, em função da idéia de decimal em pesos e medidas, iniciaram a idéia de decimalização das frações. Eles já conheciam as regras para operar com frações, para as quais achavam o mínimo denominador comum. Eles usavam analogias como auxílio para tornar os seus cálculos mais fáceis. Tais analogias estavam sempre relacionadas às diferenças entre os sexos: referia-se ao numerador como “filho” e ao denominador como “mãe” ou então da ênfase sobre Yin e Yang (opostos, especialmente em sexo) (Boyer, 1974).

Ao longo dos anos, muitas notações foram usadas para representar frações. Porém, a maneira atual de representação fracionária data do século XVI, sendo iniciada pelos hindus com o uso da barra inclinada (72/2125, por exemplo) e aperfeiçoada, mais tarde, pelos árabes que sugeriram o uso da barra horizontal (Lima & Brito, 2001).

Enfim, como pode ser observada, a fração surgiu a partir de uma necessidade do homem em resolver questões práticas do dia-a-dia, para as quais a representação de número de que dispunham não contemplava tal necessidade. Portanto, foi num contexto de resolução de problemas que surgiu a necessidade de se criar uma outra medida que fosse a mais próxima possível da real medida utilizada.

1.3. Por que estudar o desenvolvimento de um conceito sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais?

A *teoria dos campos conceituais* formulada por Vergnaud (1982, 1995) é uma teoria que apresenta uma concepção interativa do conceito, permitindo situar e estudar, do ponto de vista de seu conteúdo, as relações e rupturas entre os conhecimentos (habilidades e informações expressas) que o compõem. A descrição de um conteúdo é feita com base na análise tanto das situações e problemas envolvidos como dos procedimentos utilizados pelas crianças para lidar com tais situações, o que possibilita que seja feita uma análise da relação entre os conceitos enquanto conhecimentos explícitos e as invariantes operatórias implícitas nos comportamentos dos sujeitos em determinada situação.

Neste sentido, um *campo conceitual* pode ser definido como "um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, procedimentos e representações simbólicas firmemente unidas uns aos outros" (Vergnaud, 1982, p.12). Têm-se como exemplos de campos conceituais, o campo das estruturas aditivas, das estruturas multiplicativas e da álgebra.

O processo de experiência pragmática desempenha importante papel na conceptualização na teoria dos campos conceituais. Segundo Vergnaud (1995), é através das situações e dos problemas que as crianças têm para resolver que um conceito adquire sentido. Ressalta-se, porém, que, considerar a elaboração pragmática na formação do conceito não exclui a análise do papel da linguagem e do simbolismo na conceptualização. Ao contrário, segundo Franchi (1999), com a teoria dos campos conceituais é possível "articular competências e concepções constituídas em situação, e os problemas práticos e teóricos em que essas competências e concepções se constituem" (p. 164).

De acordo com Vergnaud (1995), do ponto de vista psicológico e didático da formação de conceitos matemáticos, o conceito deve ser compreendido como um conjunto de invariantes que podem ser utilizados na ação, em meio às diversas situações que constituem a referência de suas propriedades, e do conjunto de esquemas utilizados pelos sujeitos nessas situações. Deste modo, para que o conceito (C) possa ser compreendido em seu desenvolvimento e funcionamento é preciso considerar três conjuntos (Vergnaud, 1985):

S – conjunto das situações que dão sentido ao conceito (referência);

I – conjunto das invariantes em que se baseia a operacionalidade dos esquemas (significado) e que estão subjacentes à análise da situação pelo sujeito;

Y – conjunto das formas de linguagem (ou não) que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (significante).

$$\boxed{C = \{S, I, Y\}}$$

Nesta definição Vergnaud (1982) acrescentou, ainda, algumas observações importantes:

- Em primeiro lugar, não se deve pensar que em uma dada situação estejam envolvidas todas as propriedades de um conceito, pois para que todas as propriedades de um conceito possam ser enumeradas, seria necessário referir-se a várias (ou inúmeras) espécies de situações;
- Em segundo lugar, uma dada situação, geralmente, não envolve um único conceito, exigindo para a sua análise a consideração de vários conceitos. Por exemplo: as estruturas multiplicativas exigem o conceito de número racional, fração, razão, multiplicação, divisão, funções lineares e não-lineares etc;
- E, em terceiro lugar, a formação de um conceito pode levar um longo período de tempo sofrendo, ao longo do percurso de sua formação, muitas interações e defasagens; o que pode ser observado, principalmente, através do comportamento dos sujeitos na resolução de problemas.

Logo, como o destacado por Vergnaud (1985), para que o conceito possa ser compreendido, não se deve considerar apenas os invariantes ou as situações ou o significante, mas esses três aspectos em seu conjunto: “Não se pode falar em conceito na ausência de um significante” e nem dissociado dos “aspectos que se situam no plano do significado e que não são diretamente observáveis” (p. 4).

A operacionalidade de um conceito compreende uma variedade de situações e manifesta-se sob uma variedade de ações e de esquemas. No plano do significado, os esquemas formam a articulação indispensável entre as situações de referências e os significantes simbólicos, sendo formados de invariantes, predição, inferências e regras de ação como apontado por Franchi (1999):

- *Invariantes operatórios* (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação): são os invariantes que permitem que o sujeito possa reconhecer quais são os elementos relativos à dada situação e apreender a informação sobre a situação a ser tratada. São os invariantes operatórios que determinam as diferenças entre um esquema e outro, sendo essenciais para a formação dos campos conceituais;
- *Predição*: com a predição os sujeitos podem antecipar o objetivo a ser alcançado, os efeitos a serem considerados e as possíveis etapas intermediárias;
- *Regras de ação*: são as regras de ação que “permitem gerar a seqüência de ações pelo sujeito” (p. 166). São regras do tipo “se... então”;
- *Inferências*: com base na disponibilidade das informações e do sistema de invariantes operatórios de cada sujeito este poderá calcular as regras e as antecipações de cada situação.

Para ilustrar o que poderia ser chamado de invariantes em um conceito qualquer será utilizado o conceito de fração como exemplo, por ser o tema central deste trabalho.

Baseados nos estudos de Piaget sobre as condições essenciais à existência de fração, Lima (1993) e Nunes e Bryant (1997) destacaram alguns invariantes presentes na organização das ações do sujeito para a compreensão deste conceito. São eles:

- *Uma divisão eqüitativa das partes*, ou seja, o todo precisa ser dividido em partes iguais para que cada parte seja considerada uma fração;
- *O esgotamento do to*do, ou seja, a impossibilidade da existência de remanescentes;
- *A relação entre o número de partes e o número de cortes necessários para obter as* partes, ou seja, para dividir um todo contínuo em três partes iguais serão necessários, apenas, dois cortes;
- *A relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido*, ou seja, quanto maior o número de partes menor o tamanho de cada parte;
- *A soma de todas as partes constituídas a partir do todo é igual ao todo inicial* (“*princípio da invariância”)*, ou seja, com a divisão do todo em partes, a unidade não é alterada.

A compreensão do conceito de fração, como pode ser observado, envolve a compreensão de outros conceitos e conhecimentos que poderão, nas fases iniciais da aprendizagem de competências e conceitos, estar implícitos ou mesmo insuscetíveis de explicitação, mas que são extremamente importantes, pois orientam o desenvolvimento da ação. Estes conhecimentos implícitos são denominados por Vergnaud de ‘conhecimentos-em-ação’.

Outra observação feita por Vergnaud (1990, citado por Franchi, 1999) diz respeito às competências das crianças para solucionar determinadas situações. Segundo ele, dependendo da situação, nem sempre as crianças disporão das competências necessárias para solucioná-las. Muitas vezes, elas precisarão de tempo para reflexão, de exploração da situação e de sucessivas tentativas para que possa alcançar ou não o sucesso. Porém, em qualquer que seja a situação, a criança sempre disporá de um ou mais esquemas que lhes servirão de “guia” na condução do problema. Daí ser importante que, na análise do funcionamento cognitivo do sujeito, sejam levadas em consideração “as variáveis da situação, as informações já disponíveis no repertório cognitivo do sujeito e as operações tendo em vista o conteúdo envolvido” (p. 160).

De acordo com Franchi (1999), os erros sistemáticos apresentados pelos alunos têm sua origem central na falta de uma conceptualização adequada. Em muitos casos, um sujeito pode aplicar um esquema a uma classe mais restrita ou mais ampla do que aquela à qual poderia ser aplicado eficazmente (Vergnaud, 1995): quando o sujeito aplica um esquema a classe mais restrita, buscará fazer analogias e reconhecer as semelhanças e diferenças em determinados critérios presentes nas classes de situações novas e nas classes de situações em que o esquema já é operatório; por outro lado, quando o sujeito aplica um esquema que tem um alcance restrito a uma classe mais ampla, necessitará decompor os diferentes elementos que podem ser “recompostos de forma diversa para as diferentes subclasses de situações, eventualmente acrescentando elementos cognitivos suplementares” (Vergnaud, 1995, p. 5).

Deste modo, um *esquema* pode ser compreendido como “a organização invariante do comportamento para uma classe de situações dadas, onde estão contidos os conhecimentos-em-ação do sujeito, representados pelos elementos cognitivos que fazem com que a ação seja operatória” (p. 2), também designados pelas expressões ‘conceito-em-ação’ e ‘teorema-em-ação’, ou então por ‘invariantes operatórios’ (Vergnaud, 1995).

Quanto ao que pode ser denominado de *teorema-em-ação*, cabem algumas considerações. Segundo Vergnaud (1998), um *teorema-em-ação* não é um teorema no sentido convencional. Ele representa as relações matemáticas utilizadas pelos sujeitos ao escolherem determinada operação ou uma sucessão de operações para resolver um problema, mas, geralmente, não são explicitamente relatadas.

De qualquer modo, os teoremas-em-ação têm grande importância para o estudo do conhecimento matemático de crianças, já que é um caminho de análise das estratégias intuitivas dos estudantes e através dos quais será possível ajudá-los a transformar o conhecimento intuitivo em conhecimento explícito. Analogamente, um *conceito-em-ação* também não é um conceito propriamente dito, já que se trata de um conceito implícito, mas que, no entanto, é considerado como pertinente (Vergnaud, 1998).

Em síntese, uma vez que o conhecimento emerge de problemas a serem resolvidos e de situações a serem dominadas, considerar tais aspectos é de extrema importância para a educação matemática onde, na maioria dos casos, a tendência é ensinar os algoritmos, quando muito, relacionados a uma classe muito estrita de problemas (Vergnaud, 1982).

Para Vergnaud (1982), não é possível fazer oposições entre os aspectos teóricos e práticos do conhecimento, pois nenhum algoritmo ou procedimento poderia se desenvolver e existir desvinculado de qualquer idéia das relações envolvidas. Neste mesmo sentido, os conceitos teóricos ou teoremas estarão vazios de significado caso não possam ser aplicados a alguma situação prática (Vergnaud, 1982).

Observa-se, porém, que, como as crianças formam seus conceitos a partir das situações a que são submetidas, por vezes existirão grandes lacunas entre as suas idéias e o conceito matemático em foco. O conceito de fração é um exemplo bem claro da existência dessas lacunas, pois dependendo do conjunto de situações em que as frações são apresentadas, o aluno poderá compreender ou não o porquê das frações serem consideradas ferramentas tão poderosas para o pensamento. Como o destacado por Vergnaud (1982), apesar do conceito de fração (para valores como ½ ou ¼) ter suas raízes em atividades que já são significativas para as crianças desde os 8 anos de idade, "o conceito de número racional é uma grande, longa e duradoura fonte de dificuldades para os jovens e adultos" (pp. 5-6).

Assim, torna-se importante, na investigação da formação dos conceitos matemáticos, estudar o conceito inserido numa variedade de situações-problema que o torne funcional e significativo, para que as crianças sejam impulsionadas a buscar outras relações e questões ainda não utilizadas, formulando outros procedimentos que poderão conduzi-lo ao acerto ou ao erro. Nessa perspectiva, analisar os procedimentos e os erros do aluno torna-se um recurso muito rico para a elaboração de novas situações. Conhecendo quais são as dificuldades do aluno e quais os erros que podem decorrer em determinadas circunstâncias, novas situações poderão ser criadas com o objetivo de transformar tais conceitos em conceitos mais sofisticados e abrangentes (Vergnaud, 1982).

Devido a isso, Vergnaud (1982) considera a resolução de problemas como "a fonte e o critério do conhecimento operacional" (p. 2). Segundo ele, as idéias das crianças somente poderão se transformar quando conflitadas com situações que elas não consigam resolver, posto que diferentes problemas, geralmente, demandam o domínio de diferentes propriedades de um mesmo conceito.

Considerando tais aspectos, a compreensão sobre um dado conceito precisa, então, ser investigada através de diferentes formas de representação. Isso contrasta com o que, geralmente, ocorre no ensino de frações na escola, que se inicia a partir de algumas relações entre quantidades e representações geométricas, passando, em seguida, a ser utilizada, quase que unicamente, a representação formal simbólica. Acrescenta-se, ainda, que a representação formal simbólica quando associada ao uso do algoritmo passa a ser bem mais valorizada na escola que outras formas de representação, como afirmam diversos autores. (e.g.; Silva, 1997; Carraher, 1993)

Neste sentido, pretende-se no presente estudo investigar as noções de adição de frações em situações verbais e simbólicas, explorando-se, também, diferentes aspectos da fração: ordinária, mista; e a noção de inteiro. Essas situações terão por base algumas noções e procedimentos que as crianças já dominam desde cedo: noção de *metade*, de *todo* e a habilidade em estimar.

1.4. A inserção do número fracionário no Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas

O campo conceitual das estruturas multiplicativas é caracterizado por todas as situações que envolvem problemas de proporção simples ou múltipla, para as quais, geralmente, precisa-se multiplicar ou dividir ou utilizar a combinação dessas duas operações. Vários conceitos matemáticos fazem parte deste campo conceitual, tais como: número racional, fração, razão, multiplicação e divisão, funções lineares e não-lineares, vetor espacial e análise dimensional. (Vergnaud, 1998)

Segundo Vergnaud (1998), os limites cognitivos entre campos conceituais não são necessariamente bem definidos, haja vista, por exemplo, a filiação existente entre o elemento aditivo e as estruturas multiplicativas. Porém, este autor considera perfeitamente possível estudar tais campos conceituais em separado devido às especificidades existentes em cada um. Estudar um conceito em termos de seu campo conceitual implica considerar que os conceitos matemáticos estão arraigados em situações e problemas. Analisar e classificar matematicamente estas situações e os procedimentos utilizados pelos estudantes se constitui numa ferramenta indispensável de análise. Assim, os componentes cognitivos (invariantes) que são as categorias, os objetos, as propriedades, as relações, e os teoremas-em-ação, precisam ser levados em consideração no estudo para que o pesquisador possa obter uma maior compreensão dos processos utilizados pelos sujeitos.

As estruturas multiplicativas são constituídas por relações quaternárias, uma vez que "os mais simples problemas de multiplicação e divisão implicam na proporção simples de duas variáveis, uma em relação a outra". (Vergnaud, 1995, p. 14)

As relações quaternárias envolvem quatro elementos entre si, como por exemplo: dezoito sobre quinze é igual a seis sobre cinco (18/15 = 6/5), ou, matematicamente, a/b = c/d que se lê *a* está para *b* assim como *c* está para *d*. Observa-se, então, que as relações quaternárias englobam a identidade de duas relações binárias. E que estas últimas, por sua vez, envolvem a relação de dois elementos entre si, que podem ser objetos inertes, pessoas, números, expressões algébricas, conjuntos ou relações. Por exemplo: 20 é maior que 5. A diferença, entretanto, entre as relações binárias e as quaternárias é que, freqüentemente, as relações quaternárias põem em jogo dois conjuntos de referência e não um só, bem como a correspondência entre eles (Vergnaud, 1991, 1995).

As relações quaternárias podem ser representadas de várias formas, que são análogas às utilizadas nas relações binárias e terciárias. Existe a linguagem natural, a escrita algébrica habitual, a escrita algébrica polaca (que não é utilizada na escola primária), o esquema sagital e o quadro cartesiano.

a) Linguagem natural:

'Dezoito sobre quinze é igual a seis sobre cinco.'

b) Escrita algébrica habitual:

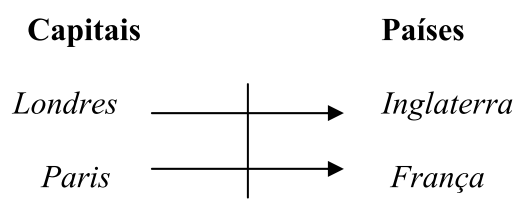
18/15 = 6/5

c) Escrita algébrica polaca:

R (p, m, j, e) que se lê: "existe uma relação *R* entre *p, m, j, e*". Ou seja, a mesma relação existente entre *p* e *m*, existe entre *j* e *e*.

d) O esquema sagital e o quadro cartesiano:

Estes podem ser combinados "para representar as relações quaternárias, uma vez que põem em jogo dois conjuntos distintos e uma relação entre eles": (Vergnaud, 1991, p. 22):



Observa-se neste exemplo que Londres e Paris se relacionam por pertencerem ao conjunto das Capitais e Inglaterra e França por pertencerem ao conjunto dos países. Ao mesmo tempo, o esquema apresentado indica a relação existente entre cada país e sua capital, mostrando a correspondência entre ambos.

É justamente porque este campo conceitual implica em multiplicações e divisões que os números fracionários podem ser analisadas dentro do campo das estruturas multiplicativas, até mesmo porque as crianças compreendem primeiramente as frações como operadores, como relações ou como quantidades antes de compreendê-las como números que podem ser adicionados, subtraídos, multiplicados e divididos.

Por isso que os números fracionários não aparecem como números puros no campo das estruturas multiplicativas, mas como medidas e relações; sendo utilizadas de diversas maneiras: seja para representar uma parte de um todo; seja como uma magnitude fracionária (não podendo ser expressa por um número inteiro de unidades); seja como um par ordenado p/q de símbolos; seja como uma relação que une duas magnitudes do mesmo tipo (Vergnaud, 1983).

Mesmo que um estudioso dirija sua atenção apenas para um dos conceitos que compõem as estruturas multiplicativas, ressalta-se que será impossível estudá-lo à parte dos demais conceitos deste campo, uma vez que eles não são matematicamente independentes uns dos outros. Estudar frações, por exemplo, sem considerar os conceitos a elas interconectados (proporção, razão, multiplicação, divisão, entre outros) se constituiria numa falha conceitual irreparável para o estudo de sua origem e desenvolvimento.

Uma maneira de relacionar fração com outros conceitos próprios das estruturas multiplicativas, em se tratando de crianças jovens, é investigar este conceito a partir de noções que estão associadas a outros conceitos multiplicativos, como a noção de *metade*, por exemplo. Esta noção parece ser relevante para diversos conceitos matemáticos das estruturas multiplicativas, como proporção e probabilidade. A noção de metade, portanto, pode ser vista como um elemento comum, presente na forma de raciocinar de crianças quando resolvem tarefas com fração, proporção e probabilidade. No entanto, embora a noção de metade e muitas vezes até a sua forma fracionária de representação seja familiar às crianças, os estudos com fração não parecem atentar para sua importância. A presente investigação pretende, em certo sentido, contribuir para uma reflexão nesta direção.

1.5. Pesquisas recentes sobre a formação do conceito de fração

Vários estudos têm apontado que, desde muito cedo, as crianças pequenas possuem um conhecimento intuitivo sobre frações, conhecimento este que antecede a iniciação formal (escolar) dos números racionais que são, geralmente, introduzidos a partir do segundo ciclo do Ensino Fundamental (3ª e 4ª séries) (Pitkethly & Hunting, 1996).

Os esquemas intuitivos compreendem as imagens, as experiências vividas e as ferramentas de pensamento, formados a partir de um grande número de situações específicas vivenciadas no dia-a-dia e que servirão de base para a construção do conhecimento formal. Segundo Pitkethly e Hunting (1996), são os esquemas intuitivos que permitem que as crianças possam criar soluções para determinados problemas e elaborar o seu próprio conhecimento matemático.

Tais revelações têm motivado pesquisadores a desenvolver investigações mais aprofundadas acerca da compreensão do conceito de número racional, com o objetivo de identificar quais seriam as habilidades necessárias para a construção desse conhecimento e de como o mesmo é estruturado ao longo do desenvolvimento. Porém, enquanto alguns pesquisadores buscam identificar os mecanismos que, possivelmente, servem como parte do arcabouço utilizado pelas crianças nesse processo de construção, outros buscam identificar os aspectos que poderiam ser considerados como "inibidores" do mesmo. A seguir serão apresentadas ambas perspectivas.

1.5.1. Conhecimentos considerados necessários para a compreensão de número fracionário

Os esquemas de número inteiro

Streefland (1991) menciona que assim como o "*um*" é a unidade de referência do esquema de número inteiro, as crianças utilizam esse conhecimento para construir o esquema de unidade fracionária. Com ela (a unidade fracionária) a criança poderá contar, dividir e reagrupar, tendo por base a unidade "um". Por exemplo, freqüentemente é mostrado para as crianças, através de representações gráficas (círculos, retângulos etc.) associadas à representação matemática, que as partes de um todo que foi dividido igualmente, se forem unidas, formarão o todo novamente, isto é, a unidade.

É esta flexibilidade do conceito de unidade representada pela possibilidade de sucessivas divisões de uma unidade em partes iguais, das partes em subpartes e da reconstrução da unidade; que se constitui como uma das ações fundamentais para a construção do significado de número racional, como afirmam Pitkethly e Hunting (1996).

Para Mix, Levine e Huttenlocher (1999) o entendimento de frações não somente envolve a atenção da criança para o tamanho das partes, mas também a habilidade para interpretar a soma das partes em relação a alguma unidade. As autoras avaliaram as habilidades de crianças de 3 a 5 anos de idade para adicionar frações (as frações eram representadas por círculos e/ou semicírculos de esponja). As crianças deveriam calcular o resultado das operações com um valor que fosse menor ou igual a um inteiro (exemplo: ½ + ¼ = ¾). Foi observado que as crianças dividiam o inteiro em quatro partes e que utilizavam *"quartos"* para comparar as demais frações. Como a atividade era perceptualmente evidente neste sentido, as crianças tinham grande chance de encontrar o resultado correto. Observa-se, contudo, que a importância de uma unidade de referência estaria no significado de cada fração em relação ao inteiro utilizado, pois, apesar de matematicamente ¾ de uma pizza ser equivalente a ¾ de uma hora, para a criança pequena em muito importa o referencial que está sendo utilizado, porque cada fração somente terá significado em relação a um inteiro em particular, seja ele uma pizza, um copo, uma hora, uma dúzia, etc.

Muito embora, como será explicitado mais adiante, existam estudos que mostram que os esquemas de número inteiro podem também servir como um complicador para a compreensão das crianças de frações; estes esquemas são importantes porque, quando a criança toma uma unidade por referência, ela estará em condições de antecipar o tamanho das partes na qual o todo será dividido (Hunting, prelo).

Os esquemas de partição

Para Behr, Lesh, Post e Silver (1983, citado por Pitkethly & Hunting, 1996) os esquemas de partição são considerados como os precursores cognitivos do número fracionário. Embora existam diferenças na partição de materiais discretos e contínuos[1], para eles é no ato de partir que as crianças pequenas começam a compreender que existe uma relação inversa entre o tamanho de *n* e o número de partes em que *n* foi partido.

A propósito, quanto à compreensão da relação inversa no processo da divisão, Nunes e Bryant (1997) identificaram que a habilidade das crianças em entender a relação entre o tamanho de *n* e *n-corte*, em quantidades contínuas, antecede o conhecimento das representações fracionais e da habilidade para calcular com frações.

Pepper e Hunting (1998), investigando o comportamento das crianças (4-6 anos) acerca da sistematização de suas ações para dividir quantidades discretas (12 bolachas para 3 bonecas), observaram que, freqüentemente, a primeira ação das crianças era fazer um emparelhamento bolacha-boneca, repetindo este movimento até que cada boneca

[1] Enquanto o modelo contínuo permite várias formas de subdivisão (repetidas e infinitas), o modelo discreto permite dividir e contar com uma menor ênfase no todo, como enfatizado por Pitkethly e Hunting (1996).

tivesse uma bolacha. Em seguida, a ação de emparelhar bolacha-boneca foi repetida em ciclos até que não mais houvesse bolachas para serem distribuídas. Segundo eles, mesmo não sendo requerido um sofisticado conhecimento de contagem para produzir a divisão solicitada e embora as crianças não soubessem ao final quantas bolachas cada boneca havia recebido, elas utilizaram com bastante propriedade este método para solucionar a situação.

Na perspectiva de Hunting (prelo) o método de partição utilizado por crianças pequenas para solucionar tarefas que envolvem quantidades discretas é uma ação básica do pensamento para compreender a linguagem e o simbolismo utilizados na representação fracionária, particularmente das unidades de frações como ½, 1/3 e ¼.

Para Sophian, Garyantes e Chang (1997) a partição por quotas é uma fonte importante para o conhecimento inicial de frações porque favorece a compreensão da relação inversa presente nos números fracionários (entre numerador e denominador), nos quais nem sempre aquele que contiver o maior algarismo será também o maior número. Segundo esses autores, as crianças pequenas apresentam grande dificuldade para realizar atividades que envolvam julgamento de magnitude entre frações, dificuldade esta, possivelmente, decorrente da aprendizagem da contagem dos números inteiros (seqüência numérica). Pois, quando as crianças aprendem a seqüência numérica, lhes é ensinado que o número conseqüente é sempre maior que o antecedente e que o antecedente é sempre menor que o conseqüente, ou seja, elas aprendem, por exemplo, que 3 é maior que 2 e que 2 é menor que 3.

De posse deste conhecimento, as crianças tendem a fazer generalizações para todos os tipos de números, inclusive para os fracionários, errando, portanto, quando solicitadas a resolver tarefas que envolvam julgamentos de magnitude entre frações. Por exemplo, como documentado por Sophian, Garyantes e Chang (1997), quando solicitadas a decidir entre as frações 1/3 (um terço) e ½ (um meio ou metade) qual seria a maior, as crianças tendem a responder que 1/3 é maior que ½ porque 3 é maior que 2. Contudo, os autores observaram que, desde os 5 anos de idade, a atividade de partição por cotas pode, em muito, minimizar este tipo de generalização desde que as crianças possam ver, por elas mesmas, o que acontece quando quantidades equivalentes são partidas de diferentes maneiras.

Os esquemas relacionais

Os esquemas relacionais são considerados por Spinillo (1997) como básicos para a formação do conceito de fração, pois envolvem a habilidade das crianças em estabelecer *relações de primeira ordem* – que abarcam dois tipos de comparações: relações parte-parte (razão) e relações parte-todo (fração); e estabelecer *relações de segunda ordem* – que são as relações entre relações de primeira ordem.

As relações parte-parte são, de acordo com Bryant (1974), as primeiras relações lógicas utilizadas pelas crianças para quantificar frações, pois é o conhecimento da relação parte-parte que permite à criança comparar que parte é maior, menor ou igual à outra. O conhecimento parte-todo, por sua vez, é destacado por Berh, Lesh, Post e Silver (1983, em Pitkethly & Hunting, 1996) como fundamental para o desenvolvimento do conceito de número racional, porque se encontra diretamente relacionado com a habilidade do sujeito em dividir todos contínuos e discretos, em partes iguais.

Quanto às relações de segunda ordem, Spinillo (1992) observou, em seus estudos sobre o pensamento proporcional, que estas relações são mais facilmente compreendidas pelas crianças quando estão envolvidas comparações parte-parte, do que comparações parte-todo.

Em continuidade às investigações sobre o pensamento relacional, Spinillo (2002) desenvolveu um estudo com crianças de 7 e 8 anos de idade para averiguar o uso de comparações parte-parte e parte-todo em tarefas de probabilidade.

As tarefas consistiram na apresentação de três arranjos diferentes de bolinhas azuis e rosas, onde a criança precisaria estimar em cada caso onde ela teria maior probabilidade de tirar uma bolinha azul (caso favorável), igual probabilidade de tirar bolinhas azuis ou rosas (casos possíveis), e menor probabilidade de tirar uma bolinha azul (caso desfavorável). Os arranjos foram compostos em três níveis de dificuldade: tipo 1 – três arranjos de diferentes números de casos favoráveis e diferentes números de casos possíveis (exemplo: 4/8 (50% de chance), 16/16 (100% de chance) e 9/12 (75% de chance)); tipo 2 – três arranjos de diferentes números de casos possíveis, sendo que dois desses arranjos tinham igual número de casos favoráveis (exemplo: 6/8 (75% de chance), 6/12 (50% de chance) e 4/16 (25% de chance)); tipo 3 – semelhante ao tipo 1, também continha três arranjos de diferentes números de casos favoráveis e diferentes números de casos possíveis (8/16 (com 50% de chance), 6/8 (com 75% de chance) e 3/12 (com 25% de chance). A diferença entre os arranjos do tipo 1 e do tipo 3 era que, no tipo 1, as crianças poderiam ordenar os arranjos do maior para o menor com base apenas no número absoluto dos casos favoráveis, enquanto que, no tipo 3 isto não seria possível. Nos arranjos tipo 2 também não era possível que as crianças solucionassem corretamente a tarefa se baseadas apenas no número absoluto de casos possíveis em função dos dois arranjos de igual número de casos favoráveis. Deste modo, se a criança procurasse realizar as tarefas baseadas, apenas, no número absoluto de casos favoráveis, elas apresentariam dificuldades para solucionar as tarefas dos tipos 2 e 3.

