UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

PÓS-GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA COGNITIVA

MESTRADO

O Desenvolvimento das Metáforas do Conceito de Infinito na Educação Matemática

Lúcia Cristina Silveira Monteiro

RECIFE – 2003

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA COGNITIVA
MESTRADO

O Desenvolvimento das Metáforas do Conceito de Infinito na Educação Matemática

LÚCIA CRISTINA SILVEIRA MONTEIRO

Orientador:
Prof. Dr. Luciano Rogério de Lemos Meira

Banca Examinadora
Prof. Dr. Jorge Tarcísio da Rocha Falcão
Prof. Dr. Paulo Figueiredo
Suplentes
Profª Drª Alina Spinillo
Prof. Dr. Marcelo Câmara

Dissertação apresentada à defesa pública como requisito à obtenção do título de mestra em psicologia – Curso de mestrado em psicologia cognitiva – Área de concentração em Educação Matemática, em 18 de junho de 2003.

RECIFE - PERNAMBUCO

Esse trabalho foi realizado no intuito de sistematizar saberes produzidos com a finalidade de firmar o meu compromisso com a educação matemática, acreditando que a democratização do conhecimento poderá efetivar projetos de desenvolvimento cognitivo através da educação escolar.

Meus agradecimentos a todos que direta ou indiretamente participaram dessa pesquisa, e em particular:

- Sujeitos da pesquisa, professores de matemática, pelo envolvimento com a causa e pela atenção e cordialidade durante o processo de realização.
- Profª. Márcia Dantas, pelas consultorias e reflexões compartilhadas.
- Prof. Luciano Meira, meu orientador, por todo acompanhamento e considerações.
- Prof. Wilbert Lima, por ser um referencial nas minhas trajetórias.
- À minha família, principalmente meus pais, Delmary e Mª Lúcia, que são meus principais estímulos.
- A Romário Mendes, pela presença e companheirismo.
- A Sandrinha, por estar ao meu lado.

Resumo

Este trabalho aborda o conceito de infinito a partir da perspectiva de seu desenvolvimento histórico, dos aspectos cognitivos relacionados à sua compreensão e de suas implicações para a educação matemática. Encontra-se, pois, o conceito de infinito no seio do desenvolvimento das ciências, e por ser um conceito com o qual não se tem experiência empírica direta, sua compreensão e descrição ficam diretamente relacionadas a níveis de abstrações, que são os desenvolvimentos conceituais expressos pelas linguagens. Imprime-se, então, uma relação dinâmica entre esse conceito e o desenvolvimento do pensamento matemático, através de suas representações que descrevem o infinito.

O foco de interesse, nesta pesquisa, é tentar entender como o conceito de infinito contribui para o desenvolvimento do pensamento abstrato. As conclusões apóiam-se em uma abordagem cognitiva, baseada na relação entre o desenvolvimento da linguagem e do pensamento, destacando a importância dos signos e, principalmente, da análise cognitiva das idéias matemáticas, que procura estabelecer como a mente incorpora, representa e atribui existência à matemática.

A pesquisa e as análises são frutos de uma concepção dialética sobre o desenvolvimento da linguagem e do pensamento. A pesquisa foi realizada, aplicando-se um problema histórico, o paradoxo de Zenão (450 a. C.) e foi construída a partir de diálogos com: alunos da última série do ensino fundamental, professores licenciados em matemática e matemáticos pós-graduados que atuam em cursos de licenciatura e bacharelado em matemática. O paradoxo escolhido apresenta aspectos polêmicos desde aquela época, até os dias atuais e, evidentemente, envolve os conceitos de infinitamente grande e infinitamente pequeno, objetos dessa pesquisa. Nas análises, surge um destaque para a diferença que há entre a linguagem matemática que tratou o paradoxo de Zenão, com uma visão estática, como na antiguidade, e com uma visão dinâmica, presente na linguagem matemática atual, que também está voltada para a interpretação de fenômenos e, por conseguinte, para uma interpretação do problema citado.

A principal categoria dialética encontrada nessa análise foi a categoria realidade-possibilidade.

Palavras-chave: Infinitamente grande; infinitamente pequeno; linguagem e pensamento; linguagem matemática; desenvolvimento histórico.

Abstract

This work approaches the infinite concept starting from the perspective of its historical development, of the cognitive aspects related to its understanding and of its implications for the mathematical education. Then, the infinite concept it meet in the crux of the development of the sciences, and for being a concept with which it is not had direct empiric experience, its understanding and description they are directly related the levels of abstractions, that are the conceptual developments expressed by the languages. It is printed, then, a dynamic relationship between that concept and the development of the mathematical thought, through its representations that describe the infinite.

The focus of interest, in this research, is to try to understand as the infinite concept it contributes to the development of the abstract thought. The conclusions lean on approach to cognitive, based on the relationship among the development of the language and of the thought, highlighting the importance of the signs and, mainly, of the cognitive analysis of the mathematical ideas, that tries to establish as the mind it incorporates, it represents and it attributes existence to the mathematics.

The research and the analyses are fruits of a conception dialetic on the development of the language and of the thought. The research was accomplished, being applied a historical problem, the Zeno's paradox (450 a.C.) and it was built starting from dialogues with: students of the last series of the fundamental teaching, graduate teachers in mathematics and postgraduate mathematicians that act in graduation courses in mathematics. The chosen paradox presents polemic aspects from that time, until the current days and, evidently, it involves the concept of infinitely big and infinitely small, objects of that research. In the analyses, a prominence appears for the difference that there is among the mathematical language that treated the Zeno's paradox, with a static vision, as in the antiquity, or with a dynamic vision, present in the current mathematical language, that is also gone back to the interpretation of phenomenons and, consequently, for an interpretation of the mentioned problem.

The main dialetic category found in this analysis it was the reality-possibility category.

Words: Infinitely big; infinitely small; language and thought; mathematical language; historical development.

Realidade é uma possibilidade que se realizou, e as tantas possibilidades são realidades em potencial.

SUMÁRIO

Introdução

O conceito de infinito está no seio do desenvolvimento das ciências e vem fazendo a diferença nos principais momentos de construção e mudanças de paradigmas, principalmente na tradição da cultura ocidental, no seio da história da filosofia e das ciências. Uma mudança de paradigmas implica a mudança da forma de se descrever e perceber fenômenos e a busca de construção de modelos conceituais abrangentes.

O interesse em estudar o conceito de infinito, nessa pesquisa, além de sua importância para as ciências é um conceito peculiar, pois, trata-se de um conceito com o qual não se tem experiência empírica direta. Diante desta constatação sua compreensão fica diretamente associada a níveis de abstrações que são manifestadas pelos desenvolvimentos conceituais e conseqüentemente, pelas linguagens. Essas linguagens se desenvolvem em muitas formas de representações que visam proporcionar uma definição, ou uma descrição de infinito.

Um problema diretamente relacionado ao interesse dessa pesquisa, então, está na questão de como o conceito de infinito se desenvolve nas mentes humanas ou, mais especificamente, como o conceito de infinito contribui para o desenvolvimento do pensamento abstrato.

Esse trabalho, na sua primeira parte, aborda o desenvolvimento do conceito de infinito, a partir de uma visão histórico-crítica, mapeando a tradição da civilização ocidental desde a Grécia antiga até os dias de hoje. Os relatos escolhidos visam mostrar a relação do desenvolvimento dos conceitos matemáticos com o desenvolvimento humano. Mais especificamente e sob um referencial mais amplo, a pesquisa e as propostas que surgem nesse trabalho se apóiam em uma concepção dialética do desenvolvimento do conhecimento científico e do pensamento humano.

Na historia do conceito de infinito encontram-se, na matemática, já na antiguidade, os primeiros conflitos teóricos de que se tem registro sobre esse conceito (Becker, 1965, p. 84). Estes se referem aos problemas propostos por Zenão de Eléa (séc. V a.C, apud Eves 1997). Esses problemas surgem em forma de paradoxos da matemática e mostram uma contradição na compreensão física da idéia matemática sobre a divisibilidade infinita do espaço.

Para as reflexões sobre o desenvolvimento da matemática, o referencial teórico que se destaca neste trabalho, por admitir uma compreensão dialética da matemática e especificamente do conceito de infinito, é o trabalho de Bento Caraça (2002) que, em sua revisão dos conceitos matemáticos, permite uma compreensão da relação do desenvolvimento dos conceitos matemáticos com o desenvolvimento de uma linguagem matemática, que teve início a partir da revolução cientifica do século XVII, acompanhando as necessidades de desenvolvimento científico nessa sociedade, até os dias atuais. Destaca-se, não uma mudança dos fundamentos lógicos da matemática, mas, de uma linguagem que pode ser usada para analisar e explicar fenômenos.

Na segunda parte desse texto, busca-se efetuar uma abordagem cognitiva sobre o desenvolvimento dos conceitos matemáticos e mais claramente sobre o conceito de infinito, e, com essa finalidade, o presente trabalho apóia-se nas questões colocadas por Vygotsky (1998) quando destaca a relação intrínseca entre o desenvolvimento da linguagem e do pensamento e, complementando este aspecto, estão as conclusões de Leontiev (1978), com seus argumentos sobre a importância dos signos para o desenvolvimento do pensamento humano, e a concepção sobre o desenvolvimento dialético dos conceitos de Eleanor Rosch (1980), propondo uma concepção teórica para a construção dos conceitos.

Nesse rol das teorias cognitivas para o desenvolvimento do pensamento matemático, as mais recentes são retiradas do trabalho do psicólogo Nüñez(1994) e do lingüista Lakoff (2000), que abrem novas perspectivas para a Educação Matemática. A proposta desses pesquisadores é uma análise às origens das idéias matemáticas. Esses autores acreditam que, através das análises cognitivas feitas às idéias matemáticas, pode-se pensar em uma revirada nas tendências filosóficas sobre os fundamentos da matemática (Lakoff & Nüñez, 2000).

Um trabalho muito amplo é apresentado por eles, a partir de análises cognitivas da linguagem matemática. Uma das questões centrais de Lakoff & Nüñez é a conclusão de que a matemática é constituída a partir de metáforas conceituais. Dessa forma propõem que o conceito de infinito, embora seja um conceito peculiar, por não se ter experiência direta com ele, também tem sua percepção iniciada em metáforas conceituais, que seriam os protótipos, denominados por eles, metáfora básica do infinito.

O trabalho de Lakoff e Nüñez (2000), além de ter a preocupação em tentar compreender como se dá o desenvolvimento desse conceito, contribui também com idéias para a elaboração de propostas possíveis para o desenvolvimento da educação matemática e para o desenvolvimento de conceitos matemáticos, especialmente, o conceito de infinito.

Dessa forma, fica claro inclusive pelos trabalhos de Lakoff & Nüñez, que a linguagem matemática descreve o infinito com suas representações simbólicas, a partir das idéias mais simples, os números, até outras mais rebuscadas como as que definem o infinitamente pequeno, na literatura matemática atual, sinônimo de infinitésimo. Essas formas de representação do infinito matemático constituem as metáforas básicas do infinito. Lakoff concorda então, que as metáforas do infinito estão representadas em praticamente todo o pensamento matemático atual. Essas metáforas também estão presentes nas formas com que a linguagem matemática mais recente interpreta, descreve e propõe idéias de somas infinitas ao velho paradoxo de Zenão.

Em uma terceira parte do trabalho há uma exposição dos conteúdos dos currículos, desde o ensino fundamental, que contêm formas implícitas de paradoxos do infinito. Nesse destaque aos conteúdos e suas velhas formas de abordagem, evidencia-se a sonegação de informações aos alunos, na construção do conceito de infinito, que podem acarretar velhas compreensões equivocadas. Nessa passagem explicita-se a diferença que há entre a linguagem matemática que tratou o paradoxo de Zenão na antiguidade e a linguagem matemática que trata esse paradoxo nos dias de hoje.

As análises da pesquisa efetuada encontram-se na quarta parte do texto e são baseadas em diálogos com três grupos em diferentes níveis de formação acadêmica: alunos da oitava série do ensino fundamental, professores de matemática do ensino fundamental e, matemáticos pós-graduados, professores de licenciatura e bacharelado em matemática. Nos diálogos são colocadas questões sobre o conceito de infinito, destacando-se a posição de cada sujeito de pesquisa acerca do paradoxo de Zenão. Nesse processo tentou-se identificar quais os elementos conceituais que compõem o discurso desses sujeitos, possíveis de serem detectados através das metáforas usadas.

As metáforas conceituais se apresentaram descrevendo processos, ou seja, uma percepção de movimento, que é um dos princípios do pensamento dialético. O outro principio da dialética, a relação entre todas as coisas, também está presente em toda análise, e aparece na relação entre uma linguagem matemática desenvolvida historicamente, e as formas de descrever o conceito de infinito na atualidade.

A análise é dialética, visando estabelecer uma compreensão do processo cognitivo dos sujeitos da pesquisa, através de diálogos, utilizando-se de argumentos históricos como o paradoxo de Zenão e os contra-argumentos baseados nos conhecimentos atuais. A principal categoria encontrada na análise é a categoria dialética realidade-possibilidade (Chepttulin, 1982), procurando no próprio desenvolvimento da matemática e das ciências, a justificativa para analisar o que acontece, e sugerir o que poderia acontecer, diante das possibilidades da linguagem matemática moderna.

No final, surge uma proposta de intervenção diante das questões observadas que se apóia na importância da linguagem matemática para a descrição do infinitamente grande e do infinitamente pequeno, com base nas teorias cognitivas e no desenvolvimento da linguagem matemática. Mais uma vez confirma-se o imprescindível papel da educação escolar para que os indivíduos atinjam estágios cognitivos mais avançados e assim possam alcançar autonomia intelectual.