Para conseguir solucionar a tarefa de forma mais segura, a criança precisaria considerar três aspectos da probabilidade: o número de casos favoráveis (total de bolas azuis), o número de casos desfavoráveis (total de bolas rosas) e o número de casos possíveis (total de bolinhas em cada arranjo). Como forma de chamar a atenção das crianças para estes três aspectos, o examinador sempre pedia à criança que dissesse, em cada arranjo apresentado, quantas bolinhas azuis havia (casos favoráveis), quantas bolinhas rosas (casos desfavoráveis) e quantas bolinhas havia no arranjo todo (casos possíveis).

Spinillo (2002) observou que as crianças sempre realizavam seus julgamentos baseados em comparações em termos absolutos ou relativos de casos favoráveis e desfavoráveis, nunca fazendo referência ao número de casos possíveis. Até mesmo quando consideravam, apenas, uma das quantidades era a quantidade de casos favoráveis que elas usavam.

Diante destes resultados, a autora conclui que as crianças apresentam maior facilidade para fazer estimativas em tarefas de probabilidade baseadas nas relações parte-parte do que nas relações parte-todo. E que as crianças possuem um conhecimento intuitivo de probabilidade antes mesmo da instrução formal deste conteúdo. As intuições são aqui consideradas como essenciais para o entendimento do pensamento das crianças acerca dos conceitos relacionais.

Os esquemas de equivalência

Segundo Steffe e Olive (1993, citado por Pitkethly & Hunting, 1996), os esquemas de equivalência estão relacionados com a habilidade da criança sintetizar unidades para gerar uma outra unidade, equivalente à soma de suas partes. Por exemplo, identificar que a combinação de dois 1/4 equivalem a 2/4. As noções de equivalência são, inclusive, fundamentais para que a criança possa dominar e operar com frações (e.g.; Lima, 1993; Miguel & Miorim, 1986; Maia, Câmara & Câmara, 1991).

De acordo com Berh, Wachsmuth, Post e Lesh (1984), para que haja o entendimento das crianças sobre equivalência de frações é importante que haja a compreensão da relação compensatória entre a área e o número de partes iguais em que foi dividida a unidade. Os estudos de Lima (1993) sobre a compreensão das crianças acerca da equivalência de quantidades contínuas e discretas ilustram bem este aspecto.

De acordo com Lima (1993) para que a criança entenda a equivalência de quantidades contínuas é fundamental que compreenda que a divisão de um todo em partes iguais não altera a sua totalidade. Entretanto, ele observou que crianças muito pequenas não consideram estes dois aspectos ao mesmo tempo: a mudança do número de partes e a inalterabilidade do todo; posto que, além das dificuldades próprias do conceito de fração, existem as interferências dos aspectos perceptuais que o trabalho com área proporciona. Por exemplo, é muito difícil para uma criança pequena compreender que duas figuras de áreas equivalentes (exemplo: dois retângulos), mas divididas diferentemente (uma ao meio por um traço vertical e a outra ao meio por um traço diagonal), se comparadas após a divisão, permanecem equivalentes. Igualmente difícil é compreensão de que as metades de cada figura representam uma mesma área, apesar de perceptualmente diferentes.

Por outro lado, Lima (1993) observou que na realização de uma atividade de equivalência com quantidades discretas, onde a interferência do aspecto perceptual é eliminada, a criança recorre às equivalências entre coleções (que representam frações) para que possa comprovar a veracidade do resultado encontrado.

Recentemente, o estudo de Singer-Freeman e Goswami (2001) sobre a competência de crianças pequenas para criar equivalências também aponta dados interessantes. As autoras investigaram o raciocínio de crianças com idades entre 3 e 4 anos, em problemas de proporção que envolviam quantidades contínuas (pizzas) e quantidade discretas (caixa de chocolate) em problemas isomórficos (relações entre pizzas ou entre caixas de chocolates) e não isomórficos (relações entre pizza e caixa de chocolate). As pizzas e as caixas de chocolates estavam divididas em oitavos ou em quartos. O formato da fatia de pizza apresentada foi o formato tradicionalmente conhecido, contudo, o formato do pedaço de chocolate variava de acordo com a fatia: se dividido em quartos o formato era de um quadrado; se dividido em oitavos, o formato era de um triângulo. Além das frações de ¼ e 1/8, também foi utilizada a fração ½ como referência para os problemas.

Nos problemas isomórficos as crianças eram solicitadas a, por exemplo, fazer a equivalência entre a comida (pizza ou caixa de chocolates) do examinador, dividida em oitavos, e a comida da criança (pizza ou caixa de chocolates, dependendo da do examinador), dividida em quartos. Nos problemas não-isomórficos as crianças eram solicitadas a fazer equivalências entre, por exemplo, 2/8 de pizza com ¼ de chocolate ou entre 6/8 de pizza e ¾ de chocolate ou ainda entre 4/8 de pizza e ½ de chocolate.

Nos resultados, as crianças apresentaram um desempenho superior ao resolverem problemas com pizzas que com chocolates, o que sugere que o raciocínio proporcional com quantidades contínuas seja relativamente mais fácil.

Com relação aos desempenhos das crianças nos problemas isomórficos e não-isomórficos, as crianças apresentaram um melhor desempenho nos problemas isomórficos, principalmente quando relacionados a quantidades contínuas, sugerindo que crianças pequenas possuem habilidades para reconhecer a similaridade relacional. Entretanto, as autoras destacaram que, apesar da diferença nos resultados, as crianças foram relativamente bem nos problemas não-isomórficos, problemas estes que exigem um reconhecimento bem mais sofisticado por parte da criança para estabelecer as equivalências.

O conhecimento de metade

Segundo Aguiar (1980), a noção de metade deveria ser a primeira a ser ensinada no conteúdo de frações, pois, em tarefas de subdivisão de área, a noção de metade além de anteceder a formação de outras unidades fracionárias (1/3, ¼, 1/5 e 1/6) contribui para a formação das mesmas.

A fim de verificar a importância do *limite do meio* para o julgamento proporcional de crianças entre 4 e 7 anos de idade, Spinillo e Bryant (1991) desenvolveram estudos, onde crianças eram solicitadas a julgar, em três situações diferentes, qual entre duas caixas de tijolos de igual tamanho era equivalente à caixa menor (referência) em suas proporções de tijolos azuis e brancos. Na primeira situação (tarefas de metade) havia na caixa de referência a mesma proporção de tijolos azuis e brancos; em uma das caixas das alternativas havia mais tijolos azuis que brancos e na outra havia metade dos tijolos azuis e metade dos tijolos brancos. Na segunda situação (tarefas que atravessam a metade) havia na caixa de referência mais tijolos azuis que brancos; em uma das caixas das alternativas havia tijolos azuis que brancos e na outra mais tijolos brancos que azuis. Na terceira situação havia na caixa de referência, assim como na segunda situação, mais tijolos azuis do que brancos; nas duas caixas das alternativas havia mais tijolos azuis que brancos, porém em diferentes razões. Spinillo e Bryant (1991) observaram, em seus resultados, que as crianças obtiveram desempenho significativamente superior nas tarefas onde podiam utilizar o limite do meio para fazer julgamentos (primeira e segunda situação) do que nas tarefas onde não podiam utilizá-lo como referencial (terceira situação).

Estudos posteriores realizados por Spinillo (1992, 1997c; Spinillo & Bryant, 1999) mostram que o *'referencial de metade'* pode favorecer o sucesso das crianças em tarefas de proporção, tanto em quantidades discretas como em quantidades contínuas, posto que esse referencial é utilizado pelas crianças como uma estratégia de comparação entre quantidades *(equivalências)*. O referencial de metade aparece também como importante em estimativas sobre probabilidade em crianças entre 6 e 8 anos que ainda não haviam sido formalmente ensinadas sobre probabilidade no contexto escolar (Spinillo, 1997b).

Em concordância com estes dados, Singer-Freeman e Goswami (2001) ao investigarem a competência de crianças pequenas (3 e 4 anos de idade) para criar equivalência também encontraram que as crianças obtiveram maior sucesso nos problemas que envolviam a fração metade do que naqueles que envolviam as frações ¼ ou ¾. Tais resultados são válidos tanto para os problemas com quantidades contínuas quanto para os problemas com quantidades discretas.

No entender de Nunes e Bryant (1997), a compreensão inicial do conceito de metade, também, favorece o estabelecimento das conexões entre os aspectos extensivos (parte-parte) e intensivos (parte-todo) do número racional, podendo, inclusive, ser considerado como um referencial importante para as crianças iniciarem a quantificação de frações.

Em síntese, observa-se nestes estudos que o referencial de metade é um recurso poderoso para a compreensão inicial das crianças de conceitos matemáticos como proporção, probabilidade e fração. Todavia, estudos como os de Pothier e Sawada (1983) mostram, também, que o conhecimento de metade pode ser um conhecimento inibidor do conceito de número fracionário, como será explicitado mais adiante.

1.5.2. Conhecimentos considerados inibidores da compreensão de número fracionário

Os esquemas de número inteiro

Considerado por Streefland (1991) como um dos esquemas que podem auxiliar a criança a ter uma unidade de referência para o número racional, foi também classificado por este mesmo autor como um inibidor deste conceito. Segundo ele, o conhecimento do número inteiro na aprendizagem de frações interfere no aspecto relacionado à compreensão de seu simbolismo. Esta interferência pode ser identificada nas interpretações das crianças sobre a representação simbólica da fração (a/b) onde demonstram não compreendê-la como um número, mas como dois números inteiros distintos.

Silva (1997) também identificou o conhecimento dos números inteiros como um obstáculo para a construção do conceito de número fracionário. Ela argumenta que, como os números inteiros são, durante muito tempo, os únicos que têm o *status* de número para as crianças, elas buscam aplicar todo o conhecimento de que dispõem para as frações. Daí tratarem a fração como dois números naturais, um em cima do outro, e não como um único número em si.

Destaca-se, também, que o conhecimento de número inteiro pode, inclusive, interferir nas estratégias de resolução de problemas com frações. Behr, Wachsmuth, Post e Lesh (1984) desenvolveram um estudo de intervenção clínica, onde crianças foram solicitadas a ordenar e adicionar frações. Foi observado que, freqüentemente, as crianças aplicavam a aritmética utilizada para os números inteiros tanto para estabelecer as comparações quanto para resolver as operações, considerando apenas ou os numeradores (quando os denominadores eram iguais) ou os denominadores (quando os numeradores eram iguais) para solucionar os problemas. Mas como a aritmética dos números inteiros não se aplica aos números racionais (por não considerar a relação inversa entre numerador e denominador), as crianças fracassaram nos resultados.

O conhecimento de metade

Assim como os esquemas de número inteiro, o conhecimento de metade também pode ser compreendido ora como um favorecedor do conceito de número fracionário ora como um inibidor do mesmo. Estudos como o de Pothier e Sawada (1983) ilustram bem estes dois aspectos.

Pothier e Sawada (1983) desenvolveram atividades com o objetivo de investigar a emergência da diferenciação do processo de partição em tarefas de subdivisão de todos contínuos, nas quais crianças pequenas eram solicitadas a cortar um bolo em duas, três, quatro e cinco partes iguais; não necessariamente nesta ordem.

Foi observado que, comumente, as crianças buscavam utilizar o conhecimento de metade (fazendo uma divisão na região do meio) como forma de iniciar a divisão das áreas dos bolos (retangulares e circulares) em duas partes iguais. Nos casos em que o número de partes era múltiplo de dois, as crianças iam apenas acrescentando linhas para subdividir as partes já estabelecidas. Até então, o procedimento utilizado era eficiente para encontrar os resultados.

Entretanto, os autores observaram que as crianças tendiam a utilizar a mesma estratégia de divisão mesmo quando tinham que dividir o bolo em três partes iguais ou em cinco partes iguais, ou seja, elas iniciavam a divisão pela região do meio. Nestas situações, dependendo do nível de desenvolvimento em que as crianças se encontravam, elas podiam perceber ou não que era impossível dividir a figura em três (ou cinco) partes iguais a partir de duas metades, buscando, algumas vezes, encontrar outras formas de subdividir os bolos.

É neste sentido que Pothier e Sawada (1983) concluíram que o conhecimento de metade pode ser um dificultador do desenvolvimento do conceito de fração, pois, apesar de ser uma estratégia importante para fazer a divisão de um todo em duas partes iguais (ou em partes que sejam múltiplas de dois), não favorece a divisão em partes diferentes (não-múltipla) de dois. Em casos como este, é preciso que a criança perceba que a divisão ao meio, embora a mais lógica para ela, nem sempre será a mais apropriada para iniciar qualquer divisão.

O modelo parte-todo

Comumente ensinado nas escolas como representativo do número fracionário, o modelo parte-todo também recebeu críticas por parte de alguns pesquisadores.

Segundo Kerslake (1986), o modelo parte-todo por ser freqüentemente relacionado ao *procedimento de dupla contagem*[2], acaba por levar as crianças a pensarem no número racional de forma inapropriada, comprometendo a compreensão de fração, principalmente nos casos em que estão envolvidas quantidades discretas. No seu entender, este modelo pode interferir na interpretação de outras frações que não aquelas apresentadas como parte de um todo, como por exemplo, as frações originadas da divisão de três objetos em quatro partes iguais.

Pierce, Stengel & Nodding (1992, citado por Zarzar, 1998) também consideram o modo de abordar a fração em situações que envolvem o modelo conceitual parte-todo como um obstáculo para o aprendizado das crianças. Segundo eles, estas situações não levam à compreensão do amplo espectro dos números racionais, pois abordam a fração como parte de coisas (tortas, barras) e não como números. Tais situações, inclusive, se constituem como um obstáculo para a compreensão da adição e subtração de frações

[2] O procedimento de dupla contagem consiste em primeiro, contar o número total de partes, e em seguida, contar as partes pintadas.

com denominadores distintos, uma vez que a metáfora de fração como parte não facilita a construção conceitual de frações equivalentes com denominadores comuns, sendo, portanto, insuficiente para a resolução do problema.

Tomando esta perspectiva, Nunes, Campos, Magina e Bryant (2001), consideram que o modo de se ensinar frações apenas como uma rotulação de partes de um inteiro não favorece que os alunos possam perceber aspectos outros, igualmente importantes para o conceito de frações, como, por exemplo, a necessidade de que todas as partes sejam iguais e a equivalência de frações. Segundo os autores, é comum a criança responder que ‘dois quartos’ de uma figura (sendo esta a parte pintada) é ‘dois terços’ quando apenas uma das metades da figura estiver perceptualmente dividida ao meio. De acordo com os autores, para que as crianças possam atingir a compreensão da necessidade da equalização das partes é fundamental que elas possam estabelecer conexões entre a operação de divisão (uma vez que as partes resultantes são sempre iguais) e o conceito de fração.

Diante do exposto, observa-se que certos esquemas de conhecimentos podem ser compreendidos tanto como importantes para a construção do conceito de fração como um obstáculo para o seu desenvolvimento. O fato é que a construção do conceito de número fracionário não é algo simples, pois requer, além da compreensão de conceitos como razão, proporção, equivalência etc., que a criança descubra quais são as conexões e rupturas destes com o conceito de fração.

1.6. Dificuldades epistemológicas e didáticas dos números racionais/fracionários

A construção do conceito de número racional/fracionário é, sem duvida, um processo complexo, seja do ponto de vista psicológico ou epistemológico. Neste processo, as crianças enfrentam diversas dificuldades para compreender a necessidade da utilização deste "novo" conceito de número (diferente dos números naturais) em suas tarefas escolares, como documentado por alguns pesquisadores.

Hunting (prelo), por exemplo, estudando o conhecimento pré-fracionário, encontrou, em consonância com os dados de Piaget, que algumas das dificuldades das crianças para responder tarefas de fração podem estar diretamente relacionadas com o não desenvolvimento da conservação de quantidade, o que impede a compreensão das crianças de que se nada é adicionado e nada é retirado da quantidade original, então a quantidade resultante, ainda que dividida, é igual a inicial (princípio da invariância).

Deste modo, a conservação de quantidade é uma aquisição importante do pensamento da criança para que ela possa compreender que as modificações espaciais de uma quantidade (seja ela contínua ou discreta) são mentalmente reversíveis. Segundo Piaget, Inhelder e Szeminska (1960, citado em Nunes & Bryant, 1997), o pensamento reversível é fundamental para a compreensão de frações porque implica na percepção antecipada de que a soma das partes de um todo é igual ao todo que as originou.

Silva (1997), em seus estudos sobre a introdução de frações, assinalou cinco obstáculos epistemológicos relacionados à construção do conceito de número fracionário:

- A representação simbólica: muitas crianças apenas reproduzem o símbolo fracionário sem, contudo, entender seu significado;
- A negação da necessidade das quantidades fracionárias: as crianças, em algumas situações, não aceitam os "números quebrados" como resultado;
- A dificuldade em aceitar as frações como número: como o número fracionário "surge" da partição de algo que representa um inteiro, as crianças passam a não interpretar as frações como um único número, mas como um par de números naturais;

- O conhecimento dos naturais como um obstáculo: as crianças buscam aplicar todo o conhecimento que dispõem acerca dos números naturais para as frações. Daí passam a tratar a fração como dois números naturais, um em cima do outro, e não como um único número em si;
- O modelo de referência: como os números naturais são, durante muito tempo, os únicos que têm o *status* de número para as crianças, elas estendem os seus conhecimentos dos naturais para os fracionários. Enquanto o modelo de referência do conjunto dos números naturais é um modelo discreto, busca-se ensinar frações com um modelo contínuo para que as crianças percebam as limitações dos naturais. Entretanto, na medida em que as crianças são levadas a contar as partes do todo, há "um movimento de "discretização" da área envolvida em pedaços contáveis" (p. 30). Com isso, há a perda do sentido do inteiro e um retorno ao modelo original (dos números naturais).

Diante destas dificuldades pode-se perceber que a construção do número racional/fracionário requer um razoável período de tempo, isto porque exige o contato com experiências com diferentes significados e representações. Deste modo, é função do ensino propiciar o contato com estas experiências, promovendo situações que permitam que as crianças compreendam a necessidade e a importância dos números racionais em suas vidas. É neste sentido que os Parâmetros Curriculares Nacionais (MEC/SEF, 1997) sugerem a introdução do conteúdo referente aos números racionais (fracionário e decimal) a partir do 2º ciclo do Ensino Fundamental (3ª e 4ª séries).

Vale salientar que, de acordo com a proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais, não há qualquer alusão quanto a ensinar números racionais no 1º ciclo do Ensino Fundamental (1ª e 2ª séries). A interpretação e a produção de escritas numéricas, para este período, giram em torno dos números naturais, mesmo quando são trabalhadas grandezas mensuráveis e/ou instrumentos de medida (MEC/SEF, 1997).

É no 2º ciclo que se introduz a ‘construção do significado do número racional’, nas suas representações fracionária e decimal. Propõe-se, para este período, que as crianças sejam levadas a refletir sobre as limitações dos números naturais (nas situações em que é preciso representar quantidades menores que um inteiro) e a conseqüente importância dos racionais. Com o objetivo de favorecer a compreensão das crianças quanto à utilização dos números racionais na vida cotidiana, propõe-se que os seus diferentes significados (parte-todo, quociente e razão) sejam explorados em função dos seus diferentes usos no contexto social (MEC/SEF, 1997).

Nesta perspectiva, os PCNs propõem que o ensino de frações deve ser relacionado a três situações: as que envolvem *a relação parte-todo*, como no caso das divisões de pizzas ou chocolates, em partes iguais; as que envolvem o significado das *frações como quociente*, que se baseiam na divisão de um número natural por outro; e as que envolvem a comparação de duas quantidades de uma grandeza (*a fração interpretada como razão*) (MEC/SEF, 1997).

É também no 2º ciclo que são introduzidos os cálculos com números racionais. Contudo, parece existir uma ênfase maior nas operações que envolvem os números racionais em sua representação decimal do que as que envolvem a sua forma fracionária. Tal ênfase, talvez, esteja relacionada ao fato de que, assim como o mencionado nos PCNs, os números decimais têm um maior reconhecimento no cotidiano das pessoas (o uso da calculadora, por exemplo) que os números fracionários que são, muitas vezes, reduzidos, a metades, terços, quartos.

Quanto à adição de frações, Silva (1997) chamou a atenção para os obstáculos didáticos que podem influenciar no aprendizado. Segundo a autora, às vezes, os próprios livros didáticos, dependendo do modo de abordar os conteúdos, podem servir como um obstáculo ao ensino-aprendizado. Um dos aspectos levantados é o que ela denominou de “formalização abusiva” que corresponde ao uso de algoritmos desde a introdução de determinados conceitos, como no caso das frações equivalentes e das operações com frações. Para Silva, esses “procedimentos impedem que as crianças desenvolvam as relações entre os conceitos que estão trabalhando, produzindo um conhecimento mecânico, que não desenvolve as habilidades necessárias para o trato das diversas situações em que poderiam usar tal conhecimento” (p. 75).

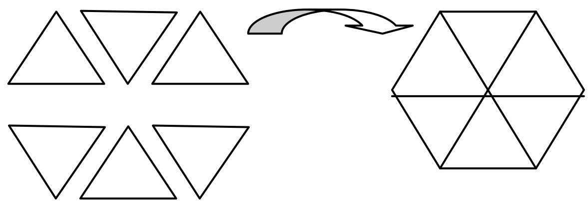
Semelhantemente ao estudo supracitado, buscou-se fazer uma pequena consulta[3] aos livros didáticos de 3ª e 4ª séries (do Ensino Fundamental I) de quatro coleções diferentes, no intuito de observar como está sendo introduzido e trabalhado, especificamente, o conteúdo relacionado à *adição de frações*.

Nestes livros[4], foi observado que, assim como o proposto nos PCNs, a introdução das operações com frações, com seus respectivos algoritmos, somente é formalizada na 4ª série. Na 3ª série, este conteúdo aparece em meio a outras atividades, geralmente, como exemplificação das situações que estão sendo trabalhadas (equivalência de frações, união das partes de uma figura geométrica etc.). Por exemplo:

- *Situações que ilustram (graficamente e matematicamente) que* “a união de todas as partes do todo, fracionado em partes iguais, formará o todo”:

---

[3] Isso não foi levantamento ou pesquisa, apenas exemplos para ilustrar as discussões apresentadas.
[4] Livros examinados: (1) Aroeira, Mª, L. R. (1998). *Diário da matemática*. Belo Horizonte: Dimensão, v. 3, pp. 14-15; 67-146; (2) Aroeira, Mª, L. R. (1998). *Diário da matemática*. Belo Horizonte: Dimensão, v. 4, pp. 9-20; 98-117; (3) Liberman, M.; Mota Wey, R. L. da; Sanchez, L. B. (1997). *Fazendo e compreendendo matemática.* São Paulo: Solução, v.3, pp. 19-21; 118-148; (4) Liberman, M.; Mota Wey, R. L. da; Sanchez, L. B. (1997). *Fazendo e compreendendo matemática.* São Paulo: Solução, v.4, pp. 11-16; 98-111; (5) Lima, Mª. ª B. de (1997). *Registrando descobertas*. Rio de Janeiro: Ediouro, v. 3, pp.115-128; 223-231; (6) Lima, Mª. ª B. de (1997). *Registrando descobertas*. Rio de Janeiro: Ediouro, v. 4, pp.116-128; 212-218; (7) Munhoz, A. F.; Nazareth, H; Toledo, M. (1999). *Contar, construir, viver: matemática.* São Paulo: Contexto, v. 3, pp. 125-137; (8) Munhoz, A. F.; Nazareth, H; Toledo, M. (1999). *Contar, construir, viver: matemática.* São Paulo: Contexto, v. 4, pp. 69-84.

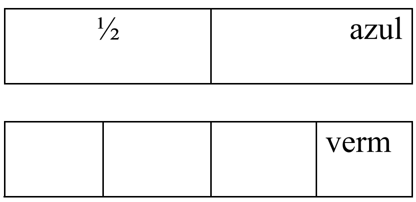


ou

1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 6/6 = 1;

Nesta figura, é apresentado um polígono hexagonal dividido em seis partes iguais, onde cada parte do polígono representa 1/6 do total. A idéia de união das partes é consolidada pela representação matemática da adição das partes do polígono.

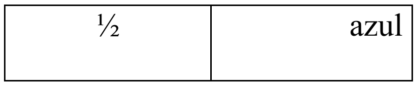
- A união das partes de um todo para formar o todo também pode ser representada, apenas, com *a representação matemática*. Por exemplo: pede-se para que a criança efetue $\boxed{6/7 + 2/7 = ?}$;
- A adição de frações também pode aparecer em atividades com frações equivalentes, *utilizando representação gráfica e matemática*. Por exemplo: são mostrados três retângulos, divididos em número de partes diferentes: um azul dividido em 2 partes iguais, um vermelho divido em 4 partes iguais e outro laranja dividido em 6 partes iguais. Ao longo da atividade é mostrado para a criança que 2 partes do retângulo vermelho formam 1 parte do retângulo azul:

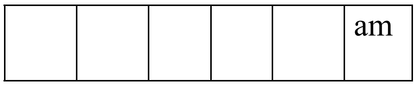


ou

¼ + ¼ = 2/4 = ½.

E que 3 partes do retângulo laranja equivalem a 1 parte do retângulo azul





ou

$$1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = ½;$$

- Por fim, a adição de frações pode ser encontrada em atividades de *"completar o inteiro"*. Por exemplo: *"Com 1 litro de suco posso encher 4 copos. Então, 1 copo é ___ do litro. Quantos ¼ de litro são necessários para completar 1 litro?"*.

Com isto, pode-se perceber que, mesmo que a definição de adição de frações não esteja explícita nas situações, existem várias atividades que remetem à sua representação matemática, com mesmo denominador, já na 3ª série.

Na 4ª série a adição de frações passa a ser formalmente trabalhada. Inicialmente, as situações que são apresentadas surgem como uma continuidade à idéia de *"união de todas ou algumas partes de um todo, dividido em partes iguais"*, iniciada na 3ª série. Como uma extensão dessa idéia, também é mostrada a *união de partes equivalentes de um mesmo todo*, como no caso de um retângulo fracionado em diferentes partes. Mostra-se para a criança que a junção de suas partes, ainda que de diferentes dimensões, formarão o todo, a unidade:

$$½ + ? / 4 + ? / 8 + ? / 8 = 1;$$

Estas atividades já apontam para a importância da equivalência entre as partes (frações) para que o problema seja solucionado. Ressalta-se, porém, que a representação gráfica, nestas situações, quase não mais aparece (exceto quando se pretende mostrar a relação de equivalência entre as partes) ficando a atividade, praticamente, ao nível da resolução algorítmica. A propósito, a partir do momento em que são introduzidos os algoritmos das operações, assim como o encontrado por Silva (1997), estes passam a ser muito mais enfatizados como procedimento para a resolução das operações que as atividades que recorrem à visualização/comparação de áreas das figuras.

Estas observações indicam que o que diferencia a 3ª e a 4ª série no aspecto relacionado ao ensino das operações com frações, não é apenas a formalização do ensino, mas, sobretudo, a estimulação constante da resolução dos problemas através do algoritmo, ao passo em que há uma considerável redução no uso das representações geométricas.

Concordar-se-á que este movimento representa um salto qualitativo muito importante para a conceptualização das crianças, onde, num curto espaço de tempo, as crianças são introduzidas quanto ao conceito de fração, aos problemas com frações e às operações com frações e, rapidamente são levadas a raciocinar, praticamente, em termos dos procedimentos algorítmicos.

Este fato torna-se ainda mais grave quando, assim como mencionado por Vergnaud (1982), há uma certa tendência para se ensinar os algoritmos das operações, sem, contudo, relacioná-los a uma classe mais ampla de problemas. Isto é grave porque, por exemplo, o aluno pode não compreender qual a importância de estudar este conceito, já que na prática do dia-a-dia fora da escola parece não ter qualquer aplicabilidade.

1.7. Estudos sobre adição de frações

Freqüentemente, uma das ações mais comumente apresentada pelos estudantes quando são solicitados a adicionar frações em seu modelo numérico, é a adição de numerador com numerador e denominador com denominador (exemplo: ¾ + ¼ = 4/8).

Vários pesquisadores têm estudado sobre este procedimento com o objetivo de identificar o porquê de tantos alunos procederem do mesmo modo. Como o já mencionado anteriormente, uma das hipóteses sobre este comportamento é a de que as crianças buscam aplicar a aritmética dos números inteiros, aritmética de que têm conhecimento, para as frações. E sendo esta uma aritmética inapropriada para o que a natureza do número fracionário exige, as crianças fracassam nos resultados encontrados como documentam Behr, Wachsmuth, Post e Lesh (1984).