1 - História do conceito de infinito.

A história do conceito de infinito é uma história da evolução do pensamento científico. O conceito de infinito sempre pairou nas ciências, como ponto de contradições como no passado na filosofia, na física e na matemática, ou, principalmente como na linguagem matemática atual, em que a noção de infinito parece onipresente, traduzida em representações que determinam formas de se pensar no infinito.

Observa-se uma dinâmica entre teoria e prática, na evolução do conhecimento que tem contribuído para o desenvolvimento do pensamento matemático, desde a antiguidade. Na história da matemática encontra-se uma relação do desenvolvimento da matemática com as necessidades das sociedades humanas. Na matemática pré-helênica detecta-se a presença do aspecto empírico e a marca do utilitarismo, ou seja, a matemática é uma ciência ligada ao fazer humano. Os sistemas de numerações iniciais tinham origem na contagem simples e direta de objetos. "*A numeração escrita nasceu, nas épocas mais primitivas, do desejo de manter registro de gado ou outros bens... é pelo menos tão antiga quanto a escrita, e talvez anterior" (Milies & Coelho, 2001, p. 54)* Não houve, durante muitos séculos, necessidade de uma idéia de números muito grandes, ou muito pequenos.

Os registros de sistemas de escrita numérica mais antigos que se conhecem são os dos egípcios e os dos sumérios na Mesopotâmia, datando aproximadamente do ano 3.500 a.C. Nessa época usavam-se desenhos para representar quantidades, como por exemplo, um laço para representar o número 100 e uma flor de lótus para representação do número 1000. Não havia necessidade de representação de grandes números.

Um novo estágio na história da numeração corresponde aos sistemas hebraico e grego. Ambos os povos atribuíam valores numéricos às letras. Porém, em essência, baseava-se nos mesmos princípios que a numeração egípcia ou suméria. O sistema de registro numérico evolui à medida que as sociedades tornam-se mais complexas implicando necessidades como controle da produção agrícola e o comércio.

A idéia dos inteiros positivos e de uma relação entre eles surge na Grécia antiga, com Pitágoras (séc VI a.C.) e com a irmandade pitagórica, escola que surge a partir de Pitágoras e que pregava que na natureza tudo era número. Inaugura-se o início de uma época dedicada a estudos e desenvolvimentos matemáticos, mais particularmente, estudos geométricos. Esse geômetra também era um grande viajante, e teria observado em suas viagens, por exemplo, no Egito, um triângulo retângulo de lados três, quatro e cinco unidades, sendo utilizado na construção civil, para a determinação do ângulo reto, o que gerou a formulação do teorema de Pitágoras.

A observação leva a muitas descobertas nessa irmandade. Mas há também um código de sigilo. Conta-se que um certo membro da escola que não teria guardado segredo sobre a concepção de dodecaedro regular[1] teria amanhecido enforcado (Singh, 1999). Nessa Escola há um grande desenvolvimento no estudo das relações aritméticas existentes nos polígonos e nos poliedros, e surge a generalização da relação entre os lados de um triângulo retângulo - o teorema de Pitágoras. Porém, o que se tornaria uma grande descoberta conduziu a outras não esperadas, a percepção de entidades estranhas para aquela época, a existência de quantidades geradas pela relação pitagórica aplicada a lados de triângulos retângulos isósceles explicita números que têm infinitas casas decimais sem repetições periódicas o que, séculos mais tarde, seriam denominados de números irracionais.

Naquela época essas quantidades não eram reconhecidas como números ou como coisa alguma. Esse problema gera uma crise na irmandade e sua conseqüente extinção, depois de quase dois séculos de desenvolvimentos matemáticos. Estes fatos redirecionam os focos no desenvolvimento da matemática, tendo como maior conseqüência, a separação dos estudos de geometria e da aritmética.

Arquimedes (287-212 a.C.), matemático e físico grego, que fora educado no Egito e escreveu sobre os fundamentos da geometria, aritmética e mecânica, tinha como grande problema na época a inexistência da notação para representação dos grandes números. A representação usada na Grécia de sua época era constituída das letras do alfabeto e só era possível distinguir os números até a miríade de miríade, em que a miríade era representada pela letra M, que em notação atual representava a quantidade igual a 10.000. E a miríade de miríade representava o produto 10.000 x 10.000 ou 100.000.000. Essa limitação representava um empecilho para o desenvolvimento da ciência. Apolônio de Perga, contemporâneo de Arquimedes, astrônomo que teve importante contribuição no estudo do movimento dos planetas, propôs um sistema que mais tarde foi adotado por muitos astrônomos.

Porém, em um texto escrito por Arquimedes, entrará em foco o sistema proposto pelo próprio Arquimedes. O interesse de Arquimedes na representação dos grandes números origina-se de problemas propostos na corte do rei de Siracusa, a respeito da quantidade dos grãos de areia de uma praia. No sistema de numeração de Arquimedes consideram-se as letras gregas para a representação escrita, e utiliza-se

[1] Sólido também classificado como Poliedro regular formado por doze pentágonos regulares, que é o protótipo da bola de couro utilizada em muitos esportes da atualidade.

uma progressão geométrica de razão igual a dez, denominada de progressão décupla, em que cada número é expresso em uma unidade que corresponderá a um número expresso em miríades. Esse sistema estava separado em séries e o último número, da primeira série à menor, era da ordem de 10^8, elevado a 10^8, ou efetuando a potência, $100.000.000^{100.000.000}$. Essas séries podiam ser entendidas como ilimitadas.

Arquimedes vai além e coloca algumas questões instigantes para aquela época e, em um trabalho chamado *Arenário*, ele declara que não só existem números que expressam a quantidade de areia que há nas praias, como existem números de ordem de magnitude dos grãos de areia do mundo. O mundo concebido na época de Arquimedes era o platônico, que admitia um sistema geocêntrico, finito. A idéia era a da existência de uma esfera cujo centro seria coincidente com o centro da Terra e cujo raio seria igual à distância Terra-Sol.

Nesse contexto, as discussões sobre o infinito não eram bem aceitas porque traduziam oposição às idéias de permanência dos seres e do mundo concebido até então, a idéia que predominava era o mundo das esferas finitas de Platão.

Em oposição à idéia dominante do sistema geocêntrico, havia o mundo de Aristarco de Samos, primeiro cientista que afirmou que a terra girava ao redor do sol, quase dois mil anos antes de Nicolau Copérnico (1473-1543). Um sistema com centro no Sol e com raio igual à distância Sol-Estrelas. Esse sistema carregava entre outras, uma semente das discussões sobre o finito, e principalmente, tirava o planeta Terra de sua importância e soberania associada à importância e soberania dos reis da época, colocados como representantes dos deuses no planeta, que era o centro do mundo.

Esses paradigmas, idéias consideradas bases para o desenvolvimento científico daquele momento, levaram ao ostracismo muitos conceitos científicos, principalmente aqueles relacionados à física e à matemática. O conceito de infinito, inserido no pensamento da ciência moderna e considerado conceito fundamental da matemática (Caraça, 2002), foi perseguido e excluído do pensamento científico dominante, por muito tempo.

Mesmo antes da extinção da irmandade pitagórica, a perspectiva das divisões sucessivas sobre um segmento, proposta por esta escola, gerou oposição manifestada principalmente por discípulos da escola de Parmênides. Este, primeiramente ligado àquela escola, logo se separou dela fazendo exame crítico de todas as noções e concepções que até ali tinham sido emitidas.

Uma das primeiras idéias que mostra uma contradição na possibilidade das subdivisões infinitas em um segmento deveu-se a Zenão de Eléia (meados do séc V a.C.). Discípulo de Parmênides, Zenão propõe um problema que ficaria conhecido como o paradoxo de Zenão e teria sido em primeira versão formulado mais ou menos assim: "Suponha que o veloz guerreiro Aquiles deve disputar uma corrida com uma tartaruga. Sendo de longe a mais lenta dos dois, a tartaruga é autorizada a começar num ponto, certa distância à frente. Mas, nesse caso, diz Zenão, Aquiles jamais conseguirá alcançar seu adversário. Para isso, ele precisa primeiro chegar ao ponto de onde a tartaruga partiu. A essa altura, a tartaruga terá avançado até algum outro ponto". É obvio, afirma Zenão, que a série é interminável. Haverá sempre alguma distância, por menor que seja, entre os dois competidores.

Sabe-se que Aquiles iria alcançar a tartaruga com muita facilidade, mas assinalar isso não invalida o raciocínio de Zenão. O que ele está dizendo é que Aquiles deve efetuar uma série infinita de atos, algo que não pode ser feito num período de tempo finito.

Infelizmente, os escritos do próprio Zenão desapareceram e a única versão que se tem de seus paradoxos é a de Aristóteles, que os formulou no intuito de refutá-los. Aristóteles diz que Zenão propôs o paradoxo de Aquiles e a Tartaruga e um outro chamado "a dicotomia"[2] no intuito de mostrar que o movimento era impossível. Alguns filósofos concordam que Zenão estava rebatendo a idéia de que o espaço e o tempo eram infinitamente divisíveis. O objetivo, ao descrever uma situação absurda em que Aquiles tem de transpor uma série de distâncias que ficam progressivamente mais curtas, era mostrar que o espaço não podia ser dividido dessa maneira. Esse ponto de vista é o mais aceitável em relação ao que se conhecia sobre as idéias de Zenão.

Aristóteles atribui a Zenão a invenção da dialética, técnica freqüentemente usada nos diálogos platônicos. Nesses escritos, vê-se muitas vezes Sócrates pedir a uma outra pessoa que emita uma opinião. Em seguida ele demonstra que essa idéia leva a uma contradição ou a uma conclusão absurda. Aparentemente Zenão estava usando a técnica da dialética em "Aquiles e a Tartaruga" porque todos sabiam que Aquiles logo alcançaria o lerdo animal. Conseqüentemente, tinha de haver algo errado com os pressupostos iniciais. (Morris, Pág.25)

Naquela época não se concebia uma teoria matemática que não fosse fisicamente compreensível, pois a matemática e a física eram disciplinas que caminhavam juntas e emprestavam os conceitos uma para a outra. Na verdade, não havia uma distinção explicitada entre elas.

A concepção de ciência continuou baseada em Platão e Aristóteles durante a maior parte da história dos últimos vinte e cinco séculos tendo em vista o

[2] É uma outra versão para o mesmo paradoxo, que determina que antes de se cobrir o espaço entre dois pontos ter-se á que cobrir a metade desse espaço, e antes a metade da metade e assim sucessivamente, criando-se a idéia de que não seria possível sair do ponto, ou seja, que não seria possível o movimento.

desenvolvimento histórico e cultural da atual civilização ocidental. A Matemática Grega, a partir de Euclides de Alexandria (365 a.C.-275 a.C.) que propõe em *Os Elementos* a questão da demonstrabilidade como critério básico, foi assumindo preocupações estilísticas, voltando-se para a beleza do raciocínio e a exatidão da forma e desvinculando-se parcialmente da raiz empírica. A matemática então, pretendia ter existência independente da realidade sensorial, isto é, como ato de pura abstração, remotamente reflexiva em relação à realidade.

> *"Tão grande foi a impressão causada pelo aspecto formal dos Elementos de Euclides nas gerações seguintes que a obra se tornou um paradigma de demonstração matemática rigorosa(...) o método postulacional inspirado em Euclides penetrou quase todos os campos da matemática..."* (Eves, 1997, p.179)

Com Euclides ocorre um salto qualitativo para a Geometria, registrando e desenvolvendo conhecimentos geométricos anteriores. O conceito de infinito implícito na concepção de números, motivo da separação da Geometria e da Aritmética, e que gerou no seio do pensamento geométrico a exclusão de tudo que lembrasse o movimento, ficou adormecido. Renunciando a abordar um estudo quantitativo do infinito passou-se a eliminá-lo sistematicamente dos raciocínios matemáticos (Caraça, 2002, p.177)

Entretanto, com o desenvolvimento, principalmente do comércio nas sociedades, a necessidade dos números não fica só nas representações, mas, principalmente nas operações.

Do século IV ao século XV d.C. a matemática ficou predominantemente ligada ao mundo islâmico, destacando-se a importância de Al-Khowarizmi e de sua obra apontada como difusora do sistema de numeração hindu e, responsável por um texto sobre *Ciência das Equações*. O desenvolvimento matemático continua baseado nas relações sociais, principalmente nas relações propostas pelo comércio de mercadorias desses povos.

A numeração posicional de base 10, que se adota até hoje, teve sua origem na Índia, aproximadamente no fim do séc.V d.C. mas, só foi divulgada na Europa em torno do ano 825 d.C. pelo matemático árabe Al-Khawarizmi.

No século XV, com o Renascimento Italiano inicia-se a superação dos métodos científicos até então vigentes. O despertar científico italiano começava com a estética do artista que voltava a contemplar a natureza sob a forma como esta se apresenta.

Considerados os pós-platônicos do Renascimento, empiristas físicos e matemáticos desenvolvem novos paradigmas para a ciência moderna (Abrantes,1998), cientistas como Copérnico (1473-1543), Kepler (1571-1630), Galileu (1564-1643), Leibniz (1646-1716), Newton (1642-1727), entre outros, desenvolvem o cálculo diferencial, base para o pensamento científico predominante utilizado até os dias de hoje; é a revolução cientifica em sua primeira fase.

Entretanto, também nesse contexto explicita-se uma separação entre as ciências físicas e matemáticas, com o argumento de que modelos matemáticos para existirem não precisam ter um modelo físico que o acompanhem, é a supremacia da formalização matemática, da axiomatização submetida às normas da lógica dedutiva. A partir desse período ocorre um desenvolvimento tanto na matemática aplicada quanto na matemática pura e até os dias atuais propõe-se uma aparente dicotomia, uma tentativa de diferenciação entre o que seria matemática pura e matemática aplicada. Embora não exista significado epistemológico nessa dicotomia, há uma insistência de alguns em considerar a matemática dessa forma.

Na história da matemática percebe-se que o pensamento matemático é desenvolvido em constantes interações de teoremas e práticas e de práticas e teoremas, como exemplo, tem-se o já citado processo de utilização do teorema de Pitágoras, pelos egípcios, para obter um ângulo reto, muito antes do teorema de Pitágoras ter sido generalizado e demonstrado. E por outro lado, tem-se o conhecido problema das agulhas de Buffom, que gerou uma equação que parecia sem significado para a época e depois se revelou uma idéia muito importante que tornou possível a utilização comercial dos aparelhos de tomografia computadorizada com notáveis aplicações na medicina[3].

As razões básicas do progresso da ciência no Renascimento também se devem a causas sociais, econômicas e políticas e à nova concepção de universo fundamentada nas observações de Kepler, Galileu sobre heliocentrismo, matematizada por Newton, origina e fundamenta os ideais da época, gerando uma nova concepção de mundo.

> ...“*nova atitude dos homens em relação com a idéia de infinito; os grandes criadores da Europa pós-medieval são infinitistas; o súbito alargamento do mundo, tanto do ponto de vista geográfico, por efeito das viagens marítimas, como do ponto de vista astronômico, por virtude da obra magistral de*

---

[3] Vide apêndice 1.

Copérnico, Kepler, e de Galileu, entra *decerto por muito no engrossamento dessa corrente infinitista*"(Caraça, 2000, p.p. 280-281).

Nesse novo palco de discussões criam-se as possibilidades para dar evasão às idéias vindas de muitos séculos, sobre os conceitos de infinito e infinitésimo, debatidas e criticadas, finalmente emergem reconhecidas pela comunidade científica específica associada à aplicação nas novas formas de desenvolvimento da sociedade.

Observa-se nas necessidades da sociedade o impulso para desenvolvimentos matemáticos que, à procura do quantitativo e dos melhores métodos de cálculo, faz com que no princípio do séc.XVII surja uma invenção, associada às necessidades da navegação: a idéia dos logaritmos, onde as séries numéricas infinitas surgem como instrumento básico para o seu cálculo.

São momentos de muitos desenvolvimentos científicos. Há um impulso na necessidade de se descrever os fenômenos com a linguagem das ciências. Surgem novos conceitos a cada tentativa de se compreender as relações implícitas nos fenômenos observáveis.

As observações de Galileu a respeito do problema do movimento abriram muitas portas para o conhecimento. Quando um enigma cientifico é resolvido, surgem muitas vezes questões novas, mais profundas. Depois que conseguiu encontrar uma descrição correta para o comportamento dos corpos em queda, Galileu se viu em face de um novo problema: ao definir velocidades médias, como, por exemplo, considerando um objeto que cai 5 metros em um segundo, sua velocidade média é de cinco metros por segundo ou 5m/1s, ele percebe que o objeto também tem uma velocidade instantânea, definida em cada momento da queda.

Observando um objeto em queda, após um décimo de segundo estará se movendo com alguma velocidade específica. Após quatro décimos de segundo, estará se movendo com outra velocidade. Mas não estava óbvio para Galileu como a velocidade instantânea deveria ser definida. Necessitava-se conceber um conceito que definisse a velocidade instantânea de um móvel, uma linguagem que o descrevesse, isto é um conceito inspirado na observação do fenômeno.

Esse novo conceito não poderia ser um número, mas haveria de poder representar qualquer número de um conjunto de números conveniente – o novo conceito que servirá de instrumento matemático será, portanto, *uma variável.*

Uma variável se caracterizava, então, como um ente matemático sobre o qual tem-se a liberdade de escolher arbitrariamente a partir de todo um conjunto de entes, ou seja, esse ente, a variável, é idealizado dentro de um campo de variação. Esse campo de variação também é conhecido como domínio. Essa variável é representada normalmente por qualquer letra do alfabeto, por exemplo, a letra v. O domínio de variabilidade de uma variável pode ser prolongado até o infinito, assim o domínio pode ser o conjunto de todos os números Naturais, Reais etc.

É possível que a cada valor de uma variável v esteja associado um valor bem definido de uma outra variável, por exemplo u . Então u é chamado de função de v.

O primeiro a utilizar a palavra "função" foi Leibniz (Courant, 2000) e para os matemáticos do século XVIII, a idéia de uma relação funcional estava mais ou menos identificada com a existência de uma fórmula matemática simples que expressasse a natureza da relação. É importante ressaltar que uma função matemática é uma lei que rege a interdependência entre quantidades que variam.

Esse novo instrumento matemático será aplicado ao estudo do que se passa num ponto em interdependência com pontos arbitrariamente próximos, então a variável deve ter, matematicamente, uma compreensão numérica.

O conceito de função é da maior importância, não apenas na matemática, mas também em aplicações práticas. Leis físicas nada mais são do que proposições relativas à maneira como certas quantidades dependem de outras quando se permite que algumas destas variem. Por exemplo, o tom da nota emitida por uma corda distendida de um instrumento musical depende do comprimento, peso e tensão da corda; a pressão atmosférica depende da altitude, etc.

Nesse período fundamenta-se uma nova concepção de procedimento empírico que, sem desprezar as conquistas do conhecimento científico, anterior à "fundamentação na demonstrabilidade" e, portanto o caráter dedutivo, enfatiza a observação e a experimentação, acrescentando a essas o conhecimento matemático, que tenta explicar e justificar o fenômeno observado.

Para entender o problema que Galileu colocou, considere-se o experimento: uma bola caindo de cima de um edifício. Pretende-se determinar exatamente em que velocidade ela está caindo depois de transcorrido exatamente um segundo. Assim, fotografando a bola em um instante e novamente um décimo de segundo depois, as fotografias mostram a extensão da queda durante esse período de tempo que, com as devidas operações, dividindo a extensão em metros pelo tempo transcorrido dá somente a velocidade média. Mesmo fotografando a bola entre instantes separados por um bilionésimo de segundo, se fosse possível, o resultado com os procedimentos citados seriam sempre a velocidade média, e não seria precisamente igual à velocidade instantânea da bola.

Um objeto em queda tem de ter uma velocidade definida em todos os pontos de sua queda. Velocidades médias podem ser especificadas para períodos de tempo cada vez menores. Mas para saber o que está acontecendo em algum instante em particular, o método falha. Esse raciocínio conduz a uma possibilidade, ou seja, uma bola cairá zero metro em zero segundo. Mas o número $\frac{0}{0}$, não tem qualquer sentido, físico ou matemático. Tem-se uma situação que lembra o paradoxo de Zenão, *a dicotomia,* quando se afirmava que o movimento era impossível porque em qualquer instante dado uma partícula estaria imóvel.

O objetivo nessa nova visão de ciência é a formação de um quadro ordenado e explicativo dos fenômenos naturais, fenômenos do mundo físico e do seres humanos, individual e social. Nesse contexto as características fundamentais da realidade são a interdependência, concepção em que tudo se relaciona, e a *fluência*, noção de que o mundo está em permanente evolução.

Desponta uma nova concepção a respeito do problema do movimento. Nesta nova atitude, imagina-se que, quando se quer fixar a posição de um móvel, em determinado instante num ponto da trajetória, já ele ali não se encontra – entre dois instantes, por mais aproximados que sejam um do outro, o móvel percorreu um segmento, com uma infinidade de pontos; a cada instante o móvel está e não está em determinado ponto.

O que está implícito é novamente o conceito de infinitamente pequeno. A motivação está na tentativa de descrever o movimento através da velocidade em um determinado instante. E a linguagem das funções que visa juntar o geométrico e o analítico se revela um importante exemplo de como representar a ligação entre a qualidade e a quantidade.

Então o conceito de função é a linguagem que melhor definirá o infinitamente pequeno, utilizando-se dessa idéia de variação. O rigor matemático a respeito dessa linguagem durou séculos para se desenvolver, mas essa forma de compreender o infinitésimo associado ao deslocamento é uma linguagem classificada como a mais definitiva no pensamento matemático atual, utilizada em todas as ciências.

Recordando-se os desenvolvimentos que deram origem à solução encontrada, chega-se aos argumentos de Zenão de Eléa (Caraça, 2000, p.202) tradicionalmente designados por argumentos contra o movimento, mas que melhor será designá-los por argumentos contra a compreensão do movimento. Qualquer que tenha sido o objetivo efetivo e inicial de Zenão, pois não se possui mais que o breve testemunho de Aristóteles que é de quase dois séculos posteriores, sua argumentação ficou na história da ciência com um valor inestimável, e mostra que o movimento não pode ser compreendido como uma sucessão de estados particulares; considerá-lo assim equivale a abordar o seu estudo por um método estático.

Analisar o movimento em cada instante é pensar em acréscimos infinitamente pequenos. Dessa forma descreve-se uma quantidade infinitesimal ou infinitamente pequena, através da noção de acréscimo infinitesimal atribuído a uma variável muito importante, o infinitésimo $X = \frac{1}{n}$.

A variável $\frac{1}{n}$ vem de uma relação com o conceito de infinito dos números Naturais, pois, dado uma variável inteira *n*, cujo domínio é a quantidade infinita de números naturais representados por *1, 2, 3, 4, ...,* então, é possível pensar nessa outra variável *X*= $X = \frac{1}{n}$ representada por $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$... Pois se é possível pensar sempre em um número maior que *n,* pelo menos por acréscimo da unidade, ou seja, *n+1*, será possível pensar sempre em um número menor que $\frac{1}{n}$, ou seja, o quociente $\frac{1}{n+1}$, que poderá ser muito próximo de zero, sem nunca poder ser igual a zero.

Então surge na linguagem matemática uma relação muito particular, que afirma, com outras palavras, que *fazer* $\frac{1}{n}$ *ir para zero* equivale a dizer que *n, do quociente* $\frac{1}{n}$ está *indo para o infinito*.

O que está descrito acima é uma nova definição, a definição de infinitésimo: vale a pena destacar a essência desse conceito dizendo que para *1/n* ser infinitésimo é necessário que haja valores de $\frac{1}{n}$ na *vizinhança* de zero, mas essa condição não é suficiente, pois $\frac{1}{n}$ só será infinitésimo quando se consideram sucessivamente valores seus tão próximos de zero quanto se queira. Assumindo-se os valores de *n,* cada vez maiores está se dizendo que $\frac{1}{n}$ está ficando cada vez menor ou tendendo para zero. É interessante ressaltar que pode existir um outro caso, em que uma função $\frac{1}{n}$, se *n* não tende para o infinito, $\frac{1}{n}$ não *tende para* zero, então, neste caso especifico, $\frac{1}{n}$ não seria infinitésimo.

Uma vizinhança não é um segmento, mas sim uma variável, cujo domínio é constituído por uma infinidade de segmentos onde há sempre segmentos de amplitude inferior a qualquer número positivo.

> “ *o conceito geométrico de vizinhança corresponde portanto ao conceito analítico de infinitésimo e, por meio deste, podemos estudar o que se passa na vizinhança de pontos, isto é, ver como joga, no fenômeno a estudar, a interdependência dum ponto com os seus vizinhos; então não se pode esquecer que um infinitésimo não é um número, é uma variável* (Caraça, 2000, p.207).

A variável *1/n* foi designada por **infinitésimo principal,** quando *n* tende para infinito, porém se existir uma outra função de *n* que tenha o mesmo comportamento do infinitésimo principal, esta também é um infinitésimo, como por exemplo, $f(n)=\frac{1}{2^n}$. Essa última função citada é muito importante nessa apresentação porque se trata da representação matemática que permitirá uma análise do movimento que acontece no paradoxo de Zenão utilizando-se dessa nova linguagem.

Essas funções infinitesimais que transformam um número natural em um número Real são analisadas como sucessões que podem ser enumeradas. Tendo-se, por exemplo, $f(n)=\frac{1}{2^n}$ ao número Natural *1,* quer dizer para *n=1,* tem-se $f(n)=\frac{1}{2}$ que corresponde ao primeiro termo desta sucessão designado por a_1, para *n*=*2*, tem-se $f(n)=\frac{1}{4}$ que representará o segundo termo dessa sucessão, ou seja, a_2. E serão gerados infinitos termos a partir desta relação entre as variáveis *n* e $\frac{1}{n}$.

Ao conjunto dos valores da função $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ dá-se o nome de sucessão numerável, em que a_n é chamado o termo geral da sucessão, e corresponde sucessivamente aos termos, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ..., $\frac{1}{2^n}$,...

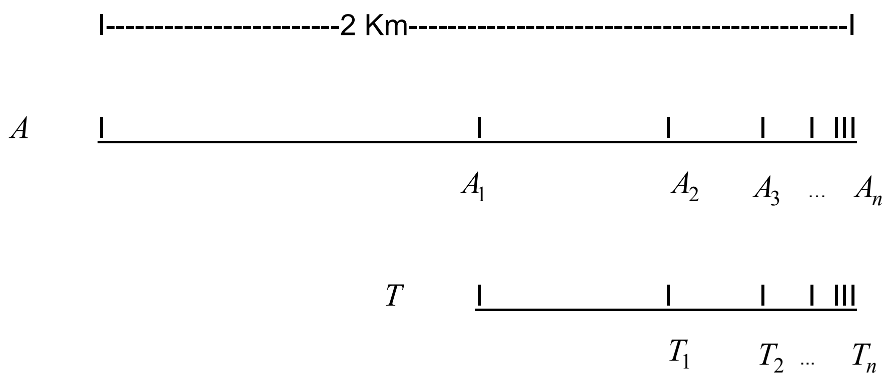
Dá-se, então, o nome de infinitésimo a toda a variável representativa de um conjunto de pontos pertencentes à vizinhança da origem, quando nessa variável considerarmos sucessivamente valores que possam tornar-se cada vez menores.