Uma outra forma de explicar tal ação é a sugerida por Tirosh, Fischbein, Graeber e Wilson (1999). Baseados nas próprias justificativas das crianças, os autores sugeriram que talvez esta idéia de adição esteja relacionada com a concepção de que o modo mais adequado para efetuar uma adição é somando coisas do mesmo tipo. Neste caso, somar numerador com numerador e denominador com denominador seria um método coerente dentro da lógica apresentada pelas crianças.

Numa outra perspectiva, Santos, Gomes e Castro Filho (Mimeo) consideram que os erros mais freqüentes de resolução de problemas, envolvendo operações com frações, podem estar diretamente relacionados com a forma na qual o conceito de fração é trabalhado nas escolas. Como também apontado por Carraher (1993) e Silva (1997), os autores observaram que, no início da escolarização, o ensino dos números fracionários é costumeiramente associado à manipulação de representações gráficas e que, à medida que são trabalhadas as operações com frações, a mediação é quase que exclusivamente simbólica. No entender de Santos et al. (Mimeo) esta ação pode ser considerada como uma mudança "brusca" de representações e compreendida como uma das possíveis causas das dificuldades das crianças para produzir sentido ao efetuar com frações, podendo servir como um obstáculo para a compreensão da lógica subjacente às ações algorítmicas.

Neste sentido, Santos, Gomes e Castro Filho (Mimeo) consideram como pertinente a existência de um trabalho simultâneo entre as quantidades representadas graficamente e os símbolos, com uma forma de proporcionar ao aluno esta compreensão. Principalmente porque, como também mencionado por Nunes e Bryant (1997), entender as regras de manipulação dos símbolos não significa de forma alguma compreender a complexidade envolvida com o entendimento do conceito de frações e de operações com frações. Ao invés disso, as crianças podem, simplesmente, replicar o que lhes foi ensinado, transmitindo a impressão de que entendem muito sobre frações.

Baseados nas mesmas dificuldades dos alunos de 6ª série para operar com frações (erros sistemáticos dos alunos ao subtrair frações, como por exemplo, 5/9 – 2/6 = 3/3 = 1) e com a aparente falta de sentido com que os algoritmos para as operações com frações são ensinados, Santos e Souza (Mimeo) buscaram criar o que denominaram "Laboratório sobre frações", no Colégio de Aplicação da UFPE, para os alunos da 6ª série. O curso realizado neste laboratório visava desenvolver o conceito de fração; conceituar e relacionar frações equivalentes; representar frações na sua forma irredutível; e operar com frações.

Neste estudo, Santos e Souza (Mimeo) ofereceram aos alunos tarefas em que poderia ser utilizada representação gráfica associada à representação formal das frações e tarefas em que não poderia ser utilizado o primeiro tipo de representação, mas apenas a representação formal. Como resultado, eles observaram que os alunos solucionavam com bastante segurança as atividades de operações com frações onde podia ser utilizado o material concreto, mas que tal rendimento diminuía consideravelmente nas atividades em que não havia esta possibilidade (teste formal). Tal fato, segundo os autores, serve para reforçar ainda mais a importância de, ao iniciar o assunto de frações, seja, também, iniciada a formalização (representação simbólica/matemática).

No caso particular da adição de frações com denominadores diferentes, mas múltiplos um do outro (exemplo: 2/3 + 2/9), Santos e Souza (Mimeo) observaram que a operação poderá ser mais bem compreendida desde que os alunos sejam levados a realizar atividades que sejam úteis ao reconhecimento de frações equivalentes. A atividade de recobrimento[5] é considerada pelos autores como uma atividade importante para ser trabalhada a noção de equivalência. Em seus estudos, eles mostraram, por exemplo, que a operação de 2/3 + 2/9 poderia ser inicialmente resolvida apenas através do recobrimento. Com esta atividade os alunos poderiam perceber que alguns 1/9 recobrem terços. Daí trocariam os dois terços pelos nonos equivalentes (2/3 = 6/9), somando-os em seguida: 6/9 + 2/9 = 8/9.

O uso de material manipulativo é assim considerado por Santos e Souza (Mimeo) como favorecedor da compreensão dos alunos sobre as transformações que ocorrem nas quantidades fracionárias quando estas são efetuadas. Para eles, o uso de material concreto pode conduzir os alunos, gradativamente, à construção dos algoritmos, possibilitando, com isso, o aprofundamento das idéias anteriores e a resolução de quaisquer operações de adição e subtração.

Apesar do material concreto ter se revelado um recurso útil para a compreensão das operações, ele pode ser também considerado como um recurso limitado, uma vez que não serve para adicionar quantidades como 2/33 + 5/44. Por outro lado, Santos e Souza (Mimeo) chamam a atenção de que a própria limitação deste material pode servir

[5] Esta atividade consiste em por frações sobre outras para verificar quantas frações são necessárias para formar uma outra de maior área.

como um ponto de partida para que os alunos percebam, em casos semelhantes ao exemplificado (2/33 + 5/44), a importância do uso dos algoritmos como "ferramentas úteis e necessárias ao processo de desenvolvimento de habilidades numéricas" (p. 2).

Kerslake (1986) realizou um pequeno levantamento sobre a freqüência com que o procedimento comum dos estudantes de adicionar os numeradores aparecia em determinadas situações e observou que este era um erro bem mais comum nas adições em que os denominadores eram diferentes. Observou também que, nos casos em que as crianças utilizavam seus conhecimentos sobre equivalência para encontrar a resposta correta, tinham grande dificuldade para explicar como chegaram ao resultado. No caso da adição de 2/3 + ¾, por exemplo, muitas crianças não conseguiram justificar o porque de terem usado o denominador 12, apesar de terem assim procedido: 2/3 + ¾ = 8/12 + 9/12 = 15/12.

Para a autora, tal fato indica a dificuldade que as crianças têm para ligar a idéia de denominador comum com a idéia de equivalência, pois, da mesma forma em que houve crianças que buscaram solucionar 2/3 + 4/3 usando as frações equivalentes, mas que encontraram muita dificuldade para achar o resultado, outras adicionaram frações sem perceber a necessidade de trabalhar a equivalência entre as frações.

Nos estudos de Kerslake (1986) também pode ser observada a importância da utilização de recursos perceptuais para a compreensão das crianças sobre equivalência. A autora utilizou representações geométricas (diagramas) de fácil interpretação para que as crianças pudessem perceber a inadequação de suas respostas. De certo modo, foi observado que as representações geométricas eram úteis desde que as crianças entendessem a necessidade de achar um denominador comum.

Entretanto, assim como também encontrado por Santos e Souza (Mimeo), Kerslake (1986) observou que as crianças tiveram pouco sucesso quando a adição de frações era apresentada apenas na forma simbólica. Na maioria das questões as crianças respondiam através da técnica de cancelamento ou multiplicação de numeradores e denominadores, não ficando claro se atingiram seus resultados com base na equivalência de frações.

Segundo Silva (1997), quando as crianças são formalmente introduzidas à operação com frações na escola, enfrentam diversas dificuldades. Uma delas reside na própria representação de número fracionário que "surge" da partição de algo que representa o inteiro. A autora sugere que esta forma de representação pode prejudicar a compreensão da criança considerar a fração como um número, interpretando-a como dois números naturais (um em cima do outro). Com base nesta idéia, a criança, ao adicionar frações, tenderá a aplicar o conhecimento de que dispõe sobre os números naturais para as frações, passando a adicionar diretamente numeradores com numeradores e denominadores com denominadores.

Com o objetivo de investigar as concepções intuitivas de crianças da 3ª série para adicionar frações em sua representação formal, Silva (1997) avaliou crianças de 3ª e 4ª séries do Ensino Fundamental de uma escola pública, quanto à operação e resolução de problemas, investigando também o conhecimento que é acrescentado após uma instrução inicial no modelo parte/todo contínuo, com as crianças da 4ª série. Vale salientar que as crianças da 4ª série que participaram da coleta ainda não haviam aprendido a adição de frações com denominadores diferentes.

Silva (1997) apresentou, em um dos problemas, duas adições (1/6 + 2/6 =) e (1/5 + 1/8 =) e duas subtrações (27/35 – 6/35 =) e (3/4 – 3/9 =), ambas continham adições de frações com mesmo denominador e com denominadores diferentes. As crianças da 3ª série tiveram 0% de acerto em todas as questões. Em geral, elas operavam com as frações como se fossem números naturais, dando às vezes duas respostas (uma para cada parte da fração) e outras vezes apenas uma única resposta. As crianças da 4ª série também não acertaram as respostas, fazendo, por vezes, adição ou subtração direta de numerador com numerador e denominador com denominador. Houve ainda, em alguns casos, a inversão do algoritmo da adição, isto é, as crianças repetiram o numerador e operaram com o denominador. Contudo, as crianças da 4ª série tiveram certa preocupação quanto a colocar as respostas das operações em forma de fração.

Na perspectiva da autora, estes resultados indicam que tanto o termo "fração" quanto a sua representação simbólica não têm qualquer significado para as crianças que ainda não foram instruídas quanto a esse conteúdo, e que não há qualquer concepção intuitiva sobre frações nesta fase. Segundo ela, a forma intuitiva para operar com frações somente foi identificada nas crianças da 4ª série, pois, além de terem buscado caminhos mais significativos para a solução da atividade, ainda mantiveram a forma da escrita fracionária em suas respostas.

É interessante observar que enquanto Silva (1997) considera que as crianças não possuem qualquer concepção intuitiva sobre frações, estudos como os de Pitkethly e Hunting (1996) e Hunting (prelo), mostram justamente o contrário: que crianças pequenas, antes mesmo de qualquer instrução escolar sobre frações já apresentam concepções intuitivas sobre este conteúdo e que são até mesmo capazes de operar com frações. Possivelmente, Silva (1997) talvez denote um outro significado à expressão 'concepção intuitiva', utilizando-a para designar a intuição da criança para resolver as atividades segundo o modelo matemático (algoritmo) e não com o utilizado pelos demais autores (das primeiras noções apresentadas pelas crianças, independentemente da aproximação algorítmica).

Diante das pesquisas relatadas, observa-se que muito tem sido investigado sobre adição de frações, mas que muitos destes estudos examinam crianças que já possuem algum conhecimento formal escolar sobre fração. E, mesmo quando os estudos são realizados com crianças que ainda não foram formalmente instruídas sobre frações, nestes, geralmente, é utilizada a representação simbólica da fração (a/b), esperando que as crianças mostrem um raciocínio semelhante ao que é ensinado na escola.

Tais estudos, entretanto, têm mostrado o quão é comum a ação de adicionar numeradores e denominadores para obter o resultado, apontando para a falta de sentido que parece haver, para as crianças, este tipo de representação. Este erro parece se agravar ainda mais quando são fornecidos às crianças (mesmo para aquelas que já aprenderam algo sobre frações), apenas, os cálculos numéricos precisos (representação formal) sem o uso de representações gráficas (diagramas) como recurso facilitador.

Parece haver, então, a necessidade de se buscar outras formas de ensinar frações, talvez, seguindo as observações feitas por Streefland (1991). Segundo este autor, seria importante que o conteúdo referente a frações fosse ensinado do mesmo modo como são ensinados os números inteiros: um número inteiro quando é introduzido busca-se mostrar todas as suas facetas (relações), tais como em atividades de contagem, medida e também as várias operações nas quais este número possa ser envolvido. Quando, por exemplo, o número 12 é ensinado ele é inserido em vários problemas escritos como 8 + 4 = 10 + ?; 12 – 6 = 12 – 2 - ?; 12 = ? x 2; 12 x 1; 6 x 2; 4 x 3 etc. Com os números fracionários deveria ser feito o mesmo tipo de trabalho. Ao ser introduzido o número ½, por exemplo, este deveria ser trabalhado imerso nos vários tipos de atividades que pudessem envolver a noção de ½, inclusive as quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão).

Utilizando um outro modo de investigar os procedimentos adotados por crianças pequenas acerca do pensamento aritmético fracionário, Zunino (1995) aplicou alguns problemas que envolviam quantidades fracionárias para crianças de 3ª série, problemas estes em que não era utilizada a representação convencional de frações (a/b), mas um outro tipo de representação escrita. Zunino (1995) exemplifica com um dos problemas sugeridos às crianças, onde ela apresentava a figura de três recipientes, cada qual com uma etiqueta indicando o seu conteúdo. Na etiqueta do primeiro recipiente, de maior tamanho, estava escrito *"6 litros e meio"*; na etiqueta do segundo recipiente, de tamanho intermediário, estava escrito "*3 litros e um quarto de litro"*; e , na etiqueta do terceiro recipiente, de menor tamanho, estava escrito *"2 litros e um quarto de litro"*.

Ao longo da resolução deste problema, Zunino (1995) observou alguns procedimentos comuns utilizados. Foi identificado que enquanto algumas crianças procuravam somar os números inteiros e desprezavam as frações, outras até conseguiam resolver bem a tarefa, mas não sabiam como representar numericamente a operação nem o resultado encontrado. Neste último caso, por exemplo, uma criança expressou que o problema seria resolvido do seguinte modo: somando todos os inteiros, ou seja, 6 litros + 3 litros + 2 litros, formando 11 litros; e somando as frações, ou seja, meio litro mais dois quartos de litro (um quarto de litro do segundo recipiente mais um quarto de litro do terceiro recipiente). Compreendendo que dois quartos de litro são equivalentes a meio litro, a criança concluiu que a soma de meio litro com dois quartos de litro é igual a um litro. No raciocínio expresso pela criança, o resultado final deste problema seria obtido a partir da soma do resultado dos inteiros (11 litros) com o resultado das frações (1 litro), portanto, igual a 12 litros. Contudo, apesar de conseguir explicar passo a passo o seu pensamento, a criança afirmava não saber como representar tudo o que acabara de dizer.

Observa-se, na pesquisa de Zunino (1995), que as crianças de 3ª série, mesmo encontrando certas dificuldades neste tipo de tarefa, foram capazes de operar com frações quando lhes foram fornecidas formas de representação distintas da representação numérica formal (a/b). Deste modo, compreende-se que investigar a capacidade da criança para operar com frações utilizando, apenas, o cálculo numérico preciso é insuficiente para aqueles que desejam obter um conhecimento mais específico sobre o raciocínio da criança com relação a este conteúdo matemático.

O estudo documentado por Zeman (1991, p. 252) sobre Ethan (8 anos) também mostra a possibilidade de crianças operarem com frações, utilizando outros procedimentos que não o algoritmo propriamente dito. No exemplo abaixo, Ethan havia sido solicitado a resolver a operação ¾ + ½, escolhendo uma das seguintes alternativas:

(a) 3/8 (b) 1 ¼ (c) 7/8 (d) 4/6

O procedimento esperado para a resolução desta operação é a aplicação do algoritmo típico da resolução de adição de frações: transformar as duas frações (3/4 e ½) em frações com um denominador comum (¾ e 2/4), para então, adicionar os numeradores, mantendo o mesmo denominador (5/4); e então, tornar esta fração imprópria em uma fração mista (1 ¼).

Ethan, entretanto, resolveu a situação de forma diferente. Inicialmente ele fez uma decomposição (½ = ¼ + ¼), ou seja, metade é igual a dois quartos. Em seguida, ele adicionou um desses quartos à ¾ (¾ + ¼) para obter um inteiro (1). Restava a ele, agora, lidar com o outro um quarto (¼) restante. Este foi, então, adicionado ao inteiro (1); obtendo, desta forma, 1 ¼. Matematicamente, este foi o raciocínio empregado por Ethan (p. 253):

Operação:	¾ + ½ =
Procedimentos:	¾ + (¼ + ¼) =
	(¾ + ¼) + ¼ =
	1 + ¼ =
Resultado:	1 ¼

Note-se que Ethan utilizou como âncora em seu raciocínio o referencial de *inteiro*, podendo-se, ainda, dizer que também utilizou o referencial de ¼ para decompor uma das parcelas da operação (½).

Neste sentido, torna-se interessante investigar a adição de frações a partir das várias formas que esta operação possa ser representada e efetuada. No caso desta pesquisa, será utilizado o cálculo através de estimativas, fornecendo como âncoras para o raciocínio das crianças dois pontos de referência: *metade* e *todo (inteiro)*.

Supõe-se que o uso destes pontos de referência servirá como auxiliar para as operações que as crianças serão solicitadas a resolver; possibilitando, com isto, que sejam tiradas conclusões mais específicas sobre o desenvolvimento do raciocínio da criança nesta área de conhecimento.

Como apresentado, os esquemas de número inteiro e de metade são simultaneamente considerados como inibidores e como conhecimentos importantes para a compreensão do número fracionário. Sem minimizar os limites que tais pontos de referência possam ter sobre a compreensão de frações de maneira mais ampla e diversificada, é importante ressaltar o papel facilitador desses referenciais para a compreensão, pelo menos inicial, que a criança possa ter sobre frações. Assim, no presente estudo, se deseja examinar mais de perto o papel desempenhado por esses pontos de referência na construção do conhecimento sobre frações especificamente acerca da possibilidade da criança realizar adições de fração por estimativas, sem que sejam necessários cálculos numéricos e aplicação de algoritmos.

Usando tais referenciais, pretende-se, também, examinar os esquemas de equivalência que, como mencionado anteriormente, são relevantes para a compreensão das operações com fração. Utilizar unidades fracionárias diferentes daquelas apresentadas em uma dada situação para gerar uma nova situação (diferente, porém equivalente) é atividade matemática da maior relevância, sobretudo, em operações com fração. É neste sentido que se acredita que a criança, ao dispor de âncoras como os referenciais de inteiro e de metade, possa realizar operações de adição com frações com um maior nível de compreensão do que através da aplicação de algoritmos. Isso será investigado com crianças que não foram instruídas sobre fração no contexto escolar.

CAPÍTULO 2
MÉTODO

Sendo a adição de frações um conteúdo de difícil compreensão para as crianças não só no início, mas ao longo da escolarização, e um assunto que tem levado vários pesquisadores a investigar esta área de conhecimento do ponto de vista do aprendizado escolar, propõe-se neste estudo examinar as concepções iniciais das crianças para adicionar frações, no período que antecede a instrução escolar desse conteúdo curricular.

Como anteriormente mencionado, algumas pesquisas focalizam as dificuldades enfrentadas pelas crianças para adicionar frações, relacionadas, muitas vezes, à dificuldade primeira de compreender o número fracionário como um número diferente do número natural. Observa-se, nestas pesquisas, que as crianças têm sido muito indagadas sobre seu raciocínio fracionário principalmente quando já têm alguma noção sobre fração. Estudos desta natureza revelam que os obstáculos ao raciocínio das crianças vão sendo constituídos desde que elas começam a aprender sobre o próprio número natural.

Verifica-se, também, que, freqüentemente, quando os pesquisadores buscam oferecer algum recurso facilitador para as crianças resolverem as tarefas, estes, geralmente, têm oferecido o uso de representações gráficas, recurso este que pode ser muito útil em alguns casos, mas também inócuos em outros. Com exceção do que foi citado por Sowder (1995) e por Zeman (1991) sobre a importância do uso de algum número como âncora para a criança estimar um resultado aproximado numa adição de fração, tais estudos não apresentaram qualquer interesse quanto a este aspecto. Associando-se a isso, as pesquisas conduzidas por Spinillo que apontam para a importância do referencial de *metade* na compreensão inicial da criança sobre conceitos lógico-matemáticos complexos como razão e proporção, é possível pensar que pontos de referências podem ser algo extremamente importante na compreensão da criança sobre adição de frações por estimativas. Diante disto, este estudo, tem como objetivos:

2.1. Objetivos

- Investigar as concepções das crianças que ainda não foram formalmente instruídas sobre frações para realizar adição de frações por estimativas, fornecendo como âncora dois pontos de referência: *metade* e *inteiro*;
- Verificar se metade e todo servem como âncoras ao raciocínio das crianças para adicionar frações; e
- Verificar se as crianças realizam com sucesso adições de frações em que seja possível utilizar o referencial de *metade* e de *inteiro*.

2.2. Método

2.2.1. Participantes

Participaram do estudo 42 crianças de classe média de três escolas particulares da cidade do Recife, sendo 21 crianças da 2ª série do Ensino Fundamental I (8 anos, média: 8 anos e 4 meses) e 21 da 3ª série do Ensino Fundamental I (9 anos, média: 9 anos e 3 meses). Em cada escola foram entrevistadas 14 crianças, sendo 7 de cada série.

Considerando o conhecimento de divisão partitiva como importante para a compreensão de fração, optou-se por estes níveis de escolaridade porque, de acordo com o Referencial Curricular Nacional (MEC/SEF, 1998), as crianças da 2ª série, apesar de não serem formalmente instruídas sobre fração, são ensinadas acerca das propriedades da operação de divisão. Já na 3ª série, as crianças começam a estudar os números fracionários, mas não são ainda instruídas quanto às operações com frações. Assim, nenhuma das crianças da amostra havia sido formalmente ensinada sobre operações com fração no contexto escolar. Isso foi checado com cada escola.

2.2.2. Planejamento Experimental, Material e Procedimento

Cada criança foi solicitada a resolver quatro tarefas:

- *Tarefa de Sondagem*: O objetivo desta tarefa foi garantir que cada criança compreendesse a notação e a representação diagramática das frações ½, 1/3, ¼ e 1/6, que seriam utilizadas nos itens das quatro tarefas subseqüentes.

- *Tarefa 1 - Adição de frações (unitárias) usando o referencial de metade, resultando em frações ordinárias.* O objetivo desta tarefa foi investigar o conhecimento intuitivo das crianças para resolver adição de frações por estimativa com base no referencial de *metade*.

- *Tarefa 2 - Adição de frações (unitárias) usando o referencial de inteiro, resultando em frações ordinárias, mistas e em inteiros.* O objetivo desta tarefa foi investigar o conhecimento intuitivo das crianças para resolver adição de frações por estimativa com base no referencial de *inteiro*.

- *Tarefa 3 - Adição de frações usando o referencial de metade para realizar equivalência.* Esta tarefa teve por objetivo **i**nvestigar os conhecimentos intuitivos das crianças para construir equivalência em adições de frações usando o referencial de *metade*.

- *Tarefa 4 - Adição de frações utilizando a representação matemática formal da adição de frações.* Esta tarefa teve por objetivo investigar o desempenho e as estratégias utilizadas pelas crianças para operar com frações utilizando a representação formal matemática, comparando este resultado com aqueles obtidos na Tarefa 3 anteriormente descrita.

Essas tarefas foram divididas em duas sessões (com intervalo de uma semana entre uma sessão e outra), utilizando, sempre, uma ordem fixa de apresentação: *1ª sessão:* Sondagem; Tarefa 1 e Tarefa 2; e 2ª sessão: Tarefa 3 e Tarefa 4. Optou-se por uma ordem fixa de apresentação das tarefas devido ao fato de que, supõe-se, que o nível de complexidade parece ser crescente da Tarefa 1 para a Tarefa 4 (frações ordinárias, frações mistas, equivalência e representação formal, respectivamente).

As frações utilizadas para compor as parcelas de cada adição apresentada foram: ½, 1/3, ¼ e 1/6. As frações ½, 1/3 e ¼, são consideradas na literatura como mais familiares para as crianças do que outras. A fração 1/6, apesar de não ser tão familiar quanto as demais, foi utilizada por ser uma fração que pode estabelecer relações de equivalência com as frações 1/3 e ½, favorecendo a elaboração dos itens nas tarefas. A ordem de apresentação dos itens em cada tarefa foi aleatória, decidida através de sorteio com cada criança, havendo apenas a restrição de que nunca dois itens de um mesmo tipo fossem apresentados consecutivamente.

Para a realização das tarefas a examinadora utilizou um roteiro que serviu como um guia da ordem da apresentação dos itens de cada tarefa para cada criança.

Todas as crianças foram avaliadas individualmente, através de uma entrevista clínica em que, embora se tenha um roteiro de perguntas, os questionamentos foram elaborados a partir das próprias respostas das crianças. Justificativas e explicações foram solicitadas das crianças, o que favoreceu o exame das formas de raciocinar dos participantes. As entrevistas em cada tarefa foram gravadas e transcritas em protocolos individuais.

A descrição de cada tarefa é apresentada a seguir na seção relativa ao procedimento.

Tarefa de Sondagem

Material

Uma folha de respostas com quatro alternativas (diagramas) para cada fração (½, 1/3, ¼ e 1/6), para marcar a resposta dada (Anexo I).

Procedimento

A criança era solicitada a escolher, entre quatro alternativas, o diagrama que melhor representava as frações de cada item.

Tarefa 1: Adição de frações (unitárias) usando o referencial de metade, resultando em frações ordinárias

Esta tarefa foi composta por seis itens de adição de frações, igualmente divididos em dois tipos de itens (ver Quadro 1): Tipo 1 – adições formadas por duas parcelas iguais; e Tipo 2 – adições formadas por duas parcelas diferentes. De acordo com a possibilidade de combinação das frações ½, 1/3, ¼ e 1/6, os itens apresentavam como resultados: *metade, mais que metade e menos que metade*. Observa-se, então, que a âncora para as estimativas, nesta tarefa, era o referencial de *metade*.

Quadro 1: Itens e resultados corretos da Tarefa 1

	Adição	**Resultado por estimativa**	**Resultado preciso por cálculo**
Tipo 1	¼ + ¼	***Metade***	2/4 ou ½
	1/3 + 1/3	Mais que metade	2/3
	1/6 + 1/6	Menos que metade	2/6 ou 1/3
Tipo 2	1/3 + 1/6	Metade	3/6 = ½
	¼ + 1/6	Menos que metade	5/12
	1/3 + ¼	Mais que metade	7/12

Quanto ao nível de dificuldade dos tipos de itens apresentados, supôs-se que os itens do Tipo 2, por serem constituídos de parcelas diferentes, trariam maior dificuldade para as crianças.

Material

- Dois bolos em cartolina (um marrom – de chocolate; outro amarelo – de baunilha) disponíveis sobre a mesa. Os bolos eram bem maiores que os diagramas apresentados na tarefa de sondagem. Desta forma a criança não poderia fazer a tarefa com base apenas no perceptual, estimando apenas o tamanho das partes em termos absolutos (Anexo II);
- Folha de respostas com três alternativas escritas (metade, menos que metade e mais que metade) para a examinadora marcar a resposta da criança (Anexo III).

Procedimento

Nesta tarefa era contada a história de Artur, um menino muito comilão e que gostava muito de comer bolos. Ao começar a tarefa a examinadora iniciava por *"A mãe de Artur fez bolos em casa: um de chocolate e um de baunilha"* e mostrava em seguida os dois bolos inteiros sobre a mesa, como mostrado no Anexo II. Após apresentar os dois bolos, a examinadora pedia que a criança estimasse o resultado em metade, mais que metade e menos que metade. Exemplo:*"Artur comeu um quarto do bolo de baunilha depois do almoço, e à tarde, na hora do lanche, comeu um sexto do bolo de chocolate. Juntando as duas partes que ele comeu dos dois bolos, quanto de bolo Artur comeu no final do dia?Será que ele comeu metade, mais que metade ou menos que metade de um bolo?* Após cada resposta da criança, a examinadora perguntava: *"Como você descobriu?"*.

Este mesmo procedimento se repete em cada um dos seis itens anteriormente mostrados no Quadro 1.

Tarefa 2: Adição de frações (unitárias) usando o referencial de inteiro, resultando em frações ordinárias, mistas e em inteiros

Esta tarefa foi composta por nove itens de adição de frações, igualmente divididos em três tipos de itens (ver Quadro 2): Tipo 1 – adições formadas por três parcelas iguais; Tipo 2 – adições formadas por duas parcelas iguais e uma diferente; e Tipo 3 – adições de frações formadas por três parcelas diferentes . De acordo com a possibilidade de combinação das frações ½, 1/3, ¼ e 1/6, os itens apresentavam como resultados: *um inteiro*, *menos que um bolo e mais que um bolo*. Observa-se, então, que a âncora para as estimativas, nesta tarefa, era o referencial de *inteiro*.

Quadro 2: Itens e resultados corretos da Tarefa 2

	Adição	**Resultado por estimativa**	**Resultado preciso por cálculo**
Tipo 1	1/3 + 1/3 + 1/3	***Um bolo inteiro***	3/3 = 1 (inteiro)
	½ + ½ + ½	Mais que um bolo	3/2 ou 1 + ½ (fração mista)
	¼ + ¼ + ¼	Menos que um bolo	¾ (fração ordinária)
Tipo 2	½ + ¼ + ¼	***Um bolo inteiro***	4/4 = 1 (inteiro)
	½ + 1/3 + 1/3	Mais que um bolo	7/6 ou 1 + 1/6 (fração mista)
	1/3 + 1/3 + ¼	Menos que um bolo	11/12 (fração ordinária)
Tipo 3	½ + 1/3 + 1/6	***Um bolo inteiro***	6/6 = 1 (inteiro)
	½ + 1/3 + ¼	Mais que um bolo	13/12 ou 1 + 1/12 (fração mista)
	½ + ¼ + 1/6	Menos que um bolo	11/12 (fração ordinária)

Quanto ao nível de dificuldade de cada tipo de item, acreditava-se que os itens do Tipo 1, por serem formados por parcelas idênticas seriam os mais fáceis de serem estimados. Em contrapartida, os itens do Tipo 3 seriam os mais difíceis de serem estimados em função das adições envolverem três parcelas diferentes. Já os itens do Tipo 2 acreditava-se que se enquadrariam num nível intermediário de dificuldade entre os tipos 1 e 2, visto apresentarem, apenas, uma parcela distinta das outras duas.