Usa-se com freqüência para exprimir que uma sucessão numerável $a_n = f(n)$ é infinitésima, a afirmação de que a função $a_n = f(n)$ é vizinha de zero quando *n* é vizinho de infinito.

Depois da criação desse conceito de infinitésimo que, tenta responder à característica do fenômeno do movimento, fica explicitado que, o que passa em um ponto só pode ser compreendido em interdependência com o que se passa em pontos vizinhos. Baseado diretamente nesse conceito, estabelece-se agora o conceito de limite. Diz-se que a_n tem por limite *L* se a_n é vizinho de *L* quando *n* é vizinho de infinito. No caso da sucessão numerável ser infinitésimo, o limite é zero.

Esta nova via aberta pelo conceito de limite permite analisar dificuldades antigas, recordando-se a argumentação de Zenão de Eléa a respeito da compreensão do movimento, exposta anteriormente. Que faz Zenão, no seu argumento Aquiles e a Tartaruga, senão construir duas sucessões de posições sucessivas de A e T (figura 1) e contemplando-as em atitude estática, nota que a distância A_nT_n nunca é nula, então, fica incompreensível compreender como Aquiles pode alcançar a Tartaruga.

figura 1



O matemático moderno de posse da operação de passagem ao limite, no estudo do deslocamento – sabe que o fenômeno só pode ser compreendido em interdependência com os estados vizinhos. Determinando, portanto, o resultado dessa interdependência: chamando-se *d* a distância entre A_1T_1 que representa o avanço inicial de T sobre A, as distâncias dos dois móveis nessas sucessões são $d, \frac{d}{2}, \frac{d}{4}, \frac{d}{8}, \ldots \frac{d}{2^n} \ldots$ e como limite dessa sucessão numerável tem-se que o limite de $\frac{d}{2^n}$ com *n* indo para o infinito é zero. Então o pensamento estático, de uma concepção dominada pela imobilidade, sobre o problema, não fora capaz de integrar o movimento em seu modelo de mundo.

O pensamento matemático moderno, adotando uma relação dinâmica com relação ao conceito de infinito, torna-o elemento de construção, obtém o resultado que a experiência confirma e constrói o instrumento matemático que permite integrar o movimento no mundo da continuidade. (Caraça, 2000, p.236).

O método das primeiras e últimas razões, como Newton chamou o método dos limites, nasceu, também, em um ambiente de controvérsia a respeito de um método anterior, o método dos indivisíveis. Essa tempestade durou todo o século XVIII até quase o final do século XIX.

A operação de passagem ao limite permite interpretar matematicamente o encontro dos dois móveis postos no argumento de Zenão. Mas para obter o ponto em que o encontro se realizaria, tem se desenvolvido o estudo das séries infinitas, esse instrumento matemático que abre as portas para um estudo mais detalhado do infinito em matemática e se caracteriza por ser uma soma de espécie nova. Pode-se citar como um de seus mais relevantes aspectos, o fato de não ser uma estrutura que acata as propriedades associativas e comutativas, como nas entidades finitas.

Uma função pode ser analisada matematicamente em seus infinitos valores e será caracterizada pelo fato de ter uma soma ou não em seu limite no infinito.

Chama-se série a entidade analítica, $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...,$ em que figura uma infinidade de termos ligados pelo sinal de adição "$+$"; ao termo a_n chama-se termo geral da série. A análise da soma de espécie nova é feita sobre o conceito de convergência, que em sua completude foge ao objetivo do presente trabalho.

Mas, considerando-se uma sucessão numerável, chamada sucessão definidora da série, se a sucessão tiver um limite finito, a série diz-se convergente. Em outras palavras, a *soma* converge para um limite.

Voltando ao exemplo de *Aquiles* quando ocupa a posição A_n a soma dos espaços é $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}}$, ou seja, por se tratar da soma dos termos de uma progressão geométrica de razão ½ ,

$$S_n = \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} = 2$$

Então a soma dos espaços andados por *A* até o ponto de encontro com *T* obter-se-á agora pela operação de passagem ao limite a partir de S_n e ter-se-á:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} 2 - \frac{1}{2^{n-2}} = 2 - 0$$

Esse resultado é possível utilizando-se a definição do infinitésimo $\frac{1}{2^{n-2}}$, que tende para zero, quando *n* tende para o infinito. Assim os dois móveis se encontrariam na distância *2*, a partir do ponto de onde partiu *A*. Resultado que a experiência confirma.

É importante também, considerar a entidade analítica: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$, que ao exercer a passagem ao limite, como indicada anteriormente, tem-se a noção de que essa entidade se trata de uma soma, por uma recorrência à linguagem, pois, é uma soma, porém, uma soma de uma infinidade de parcelas, estabelece-se aqui, um outro tipo de igualdade, uma igualdade no infinito.

"A importância desse método é tal que todas as vezes que, no estudo de um fenômeno de qualquer natureza – físico, biológico, econômico, geométrico,- para a

determinação quantitativa dum seu estado nos apareça como indispensável o considerar a interdependência desse estado com os estados vizinhos, essa determinação far-se–á por meio de um limite – limite que é a resultante da infinidade de possibilidades dos estados vizinhos."(Caraça ,2002, p.251)

Essa forma de analisar o movimento conduziu ao conceito de derivada, inaugurando uma nova fase na descrição dos fenômenos de maneira geral, e em particular da velocidade instantânea pretendida por Galileu[4] . Esse novo conceito que traz na essência o conceito de infinitésimo é a base fundamental para análise de funções, e por conseqüência para todo cálculo diferencial e integral.

Diante dessa nova linguagem matemática, muitos antigos e novos problemas são superados. Porém, a nova teoria do cálculo também gera novos problemas[5] para a matemática, apontando para essa visão dinâmica implícita ao desenvolvimento da matemática e de toda ciência, construindo soluções assim como também, novos desafios.

A evolução conceitual no ocidente proporcionou, durante o século XIX, um grande salto no desenvolvimento científico, como por exemplo, o aperfeiçoamento no campo da filosofia, e do pensamento dialético: a dialética idealista, desenvolvida por Hegel, e a dialética materialista desenvolvida por Marx.

Marx estava sintonizado com todo o debate científico do período e, também, com toda a luta da sociedade. Buscou generalizar as categorias e leis do método dialético para que pudesse ser aplicado tanto às ciências da natureza, quanto às ciências humanas e sociais.

Marx e Engels resgatam a formação da categoria movimento da filosofia grega pré-socrática. O desenvolvimento da teoria do movimento e correlação de Aristóteles; o materialismo mecanicista dos séculos XVII e XVIII, como em Descartes. Também resgata a categoria de Kant e Hegel, este último que aprofundou o estudo das leis do movimento na perspectiva idealista.

A perspectiva marxista coloca o movimento como um atributo da matéria, sua propriedade fundamental, e concebe que "*a matéria sem o movimento é tão inconcebível quanto o movimento sem matéria"* (Engels,p.92 in Cheptulin, 1982, p.163)

Entre outros princípios fundamentais, a relação é central no método dialético, (Hegel, 1843, p.267, in Cheptulin, 1982, p.179). O materialismo dialético reafirma essa concepção, e deduz a correlação da realidade objetiva, ou seja, a relação é uma forma universal do ser, própria a todos os fenômenos da natureza (Cheptulin, p.180)

[4] Vide apêndice 2.

[5] Eves,H. 1997. "os paradoxos do cálculo"p.643.

retornando à tradição de Aristóteles, afirma que tudo o que existe encontra-se em relação, e essa relação é a verdade de toda existência.

Para essa corrente filosófica a matéria é infinita, embora ela só exista mediante formações materiais limitadas no espaço e no tempo. Estes são atributos intrínsecos da matéria, e estão organicamente ligados ao movimento, que é propriedade fundamental da matéria, tornando-se depois, princípio fundamental do método dialético. Portanto, tempo e espaço, também, são infinitos, e assim definidos.“*A extensão das formações materiais particulares e a relação entre cada uma delas com as outras formações materiais que a rodeiam é o espaço. (...) a duração da existência das formações materiais e a relação de cada uma delas com as formações anteriores e posteriores é o tempo* “(Cheptulim, 1982, p.181)

2 - Processos Cognitivos e Educação

O desenvolvimento da cultura ocidental traçado desde a história antiga, tradição greco-romana, é um processo de transformação visível que não perdeu o impulso, ao contrário, parece cada vez mais acelerado, especialmente nos últimos cinco séculos.

Nessas sociedades percebe-se a adoção de um cientificismo que serve de referencial ao desenvolvimento, seja como foi no mundo estático de Platão, seja como na atualidade que adota paradigmas dos cientistas renascentistas, com a consciência de um mundo em movimento. Porém, nas sociedades atuais há um volume de conhecimento científico muito vasto e ao mesmo tempo compartimentado em suas respectivas áreas de estudo, e por isso mesmo estão sub-utilizados.

2.1 – As metáforas conceituais

A linguagem matemática tem sido criada e usada por seres humanos durante todo o processo de desenvolvimento da humanidade. A matemática torna-se, então, assunto de interesse para as ciências cognitivas que pretendem mapear como idéias matemáticas são analisadas sob uma perspectiva cognitiva.

Inicialmente, o maior interesse está em saber como mecanismos cognitivos humanos são empregados na criação e compreensão de idéias matemáticas. Em análise das idéias matemáticas, Lakoff e Nüñez (2000) propõem que a matemática na mente humana baseia-se no uso de metáforas conceituais, e que estas são parte da própria matemática.

Avanços na Psicologia Cognitiva levam à compreensão de que muitos pensamentos são inconscientes, e atribui-se, então, existência a um inconsciente cognitivo(Lakoff & Nüñez, 2000). A maioria dos estudos nessa ciência concorda que seres humanos conceituam abstratamente a partir de termos concretos. E, para isso, as idéias e os modelos usados inicialmente, e que dão origem ao raciocínio, são manifestados a partir do sistema sensorial conduzindo às metáforas conceituais, mecanismos pelos quais o abstrato é formulado, e então, há a formulação do abstrato em termos do concreto.

Dessa forma, diz-se que o pensamento matemático faz uso de metáforas conceituais. Inicialmente, quando conceitualiza quantidade de objeto como números e de uma forma mais complexa, por exemplo, quando conceitua números como conjuntos. Não é necessário conceituar números como conjuntos, já que a aritmética existiu dois mil e quinhentos anos sem essa metáfora. Porém, conceituar números como conjunto tem mostrado ser uma metáfora conceitual bem compreendida para tratar algumas idéias matemáticas. Observa-se, então, que metáforas são uma parte essencial no desenvolvimento do pensamento matemático.

O reconhecimento das metáforas em matemática é muito importante para o desenvolvimento do pensamento. Para a psicologia cognitiva, porque abre caminhos que indicam como se desenvolve o pensamento matemático, e, para a educação matemática, ratificando a importância da linguagem. Mas, principalmente para a matemática por que muitos problemas da matemática, que são metáforas conceituais, são tomados como paradoxos quando são compreendidos literalmente. Mas, quando o verdadeiro caráter metafórico da matemática se revela, muitas confusões e paradoxos desaparecem.

As metáforas são partes essenciais do pensamento matemático, e não são simplesmente um fenômeno lingüístico ou mecanismo cognitivo da fala, são mecanismos cognitivos pertencentes ao domínio do pensamento; um mecanismo neural que permite que uma estrutura de um domínio conceitual, por exemplo, a geometria, ofereça os elementos para que se possa passar a raciocinar sobre um outro domínio conceitual, por exemplo, a aritmética.

Nesse panorama surge o interesse da psicologia cognitiva por um conceito peculiar, proveniente da atividade mental humana, o conceito de infinito. Esse interesse está justificado, segundo Nüñez (1994), pelo menos por duas razões: por fazer um importante papel em diferentes disciplinas do conhecimento humano, como a matemática, a filosofia, a economia, ciências sociais etc, e porque é uma rica e representativa concepção da dimensão da atividade mental humana não baseada em experiência direta.

O interesse das ciências cognitivas também está em compreender o que caracteriza esse conceito, implícito em várias noções como: conjunto infinito, pontos no infinito, *coisas* infinitas.

Lakoff & Nüñez (2000) fazem uma análise do que gera uma idéia de infinito, do que gera uma idéia matemática de infinito, e o que as várias formas de representar o infinito têm a ver com a outra. Essa preocupação leva esses autores a tentar elucidar como coisas infinitamente grandes são conceituadas em relação às coisas infinitamente pequenas, e vive-versa. Eles propõem, então, que idéias matemáticas são incorporações trazidas da mente através de uma linguagem que lhes atribui existência, e tentam entender como se incorpora a idéia de infinito e quais metáforas as descrevem inicialmente.

Nessa busca, algumas descrições tornam-se relevantes como, por exemplo, quando se observa que algumas ações são inerentemente iterativas, como batidas do coração e respiração, e outras, inerentemente contínuas, como movimentos. Esses autores percebem que, fora da matemática, um processo é visto como infinito se é contínuo e iterativo, ou melhor, "*processos contínuos são conceituados como se fossem processos iterativos* " (Lakoff & Nüñez, 2000, p.156), isto é, são processos que se repetem continuamente.