Material

- Três bolos em cartolina (um marrom – chocolate; um amarelo – baunilha; e outro rosa – morango) disponíveis sobre a mesa. Os bolos eram bem maiores que os diagramas apresentados na tarefa de sondagem. Desta forma a criança não poderia fazer a tarefa com base apenas nos aspectos perceptuais e em termos absolutos (Anexo IV);
- Folha de respostas com três alternativas escritas (um bolo todo, mais do que um bolo e menos do que um bolo) para a examinadora marcar a resposta da criança (Anexo V);

Procedimento

O procedimento foi semelhante ao procedimento adotado na Tarefa 1. Nesta tarefa, porém, foi acrescentado um bolo para que, então, pudessem ser criadas situações em que a soma das parcelas resultaria numa fração mista (mais que um bolo) de forma a poder-se explorar o uso do *inteiro* como referencial para as estimativas. Ao começar a tarefa a examinadora iniciava por *"Artur gosta muito de bolos. Tem dias que ele come um bolo todinho. Tem dias que ele come mais do que um bolo todo: come um bolo todo e mais um pedaço. E tem dias que ele come menos que um bolo. Um dia a mãe de Artur* *fez bolos em casa: um de chocolate, um de baunilha e outro de morango"* (mostra os três bolos inteiros sobre a mesa, como mostrado no Anexo IV). Após apresentar os bolos sobre a mesa, a examinadora pedia à criança que estimasse o resultado em um bolo todo (inteiro), mais que um bolo (fração mista) e menos que um bolo (fração ordinária). Exemplo: *"Artur comeu metade do bolo de chocolate depois do almoço. À tarde na hora do lanche, ele comeu um terço do bolo de baunilha. Depois do jantar ele comeu um quarto do bolo de morango. Juntando as três partes que ele comeu dos três bolos, quanto de bolo Artur comeu no final do dia? Será que ele comeu um bolo todo, mais do que um bolo ou menos do que um bolo?".* Após cada resposta da criança, a examinadora perguntava: *"Como você descobriu?".*

Tarefa 3: Adição de frações usando o referencial de metade para realizar equivalência

Esta tarefa foi composta por 12 itens, igualmente divididos em dois tipos de itens: Tipo 1 – adições de frações *envolvendo o referencial de metade*; e Tipo 2 – adições de frações *sem o referencial de metade*, como mostra o Quadro 3.

Quadro 3: Itens, condições para a construção das respostas e respostas corretas da Tarefa 3

Adição apresentada	**Resposta correta**	
	Tipo 1: Com referencial de metade	**Tipo 2: Sem o referencial de metade**
¼ + ¼	½	1/6 + 1/6 + 1/6 (usando 1/6)
1/3 + 1/6	½	¼ + ¼ (usando ¼)
1/6 + 1/6 + 1/6	½	¼ + ¼ (usando ¼)
1/3 + 1/6 + ¼ + ¼	½ + ½	1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 (usando 1/6)
1/3 + 1/3 + 1/3	½ + ½	¼ + ¼ + ¼ + ¼ (usando ¼)
¼ + ¼ + ¼ + ¼	½ + ½	1/3 + 1/3 + 1/3 (usando 1/3)

Importante mencionar que, nesta tarefa, o referencial adotado para a criança compor a sua resposta, com exceção de um único item (1/3 + 1/6 + ¼ + ¼ com referencial de 1/6), sempre envolvia unidades fracionárias distintas daquelas presentes nas frações que formavam as parcelas da operação.

A predição era de que as crianças tivessem um melhor desempenho nos itens Tipo 1 porque poderiam usar o referencial de *metade* como âncora em suas estimativas, o que não ocorreria nos itens Tipo 2.

Material

- Quatro bolos em cartolina (um marrom – chocolate; um amarelo – baunilha; um rosa – morango; e um verde – limão) disponíveis sobre a mesa. Os bolos estavam seccionados de diferentes modos: o bolo de morango dividido em duas partes iguais; o bolo de limão em três partes iguais; o bolo de baunilha em quatro partes iguais; e bolo de chocolate em 6 partes iguais. Estes bolos também tinham dimensões maiores que os diagramas utilizados na tarefa de sondagem (Anexo VI).
- Cartelas com frações coladas representando cada operação apresentada. As frações eram coladas nas cartolinas com o objetivo de evitar que as crianças juntassem as frações e formassem figuras de meio bolo ou de um bolo inteiro (Anexo VII);
- Frações dos todos disponíveis para que as crianças pudessem compor a quota equivalente solicitada. Estas frações tinham dimensões menores que as partes seccionadas dos bolos de referência, mas as mesmas dimensões das frações coladas nas cartolinas que representavam as operações. Ainda assim, como o também já referido anteriormente, com exceção de em um único item (1/3 + 1/6

+ ¼ + ¼ com referencial de 1/6), nas demais operações a unidade fracionária utilizada como referencial era sempre distinta das unidades presentes nas frações que formavam as parcelas da operação (Anexo VIII).

Procedimento

Nesta tarefa a examinadora contava a história de Pedro e Artur. Ao começar a tarefa a examinadora iniciava por: *"Pedro e Artur* (mostrar as figuras de Pedro e de Artur) *são irmãos e gostam muito de comer bolos. A mãe deles sempre faz muitos tipos de bolos para eles comerem. Certo dia ela fez um bolo de morango, um bolo de chocolate, um bolo de baunilha e um bolo de limão. Só que a mãe deles fatiou os bolos e disse a eles que se eles quisessem comer dos bolos iam ter que comer as fatias do tamanho que ela havia cortado. Os bolos foram cortados do seguinte modo: o bolo de morango em duas partes iguais; o bolo de baunilha em quatro partes iguais; o bolo de limão em três partes iguais; e o bolo de chocolate em seis partes iguais* (a examinadora apresentava cada bolo como foi seccionado). *Artur comia de vários tipos de bolo e Pedro comia apenas de um tipo. Só que Pedro queria sempre comer o mesmo tanto de bolo que Artur comia.".*

A examinadora entregava a operação e pedia para a criança compor a adição com base na parte (fração) apresentada (metade – ½ ou não metade – 1/3, ¼ e 1/6). Esta parte (fração) era entregue à criança.

Exemplo de item Tipo 1 (com referencial de metade: 1/3 + 1/6):

"Um dia, Artur comeu uma fatia do bolo de limão (1/3) e uma fatia do bolo de chocolate (1/6) (mostra as fatias sobre a mesa). Pedro quer comer o mesmo tanto de bolo, só que ele não gosta do bolo de limão e nem do bolo de chocolate, pois ele só gosta do bolo de morango (mostra as fatias seccionadas em ½). Então para comer o

mesmo tanto de bolo que Artur comeu, quantas fatias desse bolo de morango Pedro vai ter que comer? Faz aqui para eu ver".

Os itens do Tipo 1 eram sempre resolvidos através da fração ½ (bolo de morango), como mostra o Quadro 3.

Exemplo de item Tipo 2 (sem referencial de metade: 1/3 + 1/6):

"Um dia, Artur comeu uma fatia do bolo de limão (1/3) e uma fatia do bolo de chocolate (1/6) (mostra as fatias sobre a mesa). Pedro quer comer o mesmo tanto de bolo, só que ele não gosta do bolo de limão e nem do bolo de chocolate, pois ele só gosta do bolo de baunilha (mostra as fatias seccionadas em ¼). Então para comer o mesmo tanto de bolo que Artur comeu, quantas fatias desse bolo de morango Pedro vai ter que comer? Faz aqui para eu ver".

Depois que a criança respondesse, a examinadora perguntava: *"Como você descobriu?".*

A criança recebia a operação com as frações coladas em cartolina retangular para que ela não movesse as fatias que representam as parcelas da operação apresentada. O sinal de adição foi colocado entre as fatias (ver Anexo VII). A unidade fracionária (fatias soltas) era entregue para a construção da equivalência com a (s) outra (s) unidade (s) fracionária (s) (adição na cartolina).

Os itens do Tipo 2 eram resolvidos através das frações 1/3 (limão), ¼ (baunilha) e 1/6 (chocolate), como o mostrado no Quadro 3.

Tarefa 4: Adição de frações utilizando a representação matemática formal

A tarefa foi composta por seis itens. Estes itens tinham a mesma configuração dos itens utilizados na Tarefa 3, porém, com a diferença de que a resolução deveria ser feita por meio da representação matemática formal (notação simbólica). Os itens estão apresentados no Quadro 4.

Quadro 4: Itens da Tarefa 4

Tipo 1: resulta em metade	**Tipo 2: resulta em inteiro**
¼ + ¼	1/3 + 1/6 + ¼ + ¼
1/3 + 1/6	1/3 + 1/3 + 1/3
1/6 + 1/6 + 1/6	¼ + ¼ + ¼ + ¼

Material

- Uma folha de papel com as operações a serem efetuadas (Anexo IX);
- Lápis e borracha para a resolução das adições.

Procedimento

A examinadora entregava a folha com as operações para serem efetuadas pela criança e dizia: *"Resolva as contas abaixo"*. Após a resolução de cada operação, a examinadora pedia para que a criança explicasse como havia procedido. A predição era que as crianças não conseguissem resolver as adições corretamente, tentando resolvê-las com base em procedimentos aritméticos que tinham conhecimento (aritmética dos números inteiros), como documentado na literatura.

CAPÍTULO 3
RESULTADOS

Os resultados obtidos em cada tarefa[6] são apresentados e discutidos separadamente. Em cada tarefa dois aspectos foram tomados para análise: o número de respostas corretas em cada item e as justificativas verbais das crianças e as estratégias de resolução adotadas na tentativa de resolver as operações.

3.1. Tarefa 1: Adição de frações unitárias usando o referencial de metade, resultando em frações ordinárias

3.1.1. O número de acertos na Tarefa 1

Inicialmente, o desempenho das crianças foi analisado em função do número de acertos em cada um dos itens na Tarefa 1. A Tabela 1 apresenta uma visão geral do desempenho das crianças nesta tarefa.

Tabela 1: Número de acertos (percentual em parênteses) por tipo de item em cada série.

Série	**Tipo 1 (parcelas iguais) (n=63)**	**Tipo 2 (parcelas diferentes) (n=63)**	**Total (n=126)**
2ª	35 (55,5)	25 (39,7)	60 (47,6)
3ª	37 (58,7)	19 (30,1)	56 (44,4)
Total	72 (57,1)	44 (34,9)	116 (46)

[6] Exceto da *tarefa de sondagem* que encontram-se no Anexo X.

Considerando a amostra como um todo, observa-se um percentual de 46% de acertos (116 acertos em um total de 252 itens). Com o objetivo de verificar se haveria diferença significativa entre as séries, aplicou-se o Teste U de Mann-Whitney. Este não detectou diferenças significativas entre as séries (Z= - ,4542, p= .6497), visto que o percentual de acerto foi bastante semelhante em cada uma delas (2ª série: 47,6%; e 3ª série: 44,4%). Este resultado indica que a escolaridade não foi fator determinante do desempenho das crianças ao resolverem adições de frações utilizando o referencial de metade.

Quanto aos tipos de item, observa-se que, no geral, houve 57,1 % de acertos nos itens Tipo 1 (adição de duas parcelas iguais) e 34,9% de acertos no itens Tipo 2 (adição de duas parcelas diferentes). O Teste de Wilcoxon mostrou ser esta diferença entre os tipos de itens significativa (Z= - 3,6862, p= .0001 (unicaudal)): os itens Tipo 1 foram mais fáceis de serem resolvidos que os itens Tipo 2. Este resultado indica que estimar o resultado de adições de frações em que as parcelas são iguais é mais fácil do que quando as parcelas são diferentes.

Diferenças no número de acertos entre os tipos de itens foram estatisticamente confirmadas através do Teste de Wilcoxon, aplicado sobre os dados obtidos em cada série separadamente. O teste mostrou que tanto na 2ª série (Z= - 2,1658, p= .0303) como na 3ª série (Z= - 2,9341, p= .0033) o desempenho nos itens com duas parcelas iguais (Tipo 1) era superior ao desempenho nos itens com duas parcelas diferentes (Tipo 2). Desta forma, tanto no geral como em cada série separadamente, as crianças apresentam um melhor desempenho nos itens que envolvem adições de parcelas iguais do que nos itens que envolvem adições com parcelas diferentes.

Comparações entre as séries em relação a cada tipo de item separadamente, foram realizadas através do Teste U de Mann-Whitney. Esta análise revelou não haver diferenças significativas entre as séries em relação ao desempenho nos itens Tipo 1 (Z= - ,3179, p= .7506) e nem tampouco em relação aos itens Tipo 2 (Z= -1,2252, p= .2205). De fato, como ilustrado na Tabela 1, o percentual de acertos obtido em cada série foi bastante semelhante.

Em síntese, como indicado pelos resultados até então apresentados, o tipo de item é fator que influencia o desempenho, sendo as crianças mais bem sucedidas quando resolvem adições de frações com duas parcelas iguais do que quando as operações envolvem parcelas diferentes. Esse resultado foi observado tanto no geral, considerando a amostra como um todo, como também em relação a cada série separadamente.

3.1.2. As justificativas das crianças na Tarefa 1

Como anteriormente mencionado, além do desempenho representado pelo número de acertos em cada tipo de item, analisou-se, ainda, as justificativas apresentadas pelas crianças em cada item da Tarefa 1. A partir de um levantamento feito das justificativas oferecidas pelas crianças neste estudo, foi possível identificar-se três tipos distintos de justificativas. Estes são descritos e exemplificados a seguir[7]:

<u>Justificativa I:</u> A criança não justifica ou oferece uma justificativa vaga, indefinida. Exemplos**:**

Item 1 (¼ + ¼) *Resposta correta: METADE (2/4 ou ½)*
Metade. (E: Como você sabe?) Porque eu acho que é.

Item 6 (1/3 + ¼) *Resposta correta: MAIS QUE METADE (7/12)*
Metade. (E: Por que?) Porque ele comeu só metade.

Item 5 (1/4 + 1/6) *Resposta correta: MENOS QUE METADE (5/12)*
Menos que metade. (E: Por que?) Porque tem uma parte e outra parte.

[7] As interpelações do examinador são indicadas em parêntese precedidas de E. São colocados, também, em parênteses, as ações e gestos feitos pelas crianças ou, ainda, explicações sobre o que está ocorrendo durante a entrevista.

Item 6 (1/3 + ¼) *Resposta correta: MAIS QUE METADE (7/12)*
Mais que metade. (E: Como você sabe?) Sei lá. Porque eu tô pensando que é assim. Só que eu não sei explicar porquê.

Justificativa II: A criança quantifica as parcelas em termos de grande e pequeno, ou compara uma parcela com a outra (maior que/ menor que). Exemplos:

Item 5 (1/4 + 1/6) *Resposta correta: MENOS QUE METADE (5/12)*
Mais que metade. (E: Como você sabe?) Porque 1/6 é um pedaço que nem é grande nem é pequeno.

Item 2 (1/3 + 1/3) *Resposta correta: MAIS QUE METADE (2/3)*
Mais que metade. (E: Como você sabe?) Porque o terço é grande.

Item 4 (1/3 + 1/6) *Resposta correta: METADE (3/6 ou ½)*
Mais que metade. (E: Como você sabe?) Porque o 1/3, ele é assim mais ou menos grande. Aí com 1/6 acho que ele aumenta um pouquinho.

Item 5 (1/4 + 1/6) *Resposta correta: MENOS QUE METADE (5/12)*
Metade. (E: Por que?) Porque o ¼ é mais ou menos e o 1/6 é bem pouquinho. Aí juntando eles acho que dá metade.

Justificativa III: A criança adota o referencial de metade para quantificar uma ou ambas as parcelas da operação. Exemplos:

Item 2 (1/3 + 1/3) *Resposta correta: MAIS QUE METADE (2/3)*
Mais que metade. (E: Como você descobriu?) Porque 1/3 já é um pouquinho mais do que a metade.

Item 1 (¼ + ¼) *Resposta correta: METADE (2/4 ou ½)*
Metade. (E: Como você sabe?) Porque ¼ dá prá fazer a metade da metade e com o outro quarto dá para fazer a metade a outra metade da metade.

Item 1 (¼ + ¼) *Resposta correta: METADE (2/4 ou ½)*
Menos que metade. (E: Como você sabe?) Porque eu já falei. Um quarto é menor e não passa do meio.

Item 2 (1/3 + 1/3) *Resposta correta: MAIS QUE METADE (2/3)*
Mais que metade. (E: Como você sabe?) Por causa que um terço é mais que a metade e 2/3 são iguais. Eles passam da metade.

Item 2 (1/3 + 1/3) *Resposta correta: MAIS QUE METADE (2/3)*
Mais que metade. (E: Como você sabe?) Porque 1/3 é mais ou menos maior que a metade. Então, juntando eles dois ia dar geralmente maior que a metade.

Item 6 (1/3 + ¼) *Resposta correta: MAIS QUE METADE (7/12)*
Acho que ia dar um pouquinho de nada mais do que a metade. (E: Como você descobriu?) Porque 1/3 é grande, mais que a metade e o 1/4 é a metade da metade.

As justificativas apresentadas pelas crianças foram analisadas por dois juizes independentes, cujo percentual de concordância entre eles foi de 92,06%. Os casos de desacordo foram analisados e discutidos pelos dois juizes, chegando-se a um consenso quanto à categorização da justificativa. Tais justificativas foram consideradas como sendo um sistema hierárquico de categorias em que Justificativas I eram mais elementares do que Justificativas II e estas últimas mais elementares do que Justificativas III. A Justificativa III foi considerada mais elaborada do que as demais porque expressavam a tentativa da criança em adicionar as frações de modo a formar uma terceira quantidade (o resultado). Esta tentativa se caracterizava pelo uso do referencial de metade como âncora em suas estimativas para resolver as adições de fação. A distribuição das justificativas em cada série é ilustrada na Tabela 2.

Tabela 2: Número (percentual em parênteses) de justificativas por série.

Justificativas	**2ª Série**	**3ª Série**
I (n=126)	60 (47,6)	66 (52,4)
II (n=85)	44 (51,7)	41 (48,3)
III (n=41)	22 (53,7)	19 (46,3)

Nota: Justificativa I: vaga, indefinida ou não justifica; Justificativa II: quantificação em termos de grande/pequeno; Justificativa III: uso do referencial metade.

Observa-se que, de maneira geral, a maioria das explicações das crianças se concentra na Justificativa I (não justifica ou oferece uma justificativa vaga: 50%), enquanto Justificativa II (quantificações das parcelas: 33,7%) e Justificativa III (uso do referencial de metade: 16,3%) foram menos freqüentes, em especial essas últimas. Esta tendência foi também observada em cada série separadamente.

Comparações entre séries foram feitas através do Teste Kolmogorov-Smirnov, revelando não haver diferenças significativas entre as séries em relação a nenhum dos tipos de justificativas (Justificativa I: Z= ,617; p=.84; Justificativa II: Z= ,463; p = .983; e Justificativa III: Z= ,309; p= 1.000). Como pode ser notado na Tabela 2, em ambas séries, o padrão de resultados é bastante semelhante, havendo uma concentração nas Justificativas I tanto entre as crianças da 2ª série (47,6%) como entre as da 3ª série (52,4%). Os resultados indicam que os tipos de justificativas oferecidos pelas crianças não variam em função da série.

Além da série, tomou-se como fator que poderia ter um efeito sobre as justificativas das crianças o tipo de item apresentado (Tipo 1: duas parcelas iguais; Tipo 2: duas parcelas diferentes). O resultado desta análise é apresentado na Tabela 3.

Tabela 3: Número (percentual em parênteses) de justificativas em função do tipo de item.

Justificativas	**Tipo 1 (parcelas iguais)**	**Tipo 2 (parcelas diferentes)**
I (n=126)	59 (46,8)	67 (53,2)
II (n=85)	46 (54,1)	39 (45,9)
III (n=41)	21 (51,2)	20 (48,8)

Nota: Justificativa I: vaga, indefinida ou não justifica; Justificativa II: quantificação em termos de grande/pequeno; Justificativa III: uso do referencial metade.

Diferenças entre tipos de itens quanto às justificativas foram exploradas a partir do Teste Wilcoxon que não detectou diferenças significativas (Justificativa I: Z = -,3718, p=.1701; Justificativa II: Z = -1,3280, p=.1842; e Justificativa III: Z = -1,0832, p= .2787). Esse resultado sugere que as justificativas não variavam em função do fato do item ter parcelas iguais (Tipo 1) ou diferentes (Tipo 2). Nota-se, na Tabela 3, que tanto nos itens Tipo 1 como nos itens Tipo 2, havia um predominância de Justificativas I (não justifica ou justificativa vaga, indefinida), sendo pouco freqüente a Justificativa III (uso do referencial de metade).

3.1.3. Número de acertos e justificativas na Tarefa 1

A Tabela 4 apresenta a relação entre o número de acerto/erro e os tipos de justificativa adotados pelas crianças.

Tabela 4: Número de acertos e erros (percentual em parênteses) em função do tipo de justificativa.

Justificativas	**Resposta correta**	**Resposta incorreta**
I (n=126)	50 (39,7)	76 (60,3)
II (n=85)	42 (49,4)	43 (50,6)
III (n=41)	24 (58,5)	17 (41,5)

Nota: Justificativa I: vaga, indefinida ou não justifica; Justificativa II: quantificação em termos de grande/pequeno; Justificativa III: uso do referencial metade.

Diferenças em cada justificativa em função do acerto/erro foram examinadas através do Teste Wilcoxon. Este detectou haver diferenças significativas apenas em relação à Justificativa I (Z= -2,2999, p= .0215), sendo não significativa as diferenças na

Justificativa II (Z= -,0812, p= .9353) e na Justificativa III (Z= - ,9655, p= .3343). A diferença relativa ao uso da Justificativa I deveu-se ao fato de que esta justificativa era mais freqüentemente acompanhada de respostas incorretas. Esperava-se que as Justificativas III fossem mais freqüentes em itens respondidos corretamente. Entretanto, isso não foi confirmado pela análise estatística adotada. Mesmo assim, olhando-se a Tabela 4, é possível notar um percentual maior de acertos em itens explicados através da Justificativas III. Este dado, no entanto, é apenas uma tendência.

3.2. Tarefa 2: Adição de frações unitárias usando o referencial de inteiro, resultando em frações ordinárias, mistas e em inteiros

3.2.1. O número de acertos na Tarefa 2

Inicialmente, o desempenho das crianças foi analisado em função do número de acertos em cada um dos itens na Tarefa 2. A Tabela 5 apresenta uma visão geral do desempenho das crianças nesta tarefa.

Tabela 5: Número de acertos (percentual em parênteses) por tipo de item em cada série.

Série	Tipo 1 (três parcelas iguais) (n=63)	Tipo 2 (duas parcelas iguais e uma diferente) (n=63)	Tipo 3 (três parcelas diferentes) (n=63)	Total (n=189)
2ª	39 (61,9)	29 (46)	17 (26,9)	85 (44,9)
3ª	35 (55,5)	25 (39,7)	26 (41,3)	86 (45,5)
Total	74 (58,7)	54 (42,8)	43 (34,1)	171 (45,2)

Considerando a amostra como um todo, verifica-se 45,2% de acerto. Diferenças entre as séries foram examinadas através do teste U de Mann-Whitney. A análise estatística não apontou diferenças significativas entre as séries (Z= - ,2864, p= .7746), levando à conclusão de que as crianças da 2ª e 3ª série apresentaram desempenhos semelhantes para estimar as adições de frações utilizando o referencial de inteiro.

Quanto aos tipos de item observa-se que, no geral, houve 58,7% de acertos nos itens Tipo 1 (três parcelas iguais), 42,8% de acertos no itens Tipo 2 (duas parcelas iguais e uma diferente) e 34,12% de acertos nos itens Tipo 3 (três parcelas diferentes). O teste de Friedman revelou haver diferenças significativas entre os três tipos de itens (X^2 = 12,5119; p= .0019). Esta diferença decorreu do fato de que o número de acertos nos itens Tipo 1 foi expressivamente maior do que nos demais itens. O tipo de item que obteve o menor número de acertos foi aquele em que as três parcelas eram diferentes entre si (Tipo 3). Este resultado, semelhante ao observado na Tarefa 1 (ver Tabela 1), sugere que a adição de parcelas iguais é mais fácil do que a adição de parcelas diferentes.

Diferenças de desempenho entre os tipos de itens foram exploradas através do teste de Friedman, aplicado sobre os dados obtidos em cada série separadamente. Os resultados deste teste mostraram que diferenças significativas entre os tipos de itens foram encontradas apenas em relação à 2ª série (X^2 =9,5952; p=.0082). Nesta série, como também observado no geral, itens com parcelas iguais (Tipo 1) foram significativamente mais fáceis do que itens com parcelas diferentes (Tipo 2 e Tipo 3). Entretanto, entre as crianças da 3ª série esta diferença não foi significativa (X^2 = 4,5714 p= .1017), visto que o desempenho foi bastante semelhante nos três tipos de itens.

Diferenças entre as séries foram examinadas através do Teste U de Mann-Whitney, aplicado separadamente a cada tipo de item. Nenhuma diferença significativa foi detectada entre as séries em cada tipo de item (Tipo 1: Z= - ,7764, p= .4375; Tipo 2: Z= -,4318, p= .6659; e Tipo 3: Z= - 1,6309, p= .1029). Neste sentido, pode-se concluir que as crianças da 2ª e 3ª série apresentaram um mesmo padrão de desempenho em relação a cada tipo de item: melhor desempenho em itens com parcelas iguais do que com parcelas diferentes.

Considerando os dados acima, verifica-se que o desempenho das crianças para estimar adições de frações utilizando o referencial de inteiro não varia em função da série. O tipo de item teve um efeito apenas entre as crianças da 2ª série, sendo mais fácil resolver adições de frações com parcelas iguais do que com parcelas diferentes.

3.2.2. As justificativas das crianças na Tarefa 2

As justificativas das crianças também foram objeto de análise na tarefa 2. De maneira semelhante ao que ocorreu na Tarefa 1, foi realizado um levantamento das justificativas das crianças, a partir do qual foi possível identificar-se três tipos distintos de categorias, os quais são descritos e exemplificados a seguir[8] :

Justificativa I: A criança não justifica ou oferece uma justificativa vaga, indefinida. Exemplos:

Item 5 (½ + 1/3 + 1/3) Resposta correta: MAIS QUE UM BOLO (7/6 ou 1 + 1/6)
Um bolo inteiro. (E: Como você sabe?) É um bolo inteiro!

Item 7 (½ + 1/3 + 1/6) Resposta correta: UM BOLO INTEIRO (6/6 ou 1)
Mais que um bolo... Menos! (E: Mais ou menos que um bolo inteiro?) Eu acho que é menos. (E: Por que?) Não sei explicar não.

Item 9 (½ + ¼ + 1/6) Resposta correta: MENOS QUE UM BOLO (11/12)
Mais que um bolo (E: Como você sabe?) É porque eu acho.

Item 8 (½ + 1/3 + ¼) Resposta correta: MAIS QUE UM BOLO (13/12 ou 1+1/12)
Vai dar menos. (E: Por que?) Porque vai dar menos.

[8] As interpelações do examinador são indicadas em parêntese precedidas de E. São colocados, também, em parênteses, as ações e gestos feitos pelas crianças ou, ainda, explicações sobre o que está ocorrendo durante a entrevista.

<u>Justificativa II</u>: A criança quantifica as parcelas em termos de grande e pequeno, ou compara uma parcela com a outra (maior que/ menor que). Exemplos:

Item 3 (¼ + ¼ + ¼) Resposta correta: MENOS QUE UM BOLO (3/4)
Um bolo inteiro. (E: Como é que você sabe?) Porque esses pedaços são muito grandes.

Item 7 (½ + 1/3 + 1/6) Resposta correta: UM BOLO INTEIRO (6/6 ou 1)
Menos que um bolo. (E: Como você descobriu?) Porque o sexto já é pequeno aí faz ficar menos.

Item 1 (1/3 + 1/3 + 1/3) Resposta correta: UM BOLO INTEIRO (3/3 ou 1)
Mais que um bolo. (E: Como você sabe?) Porque 1/3 é muito grande.