As ações que descrevem processos contínuos e que são representadas por sentenças do tipo "a águia voou, voou, voou" podem ser caracterizadas, em termos cognitivos, por uma metáfora de um processo contínuo, indefinido. Essa metáfora é importante para a conceituação do infinito. Ela é usada na conceituação em matemática, para descrever processos contínuos que apresentam uma iteração (quadro2). Essa iteração é um passo a passo, no qual cada passo é discreto e mínimo. Comumente essa idéia é aplicada em processos infinitamente contínuos.

Lakoff & Nünez (2000) concluem, concebendo o conceito de infinito como sendo constituído por metáforas que descrevem processos iterativos contínuos com uma quantidade indefinida de iterações, e denomina a descrição desses processos como sendo a Metáfora Básica do Infinito, ou MBI.

A história da matemática e estudos sobre desenvolvimento do pensamento matemático e desenvolvimento cognitivo mostra que a compreensão sobre o infinito no pequeno tem sido muito mais controversa do que o infinito no grande.

Algumas primeiras concepções sobre o infinitamente pequeno, também surgem em Aristóteles, que o classificou de "infinito potencial", e foram exemplificadas na possibilidade de existência de um polígono regular, sempre com um número maior de lados, ou ainda, na possibilidade de escrever mais e mais *casas* decimais para representar "raiz quadrada de dois".

A idéia de polígonos com infinitos lados, e a idéia de escrever um número que representasse $\sqrt{2}$ com infinitas casas decimais, porém representável geometricamente, também, assim como o paradoxo de Zenâo, provocaram embaraço nessas primeiras tentativas de compreensão, e continuaria assim, sem as teorias matemáticas mais recentes, como a teoria dos limites. Sabe-se, hoje, que aquele polígono idealizado, com uma quantidade de lados que *tende ao infinito*, tende a um círculo; e que $\sqrt{2}$ sempre é menor que 1,43, ou seja, esse seria um limite superior. Porém, também essas questões antigas podem ser vistas como portadoras da idéia atual do infinito no pequeno. Pode-se perceber que a diferença entre as abordagens está na elaboração de uma linguagem que descreve essas situações, mais apropriadamente.

O infinito atual descrito em Lakoff e Nüñez(2000) como sendo o infinito da matemática moderna está exemplificado nas idéias de conjunto infinito, e pontos no infinito e pode ser percebido como, respectivamente, construtivo de processos como soma de seqüências infinitas, indução matemática e limites no infinito. Essas idéias são citadas por esses mesmos autores como exemplos de metáforas básicas do infinito.

Identifica-se nas entidades, expressões, percepções que iniciam a idéia de infinito, aspectos que caracterizam instâncias para uma MBI ou uma MBI claramente. Esses aspectos, que devem estar presentes são observados nas instâncias e nas metáforas básicas do infinito. As descrições de metáfora básica do infinito feita por Lakoff & Nüñes, de uma forma simplificada, são atribuídas a processos que possuem: um estado inicial, um processo iterativo com um número não especificado de iterações, e um estado resultante depois de cada iteração. As metáforas matemáticas que descrevem o infinito podem ser uma instância de Metáfora Básica do infinito ou, uma MBI com todos os estágios, dependendo da forma como são abordadas.

A percepção e descrição de um processo iterativo contínuo que apresenta um estado resultante final, não infinito, caracteriza uma instância de metáfora básica de infinito. E aquelas em que os estados finais fossem um estado de infinito, ou seja, a percepção de um processo iterativo contínuo sem um estado final, seria uma Metáfora Básica do Infinito. Essa diferença está, principalmente, na concepção que se adota para o conceito de infinito ser de uma forma estática ou dinâmica.

> "*Acredita-se que todas as noções de infinito em matemática podem ser vistas como casos especiais da metáfora básica do infinito*" (Lakoff & Nunez, 2000, p.161)

Então, as concepções de infinito matemático podem ser caracterizadas como casos especiais de um mecanismo geral que é a Metáfora Básica do Infinito: por exemplo, a metáfora da construção dos números naturais como seqüência, as metáforas presentes nos processos de demonstração por indução matemática, a metáfora de construção do limite de uma seqüência infinita, entre outras, presentes em todo pensamento matemático moderno.

É fácil observar que atualmente encontram-se na linguagem matemática os signos e as idéias, que melhor expressam ou representam a percepção de processos iterativos contínuos, ou seja, as Metáforas Básicas do Infinito. Essa percepção de processos iterativos é fundamental para a construção de uma visão dinâmica de mundo. Através da observação dos processos, dos simples aos complexos, pode-se perceber as relações, e assim as possibilidades dos estados de infinito, de movimento.

Na tentativa de esquematizar, Lakoff e Nüñez apresentam quadros descritivos que estabelecem estágios na percepção desses processos iterativos com quantidade indefinida de iterações, que caracterizam a metáfora básica do infinito. (Quadro 1)

A Metáfora Básica do Infinito (Quadro 1)

Domínio de origem	*Domínio Alvo*
Processos Iterativos	*Processo Iterativo que vai sem parar*
O início de um estado	*O início de um estado*
Um estado resultante do estágio inicial do processo	*O estado resultante do estágio inicial do processo*
O processo: de um dado estado intermediário produz-se o próximo estado	*O processo: de um dado estado intermediário produz-se o próximo estado*
O resultado intermediário depois deste processo de iteração	*O resultado intermediário depois deste processo de iteração*
O estado resultante final	*O infinito atual*
Implicação final: o estado resultante Final é único e segue todo estado sem fim	*O estado resultante final é único e segue todo estado sem fim*

(Lafoff & Nünez, 2000, p.159)

Essa metáfora básica do infinito está em toda a matemática. As semelhanças são como protótipos. Esses protótipos caracterizam-se por apresentarem praticamente os mesmos estágios, com alterações, apenas nas metáforas que as representam. Esses estágios são percebidos a partir de situações mais gerais, como acima, descritos como processos, que não são exatamente uma definição matemática formalizada. Porém, são encontradas nas definições matemáticas mais avançadas em linguagem atual, que descrevem esses processos iterativos contínuos sem fim. Vale a pena observar a Metáfora Básica do Infinito para enumeração. (Quadro 2).

Quadro 2

Metáfora Básica da Enumeração

Domínio Alvo *Processos Iterativos que vão sem parar*	-	*Caso Especial* *As seqüências sem fim de inteiros usados para enumeração*
O início de um estado		*Nenhum inteiro*
Um estado resultante do estágio inicial do processo		*o inteiro 1*
O processo: de um dado estado intermediário anterior produz-se o próximo estado		*O processo: dado o inteiro n – 1 forma-se o próximo, o inteiro maior n*
O resultado intermediário depois deste processo de iteração		*n > n -1*
O estado resultante final o infinito atual		*o " inteiro" ∞ (lê-se "infinito)*
Implicação final: o estado resultante final é único e segue todo estado sem fim		*o "' inteiro" ∞ é único e maior do que todo outro inteiro.*

(Lakoff & Nünez, 2000, p.165-166)

As metáforas básicas do infinito, evidentemente, manifestam-se na construção das metáforas que descrevem os processos de indução matemática (Quadro 3). Essa idéia se diferencia da metáfora da enumeração por construir uma idéia de infinito com um número *n*, finito de passos.

Quadro 3

Metáfora Básica da Indução Matemática

Domínio Alvo - *Processo Iterativos que vão sem parar*	*Caso especial* *indução matemática*
O início de um estado (0)	*A declaração s(x), aonde x varia sobre o conjunto dos números naturais*
Estado (1) resultado do estágio inicial do processo	*S é verdade para os membros de (1) - o conjunto contendo o número 1*
O processo: de um estado intermediário anterior (n-1) produz-se o próximo estado (n)	*Dada a verdade de S para os membros do conjunto { 1,.., n-1} estabelece-se a verdade de S para os membros de {1,...,n}*
O resultado intermediário depois deste processo de iteração (a relação entre n e n-1)	*S é verdade para os membros do conjunto { 1,...,n}*
"O estado resultante final" (o infinito atual "∞")	*S é verdade para todos os membros do conjunto de número natural*
Implicação final: o estado resultante final ("∞") é único e segue todo estado sem fim	*o conjunto dos números naturais para o qual S é verdadeiro é único e inclui todos os números naturais finitos.*

(LaKoff & Nüñez, 2000, p.176)

Lakoff & Nünez (2000) esclarecem que a indução matemática *pode* ser vista como um caso especial de metáfora básica de infinito. Essa construção irá se caracterizar infinita ou finita a depender de qual processo iterativo contínuo está se construindo. Operações que geram conjuntos infinitos, fazem uso implícito de metáfora básica do infinito. Por exemplo, começando com o conjunto contendo o inteiro *1*, estado inicial, e a operação de adição. Então, adicionando *1* a si próprio, que é o processo iterativo, no primeiro estágio, gera-se o *2*, que não está no conjunto original. Isto significa que o conjunto original não estava *fechado* sob a operação de adição. Estende-se esse conjunto para incluir o *2* no estágio intermediário.

No próximo estágio pode-se executar duas operações de adição, do *1* no *2*, e do *2* no *2*, gerando novos elementos, o *3* e o *4*. Então estende-se o conjunto anterior para incluir o *3* e o *4*, e assim por diante, até a compreensão de um estágio final, sem fim. Essa forma de construção pode estar definindo um conjunto de extensão infinita.

Encontrar-se-ão metáforas básicas do infinito, em todo pensamento matemático, embora, como será visto em seção posterior, estas não recebam o devido destaque. Nos casos acima, verificou-se a presença de MBI em processos de infinito no grande, mas, na linguagem matemática atual, essa descrição de infinito, com esse processo de movimento, como aquele que levou a construção do infinitésimo *1/n,* conduz também a noções do infinito no pequeno, como apresentado anteriormente na linguagem matemática que se desenvolveu para descrição de fenômenos similares ao paradoxo de Zenão.

Essa linguagem que descreve o paradoxo, inclui a noção de limites, e por isso vale a pena observar com um interesse específico, a versão da Metáfora Básica do Infinito para soma de seqüências infinitas com limite L, (Quadro 4).

Quadro 4

Metáfora Básica Para Seqüências Infinitas com Limite

Domínio Alvo	-	**Caso especial**
Processo Iterativos que vão sem parar		*Seqüência infinita com limite L*
O início de um estado (0)		*A estrutura e limite da seqüência*
Estado resultante do estágio inicial do processo		$S_1 = 0$ *conjunto contendo o primeiro termo da seqüência.*
O processo: de um estado intermediário anterior (n-1) produz-se o próximo estado (n)		*de* S_{n-1} *contendo os n-1 primeiros termos da seqüência, forma* S_n *contendo os primeiros n termos da seqüência.*
O resultado intermediário depois deste processo de iteração.		*O conjunto* S_n *e o conjunto* R_n *contendo todo número real positivo* r *tal que* $0 < r < / X_n - L /$
"O estado resultante final"		*Não há número real positivo r tal que* $0 < r < / X_n - L /$ *para todo* x_i *em* S_n. L *é o limite da seqüência.*
Implicação final: o estado resultante final ("∞") é único e segue todo estado sem fim		*L é o único limite da seqüência*

(Lakoff & Nüñez, 2000, p.190)

É interessante observar a declaração do quadro 4: "*Não há número real positivo r tal que* $0 < r < / X_n - L /$ " afirmando que não existe número real menor do que a diferença entre o valor do infinitésimo e o limite. Por exemplo, se o infinitésimo é a função que descreve o paradoxo de Zenão, $f(n)=\frac{1}{2^n}$, com *n indo* para o infinito, e o limite é zero, essa variável $\frac{1}{2^n}$, será tão próxima de *0* quanto se queira, sem puder ser *igual a 0.* Ou seja, dado um número real r, o menor que se queira imaginar, a variável $\frac{1}{2^n}$, poderá ser ainda menor, por que o n *está indo* para o infinito.

2.2 Uma teoria dialética sobre os conceitos

A compreensão da natureza dos conceitos pode ser ampliada se for analisada sob a ótica da teoria dialética dos conceitos. A “tradição roschiana”, como é conhecida essa teoria, investigou a história da compreensão dos conceitos nas ciências cognitivas, e concluiu que esta se compõe de três grandes períodos: a concepção clássica, desde Aristóteles até princípios da década de 1970 do séc. XX; depois, o período da concepção prototípica até 1985; e atualmente a concepção teórica, que predomina até os dias de hoje (Rosch apud Abrantes, 1994).

As concepções clássicas e prototípicas atribuem a condição de que uma entidade deve ter certas propriedades para ser classificada como determinado conceito. A diferença entre as concepções clássicas e prototípicas consiste em que, na concepção clássica as propriedades que constituem um conceito são individualmente necessárias e conjuntamente suficientes, quer dizer, que uma entidade deve possuir cada uma das propriedades, e que a posse de todas essas propriedades é o suficiente para que o objeto se enquadre no conceito.

Na concepção prototípica, as propriedades que caracterizam um conceito constituem seu protótipo. Trata-se de uma concepção mais complexa, pois avalia a *semelhança* entre uma representação mental e o seu protótipo. Admite, então, várias versões, a maneira pela qual é avaliado o grau de semelhança em questão. A forma mais simples de pensar é a atribuição de um grau de semelhança, em função do número de propriedades que a entidade compartilha com o protótipo do conceito.

Uma outra versão da compreensão da concepção prototípica é que a semelhança não depende apenas do número de propriedades, mas do peso que é atribuído a cada uma delas.