<u>Justificativa III</u>: A criança usa em suas justificativas o referencial de metade e/ou o referencial de inteiro para quantificar uma ou mais parcelas da operação. Quando faz menção ao inteiro a criança refere-se ao que falta para formar um inteiro ou ao que "sobra", isto é, ao que ultrapassa o inteiro. Exemplos:

Item 4 (½ + ¼ + ¼) Resposta correta: UM BOLO INTEIRO (4/4 ou 1)
Mais que um bolo. (E: Como você sabe?) Porque ¼ é menor que uma metade.

Item 3 (¼ + ¼ + ¼) Resposta correta: MENOS QUE UM BOLO (3/4)
Menos que um bolo. (E: Como você sabe?) Porque se fosse quatro (pedaços) era inteiro. Vai faltar ¼.

Item 9 (½ + ¼ + 1/6) Resposta correta: MENOS QUE UM BOLO (11/12)
Mais que um bolo. (E: Como você sabe?) Porque ¼ mais 1/6 dá metade. Mais outra metade, vai sobrar um pouquinho.

Item 5 (½ + 1/3 + 1/3) Resposta correta: MAIS QUE UM BOLO (7/6 ou 1 + 1/6)
Mais que um bolo. (E: Como você descobriu?) Porque 1/3 mais 1/3 fica mais ou menos um (inteiro). E esse daqui, metade, fica um pouquinho de fora. Aí fica mais.

Item 9 (½ + ¼ + 1/6) Resposta correta: MENOS QUE UM BOLO (11/12)
Mais que um bolo. (E: Como você sabe?) Porque ¼ e metade fica muito. E 1/6 fica um pouquinho. Aí sobra.

De forma semelhante ao que ocorreu na análise na Tarefa 1, as justificativas das crianças nesta Tarefa 2 foram analisadas por dois juizes independentes, cujo percentual de concordância entre eles foi de 89,9%. Os casos de desacordo foram analisados e discutidos pelos dois juizes, chegando-se a um consenso quanto à categorização da justificativa. Tais justificativas foram consideradas como sendo um sistema hierárquico de categorias em que Justificativas I eram mais elementares do que Justificativas II e estas últimas mais elementares do que Justificativas III. A Justificativa III foi considerada mais elaborada do que as demais porque expressavam a tentativa da criança em adicionar as frações de modo a formar uma quarta quantidade (o resultado). Esta tentativa se caracterizava pelo uso do referencial de metade ou do referencial de inteiro como âncoras em suas estimativas para resolver as adições apresentadas. Importante comentar que o uso de âncoras envolvia tanto o referencial de metade como o referencial de inteiro, sendo raras as justificativas em que a criança se utilizava exclusivamente do inteiro como ponto de referência em suas estimativas. As razões para isso serão discutidas posteriormente nesta dissertação.

A distribuição das justificativas em cada série é ilustrada na Tabela 6.

Tabela 6: Número (percentual em parênteses) de justificativas por série.

Justificativas	**2ª Série**	**3ª Série**
I (n=179)	80 (44,7)	99 (55,3)
II (n=61)	32 (52,5)	29 (47,5)
III (n=138)	77 (55,8)	61 (44,2)

Nota: Justificativa I: vaga, indefinida ou não justifica; Justificativa II: quantificação em termos de grande/pequeno; Justificativa III: uso do referencial metade e/ou inteiro.

Considerando-se a amostra como um todo, verificou-se que as Justificativas II foram as menos freqüentes (quantificações das parcelas: 16,1%), enquanto as

Justificativas I (não justifica ou oferece uma justificativa vaga: 47,4%) e as Justificativas III (uso de referenciais: 36,5%) foram mais utilizadas.

Comparações entre séries foram feitas através do Kolmogorov-Smirnov. Não foram encontradas diferenças significativas entre as séries em relação ao uso de cada um dos tipos de justificativas (Justificativa I: Z= ,926, p= .358; Justificativa II: Z = ,463, p = .983; e Justificativa III: Z = ,772, p = .591). Nota-se, ainda, na tabela acima, que em ambas as séries o padrão de resultados foi o mesmo: predominância de Justificativas I e de Justificativas III, sendo pouco freqüentes as Justificativas II.

O efeito do tipo de item sobre o uso das justificativas também foi analisado, como ilustrado na Tabela 7.

Tabela 7: Número (percentual em parênteses) das justificativas das crianças em função do tipo de item.

Justificativas	**Tipo 1 (três parcelas iguais)**	**Tipo 2 (duas parcelas iguais e uma diferente)**	**Tipo 3 (três parcelas diferentes)**
I (n=179)	50 (28)	59 (33)	70 (39)
II (n=61)	16 (26,2)	20 (32,8)	25 (41)
III (n=138)	60 (43,5)	47 (34)	31 (22,5)

Nota: Justificativa I: vaga, indefinida ou não justifica; Justificativa II: quantificação em termos de grande/pequeno; Justificativa III: uso do referencial metade e/ou inteiro.

O Teste de Friedman foi aplicado sobre os dados relativos a cada justificativa separadamente. Diferenças significativas foram encontradas em relação à Justificativa I (X^2= 6,4405, p=.0399) e em relação à Justificativa III (X^2= 12,9643, p= .0015), porém não em relação à Justificativa II (X^2= 1,2262, p= .5417).

Uma vez que o Friedman detectou diferenças entre os tipos de itens em relação à Justificativa I, foi necessário examinar em maiores detalhes esta diferença. Para tal, aplicou-se o Wilcoxon, comparando-se dois a dois os três tipos de itens. Os níveis de significância são apresentados na Tabela 8 a seguir.

Tabela 8: Níveis de significância derivados do Wilcoxon.

	Tipo 1 (três parcelas iguais) vs. Tipo 2 (duas parcelas iguais e uma diferente)	**Tipo 1 (três parcelas iguais) vs. Tipo 3 (três parcelas diferentes)**	**Tipo 2 (duas parcelas iguais e uma diferente) vs. Tipo 3 (três parcelas diferentes)**
Justificativa I	Z= -1,4123, p= .1579	Z= -2,8327, p= .0046	Z= -1,6767, p= .0936
Justificativa III	Z= -1,9466, p= .0516	Z= 14,0143, p= .0046	Z= -2,3906, p= .0168

Nota: Justificativa I: vaga, indefinida ou não justifica; Justificativa III: uso do referencial metade e/ou inteiro.

A partir dos níveis de significância apresentados na Tabela 8, nota-se que em relação à Justificativa I, a diferença significativa deveu-se ao fato de que os itens Tipo 3 apresentavam um percentual maior de Justificativas I (39%) do que os itens Tipo 1 (28%).

Em relação à Justificativa III, a diferença significativa decorreu do fato que os itens Tipo 1 apresentavam um percentual maior de Justificativas III (43,5%) do que os itens tipo 3 (22,5%), sendo esse dado o oposto daquele observado em relação à Justificativa I. isso indica que as justificativas III foram mais freqüentes nos itens Tipo 1 (parcelas iguais).

Ainda em relação à Justificativa III, nota-se que os itens tipo 2 (duas parcelas iguais e uma diferente) tiveram um percentual maior dessa justificativa (34%) do que os itens tipo 3 (três parcelas diferentes: 22,5%).

Importante comentar que embora os percentuais de Justificativa III em relação aos itens tipo 1 e tipo 2 não se diferenciassem significativamente (43,5% e 34%, respectivamente), o valor de p atinge quase a significância ($p = .0516$). Isso indica que há uma tendência de que os itens tipo 1 (parcelas iguais) sejam mais explicados em termos de Justificativa III (referencial de metade ou de todo) do que os itens tipo 2 (duas parcelas iguais e uma diferente).

Tomando esses resultados como um todo, é possível notar que itens com parcelas iguais (tipo 1) são explicados mais freqüentemente através de justificativas III (uso do referencial metade e/ou inteiro), enquanto que itens com três parcelas diferentes (Tipo 3) tendem a ser mais freqüentemente explicados através de justificativas I (vaga, indefinida ou não justifica). Uma possível explicação para isso é que itens com parcelas iguais parecem favorecer o uso de referenciais mais do que itens com parcelas diferentes. Isso é particularmente notado quando as três parcelas são diferentes (tipo 3).

3.2.3. Número de acertos e justificativas na Tarefa 2

A Tabela 9 apresenta a relação entre o número de acerto/erro e os tipos de justificativas usados pelas crianças.

Tabela 9: Número de acertos e erros (percentual em parênteses) em função do tipo de justificativa.

Justificativas	Resposta correta	Resposta incorreta
I (n=179)	62 (34,6)	117 (65,4)
II (n=61)	25 (41)	36 (59)
III (n=138)	84 (61)	54 (39)

Nota: Justificativa I: vaga, indefinida ou não justifica; Justificativa II: quantificação em termos de grande/pequeno; Justificativa III: uso do referencial metade e/ou inteiro.

Aplicando-se o Teste de Wilcoxon separadamente a cada tipo de justificativas, detectou-se diferenças significativas entre respostas corretas e incorretas em relação à Justificativa I ($Z = -3.2759$, $p= .0011$). Isso ocorreu porque esse tipo de justificativa era mais freqüente em respostas incorretas (65,4%) do que corretas (34,6%).

No que concerne à Justificativa II, não foram identificadas diferenças entre respostas corretas e incorretas ($Z = -1,4688$, $p= .1419$), sendo os percentuais de freqüências bastante próximos (41% e 59%, respectivamente).

Em relação à Justificativa III, o Wilcoxon apontou diferenças significativas entre respostas corretas e incorretas ($Z = -2,7845$, $p= .0054$). Tal diferença deveu-se ao fato de que esse tipo de justificativa era mais freqüente em respostas corretas (61%) do que incorretas (39%). Ao que parece, o uso de justificativas que expressam o uso de referenciais (inteiro e metade) é mais freqüentemente acompanhado de acertos.

De modo geral, os dados apresentados na Tabela 9 indicam que a maioria das Justificativas I ocorre em itens respondidos incorretamente, enquanto que, por outro lado, a maioria das Justificativas III era dada em itens respondidos corretamente.

3.3. Tarefa 3: Adição de frações usando o referencial de metade para realizar equivalência

3.3.1. O número de acertos na Tarefa 3

Inicialmente, o desempenho das crianças foi analisado em função do número de acertos em cada um dos itens na Tarefa 3. A Tabela 10 apresenta uma visão geral do desempenho das crianças nesta tarefa.

Tabela 10: Número de acertos (percentual em parênteses) por tipo de item em cada série.

Série	Tipo 1 (com metade) (n=252)	Tipo 2 (s/ metade) (n=252)	Total (n= 504)
2ª	94 (74,6)	54 (42,8)	148 (58,7)
3ª	116 (92)	66 (52,4)	182 (72,2)
Total	210 (83,3)	120 (47,6)	330 (65,5)

No geral, as crianças obtiveram um percentual de 65,5% de acertos. As crianças da 2ª série obtiveram um percentual de 58,7% e as da 3ª série de 72,2%. Com o objetivo de averiguar se a diferença entre os percentuais obtidos em cada série diferia significativamente, aplicou-se o Teste U de Mann-Whitney, o qual revelou não haver diferenças entre as séries (Z= -1,4592, p=.1445). Isso indica que as crianças em ambas as séries tiveram, no geral, desempenhos semelhantes ao resolver as operações de frações nesta tarefa. Importante comentar, que o desempenho em cada série foi bastante satisfatório, em especial entre as crianças da 3ª série.

Diferenças entre os tipos de itens, quanto ao desempenho geral, foram comparadas através do Teste Wilcoxon. Este teste revelou uma diferença altamente significativa entre os itens (Z= - 4,8982, p= .0000 (unicaudal)), diferença esta que se deveu ao fato de que o percentual de acertos nos itens Tipo 1 (com referencial de metade: 83,3%) foi significativamente maior do que o percentual de acertos nos itens Tipo 2 (sem o referencial de metade: 42,6%). Tal resultado aponta que os itens em que era fornecido o referencial de metade para auxiliar a criança a estabelecer a equivalência entre os conjuntos de fatias eram mais facilmente resolvidos do que aqueles em que outros referenciais (unidades fracionárias diferentes da metade) eram disponibilizados.

Analisando-se o desempenho em cada série separadamente, quanto ao desempenho em cada tipo de item, através do Teste Wilcoxon, verificou-se haver diferenças no interior de cada série (2ª série: Z= -3,2900, p= .0010; e 3ª série: Z= -3,6214, p= .0003). De acordo com esta análise, tanto as crianças da 2ª como as da 3ª série apresentam um melhor desempenho nos itens em que o referencial de metade é adotado como âncora do que quando outras unidades fracionárias são adotadas (2ª série: Tipo 1 – 94% e Tipo 2 – 54%; 3ª série: Tipo 1 - 92% e Tipo 2 – 52,4 %). Este resultado aponta para o papel facilitador do referencial de metade na resolução da tarefa.

Comparando o desempenho entre séries em relação a cada tipo de item separadamente, contatou-se que em relação aos itens Tipo 1 (com referencial de metade), a 2ª série obteve um percentual de acerto de (74,6%) bastante semelhante àquele obtido na 3ª série de (92%). O mesmo ocorreu em relação aos itens Tipo 2 (sem referencial de metade): 2ª série obteve 42,8% de acertos e a 3ª série 52,4%. O Teste de Wilcoxon mostrou não haver diferenças significativas entre séries em relação ao desempenho nos itens Tipo 1 (Z= -1,9505, p= .0511), e nem tampouco em relação ao desempenho nos itens Tipo 2 (Z= -1.0345, p= .3009). Importante ressaltar o fato de que em relação aos itens que envolviam a metade como ponto de referência (Tipo 1), as crianças das duas séries apresentaram, igualmente, um bom desempenho; enquanto que em relação aos itens que envolviam outras unidades fracionárias (Tipo 2) o desempenho foi igualmente inferior.

Merece, ainda, ser comentado o fato de que em relação aos itens Tipo 1 (com referencial de metade), as crianças da 3ª série apresentaram um excelente desempenho (92% de acertos), percentual este superior àquele obtido pelas crianças da 2ª série (74,6%). Esta diferença atingiu quase o nível de significância (p= .0511). Este dado sugere que as crianças da 3ª série apresentam um número de acertos, neste tipo de item, que tende a ser maior do que aquele obtido pelas crianças da 2ª série. O mesmo, entretanto, não ocorreu em relação aos itens Tipo 2 (sem referencial de metade), cujos percentuais foram bastante próximos entre as séries. Ao que tudo indica, as crianças das duas séries apresentam um mesmo nível de desempenho em relação aos itens que não envolvem a metade como âncora; porém, o desempenho da 3ª série tende a ser superior ao da 2ª série quando o referencial de metade está envolvido.

Diante do exposto, pode-se concluir que, de maneira geral, o desempenho das crianças para resolver as operações de equivalência não varia em função da série, mas varia em função do tipo de item, visto ser o desempenho das crianças significativamente superior nos itens em que o referencial de metade era utilizado.

3.3.2. As estratégias das crianças na Tarefa 3

Diferentemente da análise conduzida na Tarefa 1 e na Tarefa 2 anteriormente apresentadas, na Tarefa 3 não foram analisadas as justificativas das crianças, mas as estratégias que utilizavam. Isso decorreu devido ao fato de que, nesta tarefa, as crianças eram solicitadas a realizar um conjunto de ações sobre um dado material (unidades fracionárias) para construir um conjunto de fatias de fatias de bolo que fosse equivalente a um outro conjunto apresentado pelo examinador. Desta forma, mais do que explicações verbais, era solicitado da criança que manipulasse um dado material; decorrendo assim, a emergência de um conjunto de ações realizadas pelas crianças que foram consideradas estratégias de resolução.

Importante lembrar que nesta tarefa, a pergunta feita pelo examinador era: " Para comer o mesmo tanto de bolo que Artur comeu, quantas fatias desse bolo (de chocolate, de morango, de baunilha ou de limão) Pedro vai ter que comer?". A partir da análise dos protocolos de cada criança, foram identificados cinco tipos distintos de estratégias que são descritos e exemplificados a seguir:

Estratégia I (comparação de tamanho): A criança apenas compara uma fatia do bolo de origem (operação apresentada na cartela pelo examinador que serve de ponto de partida para realizar a equivalência) com a fatia de referência (unidade fracionária usada como âncora) utilizada para realizar a equivalência. Ao realizar as comparações, justapondo as fatias, constata que uma fatia do bolo de origem é maior/menor do que a fatia de referência. Há uma tentativa de compensar os tamanhos para, então, decidir quantas fatias de referência deverão compor o bolo a ser formado. Exemplos[9]:

> *Item ¼ + ¼ + ¼ + ¼ (bolo de baunilha) Unidade fracionária de referência: ½(bolo de morango)*
> Um (refere-se a uma única unidade fracionária de referência – 1/2). (E: Por que?) Porque tem quatro fatias do bolo de baunilha (composto por ¼) e uma fatia do bolo de morango (composto por ½) já é maior que a de baunilha. (E: Você acha que vai ficar igual?) Fica.
>
> *Item 1/6 + 1/6 + 1/6 (bolo de chocolate) Unidade fracionária de referência: ¼ (bolo de baunilha)*
> (Coloca ¼ sobre 1/6) Duas. (E: Por que?) Porque o de chocolate é menor que o de baunilha.
>
> *Item 1/3 + 1/3 + 1/3 (bolo de limão) Unidade fracionária de referência: ¼ (bolo de baunilha)*
> (Coloca ¼ + ¼ sobre 1/3) Seis. (E: Por que?) Porque o de baunilha é pequeno e o de limão é menor que o de baunilha.
>
> *Item 1/6 + 1/6 + 1/6 (bolo de chocolate) Unidade fracionária de referência: ½ (bolo de morango)*
> *Já que as de morango são grandes só precisaria de uma fatia de morango.*
>
> *Item 1/6 + 1/6 + 1/6 (bolo de chocolate) Unidade fracionária de referência: ½ (bolo de morango)*
> Um tá bom. (E: Por que?) Porque o pedaço do bolo de morango é muito maior do que o pedaço do bolo de baunilha.

Estratégia II (quantidade absoluta de fatias): A criança raciocina em termos absolutos, tomando por base a quantidade de fatias presentes no bolo de origem (operação apresentada na cartela pelo examinador que serve de ponto de partida para realizar a

---

[9] As interpelações do examinador são indicadas em parêntese precedidas de E. São colocados, também, em parênteses, as ações e gestos feitos pelas crianças ou, ainda, explicações sobre o que está ocorrendo durante a entrevista.

equivalência). Desta forma, a equivalência, por ela realizada, consiste em compor um bolo com as fatias de referência de forma que este tenha o mesmo número de fatias que o bolo de origem. Exemplos:

Item 1/3 + 1/3 + 1/3 (bolo de limão) Unidade fracionária de referência: ½(bolo de morango)
Três. (E: Por que?) Porque ele comeu três aqui (1/3 + 1/3 + 1/3) e agora três aqui (1/2 + 1/2 + 1/2). (E: Vai dar o mesmo tanto de bolo?). Vai.

Item ¼ + ¼ + ¼ + ¼ (bolo de baunilha) unidade fracionária de referência: 1/3 (bolo de limão)
Quatro. (E: Por que?). Porque dá igual ao do irmão dele. (E vai dar o mesmo tanto?) Vai. Dá 4.

Item ¼ + ¼ (bolo de baunilha) Unidade fracionária de referência: ½ (bolo de morango)
Dois. (E: Como você sabe?) Porque aqui (¼ + ¼) é dois.

Item 1/3 + 1/6 + ¼ + ¼ (fatias de bolos diversos) Unidade fracionária de referência: ½ (bolo de morango)
Quatro (E: Por que?) Porque aqui (1/3 + 1/6 + ¼ + ¼) tem quatro. (E: Se juntar quatro fatias dessa (1/2) e juntar essas quatro fatias (1/3 + 1/6 + ¼ + ¼) vai dar o mesmo tanto de bolo?) Vai.

Item 1/3 + 1/6 + ¼ + ¼ (fatias de bolos diversos) Unidade fracionária de referência: 1/6 (bolo de chocolate)
Quatro. (E: Por que?) Porque aqui (1/3 + 1/6 + ½ + ½) tem quatro fatias. (E: Se juntar quarto fatias do bolo de chocolate vai ficar a mesma quantidade dessas juntas (1/3 + 1/6 + ½ + ½)?) Vai.

Item ¼ + ¼ (bolo de baunilha) Unidade fracionária de referência: ½ (bolo de morango)
Dois. (E: Por que?) Porque é a quantidade do de morango que vai precisar para ficar com a quantidade do irmão dele.

<u>Estratégia III (tentativas de composição e decomposição inadequadas</u>): A criança tenta estabelecer a equivalência entre as fatias do bolo de origem (operação apresentada na cartela pelo examinador que serve de ponto de partida para realizar a equivalência) e a fatia de referência (unidade fracionária usada como âncora). Essas tentativas se caracterizam por justaposições das fatias de referência sobre as fatias do bolo de origem. Observa-se a tentativa da criança de fazer composições e decomposições a partir de compensações entre os tamanhos das fatias nos dois bolos (bolo de referência e bolo a compor). Algumas vezes, durante o processo de resolução, a criança é capaz de fazer

composições e decomposições apropriadas, porém confunde-se nas demais tentativas e não consegue estabelecer todas as equivalências necessárias. Exemplos:

Item 1/3 + 1/6 + ¼ + ¼ (fatias de bolos diversos) Unidade fracionária de referência: ½ (bolo de morango)
(Coloca ½ sobre 1/3; ½ sobre 1/6; ½ sobre ¼ + ¼) Três. (E: Como você descobriu?) Um desse (unidade de referência: ½) nesse (1/3). Metade desse (refere-se à metade da unidade de referência ½) nesse (1/6). E esse (refere-se à outra unidade de referência ½) para esses dois (¼ + ¼).

Item 1/6 + 1/6 + 1/6 (bolo de chocolate) Unidade fracionária de referência: 1/4 (bolo de baunilha)
Duas. (E: Por que?). Juntando esse (1/6) com esse (1/6) fica uma dessa (unidade de referência 1/4) e tem a outra (refere-se ao outro 1/6) que para ficar equivalente precisa de mais uma fatia de baunilha (¼).

Item ¼ + ¼ (bolo de baunilha) Unidade fracionária de referência: 1/6 (bolo de chocolate)
(Junta 1/6 + 1/6 e 1/6 + 1/6). Ia precisar de quatro. (E: Por que?) Porque as duas de chocolate (1/6 + 1/6) já forma uma parte desse (1/4) e as outras (refere-se às outras duas fatias de chocolate que separou: 1/6 + 1/6) também forma (refere-se a outra fatia de ¼).

Item ¼ + ¼ + ¼ + ¼ (bolo de baunilha) Unidade fracionária de referência: 1/3 (bolo de limão)
(Junta sobre a mesa 1/3 + 1/3). Só de duas. Porque esse (1/3) dá esse (¼ + ¼) e esse (refere-se à outra fatia de 1/3) dá esse (¼ + ¼).

Item ¼ + ¼ (bolo de baunilha) Unidade fracionária de referência: 1/6 (bolo de chocolate)
(Junta 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 sobre a mesa) Quatro. (E: Como você descobriu?) Porque duas de chocolate (1/6) dá uma aqui (refere-se a uma fatia de 1/4).

Item 1/3 + 1/6 + ¼ + ¼ (fatias de bolos diversos) Unidade fracionária de referência: 1/6 (bolo de chocolate)

Cinco. (E: Por que?) Porque eu imaginei. Tem que botar dois aqui (coloca duas fatias de 1/6 sobre 1/3). Um aqui (refere-se a uma fatia de 1/6 sobre 1/6). Um aqui (refere-se a uma fatia de 1/6 sobre 1/4). E um aqui (refere-se a uma fatia de 1/6 sobre 1/4).

<u>Estratégia IV (global):</u> A criança, de imediato, procura determinar se as fatias do bolo de origem (operação apresentada na cartela pelo examinador que serve de ponto de partida para realizar a equivalência) formam um inteiro ou se formam uma metade. Uma vez constatado isso, a criança volta-se para a fatia de referência (unidade fracionária usada como âncora), procurando, então, compor um bolo inteiro ou metade de um bolo.

No caso de itens em que a quantidade de origem é metade, a criança procura construir metade de um bolo com a fatia de referência. No caso de itens em que a quantidade de origem é um inteiro, a criança procura construir um bolo inteiro com as fatias de referência. Esta é uma estratégia global que não envolve composições e decomposições. Exemplos:

Item 1/3 + 1/3 + 1/3 (bolo de limão) Unidade fracionária de referência: ½(bolo de morango)
(Olha para as figuras dos bolos de limão e de morango que estão sobre a mesa) Se ele comeu o bolo todo desse daqui (refere-se ao bolo de limão) ele vai comer o bolo todo desse daqui (refere-se ao bolo de morango). Então, duas partes (1/2 + ½).

Item 1/6 + 1/6 + 1/6 (bolo de chocolate) Unidade fracionária de referência: ½ (bolo de morango)
Uma. (E: Por que?) Juntando as três (refere-se às três fatais de bolo de chocolate: 1/6) forma uma metade. Ai é uma dessa (1/2) de morango.

Item 1/3 + 1/6 + ¼ + ¼ (fatias de bolos diversos) Unidade fracionária de referência: 1/2 (bolo de morango)
Dava um inteiro (referindo-se às fatias de bolos diversos). Seria duas fatias de morango.

Item 1/3 + 1/6 (fatias de bolos de limão e chocolate, respectivamente) Unidade fracionária de referência: 1/6 (bolo de chocolate)
Duas. (E: Por que?) Por causa que esse daqui (refere-se à fatia do bolo de limão: 1/3) com esse (refere-se à fatia do bolo de chocolate: 1/6) dá metade e duas dessa daqui (refere-se às fatias do bolo de baunilha: ¼ + ¼) também (junta ¼ + ¼).

Item 1/3 + 1/6 + ¼ + ¼ (fatias de bolos diversos) Unidade fracionária de referência: 1/6 (bolo de chocolate)
Formava um bolo inteiro (junta seis fatias do bolo de chocolate). Ele teria que comer seis fatias do bolo de chocolate. Aliás, o bolo inteiro de chocolate.

Item 1/3 + 1/3 + 1/3 (bolo de limão) Unidade fracionária de referência: ¼ (bolo de baunilha)
(Junta quatro fatias do bolo de baunilha) Ele precisaria comer quatro pedaços de bolo de baunilha. (E: Por que) Porque três pedaços do bolo de limão forma um bolo inteiro.

<u>Estratégia V (composição e decomposição adequadas):</u> A criança é capaz de estabelecer todas as equivalências necessárias, fazendo composições e decomposições apropriadas a partir de agrupamentos entre as fatias do bolo de origem (operação apresentada na cartela pelo examinador que serve de ponto de partida para realizar a equivalência) e, de

agrupamentos entre as fatias de referência (unidade fracionária usada como âncora). As composições e decomposições realizadas podem envolver justaposições das fatias de referência sobre as fatias de origem. Exemplos:

Item 1/3 + 1/6 + ¼ + ¼ (fatias de bolos diversos) Unidade fracionária de referência: ½ (bolo de morango)
Comeu um bolo todo de morango (junta duas fatias do bolo de morango: ½ + ½). (E: Quantas fatias do bolo de morango?) Duas. (E: Por que?) Porque essa (refere-se à fatia do bolo de morango: ½) fica para essa mais essa (refere-se às fatias dos bolos de limão e de chocolate: 1/3 +1/6) e essa metade (refere-se ã outra fatia do bolo de morango: ½) fica para esses dois (refere-se às duas fatias do bolo de baunilha: ¼ + ¼).

Item ¼ + ¼ + ¼ + ¼ (bolo de baunilha) Unidade fracionária de referência: ½ (bolo de morango)
Duas. Esse tava mais fácil. (E: Como você descobriu?) Uma metade é esse com esse de baunilha (refere-se a duas fatias do bolo de baunilha: ¼ + ¼) e a outra metade é esse mais esse de baunilha (refere-se às outras duas fatias do bolo de baunilha: ¼ + ¼).

Item 1/3 + 1/6 (fatias de bolos de limão e chocolate, respectivamente) Unidade fracionária de referência: ½ (bolo de morango)
(Coloca uma fatia da unidade de referência (½) sobre a fatia do bolo de limão da cartela (1/3). Em seguida, compara a mesma fatia da unidade de referência (1/2) com a fatia do bolo de chocolate (1/6). Uma dessa aqui (refere-se à uma fatia da unidade fracionária de referência: ½). (E: Como você sabe?) Esse (unidade de referência: ½) fica com esse (refere-se à fatia do bolo de limão (1/3)) e esse pedaço (refere-se à parte que sobrou da unidade de referência (1/2) quando comparada à fatia do bolo de limão (1/3)) fica com esse (refere-se à fatia do bolo de chocolate: 1/6).

Item 1/3 + 1/6 + ¼ + ¼ (fatias de bolos diversos) Unidade fracionária de referência: ½ (bolo de morango)
Dá mais de uma, com certeza. (E: Quantas?) Três ou duas e meia. (E: Duas e meia não pode.). (Volta a fazer as comparações) Essas duas (refere-se às fatias do bolo de baunilha: ¼ + ¼) dá uma dessa (unidade de referência: ½) e essa (refere-se a outra fatia da unidade de referência: 1/2) dá essas (refere-se às fatias dos bolos de limão e de chocolate: 1/3 e 1/6). Duas.

Item 1/3 + 1/6 + ¼ + ¼ (fatias de bolos diversos) Unidade fracionária de referência: ½ (bolo de morango)
Um bolo todo. Duas. (E: Por que?) Por que essa (refere-se a uma das fatias da unidade de referência: 1/2) já formou duas (refere-se às fatais do bolo de baunilha: ¼ + ¼). Mais essa (refere-se à fatia do bolo de chocolate: 1/6) vira e completa a outra (refere-se a fatia de 1/3 que juntando com 1/6 forma uma ½).

Item 1/3 + 1/6 (fatias de bolos de limão e chocolate, respectivamente) Unidade fracionária de referência: ¼ (bolo de baunilha)
Três. Porque essa daqui (refere-se à fatia do bolo de chocolate: 1/6) já dá uma (refere-se a uma fatia da unidade de referência: ½). E essa outra (refere-se à fatia do bolo de limão: 1/3) precisa de duas.

Item 1/3 + 1/6 (fatias de bolos de limão e chocolate, respectivamente) Unidade fracionária de referência: ¼ (bolo de baunilha)
Duas. Se juntar 1/3 (fatia do bolo de limão) e 1/6 (fatia do bolo de chocolate) vai dar metade. Um quarto é metade dividida ao meio. Então vai dar duas do bolo de baunilha (bolo da unidade fracionária de referência: ¼).

As estratégias identificadas nos protocolos foram analisadas por dois juizes independentes, cujo percentual de concordância entre eles foi de 88.7%. Os casos de desacordo foram analisados e discutidos pelos dois juizes, chegando-se a um consenso quanto à categorização da estratégia. Essas estratégias foram consideradas como formando um sistema hierárquico de categorias que apresentam níveis de sofisticação crescentes da Estratégia I para a Estratégia V. A distribuição das estratégias é apresentada na Tabela 11.

Tabela 11: Número (percentual em parênteses) de estratégias por série.

Estratégias	**2ª Série**	**3ª Série**
I (n=51)	26 (51)	25 (49)
II (n=50)	50 (100)	0
III (n=108)	51 (47,2)	57 (52,8)
IV (n=117)	49 (42)	68 (58)
V (178)	76 (42,7)	102 (57,3)

Nota: Estratégia I: comparação de tamanho; Estratégia II: quantidade absoluta de fatias; Estratégia III: tentativas de composição e decomposição inadequadas; Estratégia IV: global; Estratégia V: composição e decomposição adequadas.

Considerando-se a amostra como um todo, verificou-se que as Estratégias I (10,1%) e as Estratégias II (9,9%) foram as menos freqüentes; enquanto as Estratégias III (21,4%); Estratégias IV (23,2%) e as Estratégias V (35,3%) foram mais freqüentes.

Comparações entre séries foram feitas através do Kolmogorov-Smirnov. Não foram encontradas diferenças significativas entre as séries em relação ao uso da Estratégia I (Z= ,463, p= .983), da Estratégia III (Z = ,772, p = .591), da Estratégia IV (Z = ,617, p = .841); e da Estratégia V (Z = ,617, p = .841). A única diferença significativa detectada foi em relação à Estratégia II (Z = 1,697, p = .006). Esta diferença deveu-se ao fato de que as crianças da 3ª séries nunca utilizavam a Estratégia II que era aquela em que se considerava o número absoluto de fatias como base para o estabelecimento da equivalência entre os bolos.

O efeito do tipo de item (Tipo 1: com metade e Tipo 2: sem metade) sobre o uso das estratégias também foi analisado, como ilustrado na Tabela 12.

Tabela 12: Número (percentual em parênteses) das estratégias das crianças em função do referencial oferecido.

Estratégias	**Tipo 1 (Com Metade)**	**Tipo 2 (Sem Metade)**
I (n=51)	20 (39,2)	31 (60,8)
II (n=50)	19 (38)	31 (62)
III (n=108)	11 (10,2)	97 (89,8)
IV (n=117)	76 (65)	41 (35)
V (n=178)	126 (70,8)	52 (29,2)

Nota: Estratégia I: comparação de tamanho; Estratégia II: quantidade absoluta de fatias; Estratégia III: tentativas de composição e decomposição inadequadas; Estratégia IV: global; Estratégia V: composição e decomposição adequadas.

Para examinar as possíveis diferenças quanto ao uso das estratégias em decorrência do tipo de item apresentado, aplicou-se o Teste de Wilcoxon separadamente em cada estratégia. Este teste mostrou não haver diferenças significativas entre os itens quanto ao uso da Estratégia I (Z = -1,6547, p = .0980) e da Estratégia II (Z= -1,2603, p = .2076). Diferenças significativas foram detectadas em relação às Estratégias III (Z = -4,7821, p =.0000), Estratégia IV (Z = -3,0239, p = .0025) e Estratégia V (Z = -4,2231, p= .0000). Estas diferenças ocorreram porque a Estratégia III era mais freqüente nos itens sem metade (Tipo 2: 89,8%) do que nos itens com metade (Tipo 1: 10,2). O oposto ocorria em relação às estratégias IV e Estratégias V: estas eram mais freqüentes nos itens com metade (Tipo 1: 65 e 70,8%, respectivamente) do que nos itens sem metade (Tipo 2: 35% e 29,2%, respectivamente).

Esses resultados indicam que quando era fornecida a metade como unidade fracionária de referência (itens Tipo 1), as crianças significativamente se utilizavam de estratégias mais elaboradas, fossem elas globais (Estratégia IV) ou por composição/decomposição adequadas (Estratégia V). Ao que parece, o referencial de metade levava a criança a utilizar-se de estratégias mais sofisticas que permitiam o estabelecimento de equivalências entre os dois bolos.

3.3.3. Número de acertos e justificativas na Tarefa 3

A Tabela 13 apresenta a distribuição do número de acertos em função do tipo de estratégias.

Tabela 13: Número de acertos e erros (percentual em parênteses) em função do tipo de estratégia.

Estratégias	Resposta correta	Resposta incorreta
I **(n=51)**	29 (56,9)	22 (43,1)
II **(n=50)**	3 (6)	47 (94)
III **(n=108)**	20 (18,5)	88 (81,5)
IV **(n=117)**	105 (89,7)	12 (10,3)
V **(n=178)**	173 (97,2)	5 (2,8)

Nota: Estratégia I: comparação de tamanho; Estratégia II: quantidade absoluta de fatias; Estratégia III: tentativas de composição e decomposição inadequadas; Estratégia IV: global; Estratégia V: composição e decomposição adequadas.

Aplicando-se o Teste de Wilcoxon separadamente a cada tipo de estratégia, detectou-se diferenças significativas entre respostas corretas e incorretas em relação a todas as estratégias, à exceção das Estratégias I (Z = - ,7756, p = .4380). Em relação à Estratégia II (Z = - 2,9341, p = .0033), à Estratégia III (Z = - 3,9462, p =. 0001); Estratégia IV (Z = - 4,2286, p = .0000); e Estratégia V (Z = - 5,2316, p= .0000). Essa diferença ocorreu porque as Estratégias II e III eram mais freqüentes em itens respondidos de forma incorreta (94% e 81,5%, respectivamente) do que em itens respondidos corretamente (6% e 18,5%). O oposto foi observado em relação às demais estratégias que eram mais freqüentes em itens respondidos de forma correta (Estratégia IV: 89,7% e Estratégia V: 97,2%) do que de forma incorreta (Estratégia IV: 10,3% e Estratégia V: 2,8%). O que observa é que as estratégias mais elaboradas estavam associadas a itens que eram respondidos de forma correta.

3.4. Tarefa 4: Adição de frações usando a representação matemática formal

Nesta tarefa, os resultados foram analisados em função de três aspectos distintos: número de acertos, tipo de representação utilizada pela criança (representação formal matemática e representação em linguagem natural) e as estratégias adotadas na resolução dos itens.

3.4.1. O número de acertos na Tarefa 4

Inicialmente analisou-se o número de acertos em cada um dos itens na Tarefa 4, cuja distribuição é apresentada na Tabela 14.

Tabela 14: Número de acertos por tipo de item em cada série.

Série	**Tipo 1 (resulta em metade) (n= 63)**	**Tipo 2 (resulta em inteiro) (n=63)**	**Total (n=126)**
2ª	1	2	3
3ª	5	6	11
Total	6	8	14

Como pode ser visto nesta tabela, o número de acertos foi extremamente baixo em ambas as séries. Isso demonstra a grande dificuldade experimentada pelas crianças para resolver operações de frações apresentadas através da representação matemática formal. Este resultado contrasta com o desempenho observado na Tarefa 3 que envolvia as mesmas operações de adição de frações apresentadas nesta Tarefa 4, sendo que naquela tarefa, a criança tinha como apoio o referencial de metade na resolução de alguns itens e podia resolver a tarefa por estimativas ao invés de através de cálculos numéricos precisos. Estas diferenças entre os desempenhos serão discutidas ao final desta dissertação.

3.4.2. As representações das crianças na Tarefa 4

As representações gráficas das crianças foram analisadas e agrupadas da seguinte forma:

(1) Representação matemática formal: A criança se utiliza de números, de sinais de adição, sinais relativos à fração (traço de fração) e, inclusive, há crianças que armam as operações de adição.

(2) Representação através da linguagem natural: A criança escreve em linguagem natural.

Importante mencionar as crianças foram consistentes no uso de um ou de outro tipo de representação ao longo da resolução de toda a tarefa (ou seja, nos seis itens apresentados). Em função disso, na Tabela 15 consta o número de crianças que adotaram cada uma das formas de representação acima mencionadas.

Tabela 15: Número de crianças (percentual em parênteses) que utilizaram a representação formal e as que utilizaram a representação através da linguagem natural.

Série	**Representação matemática formal**	**Representação através da linguagem natural**
2ª (n=21)	19 (90,5)	2 (9,5)
3ª (n=21)	19 (90,5)	2 (9,5)
Total (n=42)	38 (90,5)	4 (9,5)

Como pode ser observado, a quase totalidade das crianças, em cada série, adotou a representação matemática formal na tentativa de resolver as operações apresentadas (90,5%); enquanto que apenas quatro crianças em toda a amostra (duas da 2ª série e duas da 3ª série) adotaram a representação através da linguagem natural.

3.4.3. As representações das crianças e o número de acertos na Tarefa 4

Com o objetivo de examinar as possíveis relações entre as representações adotadas e o desempenho em cada item, elaborou-se a Tabela 16.

Tabela 16: Número de acertos (percentual em parênteses) em função da representação adotada em cada série.

Série	**Representação matemática formal (n=114)**	**Representação em linguagem natural (n=12)**
2ª	0	3 (25)
3ª	0	11 (91,6)

Devido às células vazias, não foi possível aplicar-se nenhum teste estatístico. Porém, observando-se a Tabela 17, nota-se que o uso da representação matemática formal não leva ao acerto; enquanto que o emprego da representação através da linguagem natural permitia que a criança respondesse alguns itens corretamente, sendo isso mais freqüente entre as crianças da 3ª série. Isso decorreu do fato de que o uso da linguagem natural estava associado ao emprego de um tipo particular de estratégia, como será discutido a seguir.

3.4.4. As estratégias das crianças na Tarefa 4

A partir da análise da forma de resolução adotada pelas crianças, identificou-se um conjunto de estratégias que são descritas e exemplificadas a seguir:

Estratégia I (adição conjunta de todos os números contidos nas frações, formando um número inteiro): A criança adiciona todos os números presentes nos numeradores e denominadores das parcelas em cada item. Esta estratégia resultava em um número natural. Exemplos[10]:

Item 1/3 + 1/3 + 1/3
C- Doze (escreve 12).
E- Como você fez?
C- 1 + 1 + 1, 3 (mostra os numeradores). 3 + 3 + 3, 9 (mostra os denominadores). Aí é para somar os resultados.

Item ¼ + ¼ + ¼ + ¼
C- Vinte (escreve 20).
E- Como você fez?
C- Porque 4 + 1 dá 5 (cinco). E 5 + 5 dá 10. Mais 5, dá 15. E mais 5, dá 20 (vinte).

Item 1/3 + 1/6
C- Onze (escreve 11)
E- Como você fez?
C- 4 (soma o numerador (1) e o denominador (3) da primeira parcela) + 7 (soma o numerador (1) e o denominador (6) da segunda parcela), 11 (onze).

Item ¼ + ¼
C- Dez (escreve 10).
E- Como você fez?
C- 4 + 1, 5 (refere-se à primeira fração). 4 + 1, 5 (refere-se à segunda fração).

Estratégia II (soma separada dos numeradores e denominadores, formando um número inteiro). A criança demonstra certa sensibilidade em relação ao simbolismo das frações, procurando tratar o numerador e o denominador de forma separada. A criança, em vista disso, soma: (a) os numeradores, obtendo um resultado; (b) soma os denominadores,

[10] C- Criança; E- Examinador.

obtendo um outro resultado; e (c) forma um número, que considera como resultado final da operação, que se deriva da soma em (a) e da soma em (b); ou da soma em (b) e da soma em (a). Exemplos:

Item 1/3 + 1/6
C- Vinte e nove (escreve 29).
E- Como você fez?
C- Eu juntei os de cima com os de cima (numeradores somados entre si, resultando 2) e os de baixo com os de baixo (denominadores somados entre si, resultando em 9).

Item ¼ + ¼
C- Vinte e oito (escreve 28).
E- Como você fez?
C- Eu juntei os de cima (numeradores somados entre si, resultando 2) e os de baixo (denominadores somados entre si, resultando em 8).

Item 1/3 + 1/3 + 1/3
C- Trinta e nove (escreve 39).
E- Como você fez?
C- Somei esses (os numeradores: 1 + 1 + 1) e os esses (os denominadores: 3 + 3 + 3).

Item ¼ + ¼ + ¼ + ¼
C- Quatrocentos e dezesseis (escreve 416).
E- Como você fez?
C- Eu contei esses (mostra os numeradores: 1 + 1 + 1 + 1) e contei esses (mostra os denominadores: 4 + 4 + 4 + 4).

Item ¼ + ¼ + ¼ + ¼
C- (Soma todos os denominadores e escreve 16. Em seguida, soma todos os numeradores e escreve o resultado ao lado do 16, formando 164). Dá 164.
E- Como você fez?
C- 4 + 4 + 4 + 4 dá 16 (mostra os numeradores das frações), e esses (mostra os numeradores das frações: 1 + 1 + 1 +1) dá 4.

Item 1/6 + 1/6 + 1/6
C- (arma uma conta):

$$\begin{array}{rr} 6 & 1 \\ 6 & 1 \\ \underline{6} & \underline{1} \\ 18 & 3 \end{array}$$

E- Como você fez?
C- Primeiro, a gente começa pela unidade e depois pela dezena. Dá 183.

Item 1/3 + 1/6 + ¼ + ¼
C- (Soma os numeradores: 1 + 1 + 1+ 1; e escreve 4. Soma os denominadores e escreve 17 ao lado do 4)
E- Como você fez?
C- 1 + 1 + 1 +1 é igual a 4. E 3 + 6, 9. Aí 4 + 4, 8. Aí eu somei esses dois (aponta o 9 e o 8) e deu 17. Dá 417.

Estratégia III (soma separada dos numeradores e denominadores, formando um número fracionário). A criança adiciona todos os numeradores e depois todos os denominadores das parcelas. A soma dos numeradores é considerada o numerador da fração final obtida como resultado, e a soma dos denominadores é considerada o denominador da fração final obtida como resultado. Embora esta estratégia se assemelhe à Estratégia II, se diferencia desta porque a criança busca organizar os resultados parciais (um relativo aos numeradores e outro relativos aos denominadores) de maneira diferente do que ocorre no uso da Estratégia II. Isso sugere que a criança é sensível ao simbolismo da fração (um número sobre o outro), acreditando que esta disposição deve ser mantida. A criança, portanto, parece diferenciar a adição de frações da adição de números inteiros, fato este desconsiderado pela criança que adota a Estratégia I e a Estratégia II. Exemplos:

Item 1/3 + 1/3 + 1/3
C- (faz o traço da fração, escreve “3” acima do traço e “9” abaixo do traço: 3/9)
E- Como você fez?
C- 1 + 1 + 1 (os numeradores), 3 (três). 3 + 3 + 3 (os denominadores), 9 (nove).

Item ¼ + ¼
C- (Escreve o traço da fração, soma os numeradores (1 + 1) e coloca o resultado acima do traço da fração e em seguida soma os denominadores (4 + 4) colocando o resultado abaixo do traço da fração: 2/8)
E- Como você fez?
C- Eu somei esse (numerador 1 na primeira parcela) com esse (numerador 1 na segunda parcela) e esse (denominador 4 na primeira parcela) com esse (denominador 4 na segunda parcela).

Item 1/3 + 1/6
C- (Escreve o traço da fração, soma os numeradores (1 + 1) e coloca o resultado acima do traço da fração e em seguida soma os denominadores (3 + 6) colocando o resultado abaixo do traço da fração – 2/9)
E- Como você fez?
C- Eu somei esse (1) com esse (1) e esse (3) com esse (6).

Estratégia IV (resolução por estimativas através do uso de âncoras): O uso desta estratégia mostra claramente um efeito das tarefas anteriores sobre a resolução das adições, visto que se nota o uso de âncoras (metade e inteiro) durante o processo de resolução. Esta estratégia foi sempre acompanhada de uma representação feita através da linguagem natural. Exemplos:

Item ¼ + ¼
E- Resolva esta continha.
C- Como assim uma continha? Um mais um, né? Ou é ¼ + ¼ (lê a adição como *um quarto* mais *um quarto*)?
E- É.
C- Então vai dar metade, ou melhor, vai dar menos que metade.
E- Escreva a resposta.
C- Como? Vou escrever menos da metade, tá?
E- Está bem.
C- (Escreve "menos da metade")

Item 1/3 + 1/6 + ¼ + ¼
C- 1/3 + 1/6 + ¼ + ¼ dá um bolo (nomeia as frações corretamente).
E- Como você sabe?
C- Porque 1/3 + 1/6 dá a metade. Mais ¼ + ¼, dá um bolo.(escreve "um bolo inteiro")

Item 1/3 + 1/6
C- Metade de um bolo! (escreve "metade de um bolo")
E- Como você sabe?
C- Porque eu me lembro que dá metade.

As estratégias das crianças foram analisadas em conjunto por dois juizes através de discussão, chegando-se a um consenso quanto à classificação das estratégias. Estas foram consideradas como formando um sistema hierárquico em que as Estratégias I eram mais elementares e as Estratégias IV as mais sofisticadas. Tal hierarquização deveu-se ao fato de que na Estratégia I a criança não diferencia os numeradores dos denominadores das frações (parcelas), tratando a adição de frações como se fosse a adição de números inteiros, cuja soma resulta em um número inteiro. Na Estratégia II, embora continue tratando a soma das frações como resultando em um número inteiro, a criança dá sinais de que considera que numeradores são diferentes de denominadores e que precisam ser tratados em separado durante o processo de resolução. Na Estratégia III, esta sensibilidade é mais aguçada, pois a criança produz como resultado da operação, uma fração e não mais um número inteiro, como ocorria na Estratégia II. Particular atenção deve ser dada à Estratégia IV. Nela, a criança claramente mostra utilizar-se de um processo de resolução que se apoia em âncoras, produzindo uma estimativa como resultado (inteiro ou fracionário) ao invés de um valor preciso, como ocorria quando do uso das demais estratégias. O uso da Estratégia IV decorreu, sem dúvida, de um efeito de ordem provocado pelas tarefas anteriormente realizadas pelas crianças, em que referenciais eram fornecidos como âncoras para estimar a adição de frações unitárias: metade e inteiro. O uso desses referenciais, nesta Tarefa 4, propiciou, na maioria das vezes, o acerto dos itens, como discutido mais adiante na seção dedicada às relações entre número de acertos e estratégias.

Antes disso, entretanto, torna-se relevante examinar as relações entre o uso de estratégias e as séries das crianças, relações essas ilustradas na Tabela 17.

Tabela 17: Número (percentual em parênteses) de estratégias por série.

Estratégias	2ª Série	3ª Série
I (n= 189)	105 (55,5)	84 (44,5)
II (n= 27)	9 (33,3)	18 (66,7)
III (n= 12)	0	12 (100)
IV (n=24)	12 (50)	12 (50)

Nota: Estratégia I: adição conjunta de todos os números contidos nas frações, formando um número inteiro; Estratégia II: soma separada dos numeradores e denominadores, formando um número inteiro; Estratégia III: soma separada dos numeradores e denominadores, formando um número fracionário; Estratégia IV: resolução por estimativas através do uso de âncoras.

Devido ao grande número de células vazias e com baixa freqüência, não foi possível a aplicação de nenhum teste estatístico. Entretanto, inspecionando-se a Tabela 18, observa-se que as Estratégias I e IV aparecem quase que igualmente distribuídas entre as duas séries. No entanto, as Estratégias II são mais freqüentes na 3ª série do que na 2ª série, e a Estratégia III não foi utilizada pelas crianças da 2ª série. Importante comentar que a Estratégia III envolvia o uso do simbolismo de frações na apresentação do resultado da operação, sendo isso apenas realizado pelas crianças da 3ª série. Talvez isso tenha ocorrido porque as crianças da 2ª série desconheçam a representação simbólica dos números fracionários.

3.4.5. Número de Acertos x Tipo de Estratégia

A Tabela 18 apresenta a distribuição do número de acertos em função das estratégias.

Tabela 18: Número de acertos e erros (percentual em parênteses) em função do tipo de estratégia.

Estratégias	Respostas corretas	Respostas incorretas
I (n=189)	0	189 (100)
II (n= 27)	0	27 (100)
III (n=12)	0	12 (100)
IV (n= 24)	14 (58,3)	10 (41,7)

Nota: Estratégia I: adição conjunta de todos os números contidos nas frações, formando um número inteiro; Estratégia II: soma separada dos numeradores e denominadores, formando um número inteiro; Estratégia III: soma separada dos numeradores e denominadores, formando um número fracionário; Estratégia IV: resolução por estimativas através do uso de âncoras.

Devido ao grande número de células vazias, não foi possível aplicar-se nenhum teste estatístico. A Tabela 19, entretanto, mostra que as Estratégias I, Estratégias II e Estratégias III sistematicamente estavam associadas a uma resposta incorreta; enquanto que a Estratégia IV associava-se, embora não de forma sistemática, a respostas corretas. Isso significa que o uso de estimativas e de âncoras, presentes na Estratégia IV, favorece o aparecimento de respostas corretas.

CAPÍTULO 4
CONCLUSÕES E DISCUSSÃO

O objetivo deste trabalho, de natureza exploratória, foi examinar o conhecimento inicial de crianças, que ainda não haviam sido formalmente instruídas sobre frações no contexto escolar, na resolução de adição de frações através de estimativas.

A literatura tem apresentado diversos trabalhos que envolvem a resolução de atividades por estimativas, indicando serem tais atividades um importante recurso para o desenvolvimento do raciocínio matemático de crianças pequenas (e.g., Correa, 1996; Correa & Meireles, 2000; Correa, Spinillo, Brito & Moro, 1998; Spinillo, 1996a; 1996b; 1997a; 1997b; Streefland, 1984; 1985). Há um consenso entre os autores de que é mais fácil para as crianças pequenas raciocinarem em termos relativos (estimar em termos de mais/menos que; maior/menor que) do que em termos absolutos (cálculos numéricos precisos). Zunino (1995), por exemplo, ressalta que a importância das estimativas reside no poder que a criança adquire para antecipar e julgar resultados de forma apropriada, demonstrando uma compreensão, nem sempre presente na resolução feita através de cálculos precisos e através da aplicação de algoritmos.

No que concerne a frações, tem-se o trabalho de Hilton (1980) que menciona a importância de se incentivar as crianças a utilizar o cálculo por estimativa na aritmética de frações num momento anterior ao da aprendizagem do cálculo com o algoritmo. Isto, segundo o autor, facilita a compreensão das riquezas conceituais deste conteúdo matemático.

Ao se estimar, é possível que o uso de âncoras seja algo relevante, como mencionado por Sowder (1995). Que âncoras seriam, então, importantes para resolver adição de frações? A literatura na área, como discutido no Capítulo 1, aponta dois pontos de referência que poderiam servir de âncoras em estimativas relacionadas a frações: *metade* e *inteiro*.

Com relação ao uso de *metade* como referencial em estimativas, têm-se os estudos de Spinillo (1992, 1997a, 1997b, 1997c, 2002; Spinillo & Bryant, 1991, 1999) sobre proporção e probabilidade. Em tais estudos, a *metade* tem se revelado um importante ponto de referência nos julgamentos das crianças, permitindo, inclusive, quando em situações de intervenção, a superação de muitas dificuldades inicialmente experimentadas em relação ao conceito de proporção, por exemplo. Estes resultados foram encontrados mesmo entre crianças que ainda não haviam sido formalmente instruídas sobre tais conceitos. Esses estudos apontam para o papel facilitador do referencial de *metade*, sendo isso também aceito por pesquisadores que investigaram o conceito de frações em crianças (e.g., Aguiar, 1980, Nunes & Bryant, 1997, Singer-Freeman & Goswami, 2001).

Por outro lado, autores como Pothier e Sawada (1983), descrevem a *metade* como um referencial que limitaria o desenvolvimento do conceito de fração, visto não favorecer a divisão de um todo em partes que não sejam múltiplas de dois (da metade).

Com relação ao uso do *inteiro* como referencial, este parece ser mais reservado ao estudo de frações, mais especificamente de frações numéricas. Sowder (1995), Zeman (1991) e Streefland (1991), por exemplo, mostram que do *inteiro* como âncora em tarefas de adição de frações (numéricas) pode favorecer não só a resolução da operação proposta, com também a avaliação, por parte da criança, a respeito do fato de um dado resultado ser ou não apropriado/plausível. Outros autores, como Silva (1997) e Behr, Wachsmuth, Post e Lesh (1984), por exemplo, comentam a respeito das dificuldades que o conhecimento de *inteiro* pode ocasionar na compreensão das crianças sobre frações e operações com frações, pois o conhecimento de número inteiro pode inibir a compreensão de seu simbolismo. Esta interferência pode ser identificada nas interpretações das crianças sobre a representação simbólica da fração (a/b).

Assim, se de um lado parece haver um consenso a respeito do papel facilitador das estimativas no raciocínio matemático relativo a diversos conceitos; no que concerne ao tipo de âncora que serviria de ponto de referência para estimativas em relação a frações, especificamente *metade* e *inteiro*, parece haver certa divergência: tanto um como outro referencial apresenta seus limites e suas potencialidades.

Partindo dessa questão, o presente estudo procurou contribuir com dados que permitissem compreender o papel desempenhado por esses pontos de referência na capacidade da criança em realizar adição de frações. Para isso, a um mesmo grupo de crianças foi aplicado um conjunto de tarefas em que tanto *metade* como *inteiro* eram fornecidos como âncoras para a realização de operações de adição de frações por estimativa.

Foram elaboradas quatro tarefas envolvendo adição de frações unitárias. A Tarefa 1 tinha por objetivo investigar o uso do referencial de *metade*, enquanto a Tarefa 2 tinha por objetivo examinar o uso do referencial de *inteiro*. Tanto o número de acertos como as justificativas oferecidas pelas crianças foram analisadas nessas tarefas, cujos resultados são discutidos adiante. Na Tarefa 3 procurou-se examinar em maiores detalhes o papel desempenhado pelo referencial de metade na resolução de adição de frações por estimativas, apresentando-se às crianças situações em que tinham que compor uma adição de frações de forma a estabelecer uma equivalência com uma outra adição apresentada pelo examinador. Nesta tarefa unidades fracionárias foram disponibilizadas para a criança: unidades fracionárias que envolviam *metade* e unidades fracionárias *diferentes da metade* (1/3, ¼, 1/6). Os dados, discutidos adiante, foram analisados em função do número de acertos e das estratégias de resolução adotadas pelas crianças ao tentar estabelecer a equivalência entre as operações. A Tarefa 4 consistia na resolução de adições de fração apresentadas através do simbolismo matemático formal típico deste conceito, como ocorre no contexto escolar. O objetivo desta tarefa era fazer um levantamento das estratégias que as crianças empregavam e dos tipos de erros apresentados, visto serem conhecidas as dificuldades que as crianças enfrentam ao resolver adições de frações.

As principais conclusões derivadas dos dados obtidos em cada uma das quatro tarefas são apresentadas a seguir; procedendo-se, posteriormente, a uma discussão a respeito da importância dos pontos de referência no raciocínio matemático da criança. Por fim, comentários são feitos quanto à realização de pesquisas futuras e quanto às possíveis implicações educacionais desta investigação.