A transição da concepção clássica para a concepção prototípica ocorreu a partir da constatação de que, para uma grande parte dos conceitos não existem definições satisfatórias em termos de propriedades necessárias e suficientes.

No período mais recente a concepção teórica Roscheana (Rosch apud Abrantes 1994) afirma que um conceito é constituído não apenas de propriedades, mas, também, de relações com outros conceitos.

Essas tendências podem ser compreendidas no contexto da lógica que as fundamenta. A concepção clássica resultava de um ponto de vista normativo, uma lógica normativa, uma concepção sobre como os conceitos devem ser, não como de fato são.

Muitos psicólogos pré-roscheanos transplantaram de maneira acrítica, a concepção normativa de conceitos, formada na lógica e na filosofia. E para esses, a visão normativa constituiu-se, então, um obstáculo epistemológico que os impediu de formar uma idéia mais objetiva de como são os conceitos.

Atualmente, a natureza normativa da lógica e da filosofia não pode ser atribuída à psicologia, pois essa se coloca como uma ciência, devendo ter um caráter descritivo, uma lógica descritiva. A abordagem Roscheana instaurou uma maneira descritiva de ver os conceitos. Entretanto, analisando-a de forma mais abrangente, ela

> "*é considerada não como excluindo, mas como incorporando a prototípica, ou seja, os conceitos apresentariam tanto aspectos teóricos quanto prototípicos, sendo todos contemplados no modelo completo*" (Abrantes, 1994, P.50)

Essa maneira descritiva de ver os conceitos é uma ponte que faltava para restabelecer o diálogo entre as formas tradicionais de se olhar para os conceitos matemáticos com uma concepção clássica, em que algumas propriedades são suficientes. O conceito de infinito, presente em todo pensamento matemático vem mostrar em sua própria construção histórica que não é suficiente que lhe sejam atribuídas propriedades para estar descrito. Apropriando-se da linguagem matemática atual fica evidente que o conceito de infinito e mais especificamente o do infinitamente pequeno é constituído de relações construídas passo a passo, não lhes cabendo, pois, apenas um tratamento clássico.

2.3 A importância dos signos

Buscando compreender como potencializar formas de construção de conceitos, deve-se estar atento às construções teóricas que podem servir de referencial. Vygotsky distingue dois elementos básicos de mediação na relação do sujeito com a realidade social: o instrumento e o signo. Porém, entre o nível inicial e os níveis superiores das formas mediadas de comportamento, existem muitos sistemas psicológicos de transição, esses sistemas estão entre o biologicamente dado e o culturalmente adquirido.

O biológico anuncia a maturação, enquanto o instrumento e o signo, ambos produtos históricos e culturais do ser humano, regulam as ações sobre os objetos, e sobre o psiquismo.

> "*A aplicação de meios auxiliares e a passagem à atividade mediadora reconstrói pela raiz toda a operação psíquica, à semelhança de como a aplicação das ferramentas modifica a atividade das funções psíquicas*".(Vygotsky, 1995, pp. 93-94)

Esse aspecto das operações psicológicas constitui-se fundamental, mas seria um erro acreditar que as operações mentais superiores surgem como resultado de uma lógica pura, elas não são inventadas ou descobertas de forma súbita. As operações com signos aparecem como o resultado de um processo prolongado e complexo, resultado de transformações qualitativas de natureza histórica. Dentro desse processo geral de desenvolvimento, evidenciam-se as duas linhas, qualitativamente diferentes de desenvolvimento;

> "*Diferindo quanto à origem: de um lado, os processos elementares, que são de origem biológica; de outro, as funções psicológicas superiores de origem sócio cultural [...] A potencialidade para as operações complexas com signos já existe nos estágios mais precoces do desenvolvimento infantil*"(Vygotsky, 1998, p.61).

Vygotsky propõe então, que a linguagem pode ser um paradigma para o desenvolvimento. Entende a linguagem como um sistema simbólico, elaborado historicamente em todas as sociedades e grupos sociais, que organiza os signos em estruturas complexas, e determina papel imprescindível na formação das características psicológicas humanas. Esse sistema simbólico complexo imprime, também, mudanças nos processos psíquicos dos sujeitos, como nos processos de abstração e generalização possibilitados pela linguagem.

É de fundamental importância o destaque desse aspecto do desenvolvimento mediado por signos, pois, são os instrumentos necessários na implementação de uma linguagem que permite elaborações mais avançadas. Isto descreve um panorama de possibilidades pensando-se na implementação dos signos mediada por uma estrutura.

“Na história da linguagem e na história da lógica formaram-se meios objetivos que automaticamente transmitem ao indivíduo a experiência das gerações, livrando-o da necessidade de obter informação da prática individual imediata e permitindo-lhe obter o juízo correspondente por via teórica, lógica” (Luria, 1979, p.105).

Para se compreender o desenvolvimento do pensamento científico remete-se a questões tratadas por Vygotsky, que se preocupou em elaborar uma teoria que trata da construção dos conceitos. Ele observou como os conceitos espontâneos podem ter um importante papel na construção dos conceitos científicos.

“[...] o desenvolvimento dos conceitos científicos segue um caminho particular em comparação com o desenvolvimento dos conceitos cotidianos. Este caminho está condicionado pelo fato de que a definição verbal primária constitui o aspecto principal de seu desenvolvimento, que nas condições de um sistema desce em direção ao concreto, ao fenômeno, enquanto que a tendência de desenvolvimento dos conceitos cotidianos se produz fora de um sistema determinado e ascende até as generalizações. [...] Dentro de um mesmo nível de desenvolvimento em uma mesma criança, tropeçamos com distintos elementos fortes e débeis nos conceitos cotidianos e científicos [...]”(Vygotsky, 1993, p.183).

Vygotsky preocupou-se com uma teoria sobre o desenvolvimento cognitivo e em suas análises encontra-se a relação entre pensamento e linguagem na ontogênese que propõe que a palavra nem produz, nem expressa o pensamento, ela o media, e isto quer dizer que o ser humano pensa *com* a palavra.

A palavra não se relaciona a um único objeto, mas a um grupo inteiro ou classe de objetos. Logo, cada palavra é uma generalização encoberta. Do ponto de vista psicológico, o significado da palavra é, antes e sobretudo, uma generalização. Não é difícil verificar que a generalização é um ato verbal de pensamento; sua reflexão da realidade difere radicalmente na percepção ou sensação imediata, pois,

[...] *a realidade é refletida na consciência de um modo qualitativamente diferente do pensamento do que o é na sensação imediata. Essa diferença qualitativa é, principalmente, função de uma reflexão generalizada da realidade* (Vygotsky, 1987, p.47)

Uma ilustração dessa diferença está explicitada em uma situação experimental conhecida, quando Pavlov condicionou cães a salivar diante de um estímulo formado pela figura de uma elipse e a não fazê-lo diante da figura de um círculo. Os animais distinguiam as figuras até certo ponto, pois à medida que fora diminuída a diferença entre os dois eixos que definem matematicamente a elipse, os animais não conseguiram distinguí-las. No caso de seres humanos se for utilizada apenas a inspeção visual cometem-se os mesmos erros encontrados nas experiências com cães. Porém, se a atenção for voltada para o fato de que todos os pontos dos círculos são eqüidistantes de um único ponto, que é o centro do círculo, será evitado o erro.

Círculos e elipses confundem-se quando no plano exclusivo dos dados sensoriais imediatos, e podem ser nitidamente discriminados quando representados através de uma linguagem, no caso, lógica, racional, isto é, quando mediados pelos dados sensíveis e a linguagem. Círculos e elipses, então, no caso específico, são diferenciados pela linguagem, ou seja, a linguagem matemática.

Esse processo de construção no ser humano acontece na interação do indivíduo com o meio ambiente, uma interação em torno da percepção do contexto cultural que vai sendo elaborada em uma relação de “fora para dentro”, e, também, na ideação prévia, na fala interior, no sentido de “dentro para fora”, esta é uma relação de “mão dupla” que favorece a constantes elaborações e reelaborações dos conhecimentos adquiridos. Essa interação dinâmica desenvolve características que não estão presentes desde o nascimento do indivíduo, mas que se desenvolvem e aprimoram por meio de ações explícitas de intervenção do sujeito na realidade social, em um movimento contínuo, pois, “*Quanto mais progride a humanidade, mais rica é a prática sócio-histórica acumulada por ela*, [...]” (Leontiev, 1978, p.273).

Piaget, por sua vez, também participou com estudos a respeito do desenvolvimento social do indivíduo, tratando-o como questão fundamental para suas análises. Para isso, elaborou seu conceito de totalidade em uma sociedade. Piaget sugere um conceito também atribuído a Marx (Freitag, 1985) e define totalidade como um sistema de interdependência entre os indivíduos, modificando-os através de uma dinâmica, em suas estruturas profundas, na medida em que a própria estrutura do sistema vai se modificando. Sob esse aspecto, a totalidade seria um todo composto de uma estrutura de relações, analogamente às estruturas psíquicas ou físicas, em que as partes componentes se relacionam, constituindo uma estrutura.

Piaget compreende que o todo social não é nem uma reunião de elementos anteriores, nem uma entidade nova, mas um sistema de relações onde cada um gera, produz, enquanto relação mesma, uma transformação dos termos que une (Freitag, 1985). Esse pesquisador propõe que não pode haver conflitos entre a explicação sociológica e a explicação psicológica, pois, elas contribuem, uma e outra, para esclarecer dois aspectos complementares: individual e interindividual, de cada conduta do ser humano em sociedade.

Nessa perspectiva releva-se a dimensão social do desenvolvimento, em que o pressuposto básico é a idéia de que o ser humano constitui-se, enquanto tal, na sua relação com o outro social.

Essas abordagens, piagetiana e vigotskyana, levam à compreensão de que, fundamentalmente, as funções psicológicas superiores são construídas ao longo da história social do ser humano. Nesse processo consideram-se dois aspectos que se complementam: o processo de representação mental, e o fato de que os sistemas simbólicos que se interpõem entre sujeito e objeto do conhecimento, têm origem social, pois, é na cultura que o indivíduo encontrará os sistemas simbólicos de representação da realidade e, através deles, um conjunto de significados que fornecem subsídios para construções ordenadas para interpretação do mundo real.

Os métodos de estudo dos conceitos, tradicionalmente, dividem-se em dois grupos: o chamado método de definição, que investiga os conceitos já formados na criança por definição verbal de seus conteúdos, e o segundo grupo abrange os métodos utilizados no estudo da abstração. Esses métodos dizem respeito aos processos *psíquicos* que levam à formação de conceitos. Para Vygotsky a formação de conceitos é um processo orientado para um objetivo, ou seja, uma série de operações que servem de passos em direção a um objeto final, e entende que " *A formação do conceito é um processo criativo e não um processo mecânico, passivo [...]*" (Vygotsky, 1998, p.67).

Um dos papéis da educação escolar básica é promover esse desenvolvimento intelectual, alcançando uma síntese que supere tanto a dificuldade de abstração do pensamento cotidiano, quanto o caráter inicialmente verbalista presente nos conceitos científicos. Propõe-se, finalmente, um papel mais amplo para a educação, acreditando que a aprendizagem pode preceder o desenvolvimento cognitivo e estimulá-lo a criar novas estruturas.

> "*... cresce o papel específico da educação, e mais complexa é sua tarefa. Razão por que toda a etapa nova no desenvolvimento da humanidade, bem como no dos diferentes povos, apela forçosamente para uma nova etapa no desenvolvimento da educação: [...] Esta relação entre o progresso histórico e o progresso da educação é tão estreita que se pode, sem risco de errar, julgar o nível geral do desenvolvimento histórico da sociedade pelo nível de desenvolvimento de seu sistema educacional*" (Leontiev, 1978, p.273)

A visão histórico-cultural de Vygotsky entende a cultura como um processo dinâmico, e não como algo pronto e estático ao qual o indivíduo se submete. A cultura é vista como um lugar em que os sujeitos estão em constante movimento de recriação e reinterpretação de informações, conceitos e significados.

Estudos recentes tratam da complementaridade entre a língua materna e a matemática, abordando a especificidade dos dois sistemas, bem como suas similaridades buscando estabelecer suas relações. Machado(1998) afirma que o significado das categorias gramaticais, por exemplo, é o de uma classificação em sentido análogo ao das operações de classificação em matemática.

Uma evidência disso se apresenta no estudo da lógica aristotélica, que se baseava na gramática grega e, em particular, na estrutura de suas frases, bem como a interpretação e tradução pessoal dos que a reproduziram simbolicamente. Isso faz parte de um processo histórico-cultural, construído num conjunto de relações sociais representativas de um dado modo de produção.

Sob uma ótica Roscheana observa-se que os protótipos a se considerar para o conceito de infinito são bastante peculiares, por iniciarem não com o estabelecimento de propriedades, mas com a percepção de processos ou, mais especificamente, de processos iterativos contínuos.

Esse conceito, embora fundamental, não recebe a devida ênfase durante o tempo que deveria ser dedicado a sua construção, seja em matemática ou em qualquer outra disciplina na educação básica. No caso da matemática existe uma linguagem construída, ao longo de muitas etapas, oferecendo seus signos e significados para que sejam compartilhados em todas as disciplinas e através das relações sejam melhoradas as possibilidades de construção do conceito.

2.4 – A matemática como linguagem

Nesse intuito, deve-se apropriar da matemática como linguagem e como sistema de signos para construção de significados. É preciso assumir modelos matemáticos modernos, que permitem construções através de análises a suas representações simbólicas, que permitem comunicar ações a partir das relações aprendidas culturalmente. A matemática deve se constituir linguagem fundamental, considerada dentro dessas relações que definirão a formação de conceitos.