4.1. As principais conclusões derivadas dos dados em cada tarefa

Tarefa 1: Principais resultados

Com base nas análises realizadas sobre o número de acertos na Tarefa 1, é possível verificar que crianças mesmo antes de serem formalmente instruídas sobre adição de frações mostram-se capazes de fazer estimativas apropriadas quando lhes é fornecido uma âncora como o referencial de *metade*. Estimar se o resultado de uma adição de frações é maior, menor ou igual à metade é tarefa possível de ser realizada com sucesso por crianças de 2ª e 3ª séries do ensino fundamental.

O fato de a criança estar cursando a 2ª ou a 3ª série, ou seja, estar entre 8 e 9 anos em média, não foi aspecto que influenciasse o desempenho, visto que os percentuais de acertos obtidos em cada série foram bastante semelhantes. No entanto, o desempenho das crianças foi influenciado pelo fato das parcelas presentes nas operações serem iguais ou diferentes: adicionar frações idênticas é mais fácil do que adicionar frações diferentes. Esse dado parece ocorrer também com a adição de números inteiros em que a soma de parcelas iguais é mais fácil do que a soma de parcelas diferentes.

A análise das justificativas apresentadas em cada item revelou que as crianças oferecem justificativas que variam desde uma ausência de explicação para suas respostas ou justificativas vagas que não explicitam as bases de seu raciocínio e de seus processos de resolução (Justificativa I); passando por justificativas que se restringem à quantificação de cada parcela isoladamente e que refletem uma ausência de tentativa de adicionar as frações para obter uma dada quantidade (resultado) (Justificativa II); até justificativas que indicam haver, por parte da criança, a tentativa de adicionar as frações, utilizando-se para isso do referencial de *metade* como âncora em suas estimativas, como explicitamente observado nas Justificativas III.

De modo geral, Justificativas I foram as mais adotadas. Isso indica que nas séries investigadas, a maioria das crianças tem dificuldades em explicitar verbalmente sua forma de resolver as operações e explicitar as bases de seu raciocínio. Quando procuravam justificar suas respostas, as crianças tendiam a simplesmente quantificar cada parcela da operação de forma isolada (Justificativa II). O baixo percentual de Justificativas III, em que a criança menciona o uso do referencial de *metade*, em certo sentido, contrariou as expectativas, pois se pensava que a criança poderia amplamente explicitar este referencial em suas respostas. É possível que, embora utilizando esse referencial, a criança não o explicite verbalmente.

Colocando-se em perspectiva o número de acertos e a justificativa adotada, observou-se que o uso da Justificativa III não estava necessariamente associado a respostas corretas. O mesmo ocorreu em relação às Justificativas II. Portanto, ao que parece, o fato de estimar corretamente não garante que a criança seja capaz de explicitar verbalmente as bases de seu raciocínio. É possível supor que a explicitação verbal é uma atividade complexa mesmo para as crianças que realizam com sucesso uma dada atividade. Este resultado é observado também em estudos sobre habilidades lingüísticas em crianças.

O emprego dos diferentes tipos de justificativas parece independer da série, pelo menos em relação às séries investigadas neste estudo, e parece independer, também, do tipo de item apresentado (se com parcelas iguais ou diferentes). As justificativas identificadas parecem expressar a maneira da criança quantificar as parcelas das operações: utilizando-se de termos relativos maior/menor que ou utilizando-se de pontos de referência como a *metade*.

O que se observa, no geral, é que as crianças da 2ª e da 3ª séries apresentam um padrão de resultados bastante semelhante seja em termos do desempenho seja em termos da maneira como justificam suas respostas.

Tarefa 2: Principais resultados

Os dados na Tarefa 2 indicam que estimar se o resultado de uma adição de frações é maior, menor ou igual a um *inteiro* é tarefa possível de ser realizada com sucesso por crianças de 2ª e 3ª séries que ainda não haviam sido formalmente instruídas sobre adição de frações. As crianças investigadas foram capazes de fazer estimativas apropriadas quando o referencial de *inteiro* era fornecido como âncora para realizar as operações. Mais uma vez, a série/faixa etária não foi fator que influenciasse no desempenho identificado. Semelhante ao que foi observado na Tarefa 1, o desempenho das crianças, mostrou-se melhor quando as operações envolvem parcelas iguais do que quando as parcelas são diferentes.

Comparando-se, de modo geral, o desempenho na Tarefa 1 e na Tarefa 2, verifica-se que os percentuais de acertos tanto na amostra como um todo como em cada série, foi bastante semelhante. Isso sugere que as crianças igualmente se beneficiam do referencial de *metade* e do referencial de *inteiro* ao fazer suas estimativas. Assim, parece que ambos referenciais atuam como âncoras que auxiliam as crianças a estimar.

As justificativas na Tarefa 2 foram, basicamente, as mesmas identificadas na Tarefa 1. A principal diferença entre elas foi que, enquanto na Tarefa 1 as Justificativas III explicitavam o uso do referencial de *metade* como âncora na resolução das adições, na Tarefa 2, tais justificativas expressavam tanto o uso de *metade* como o uso de *inteiro* como ponto de referência.

Diante desse dado, torna-se importante perguntar: Por que as crianças se utilizaram desses dois referenciais de forma combinada nesta tarefa; ou seja, porque continuaram adotando o referencial de *metade* em suas estimativas, mesmo quando o referencial de *inteiro* era a âncora oferecida? O fato das crianças se utilizarem do referencial de metade nesta Tarefa 2 pode ter ocorrido por duas razões distintas: (a) devido a um possível efeito da Tarefa 1 sobre a Tarefa 2 (a ordem das tarefas era fixa, como descrito no Capítulo 2), de forma que o uso do referencial de *metade* adotado na Tarefa 1 fez com que as crianças continuassem se utilizando deste referencial na Tarefa 2; ou (b) devido ao fato de que o referencial de *metade* é por si só mais poderoso e evidente do que o referencial de *inteiro*. Como as tarefas não tiveram sua ordem de aplicação randomizada, não é possível descartar a primeira explicação. No entanto, como evidenciado na literatura apresentada no Capítulo 1, há fortes evidências de que o referencial de *metade* é uma âncora poderosa e espontaneamente utilizada pelas crianças ao fazerem estimativas, seja em relação ao conceito de frações, seja em relação a outros conceitos matemáticos (proporção, probabilidade). Assim, mesmo sem descartar de todo a primeira explicação, é possível acreditar que a segunda alternativa seja a mais provável. Além disso, o referencial de *inteiro* não foi espontaneamente adotado pelas crianças na Tarefa 1, mesmo em itens em que o resultado da operação se aproximava do todo; itens esses em que a criança poderia ter combinado, em suas estimativas, o referencial de *metade* e o referencial de *inteiro,* porém isso não foi observado.

Entretanto, o referencial de *inteiro*, sem dúvida, tem seu papel nas estimativas das crianças, papel este que parece ser potencializado através do uso combinado deste referencial com o referencial de *metade.* Esta afirmação encontra respaldo quando se examinam as relações entre o número de acertos e as justificativas adotadas. Tal exame mostrou que muitas das respostas corretas eram acompanhadas de justificativas que explicitamente mencionavam o uso do referencial de *metade* e/ou de *inteiro* (Justificativa III). Esta relação não foi identificada na Tarefa 1, com discutido anteriormente. Esta relação identificada na Tarefa 2 sugere que o uso combinado de ambos os referenciais (*inteiro* e *metade*) parece permitir que um maior número de adições de frações seja corretamente resolvido. É possível supor que a combinação desses pontos de referência tenha um efeito potencializador sobre a capacidade da criança em resolver, por estimativas, adições de frações. Este resultado, como discutido adiante, pode ter importantes implicações educacionais.

O uso dos diferentes tipos de justificativas parece independer da série das crianças investigadas. Este resultado foi também encontrado na Tarefa 1. Entretanto, diferentemente do que foi observado naquela tarefa, na Tarefa 2, o tipo de justificativa varia em função do tipo de parcelas apresentadas nas operações (três parcelas iguais, duas parcelas iguais e uma diferente ou três parcelas diferentes): Justificativas I eram mais freqüentes em operações com parcelas diferentes e Justificativas III eram mais freqüentes em operações com parcelas iguais. Colocando em perspectiva o número de acertos, as justificativas e o tipo de item (três parcelas iguais, duas parcelas iguais e uma diferente ou três parcelas diferentes) , é possível concluir que adições com parcelas diferentes tornavam o item mais difícil e impediam tanto o acerto como limitavam o uso de pontos de referência por parte das crianças.

Tarefa 3: Principais resultados

Os dados na Tarefa 3 mostraram que as crianças tiveram um desempenho significativamente superior nas operações de frações em que o referencial de metade era oferecido como âncora para as crianças construírem as equivalências do que quando outro referencial era oferecido (1/3, ¼ ou 1/6). Relevante comentar que o percentual de acertos apresentado pelas crianças nos itens que tinham como âncora o referencial de *metade* foi bem mais alto do que o percentual de acertos obtido na Tarefa 1, mesmo quando os itens envolviam adições com parcelas iguais. Ao que parece, o fato do examinador fornecer à criança a *metade* como unidade de referência foi bastante facilitador, servindo de apoio para compor a equivalência. Isso talvez tenha ocorrido porque, nesta tarefa, era entregue à criança uma unidade fracionária materialmente representada por um recorte de papelão que correspondia à metade de um bolo. Este suporte material de representação consistiu em uma ferramenta importante para a resolução apropriada das adições, pois permitia que a criança realizasse justaposições entre as fatias, justaposições essas que auxiliavam na composição e decomposição das quantidades no interior de cada operação apresentada. Esta flexibilidade do material concreto associada ao uso de comparações de natureza perceptual parecem ter contribuído para o alto percentual de acertos nesta tarefa.

Importante ressaltar que nesta tarefa era solicitado da criança realizar algo (compor uma nova adição de parcelas iguais que fosse equivalente a uma adição de parcelas diferentes); enquanto nas Tarefas 1 e 2 era solicitado da criança julgar se uma operação tinha como resultado uma dada quantidade (metade, mais/menos que metade, ou um inteiro, mais/menos que um inteiro). Como verificado por Spinillo (1996b), em estudo sobre o conceito de chance em crianças, tarefas que requerem da criança realizar uma ação sobre uma dada situação parecem ser mais fáceis do que tarefas que requerem julgamentos sobre uma dada situação que lhe é apresentada já pronta. Isso, segundo a autora, decorre do fato de que ao agir sobre uma situação, é oferecida à criança a possibilidade de manipular um dado material e ir, ela mesma, fazendo comparações e antecipações que podem nortear suas ações. Assim, de forma semelhante ao observado por Spinillo (1996), os dados nesta investigação indicam que o mesmo parece ocorrer em relação à adição de frações.

Diferenças entre as séries/faixa etária, quanto ao número de acertos, não foram encontradas. Esse resultado é idêntico àquele observado na Tarefa 1 e na Tarefa 2. Conclui-se, assim, que as crianças neste estudo, independentemente da série/idade, apresentam um mesmo nível de desempenho.

Diferentemente da Tarefa 1 e da Tarefa 2, em que se analisou as justificativas verbais das crianças, nesta Tarefa 3 foram analisadas as estratégias de resolução empregadas. Isso, como já mencionado no Capítulo 3, deveu-se ao fato de que a situação apresentada à criança consistia em realizar ações sobre um material fornecido. As estratégias identificadas eram bastante variadas: Estratégia I – menos elaboradas, que envolviam a simples comparação de tamanhos entre as fatias do bolo de origem (operação apresentada na cartela) e a fatia de referência utilizada para compor as adições; Estratégia II - que envolviam a construção da equivalência a partir do número absoluto de fatias presentes no bolo de origem; Estratégia III - que, embora mais elaboradas que as duas anteriores, eram, ainda, inapropriadas, visto que se caracterizavam por composições e decomposições equivocadas; Estratégia IV – em que a criança, de maneira global, procurava determinar se o bolo de origem (aquele apresentado à criança) tratava-se de *um bolo inteiro* ou de *metade de um bolo,* para então estimar o número de fatias (unidade fracionária de referência) que deveria constar no bolo a ser formado; e Estratégia V – em que a criança, passo a passo, procurava estabelecer todas as equivalências necessárias entre as fatias do bolo de origem e a fatia de referência, realizando composições e decomposições apropriadas. Segundo esse sistema de análise, as duas últimas estratégias eram mais elaboradas que as demais. De fato, como indicado pelas análises estatísticas aplicadas, essas duas estratégias estavam associadas a uma resposta correta, levando, portanto, ao acerto na construção da equivalência.

Enquanto na Tarefa 1 e na Tarefa 2 o tipo de justificativa oferecida pela criança independia da série que freqüentava, nesta tarefa verificou-se que a Estratégia II (baseada na quantidade absoluta de fatias presentes no bolo de origem) estava presente apenas entre as crianças da 2ª série. As crianças da 3ª série nunca respondiam em termos puramente absolutos ao construir a equivalência entre o bolo de origem e o novo bolo que deveria ser formado a partir de uma dada fatia de referência. Essas crianças, portanto, pareciam ter um nível de compreensão mais sofisticado que as crianças da 2ª série. Na realidade, esta foi a única diferença entre séries encontrada nesta investigação.

Além da série, as estratégias identificadas foram também influenciadas pelo tipo de item apresentado. Conforme os dados apresentados no Capítulo 3, as estratégias mais elaboradas (Estratégia IV e Estratégia V) eram bem mais freqüentes nos itens em que o referencial de *metade* era oferecido como âncora do que nos itens em que este referencial não era disponibilizado (unidades fracionárias de referência: 1/3, ¼ e 1/6).

Colocando em perspectiva os tipos de itens, as estratégias empregadas e o número de acertos, conclui-se que os itens em que *metade* era oferecida como referencial eram aqueles que permitiam o uso de estratégias mais elaboradas e que mais levavam ao acerto. Mais uma vez, como indicado na literatura na área, o referencial de *metade* aparece com uma âncora importante no raciocínio da criança durante a resolução de tarefas que envolvem conceitos relacionais.

No entanto, o referencial de *inteiro* parece, mesmo que de forma menos expressiva, ter seu papel na resolução de adições de fração. Embora, nesta tarefa, o referencial de inteiro não tenha sido explicitamente fornecido, este parece ser, de certa forma, saliente aos olhos da criança. Um exemplo disso é o uso da Estratégia IV (global). Em algumas ocasiões, a criança procurava determinar se o bolo de origem tratava-se de um bolo inteiro ou de metade de um bolo. Ao identificar que o bolo de origem tratava-se de um inteiro, ela procurava formar um outro bolo inteiro com a unidade fracionária de referência que lhe era disponibilizada (½, 1/3, ¼ ou 1/6). Mais uma vez, o inteiro aparece como um referencial importante na resolução de adições de fração. Esse dado encontra respaldo nas afirmações de Mix, Levine e Huttenlocher (1999) de que o entendimento de frações por parte da criança envolve não só a atenção para o tamanho das partes, mas também a habilidade para interpretar a soma das partes em relação a alguma unidade, no caso desta tarefa, um bolo *inteiro*.

Tarefa 4: Principais resultados

Como mencionado, a aplicação desta tarefa teve por objetivo contrastar o desempenho das crianças em uma tarefa de adições de fração em moldes tipicamente escolares com o desempenho em tarefas baseadas em estimativas em que pontos de referência eram apresentados como âncoras para a realização das operações.

Nesta tarefa, três aspectos foram considerados na análise: o número de acertos, o tipo de representação utilizada pela criança (representação formal matemática e representação em linguagem natural) e as estratégias adotadas na resolução das operações.

Como esperado, o número de acertos nesta tarefa foi bastante baixo. Comparando-se o desempenho nesta tarefa com aquele observado na Tarefa 3, em que as mesmas operações de adição eram apresentadas ao mesmo grupo de crianças, é expressiva a diferença entre elas. Enquanto na Tarefa 3 as crianças eram capazes de apresentar um alto percentual de acertos (em especial nos itens com *metade*); na Tarefa 4 foi bastante baixo o número de acertos em todos os itens apresentados. De fato, como esperado, as crianças tiveram muita dificuldade em realizar as operações de adição apresentadas através do simbolismo próprio de frações, mesmo considerando que o resultado dessas operações consistia em *metade* ou *inteiro* e que o conhecimento sobre seu simbolismo e linguagem haviam sido explicado na tarefa de sondagem inicialmente aplicada a todas as crianças nesta pesquisa.

No que concerne à representação adotada, verificou-se que as crianças tendem a ser muito consistentes ao adotarem um ou outro tipo de representação. Essa consistência entre itens em protocolos de uma mesma criança foi também observada em estudo sobre as representações de crianças em relação à divisão (Lautert & Spinillo, 1999). Isso significa que uma mesma criança ou adotava uma representação simbólica matemática (emprego de números) ou adotava uma representação através da linguagem natural. Nesta tarefa a quase totalidade das crianças se utilizava de números em suas representações através de lápis e papel.

As crianças que se utilizavam da representação simbólica matemática (emprego de números) não acertaram nenhum dos itens nessa tarefa; enquanto as poucas crianças que se utilizaram da linguagem natural, principalmente as da 3ª série, conseguiram acertar alguns dos itens nessa tarefa. Este é um dado interessante de ser discutido. Por que as crianças que se utilizaram da linguagem natural chegaram a acertar algumas das adições de fração? Para responder esta pergunta é necessário compreender a natureza das estratégias empregadas pelas crianças. Essas estratégias podem ser entendidas como diferentes tipos de erros apresentados pelas crianças.

A estratégia mais comumente adotada pelas crianças foi aquela que envolvia a adição conjunta de todos os algarismos contidos nas frações, a partir da qual formava-se um número inteiro (Estratégia I). Este tipo de erro foi documentado por Kerslake (1986) e por Silva (1997) como uma estratégia bastante comum e até mesmo esperada no caso de crianças que ainda não conhecem os algoritmos que regem as operações com frações, o significado de seu simbolismo. Segundo esses autores, as crianças tendem a generalizar e transferir o conhecimento que têm sobre adição de números inteiros para os números fracionários.

A partir da análise dos protocolos das crianças foi possível identificar-se outros tipos de erros que, embora relacionados à dificuldade acima mencionada, demonstram peculiaridades que merecem ser destacadas. Por exemplo, foram identificadas, ainda, duas estratégias que sinalizam alguma sensibilidade por parte das crianças acerca da representação do número fracionário como um número que deve receber um tratamento diferente em cálculos numéricos daquele conferido aos números inteiros. Uma destas estratégias (Estratégia II) expressava o cuidado da criança em somar, de forma separada, os numeradores e os denominadores, para formar, em seguida um número inteiro que correspondia à soma dos numeradores com os denominadores. A outra estratégia (Estratégia III) estava, também, relacionada à soma separada dos numeradores e dos denominadores, com a diferença, entretanto, de que nesta, as crianças apresentavam como resultado um número fracionário (e não mais um número inteiro, como ocorria na Estratégia II). A que parece, a criança mostra uma sensibilidade não apenas em termos de considerar que é necessário somar separadamente os numeradores e os denominadores, mas que o resultado deve ser um número fracionário e não mais um número inteiro. Ao adotar a Estratégia III a criança mostra-se mais sensível ao simbolismo matemático das frações, expressando a necessidade de dar à adição de frações um tratamento distinto daquele dado à adição de números inteiros. Entretanto, apesar desta sensibilidade, faltam à criança conhecimentos sobre o significado das fações representadas nas parcelas da operação. Estratégias relacionadas à soma de numeradores e de denominadores separadamente foram documentadas por Silva (1997) e por Tirosh, Fichbein, Graeber e Wilson (1999), entre outros. A análise proposta aqui, é que seja feita uma distinção entre as Estratégias II e as Estratégias III, visto que a literatura trata essas duas formas de resolução de forma semelhante.

A Estratégia IV merece comentário à parte por ser bem distinta das demais estratégias, se assemelhando às Justificativas III identificadas na Tarefa 1 e na Tarefa 2. Nela, a criança adota um processo de resolução baseado em estimativas, apresentando com resultado um bolo inteiro ou metade de um bolo, resultado este que era escrito em linguagem natural na folha de papel fornecida pelo examinador. Importante comentar que apenas os itens respondidos desta forma é que eram representados através da linguagem natural, e que eram, na maioria das vezes, corretamente resolvidos. Nesta estratégia a criança tomava o *inteiro* ou a *metade* como ponto de referência para resolver as adições de frações apresentadas simbolicamente. O uso desta estratégia parece ter decorrido de um efeito de ordem provocado pela Tarefa 1 e pela Tarefa 2 anteriormente apresentadas. Este efeito de ordem sugere que as crianças procuraram aplicar os referenciais de *metade* e de *inteiro* na resolução das adições apresentadas através do simbolismo matemático formal.

Embora a Estratégia IV tenha sido pouco freqüente e embora as crianças que a utilizaram não tenham respondido de forma numérica (mas em linguagem natural), considerou-se importante destacar sua presença. Esta estratégia sinaliza o que Hilton (1980) havia comentado acerca de cálculo de operações de adições simples, e para o que fora enfatizado por Zeman (1991) em seu estudo de caso com uma criança de 8 anos. Ambos os autores defendem que ao resolverem determinadas operações com frações, as crianças que apresentam alguma noção sobre este conceito, não precisam, necessariamente, utilizar-se do algoritmo para resolvê-las. Tais adições, coma aquelas apresentadas neste estudo, podem ser efetuadas com base nas noções iniciais das crianças sobre o que representa cada fração. Assim, crianças como Ethan (Zeman, 1991) e como algumas daquelas na Tarefa 4, na presente investigação, procuram fazer sentido das frações que lhes são apresentadas, e não aplicaram automaticamente um algoritmo de resolução; com o fizeram, por exemplo, as crianças que adotavam a Estratégia II, a partir da qual obtinham resultados absurdos. Embora o uso da Estratégia IV tenha sido pouco expressivo e tenha decorrido de um efeito de ordem, parece que estratégias como essas podem facilitar a compreensão da criança.

Os resultados apresentados mostram que crianças pequenas, mesmo antes da instrução formal de frações são capazes de realizar operações com frações com base em estimativas, utilizando os referenciais de *metade* e de *inteiro*. Este resultado foi evidente em todas as tarefas, inclusive na Tarefa 4, onde o acerto esteve exclusivamente associado ao uso de referenciais como âncoras.

Especificamente na Tarefa 3, o uso da metade mostrou ser bem mais eficiente em operações utilizando equivalência de frações que o uso dos referenciais 1/3, ¼ e 1/6.

Outro aspecto importante foi o fato dos itens com parcelas iguais terem sido significativamente mais fáceis que os itens com parcelas diferentes tanto na Tarefa 1 como na Tarefa 2. Este achado, entretanto não pode ser considerado em função do referencial oferecido, visto a composição das adições terem sido diferentes nas duas tarefas.

4.2. A importância dos pontos de referência na resolução de adição de frações

A conclusão mais relevante derivada dos dados desta pesquisa, em particular do que foi verificado na Tarefa 3, foi a importância do referencial de *metade* na resolução de adição de frações. Esse resultado está em acordo com evidências empíricas relativas a estudos sobre outros conceitos relacionais como a proporção e a probabilidade (ver publicações de Spinillo, diversas datas), e pode ser inserido em explicações teóricas fornecidas por Resnick e Singer (1993) e Singer, Kohn e Resnick (1997) a respeito das *protoquantities* e por Bryant (1979) a respeito das quantidades relativas e absolutas.

O uso de âncoras, com afirmado por Sowder (1995), facilita o emprego de formas de raciocinar apropriadas. E o referencial de *metade*, por exemplo, parece ter papel importante na resolução de adição de frações. É possível, como afirmado por alguns autores (e.g., Pothier e Sawada, 1983), que a *metade* possa vir a limitar o desenvolvimento do conceito de fração por não favorecer a divisão de um todo em partes que não sejam múltiplas de dois. No entanto, o fato deste referencial ser relevante não significa que seja o único a ser considerado durante a instrução sobre frações no contexto escolar. Evidentemente, outros referenciais podem, e devem, ser utilizados ampliando o conceito de fração pela criança; porém, isso não minimiza a importância da *metade* como âncora no raciocínio utilizado pela criança na resolução de adição de frações.

Além da *metade*, o referencial de *inteiro* também se mostrou importante neste estudo, principalmente quando associado ao uso o referencial de *metade*. Outros autores, como Mix, Levine e Huttenlocher (1999), comentam sobre a importância de se fornecer um *inteiro* como unidade de referência (seja ele no formato de uma pizza ou de chocolate) para as crianças resolverem operações com frações. Todavia, resta saber se o *inteiro*, isoladamente seria, de fato, uma âncora importante ao raciocínio das crianças em adição de frações por estimativas, ou se seu efeito é potencializado quando associado à *metade*. Em função dos dados obtidos nesta pesquisa, parece que a associação entre ambos é recurso facilitador.

4.3. Pesquisas futuras

A presente pesquisa, como indicado em seu título, foi um estudo exploratório e como tal apresentou limitações. Um delas foi a apresentação das tarefas em uma ordem fixa, o que resultou em constantes efeitos de uma tarefa sobre outra. Apesar desta limitação, o estudo conduzido trouxe á tona diversas facetas relevantes acerca das noções iniciais das crianças sobre adição de frações, mesmo antes de serem formalmente ensinadas sobre este tema no contexto escolar. Os dados desta pesquisa, ainda, fornecem mais evidências a respeito do raciocínio matemático baseado em estimativas e em pontos de referência, além dos dados derivados de estudos realizados sobre proporção e probabilidade.

Considerando os resultados obtidos nesta investigação, pesquisas futuras precisam ser conduzidas a respeito da adição de frações, tomando por base outros referenciais:

(a) Examinar a fração ¼, por exemplo. Uma vez que ela representa "a metade da metade", seria interessante investigar se este ponto de referência seria uma âncora importante em estimativas que envolvessem adição de frações. A "metade da metade" foi mencionada algumas vezes nas justificativas das crianças em algumas tarefas, não sendo possível averiguar sua importância para o pensamento aritmético fracionário. Será que este desdobramento da metade não seria também um referencial relevante?

(b) Examinar o uso do *inteiro* em adição de frações cujo resultado seja maior que o inteiro (frações impróprias ou frações mistas). É possível que em adições desse tipo o uso do *inteiro* fosse mais importante que o uso da *metade*.

Poderia, ainda, ser realizada uma pesquisa sobre a subtração de frações, a partir da metade e do inteiro.

Um terceiro tipo de pesquisa seria um estudo de intervenção em que a criança fosse estimulada a usar, sistematicamente, o referencial de *metade* e de *inteiro* na resolução de operações de adição de frações. As tarefas, aqui utilizadas para examinar o conhecimento da criança, poderiam ser adaptadas de forma a se constituírem em atividades instrucionais oferecidas a um grupo de crianças (grupo experimental) a ser comparado (através de pré-teste e pós-teste) a um grupo de crianças que não receberia a intervenção (grupo controle). Com afirmado por Spinillo (1999), muitas das tarefas utilizadas na pesquisa em psicologia podem, se adaptadas a outros contextos e objetivos, serem utilizadas como situações de instrução que buscam desenvolver a compreensão da criança acerca de um dado conceito.

4.4. Implicações educacionais

É possível extrair-se implicações educacionais do presente estudo. Uma delas refere-se à série e à idade em que a escola deve ensinar adição de frações às crianças. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (MEC/SEF, 1997) o conceito de fração é introduzido na 3ª série do ensino fundamental. De acordo com os dados desta pesquisa, acredita-se ser possível, já na 3ª série, introduzir a adição de frações. Isso porque, como indicam os resultados, tanto as crianças da 2ª com da 3ª série mostram ter noções iniciais importantes a respeito da adição de frações. Entretanto, o ensino deveria basear-se em estimativas e em pontos e referência (*inteiro* e *metade*), ao invés de basear-se em cálculos numéricos precisos ou no emprego do algoritmo. O ensino deveria estimular a criança a verbalizar suas próprias noções, a utilizar estratégias não convencionais de resolução antes de apresentar o simbolismo e a linguagem formal da fração.

É possível que a adição de frações viesse facilitar, por parte da criança, a idéia de que a fração é um número e não apenas uma parte de algo (de um retângulo, de uma pizza etc.), com sugerem muitos dos livros didáticos. Através da adição, a criança poderia conceber a fração como um número ou uma quantidade que pode ser adicionada a outras quantidades, resultando em uma terceira quantidade.

As tarefas aqui utilizadas para avaliar as noções iniciais das crianças sobre adição de frações poderiam ser adotadas em sala de aula, feitos os devidos ajustes e transposições para a prática escolar. Tais tarefas poderiam ser uma forma de familiarizar a criança tanto com a terminologia e simbolismo próprios de frações, como também uma forma de introduzir noções sobre a aritmética de frações. A realização dessas tarefas em sala de aula, como o proposto por Lamon (1995), poderia ser acompanhada de diversos suportes de representação que poderiam ser disponibilizados para as crianças: lápis e papel, diagramas, recortes representando frações diversas e todos de diferentes tamanhos e fracionados de diferentes maneiras etc.

De maneira geral, a prática em sala de aula poderia basear-se em estimativas, no uso de *inteiro* e de *metade* como pontos de referência a serem explorados (apesar dos limites, esses referenciais poderiam ser o ponto de partida da instrução). As estimativas, neste sentido, poderiam servir como um instrumento didático poderoso de ligação conceitual entre as idéias intuitivas das crianças e os conceitos ensinados nas escolas, como o referido por Streefland (1984, 1985). O ensino, então, poderia iniciar-se com adições de frações com parcelas iguais, que se mostram mais fáceis do que adição de parcelas diferentes, como indicado neste estudo.

Seria relevante, ainda, contrastar o desempenho das crianças em tarefas tradicionais, como aquela apresentada na Tarefa 4, e em tarefas alternativas, como aquela apresentada na Tarefa 3. A criança poderia ser convidada a refletir sobre suas diferentes formas de raciocinar e de resolver as tarefas: através de cálculos numéricos precisos e através de estimativas. A partir desta reflexão a criança poderia avaliar a inadequação de suas respostas, como, por exemplo, constatar os erros absurdos que poderiam aparecer ao resolver as adições através de cálculos numéricos. Atividades como estas requerem do professor uma atitude favorável em relação ao erro e conhecer o significado dos erros das crianças, para, então, aproveitá-los como situações de ensino e reflexão.

Para finalizar, devem ser dadas à criança oportunidades de falar, agir, julgar e refletir sobre diversas situações envolvendo frações. Ao que parece, as crianças são capazes de aprender adição de frações mais cedo do que se pensa, como sugere o efeito de ordem observado nessa pesquisa.

REFERÊNCIAS

Aguiar, M. C. (1980). *A formação de conceitos de frações e de proporcionalidade e as operações concretas e formais.* Dissertação de mestrado não-publicada, Mestrado em Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco. Recife, PE.

Banzatto, L. E. & Sodré, U. (2000). Projeto MatWeb: Matemática pela Internet - Frações decimais e números decimais. Retirado em 02/07/2001, no World Wide Web: <http://www.sercomtel.com.br/matematica/matweb/mod106/mod106a.htm.

Behr, M.; Wachsmuth, I.; Post, T. R. & Lesh, R. (1984). Order an equivalence of rational numbers: a clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15* (5), 323-341.

Bryant, P. E. (1974). Perception and understanding in young children. London: Metheuen.

Bryant, P. E. (1974). Perception and understanding in young children. Londres: Methuen & Co Ltd.

Boyer, C. B. (1974). *História da Matemática.* São Paulo: EDGARD BLÜCHER Ltda.

Carraher, D. (1993). Lines of thought: a ratio and operator model of rational number. Em *Educational Studies in Mathematics, 25*, 281-305.

Correa, J. (1996). A compreensão inicial do conceito de divisão partitiva em tarefas não-computacionais. Em M. H. Novaes & M. R. Brito (Orgs.). Psicologia na educação: articulação entre pesquisa, formação e prática pedagógica (pp. 151-166). *Coletâneas da ANPEPP*. Rio de Janeiro: Xenon Editora.

Correa, J. & Meireles, E. (2000). A compreensao intuitiva da criança acerca da divisão partitiva de quantidades contínuas. *Estudos em Psicologia, 5* (1), 11-31.

Correa, J.; Spinillo, A.; Brito, M. & Moro, M. (1998). O desenvolvimento de conceitos maemáticos: temas de interesse para a educação matemática. Em M. L. Moura & J. Correa & A. Spinillo (Orgs.), *Pesquisas brasileiras em psicologia do desenvolvimento* (pp. 71-110) . Rio de Janeiro: EDUERJ.

Franchi, A. (1999). Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. Em A. Franchi (Org.), *Educação matemática: uma introdução* (pp. 155-195). Sao Paulo: EDUC.

Hilton, P. (1980). Nós ainda devemos ensinar frações? (E. F. Gomide & S. Hariki). Em ICME-IV (Org.), *Proceedings of ICME-IV*. Berkeley, EUA.

Hunting, R. (prelo). Some results and curriculum implications from recent research on Young children's pre-fraction knowledge.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: children's strategies and errors: a report of the strategies and errors in secondary mathematics project.* Windsor: NFER-Nelson.

Lamon, S. (1995). Ration and prportion: elementary didactial phenomenology. Em: J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades.* Albany: State University of New York Press.

Lautert, S. L. & Spinillo, A. G. (1999). Como crianças apresentam a operação de divisão: da linguagem oral para outras formas de representação. *Temas em Psicologia, 7* (1), 23-26.

Lima, M. (1993). Iniciação ao conceito de fração e o desenvolvimento da conservação de quantidade. Em T. N. Carraher (org.) *Aprender pensando: contribuições da psicologia cognitiva para a educação* (pp. 81-127). Petrópolis: Vozes.

Lima, V. S. & Brito, M. R. (2001). Mapeamento cognitivo e a formação do conceito de frações. Em M. R. Brito (Org.), *Psicologia da educação matemática: Teoria e pesquisa* (pp.107-127). Florianópolis: Insular.

Lo, Jane-Jane & Watanabe, T. (1997). Developing ratio and proportion schemes: a story of a fifth grader. *Journal for Research in Mathematics Education, 28* (2), 216-236.

Maia, L.; Câmara, M & Câmara, P. (1991). Repensando a aprendizagem de frações: uma experiência pedagógica. *Tópicos Educacionais, 9* (1/2), 75-82.

Miguel, A. & Miorim, M. A. (1986). *O ensino da matemática*. São Paulo: Atual.

Mix, K. S., Levine, S. C. & Huttenlocher, J. (1999). Early fraction calculation ability. *Developmental Psychology, 35* (5), 164-174.

Nunes, T. ; Campos, T. ; Magina, S. & Bryant, P. (1991). *Introdução à educação matemática: Os números e as operações numéricas.* São Paulo: PROEM.

Nunes, T. & Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Pepper, K. & Hunting, R. (1998). Preschoolers' counting and sharing. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29* (2), 164-183.

Pitkethly, A. & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educacional Studies in Mathematics*, *30,* 5-38.

Pothier, Y & Sawada, D. (1983). Partitioning: the emergence of rational number ideas in young children. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14* (5), 307-317.

Resnick., L. B. & Singer, J. A. (1993). Protoquantitative origins of ratio reasoning. Em T. P. Carpenter; E. Fennema & T. A. Romberg (Orgs.), *Rational numbers: an integration of research* (pp. 107-130). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Santos, A. ; Gomes, A. & Castro Filho, J. (Mimeo). Micromundo para o ensino de frações e operações com frações.

Santos, M. & Souza, P. (Mimeo). Uma experiência com frações. Laboratório sobre frações, Colégio de Aplicação, UFPE.

SEF - Secretaria de Educação Fundamental. (1997). Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática – Brasília: MEC/SEF.

Silva, M. J. F. (1997). *Sobre a introdução do conceito de número fracionário.* Dissertação de Mestrado não-publicada, Mestrado em Ensino da Matemática, Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, SP.

Silva, P. E. & Sodré, U. (2000). Projeto MatWeb: Matemática pela Internet – Frações. Retirado em 02/07/2001, no World Wide Web: http://www.sercomtel.com.br/matematica/matweb/mod104/mod104.htm.

Singer, J. A.; Kohn, A. s. & Resnick, L. B. (1997). Knowing about proportions in different contexts. Em T. Nunes & P. Bryant (Orgs.), *Learning and teaching mathematics. An international perspective* (pp. 115-132). Hove: Psychology Press.

Singer-Freeman, K. E. & Goswami, U. (2001). Does half a pizza equal half a box of chocolates? Proportional matching in an analogy task. *Cognitive Development, 16*, 811-829.

Sophian, C.; Garyants, D. & Chang, C. (1997). When three is less than two: early developments in children's understanding of fractional quantities. *Developmental Psychology, 33* (5), 731-744.

Sowder, J. (1995). A compreensão de número na escola de primeiro grau. *Anais da I Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática*. Recife: Copiadora Caxangá.

Spinillo, A. G. (1992). A importância do referencial de "metade" e o desenvolvimento do conceito de proporção. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, *8* (3), 305-317.

Spinillo, A. G. (1996a). Developmental perspectives on children's understanding of ratio and proportion and the teaching of mathematics in primary school. Em J.

Gimenez, R. C. Lins & B. Gómez (Orgs.), *Arithmetics and Algebra Education: Searching for the Future* (pp. 132-137). Barcelona: Copisteria Asturias.

Spinillo, A. G. (1996b). O conceito de chance em situações de julgamento e de construção. Em M. H. Novaes & M. R. Brito (Orgs.), Psicologia na educação: articulação entre pesquisa, formação e prática pedagógica. *Coletâneas da ANPEPP*. Rio de Janeiro: Xenon Editora.

Spinillo, A. G. (1997a). O conceito de chance em crianças: noções iniciais e possibilidades de ensino. *Anais da II Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática*, Recife 2-5 de junho de 1997, Mestrado em Psicologia, GEOP, UFPE, CAPES/PADCT/SPEC.

Spinillo, A. G. (1997b). Chance estimates by young children: strategies used in on ordering task. *Procedimentos da "21st. International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education"*, *4*, 182-189.

Spinillo, A. G. (1997c). Proporções nas séries iniciais do primeiro grau. Em A. D. Schliemann; D. W. Carraher; A. G. Spinillo; L. L. Meira; J. T. da R. Falcão & N. Acioly-Régnier, *Estudos em psicologia da educação matemática* (2ª ed. revisada) (pp. 40-61). Recife: Editora da UFPE.

Spinillo, A. G. (1999). As relações entre aprendizagem e desenvolvimento discutidas a partir de pesquisas de intervenção. *Arquivos Brasileiros de Psicologia, 51* (1), 55-74.

Spinillo, A. G. (prelo). O papel de intervenções específicas na compreensão da criança sobre proporção. *Revista Psicologia: Reflexão e Critica*.

Spinillo, A. G. & Bryant, P. (1991). Children´s proportional judgments: the importance of "half". *Child Development*, *62*, 427-440.

Spinillo, A. G. & Bryant, P. (1999). Proportional reasoning in young children: part-part comparisons about continuous and discontinuous quantity. *Mathematical Cognition, 5* (2), 181-197.

Spinillo, A. G. (2002). Children's use of part-part comparisons to estimate probability. *Journal of Mathematical Behavior,21*, 357-369.

Streefland, L. (1984). Search for the roots of ratio: some thoughts on the long term learning process (towards… a Theory). Parte 1: reflections on a teaching experiment. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 327-348.

Streefland, L. (1985). Search for the roots of ratio: some thoughts on the long term learning process (Towards… A Theory). Parte 2: the outline of the long term learning process. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 75-94.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: a paradigm of developmental research*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tirosh, D.; Fischbein, E.; Graeber, A. & Wilson, J. (1999). The teaching module on rational numbers for prospective elementary teachers. The United State-Israel Binational Science Foundation, The University of Georgia. Retirado em 02/07/2001, no World Wide Web: <http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Module.html.

Vergnaud, G (1982, junho). *Psicologia cognitiva e do desenvolvimento e pesquisas em educação matemática : algumas questões teóricas e metodológicas* (J. V. Weiss).Trabalho apresentado para o Grupo Canadense de Estudos em Educação Matemática, Queen's University, Kingston.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. Em R. Lesh & M. Landau (eds.), *Acquisition of mathematics concepts and process* (pp. 127-174). New York: Academic Press.

Vergnaud, G (1985). Conceitos e esquemas numa teoria operatória da representação (A. Franchi & D. L. de Carvalho, Trad.) *Psychologie Française*, *30*, 245-252.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.

Vergnaud, G. (1995). Teoria dos campos conceituais. *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro*. Rio de Janeiro: Projeto Fundão.

Vergnaud, G. (1998). Multiplicative structures. Em J Hiebert & M. Behr (eds.), *Numbers concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). New York: Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

Zarzar, C. M. B. (1998). *A aquisição do conceito de fração: da partição às estruturas multiplicativas.* Dissertação de mestrado não-publicada, Pós-Graduação em Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE.

Zeman, M. (1991). The part-whole schema in the conceptualization of fractions. *The Journal of Mathematical Behavior, 10* (3), 251-259.

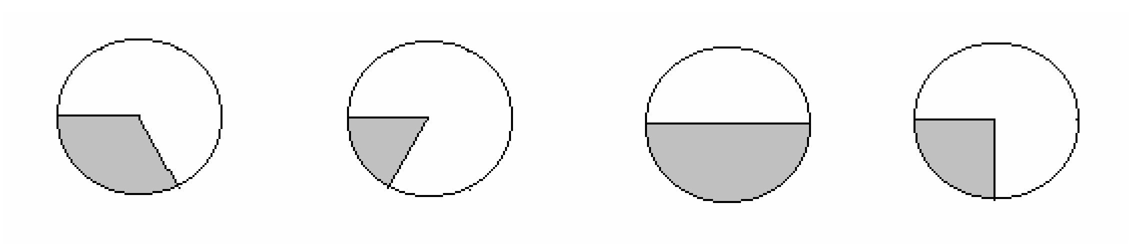
Zunino, D. L. (1995). *A matemática na escola: aqui a agora.* Porto Alegre: Artes Médicas.

ANEXOS

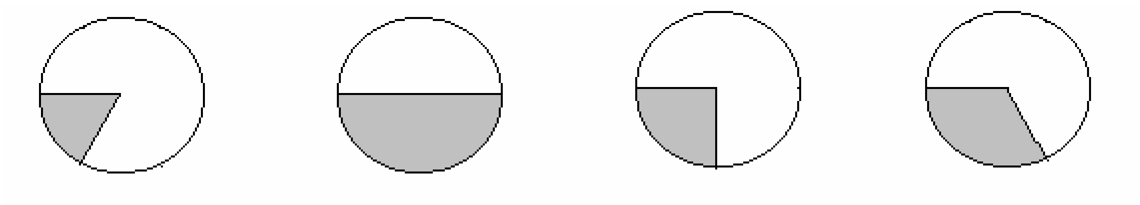
ANEXO I

Folha de respostas da tarefa de Sondagem

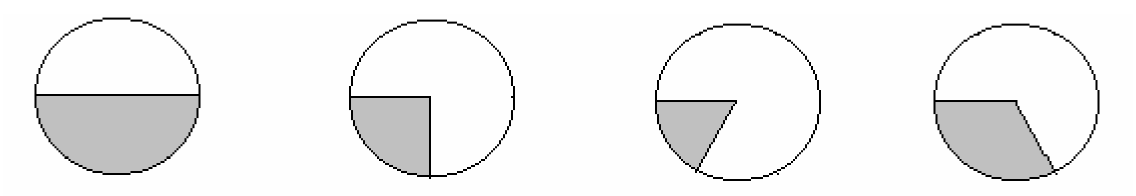
Item: ½



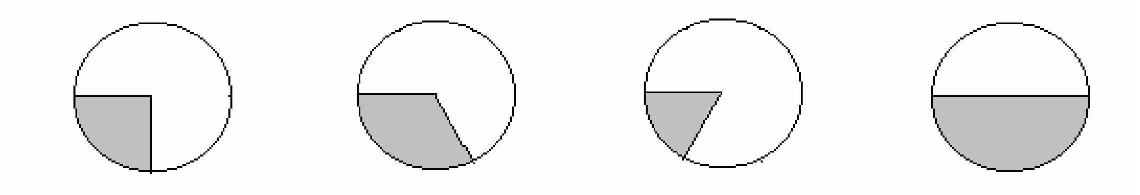
Item: 1/3



Item: ¼

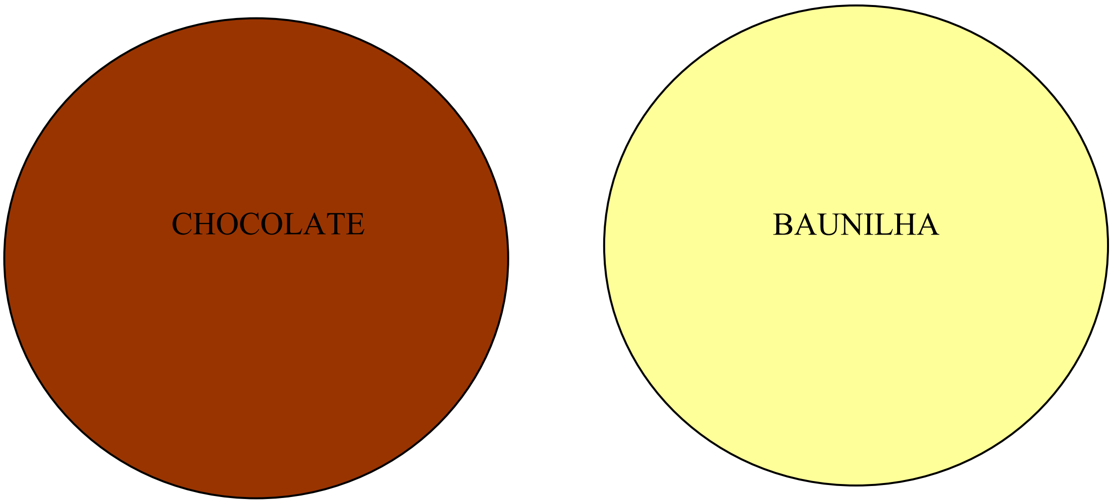


Item: 1/6



ANEXO II

Modelo das figuras (diagramas) da Tarefa 1



ANEXO III

Folha de respostas da Tarefa 1

Item: ¼ + ¼

Metade Mais que metade Menos que metade

Item: 1/3 + 1/3

Metade Mais que metade Menos que metade

Item: 1/6 + 1/6

Metade Mais que metade Menos que metade

Item: 1/3 + 1/6

Metade Mais que metade Menos que metade

Item: ¼ + 1/6

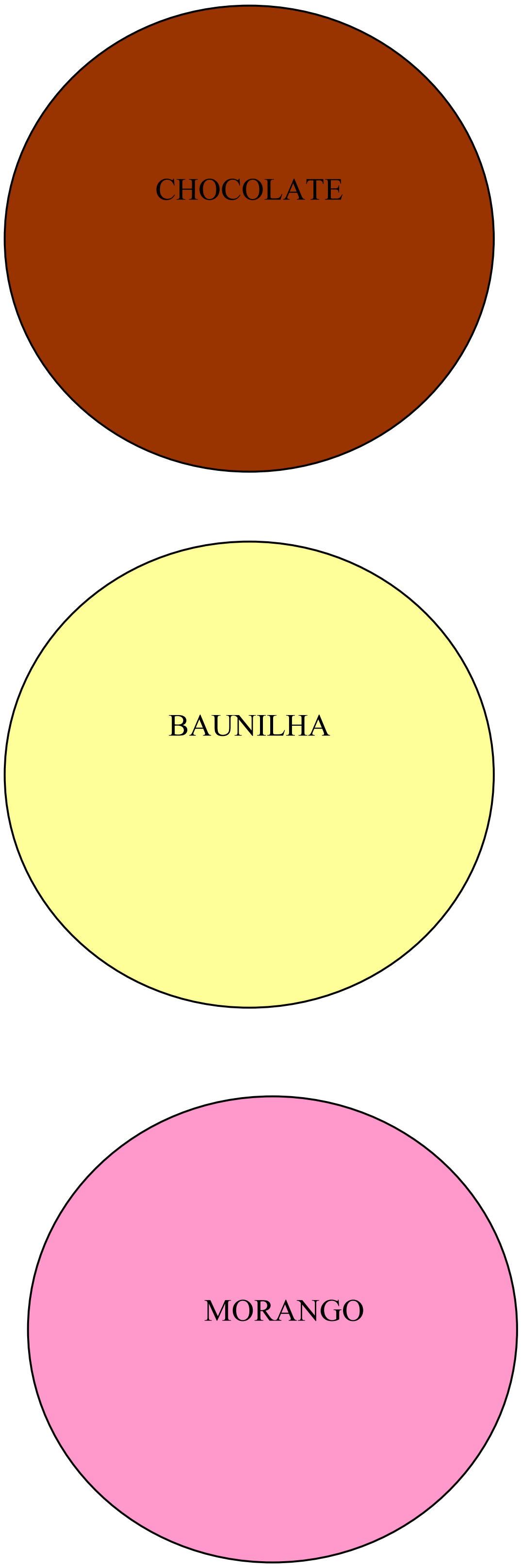
Metade Mais que metade Menos que metade

Item: 1/3 + ¼

Metade Mais que metade Menos que metade

ANEXO IV

Modelo das figuras (diagramas) da Tarefa 2



ANEXO V

Folha de respostas da Tarefa 2

Item: 1/3 + 1/3 + 1/3

Um bolo inteiro	Mais que um bolo	Menos que um bolo

Item: ½ + ½ + ½

Um bolo inteiro	Mais que um bolo	Menos que um bolo

Item: ¼ + ¼ + ¼

Um bolo inteiro	Mais que um bolo	Menos que um bolo

Item: ½ + ¼ + ¼

Um bolo inteiro	Mais que um bolo	Menos que um bolo

Item: ½ + 1/3 + 1/3

Um bolo inteiro	Mais que um bolo	Menos que um bolo

Item: 1/3 + 1/3 + ¼

Um bolo inteiro Mais que um bolo Menos que um bolo

Item: ½ + 1/3 + 1/6

Um bolo inteiro Mais que um bolo Menos que um bolo

Item: ½ + 1/3 + ¼

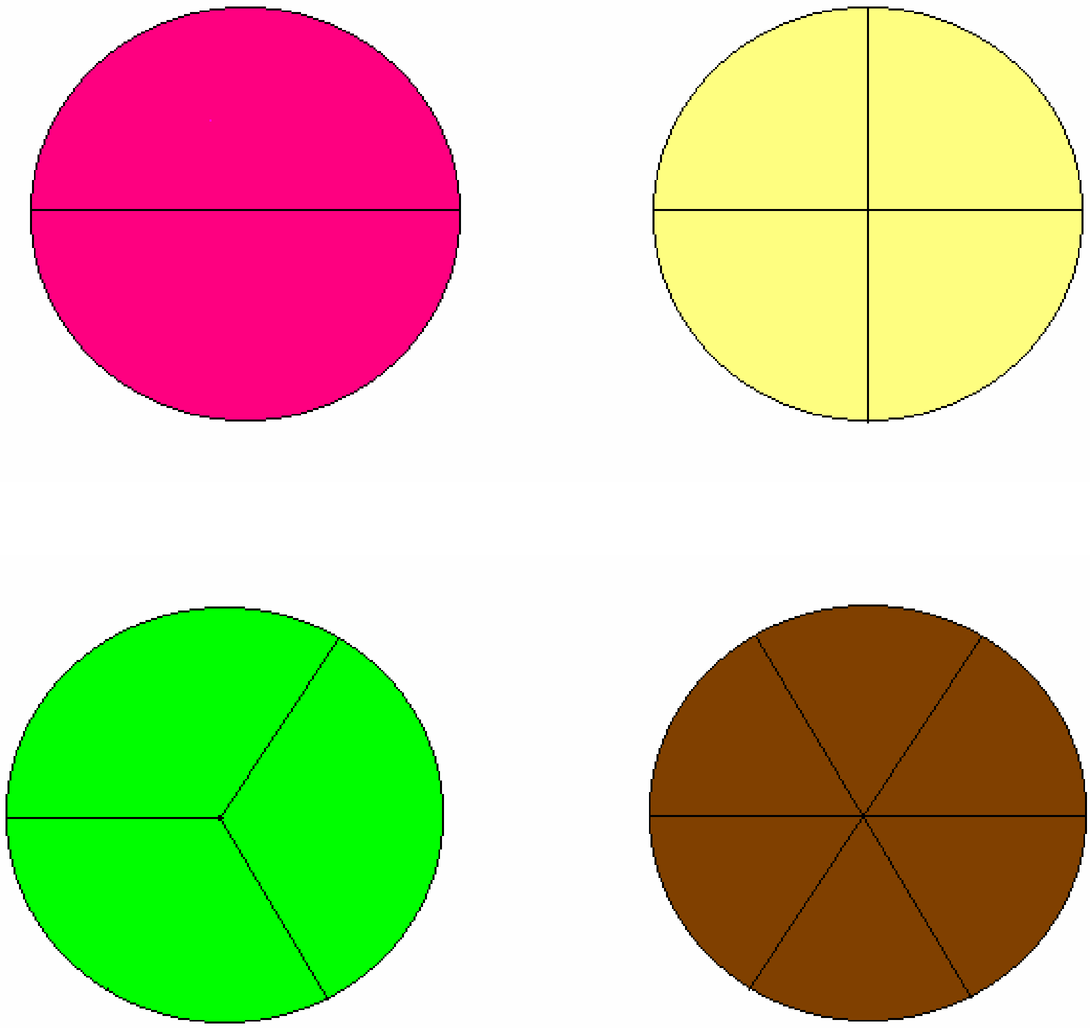
Um bolo inteiro Mais que um bolo Menos que um bolo

Item: ½ + ¼ + 1/6

Um bolo inteiro Mais que um bolo Menos que um bolo

ANEXO VI

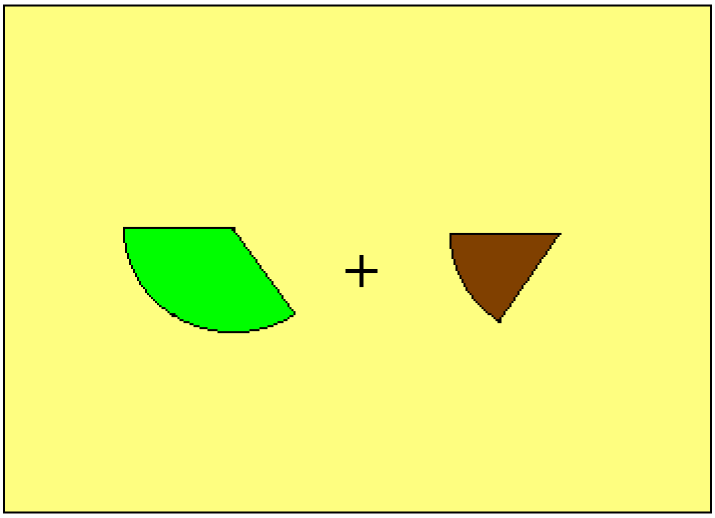
Modelo das figuras (diagramas) da Tarefa 3



ANEXO VII

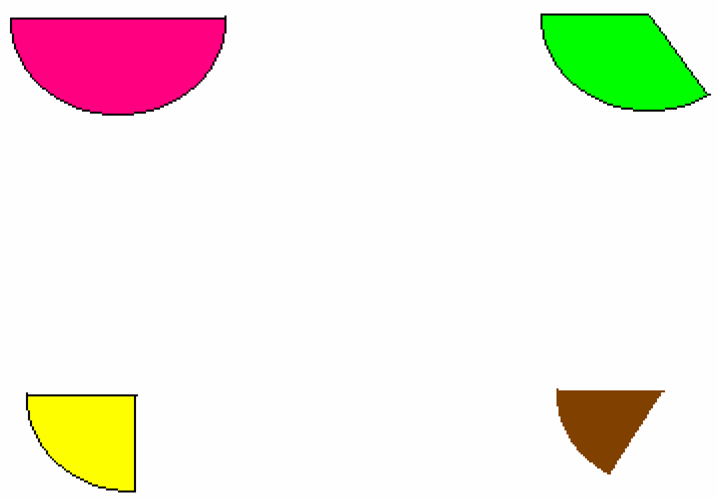
Exemplificação da representação de uma das operações da Tarefa 3

1/3 + 1/6



ANEXO VIII

Modelo das frações entregues às crianças
para fazer a Tarefa 3



ANEXO IX

Folha de respostas da Tarefa 4

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} =$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} =$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} =$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$$

ANEXO X

Resultados da Tarefa de Sondagem

Tabela 19: Número de acertos (percentual em parênteses) em cada fração

Série	½	1/3	¼	1/6	Total
2ª (n= 21)	20 (95,2)	10 (47,6)	12 (57,1)	8 (38)	50 (59,5)
3ª (n= 21)	20 (95,2)	4 (19)	6 (28,6)	13 (62)	43 (51,2)
Total (n= 42)	40 (95,2)	14 (33,3)	18 (42,8)	21 (50)	93 (55,3)

Como o mostrado na tabela acima, as crianças da 2ª e 3ª séries apresentaram um elevado percentual de acerto (95,2%) quando no reconhecimento da representação diagramática da fração ½. Este resultado demonstra a grande familiaridade das crianças com tal quantidade fracionária. Destaca-se, ainda, que o segundo maior percentual de acerto na 2ª série foi com a fração ¼ (57,1%) e na 3ª série com a fração 1/6 (62%). Não foram aplicados testes estatísticos de significância nesta tarefa tendo em vista que o objetivo da mesma foi garantir que cada criança compreendesse a notação e a representação diagramática das frações a serem utilizadas nas demais tarefas. Logo, foi menos importante nesta tarefa, a relação acerto/erro e mais relevante a compreensão das crianças das representações numéricas e diagramáticas das frações ½, 1/3, ¼ e 1/6.