...*"é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de idéias e permite modelar a realidade e interpretá-la."* (PCN's,1999, p. 82)

Tem-se nas formas de representação do pensamento matemático atual, uma linguagem de muitas possibilidades, principalmente se há a compreensão da visão dialética do desenvolvimento cognitivo nas sociedades humanas.

Para Vygotsky, a linguagem é fundamental na constituição da cognição humana; ele afirma que o processo psicológico tem a ver com a semântica, tem a ver com o significado, tem a ver com a linguagem. Afirma, também, que a percepção do mundo é mediada pela linguagem.

Tem-se na construção de números naturais, a mais simples representação matemática de uma metáfora básica do infinito, mesmo observando-se a sua exposição em sua linguagem mais formal, como os axiomas de Peano[6]. Encontra-se em uma construção por indução matemática, os estágios de metáfora básica do infinito.

Outras instâncias para a incorporação da metáfora básica do infinito podem ser encontradas em muitas noções em outras ciências. Por exemplo, em relação ao universo, existe uma grande probabilidade de ser infinito, conclusão possível principalmente com as descobertas que surgem a cada momento, a partir das novas tecnologias, mas, por não ser evento certo, pois existe uma margem da probabilidade de não sê-lo, pode ser concebido, também, como muito grande, indefinidamente, mesmo assim constituindo-se instância para a metáfora do infinito.

Argumentos utilizando-se da linguagem matemática aplicada a outros conhecimentos científicos atuais devem ser criados, pois, se modificam a cada dia, e podem constituir significados para a construção de metáfora básica do infinito.

No desenvolvimento da linguagem matemática, mais especificamente na construção dos números racionais, surge uma outra forma de visualizar o infinito e outra pergunta: qual é o menor racional positivo diferente de zero? Para essa compreensão do infinitamente pequeno deve-se iniciar com as medidas dos objetos do conhecimento científico como nanocomputadores, células, átomos, mions, quarks, etc

Nesses exemplos anteriores, o desenvolvimento do conceito de infinito está associado principalmente à relação deste com outros conceitos. Conceitos matemáticos fundamentais devem ser vetores na produção de conhecimento, pois precisa-se das linguagens construídas a partir de uma realidade histórica e social, e da

---

[6] vide apêndice 3.

consciência das funções que desempenham as linguagens no processo de desenvolvimento humano.

> *...“em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática.”* (PCN’s, 1999, p.82)

As linguagens garantem mudanças essenciais nos processos cognitivos, principalmente a função de comunicação entre indivíduos, o que implica preservação, transmissão e assimilação de informações e experiências acumuladas culturalmente pelas sociedades. Então, imprime-se aqui, na íntima relação entre linguagem e pensamento, a perspectiva de ampliação das percepções, concepções das relações nas coisas do mundo. Os seres humanos ao incorporarem linguagens, fruto do desenvolvimento histórico e cientifico, transformam novos instrumentos do pensamento, que podem resultar em outras novas percepções.

Face às tantas possibilidades, há de existir um permanente estado de tentativas de elaborações e reelaborações. E, diante dessa consciência, há uma necessidade da interferência nos processos constituintes do desenvolvimento humano, através, principalmente da Educação, onde se podem caracterizar como essenciais, os conceitos fundamentais do pensamento matemático.

Há que se considerar, inclusive, que os elementos do signo lingüístico não são fixos. A significação sócio-histórica e lingüística da palavra revela que os significados não são meras “etiquetas coladas” aos significantes.

Ao destacar as peculiaridades semânticas dos conceitos na fala interior, Vygotsky (1989) coloca um predomínio do sentido sobre o significado. Para ele, o sentido é soma dos eventos psicológicos que a palavra evoca na consciência. É um todo fluido e dinâmico, com zonas de estabilidade variável, uma das quais, a mais estável e precisa, é o significado. Segundo Vygotsky, as palavras adquirem seu sentido no contexto do discurso.

Embora a idéia de contexto tenha sido pouco desenvolvida por Vygotsky, Bakhtin (1988) aprofundou-a bem, e afirma que a palavra está sempre carregada de um conteúdo ou de um sentido ideológico ou vivencial. A significação real, ou o sentido de um enunciado está determinado pela interação de perspectivas ideológicas múltiplas.

3 - O Conceito de Infinito na Matemática da Educação Básica:

A investigação da presença do conceito do infinito e de infinitésimo, nos currículos de matemática, é um trabalho que ainda requererá bastante empenho e poderá apresentar muitas questões que possam favorecer ao desenvolvimento cognitivo de uma forma geral e mais especificamente ao pensamento matemático.

Depois da organização do currículo pela matemática moderna observa-se uma tentativa de apresentar exaustivamente todos os fundamentos da matemática. Então, como o conceito de infinito está em toda construção do pensamento matemático, ele está presente em todo currículo da educação básica.

Nos próximos parágrafos serão rapidamente expostos alguns recortes sobre a presença do conceito de infinito no currículo da educação básica, e conseqüentemente seus componentes paradoxais. Por exemplo, partindo das formas mais elementares, observa-se que desde as primeiras séries do ensino fundamental, logo na idéia da adição, existe em essência a noção de que sempre se pode somar, outros e sempre outros números. Essa mesma noção está presente em vários outros tópicos do currículo como: nas multiplicações e divisões mais simples como as por dez, cem, mil, dez mil, etc; ou na propriedade do fechamento nos Números Naturais quando se estabelece que dados dois Números Naturais, o resultado da adição desses dois números, quaisquer que sejam, também é um número Natural.

A iniciação a essa noção de infinito pode estar na representação desses números grandes e pequenos representados nas potências, nos Números Reais, com seus infinitos números irracionais, e suas infinitas casas decimais; na proposição de seqüências de números como conjuntos infinitos; nas contradições com o princípio da enumeração, junto à idéia de que conjuntos infinitos podem conter um ao outro.

Conseqüentemente, por essas quantidades de números serem o campo de variação ou domínio das funções, encontra-se o infinito em todo tipo de função. Os subsídios para essas abordagens ao conceito de infinito estão nas representações algébricas e geométricas de funções lineares, quadráticas e notadamente em funções periódicas ou circulares; assim então, nas seqüências numéricas.

Embora os maiores destaques sobre o conceito de infinito na educação se prendam, em sua maioria, às questões paradoxais, precisa-se atentar também para as possibilidades de compreensão desse conceito nos processos de formação, a partir das instâncias mais simples de metáforas do infinito até as mais complexas. O objetivo é para que se estabeleça um clima favorável para a construção de Metáfora Básica do Infinito.

Evidentemente, as investigações mostram que é inevitável um tratamento especial às situações paradoxais, por destacarem as essências das dúvidas históricas, relativas à compreensão desse conceito. Então, essas situações mostram-se um terreno fértil para investigação e podem conduzir a idéias que possam proporcionar a construção do conceito.

Em rápida remexida nos currículos de matemática, encontram-se muitas questões que despertam o interesse para outras abordagens mais esclarecedoras. Como exemplo das situações paradoxais, que podem ser exploradas, encontra-se a seqüência de inteiros positivos 1,2,3,..., o primeiro e o mais importante exemplo de uma grandeza infinita. O objetivo no ensino fundamental é a incorporação, também das formas matemáticas de representar essa metáfora básica do infinito, utilizando-se da linguagem matemática.

> "*A seqüência de inteiros representa o exemplo mais simples e natural do infinito matemático, que desempenha um papel dominante na Matemática[...] O procedimento de passar de n para n+1, etapa por etapa, que gera a seqüência infinita de inteiros, também constitui a base de um dos padrões mais fundamentais do raciocínio matemático: o princípio da indução matemática."*(Courant, 2000, p.12)

Por que todos terminam concordando que não existe fim para a seqüência de inteiros 1,2,3,4,...? Por que após qualquer inteiro n ter sido alcançado, pode-se escrever o inteiro seguinte, $n+1$. Então expressa-se esta sucessão de inteiros afirmando-se que existem infinitos inteiros.

Na teoria dos conjuntos de George Cantor (1845-1918), considera-se conjunto toda a seqüência de inteiros positivos, todas as dízimas periódicas, a seqüência dos números reais, todas as retas do espaço tridimensional, etc. E para comparar a magnitude de dois conjuntos diferentes, a noção básica é a de equivalência. Se os elementos em dois conjuntos A e B podem ser emparelhados um com o outro de tal forma que a cada elemento de A, corresponda um e somente um elemento de B, e a cada elemento de B corresponda um e somente um elemento de A, então, diz-se que a correspondência é bijetora e diz-se que A e B são equivalentes.

A noção de *equivalência,* para conjuntos finitos coincide com a noção comum de igualdade de quantidade de números. Dois conjuntos finitos têm o mesmo número de elementos se, e somente se, os elementos dos dois conjuntos puderem ser postos em correspondência bijetora. Isto é de fato a própria idéia de contagem.

Em se tratando de conjuntos finitos, nem sempre é necessário contar os objetos em dois conjuntos para mostrar sua equivalência. Por exemplo, pode-se afirmar, sem contagem, que qualquer conjunto finito de pessoas é equivalente ao conjunto de suas cabeças.

A idéia de Cantor era estender o conceito de equivalência para os conjuntos infinitos para definir uma aritmética do infinito. Porém essa idéia conduziu a outras questões não tão simples de serem compreendidas. Por exemplo: os inteiros pares formam um *subconjunto próprio*[7] do conjunto de todos os inteiros, e os inteiros formam um subconjunto próprio do conjunto de todos os números racionais. Se um conjunto é finito, isto é, se ele contém algum número n de elementos e nenhum mais, então ele não pode ser equivalente a nenhum de seus subconjuntos próprios, uma vez que qualquer subconjunto próprio poderia conter no máximo $n-1$ elementos. Porém, se um conjunto contém infinitos objetos, então, de forma bastante paradoxal,

> *[...] ele pode ser equivalente a um subconjunto próprio de si mesmo.[...] O emparelhamento entre o conjunto dos inteiros positivos e o subconjunto próprio dos inteiros pares, determina que são equivalentes. Essa contradição à verdade intuitiva, mostra as surpresas com que se vai deparar no domínio do infinito."* (Courant, 2000, p.95).

Embora a intuição aponte para o fato de que há duas vezes mais inteiros positivos do que inteiros pares porque sabe-se da definição que os inteiros são constituídos pelos números pares e ímpares, conclui-se que as duas infinidades são iguais.

Outro exemplo, que acompanha o mesmo raciocínio anterior, é a correspondência entre os números inteiros positivos e o conjunto de todas as frações próprias e impróprias, que determinam que essas infinidades são equivalentes.

---

[7] Subconjunto próprio de um conjunto S, significa um conjunto S' formado por alguns, mas não todos, dos objetos em S.

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\ \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1/1 & 1/2 & 2/1 & 1/3 & 2/2 & 3/1 & 4/1 & 3/2\ \ldots \end{array}$$

Ou ainda o número de inteiros positivos e sua equivalência com o número de números quadrados perfeitos.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49\ldots \end{array}$$

Essas contradições representam uma característica bastante notável encontrada na relação entre dois conjuntos, quando eles são, todos os dois, infinitos. Essas informações matemáticas são extremamente sofisticadas e, em se tratando dos níveis de compreensão dos alunos da educação básica, e principalmente dos objetivos dessas etapas de aprendizagem, deve-se ter bastante cuidado na organização das informações. Algumas contradições, para serem explicitadas, estabelecem diferenças entre os conceitos de magnitudes finitas ou infinitas.

Pode-se observar que nessa fase de desenvolvimento, pois esse é um conteúdo do ensino fundamental, a aquisição gradativa desse conceito fica bastante complexa, principalmente se traz implícita uma passagem do conceito de infinito, significando simplesmente sem fim, para o conceito infinidade, em que se imprime a formulação da hipótese de que infinidade, usualmente expressa pelo símbolo ∞ [8], pode ser tratada como se fosse um número.

A concepção matemática formalizada propõe que daí surge a necessidade de contar os infinitos e compará-los, pois, matematicamente, pelas propostas de Cantor e da aritmética do infinito, deve-se comparar esses diferentes tipos de infinito e contá-los. Na verdade é a operação da contagem que vai fornecer o modelo para essa comparação, determinando que se for possível estabelecer uma relação, ou seja, uma correspondência biunívoca entre esses conjuntos, então os dois conjuntos são equivalentes.

---

[8] Esse símbolo de infinito, ∞, reproduz o desenho de uma lemniscata, curva estudada por muitos matemáticos a partir de Kepler, mas designada como sendo a lemniscata de Bernoulli(1654-1705) a quem se atribui o seu desenvolvimento.

Evidentemente essa aritmética do infinito reflete-se no estudo das funções deparando-se com problemas semelhantes, no que se refere às correspondências entre *conjuntos* de números explicitando situações semelhantes envolvendo números infinitamente pequenos. Toma-se, agora, como exemplo duas grandezas abstratas quaisquer, por exemplo, *5* e *12*. Considerando-se o campo de variação como sendo os números racionais, é evidente que o conjunto das grandezas compreendidas entre um segmento que vai de *0* a *5*, que são inferiores a cinco é infinito; da mesma forma, o conjunto das grandezas inferiores a 12, também é infinito. É verdade que o segundo conjunto deve ser dito maior que o primeiro, já que este é incontestavelmente somente uma parte daquele.

Agora, observe-se uma verdade matemática no estudo das equações: seja x uma grandeza dada, compreendida entre *0* e *5*; e seja y determinado pela equação $5y=12x$; y representa uma grandeza compreendida entre *0* e *12*. Reciprocamente, todas as vezes que y representa uma grandeza compreendida entre *0* e *12*, x representará uma grandeza compreendida entre *0* e *5*. Segue-se igualmente dessa equação que a cada valor de x corresponde um único valor de y e vice-versa. Ou seja, a cada valor de x no intervalo entre 0 e 5 corresponde um valor de y no conjunto das grandezas compostas entre 0 e 12, de tal forma que nenhum número pertencente aos dos dois conjuntos fica só, nem se encontra em mais de um par ao mesmo tempo.

Essas questões citadas anteriormente que, envolvendo os conceitos de infinito e infinitamente pequeno merecem uma revisão bem detalhada para que surjam proposições como abordagens complementares, mais detalhadas, que possam conduzir ao objetivo da construção dos conceitos envolvidos.

Esses paradoxos mencionados fazem parte de um rol de conteúdos dos currículos da educação básica e quando são expostos têm como preocupação única, uma exposição formal que não apresente contradições. Em se tratando do conceito de infinito, como na maioria das vezes isso não é possível, esse conceito não é destacado nas formas tradicionais de exposição. Culmina, então, em abordagens sem nenhum compromisso com o desenvolvimento do pensamento, e, por conseguinte, sem nenhum compromisso com a construção da metáfora básica do infinito.

3.1 - As Dízimas Periódicas e o Paradoxo de Zenão

Tomando-se como exemplo a soma infinita $0,9+0,09+0,009+...$ é uma representação através do sistema de numeração decimal do número $0,999...$ que por sua vez se apresenta nos currículos básicos logo no terceiro ciclo do ensino fundamental inserido no modelo das dízimas periódicas. Uma dízima periódica é a representação de uma fração não decimal[9] pelo resultado da divisão do numerador pelo denominador. Dada uma dízima periódica qualquer existe uma operação inversa que indica a fração não decimal que a gerou. Utilizando-se o modelo formal proposto na educação básica, cria-se um sistema de equações, a partir de uma simples operação usada para números com quantidades finitas de algarismos.

Nesta forma de apresentar, considera-se, por exemplo:

Se x é igual a $0,999...$, então,

$10x$ é igual a $0,999...$, e, após operações comuns a sistemas de equações, no caso subtrai-se a primeira expressão acima da segunda, opera-se os termos semelhantes e conclui-se que x é igual a *um*. Ou seja, tem-se na linguagem formal das dízimas, que o número *um* gera por uma operação multiplicativa o número $0,999...$, porém nesse caso especial, não se consegue nenhuma divisão euclidiana que gere essa dízima.

Na educação básica oculta-se a especificidade desse resultado. As propostas que surgem, apelam exclusivamente para os modelos formais, voltados para a idéia de uma operação onde deve haver uma igualdade absoluta, então constroem-se outros modelos formais, como uma divisão heterodoxa apresentada no livro *Meu Professor de Matemática* (Lages, 1991, p.162), para solucionar o problema da geratriz da dízima periódica $0,999...$ O problema está exatamente na insistência por um modelo formal que convença que o número *um* gera o número $0,999...$, por uma operação trivial, envolvendo igualdades absolutas.

Enquanto isso, no desenvolvimento do próprio pensamento matemático existem conceitos que poderiam esclarecer o que realmente essa igualdade representa. Por exemplo, olhando para a representação desse número como uma série de soma infinita, o número decimal $0,999...$ é igual a série infinita $0,9+0,09+0,009+...$ ou ainda é igual a $\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+....$ que é visivelmente uma serie geométrica infinita. E a representação dessa série infinita fica:

[9] Fração decimal é aquela cujo denominador é um múltiplo de 2 e/ou 5, que pode ser representad por um produto de potências de 2 e/ou 5, e a divisão do numerador por esse denominador gera um número decimal exato.

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\ldots+\frac{9}{10^n}\ldots,$$

Que pode ser representado por um somatório:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

Pois se trata de uma série geométrica de razão *r* igual a *1/10* e coeficiente *a* igual a *9/10*.

No caso das séries geométricas com razão menor que *um,* o limite é dito diferente do somatório, e o modelo matemático utilizado para verificar a soma vem do modelo para séries geométricas finitas afirmando-se que

$$S=\frac{a-ar^n}{1-r}$$

A partir daí aplica-se o modelo do limite para as séries geométricas infinitas de razão $|r|$ menor que *um.* Então, considerando-se o limite para ar^n, o termo geral da sucessão, com *n* indo para o infinito como sendo igual a zero, representa-se agora, o modelo matemático para se analisar séries geométricas infinitas de razão menor do que *um* e maior que *zero* como:

$$S=\frac{a}{1-r}$$

Nesse caso, está-se diante de uma situação que aponta um modelo matemático para questões desse tipo, por exemplo, tendo-se a igual a $\frac{9}{10}$ e r igual a $\frac{1}{10}$, substituindo-se esses valores na expressão acima tem-se *S = 1.*

É interessante observar que a expressão

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

é um caso especial do somatório abaixo:

$$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{p(q-p)^{n-1}}{q^n} d$$

Fazendo as constantes p e q serem iguais a *um* e *dois*, respectivamente, tem-se o somatório

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{2^n}$$

que representa a série infinita para uma situação igual à proposta pelo paradoxo de Zenão. E para $p = \frac{9}{10}$ e q e d iguais a *1,* tem-se a representação do somatório

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

que representa a série $0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + ...$ em questão. Reconhecendo essa forma de representação de decimais infinitas, e explicitando a dinâmica implícita ao conceito de infinito, via construção de metáfora básica do infinito, e não uma igualdade *absoluta* como nos moldes tradicionais, caracteriza-se outro aspecto da linguagem matemática para analisar essas situações, e muitas outras análogas, que conduzem a metáfora básica do infinito.

É interessante explicitar que se trata de situações semelhantes ou matematicamente classificadas como sendo da mesma natureza de um paradoxo, semelhante ao paradoxo de Zenão.

Deve-se efetuar maiores empenhos para que, através dos conhecimentos desenvolvidos no próprio pensamento matemático, se possa proporcionar caminhos para o desenvolvimento do conceito do infinito. A linguagem matemática na apresentação acima faz parte de uma linguagem elaborada mais recentemente na história da matemática, que embora com suas representações formais, está carregada de instâncias que podem ser traduzidas em significados. Nesse caso o direcionamento é para priorizar a construção do conceito de infinito no grande e de infinito no pequeno.

Deve-se inserir nessa discussão uma antiga polêmica considerada como sendo, da geometria. Admitindo-se a existência de dois pontos A e B quaisquer sobre uma reta qualquer que determina um segmento AB, e se sobre essa reta se aplica uma operação trivial de divisão sobre o segmento, dividindo-se, por exemplo, esse segmento ao meio obtém-se o ponto A_1; dividindo-se A_1 B ao meio, obtém-se A_2; dividindo-se A_2 B ao meio, obtém-se A_3; e pergunta-se até onde vai a possibilidade de prosseguir na divisão ao meio?

Pode-se dizer que do ponto de vista prático, a divisão pára quando se obtém segmentos tão pequenos que já não há instrumentos com precisão suficiente para continuar a dividi-los. Do ponto de vista teórico, existem duas possibilidades: ou o ponto geométrico é um pequeno corpúsculo com dimensões muito pequenas, e a operação de divisão termina quando se obtiver um segmento de comprimento igual ao comprimento desse corpúsculo; ou o ponto geométrico tem comprimento zero e por menor que seja o segmento $A_n B$ obtido, será sempre possível "pensar" uma nova divisão ao meio. Neste caso, o ato mental de divisão ao meio pode se repetir ilimitadamente, e tem-se sobre o conjunto *AB* uma infinidade de pontos A_1 , A_2 , A_3 , ..., A_n , ... tem-se um novo conjunto infinito. A linguagem matemática moderna oferece a linguagem para tratar esses problemas, analítico e geométrico, conjuntamente.

Referenciais pedagógicos mais recentes no Brasil estabelecem para o ensino da matemática, alguns objetivos como: desenvolver (...) *"formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, analogia, estimativa, utilizando conceitos e procedimentos matemáticos(...)"* (PCN's, 1998, p.48). Nessa perspectiva, o ensino da matemática e das ciências deve contribuir para esse desenvolvimento geral na educação básica.

O que se observa nas formas tradicionais de se expor o pensamento matemático mesmo na atualidade é uma visão estática em que se admite, apenas, igualdades absolutas, uma visão platônica, enquanto que situações matemáticas mais voltadas para análise da realidade admitem aproximações como sendo muito importante para o desenvolvimento do pensamento matemático, até porque no dia-a-dia, as aproximações são muito mais freqüentes que as exatidões.

É fundamental, principalmente, que a matemática como linguagem científica exponha seu caráter descritivo dos fenômenos. Começando pelas características do pensamento metafórico presente na matemática, até as generalidades de suas representações.

4 – O Paradoxo de Zenão e o Conceito de Infinito na Educação

4.1 – Pesquisa e análise

A pesquisa apresentada neste documento visa estudar as noções de infinito, em torno de uma realidade objetiva, ou seja, a relação do conceito de infinito com a percepção de processos iterativos e com a utilização de uma linguagem matemática para descrição, compreensão e representação desse conceito.

O instrumento de averiguação sobre como se dá o desenvolvimento desse conceito, é a exposição de um problema conhecido através da história da matemática, que envolve o conceito de infinito e infinitésimo, trata-se do já citado que ficou conhecido como paradoxo de Zenão.

A relevância dada a esse paradoxo é porque se trata de um problema da antiguidade bem difundido até a atualidade, inclusive em áreas fora da matemática, e que tem características adequadas para essa pesquisa, pois, apresenta uma natureza contraditória quando relaciona experiência física com números, e principalmente, por ser um problema da mesma natureza das dízimas periódicas, enquadrando-se, então, ao método e ao objetivo dessa pesquisa.

O objetivo principal é observar em que aspecto o atual conhecimento da linguagem matemática está presente nas respostas dadas ao problema e, também, tentar detectar a construção de metáforas conceituais nos discursos dos sujeitos pesquisados. Essa expectativa deve-se ao próprio desenvolvimento da linguagem matemática e das teorias cognitivas apontadas por Lakoff & Nüñez sobre a construção das metáforas conceituais. Essas são duas categorias de análise na presente pesquisa. A terceira é a categoria dialética realidade – possibilidade (Cheptulin, 1982) usada para conclusão das análises. O método dialético se faz presente desde a construção dos diálogos com os sujeitos da pesquisa, em que são utilizados contra-argumentos para construção desses diálogos entre sujeito e pesquisadora, visando observar as sínteses, às idéias debatidas.

Os sujeitos escolhidos foram indivíduos que se encontram em três diferentes níveis de formação acadêmica. O primeiro grupo foi composto por alunos da última série do ensino fundamental de uma escola pública e de uma escola particular da cidade de Maceió. Esses alunos foram escolhidos aleatoriamente, ou simplesmente os primeiros que mostraram disposição para participar da pesquisa. A quantidade de sujeitos nesse grupo foi de sete alunos com idades entre treze e quinze anos de idade, todos da oitava série do ensino fundamental. Esses sujeitos serão designados no decorrer da pesquisa, por *S1, S2, S3, S4, S5, S6* e *S7.*

O segundo grupo de sujeitos constou de professores licenciados em Matemática com experiência de no mínimo três anos no exercício da profissão na educação básica, tendo sido selecionados três sujeitos das redes pública e particular da cidade de Maceió. Estes serão designados por *S8, S9* e *S10.*

Um terceiro e último grupo foi composto de matemáticos pós-graduados, professores da Universidade Federal de Alagoas, do Centro de Ciências Exatas e Naturais, atuantes nos cursos de licenciatura e bacharelado em matemática, em três áreas de ensino e pesquisa distintas: álgebra geométrica, análise numérica e matemática aplicada. Este grupo foi composto de três sujeitos que aparecerão neste documento, respectivamente como os sujeitos *S11, S12* e *S13.*

A coleta dos dados com os três grupos citados efetuou-se por registro áudio e vídeo na presença apenas da pesquisadora e de cada sujeito. Estes foram solicitados a se posicionarem diante das questões abordadas. Uma maior relevância foi dada ao paradoxo de Zenão, mas outros paradoxos do infinito foram mencionados para os alunos do ensino fundamental no intuito de manter um diálogo que tornasse possível captar suas descrições e metáforas conceituais, relativas ao conceito de infinito e infinitésimo.

Ao grupo de alunos do ensino fundamental foram colocadas situações similares às descritas por Nüñes (1994), no que se refere ao paradoxo de Zenão, propondo esse problema da seguinte forma: o sujeito deve deslocar-se entre dois pontos, partindo de um ponto conhecido dado, até um outro ponto também conhecido, e a condição do problema é que os espaços devem ser percorridos cobrindo-se primeiramente a metade do percurso e depois sempre a metade do restante.

Utilizando-se a linguagem matemática poderia ser dito da seguinte maneira: dada uma distância total *"d"*, percorre-se primeiramente a metade, ou seja, a distância que corresponde a $\frac{d}{2}$, depois a metade da metade, $\left(\frac{d/2}{2}\right)=\frac{d}{4}$, depois a metade da metade da metade, $\left(\frac{d/4}{2}\right)=\frac{d}{8}$, e assim progressivamente, à razão de $\frac{1}{2}$, sempre cobrindo a metade do restante da distância. Estas representações matemáticas, naturalmente, foram omitidas na exposição do problema para esses alunos, explicitando-se apenas que seria a metade, depois a metade da metade, depois a metade da metade da metade, e assim sucessivamente.

Depois de exposto o problema, efetuou-se a pergunta: o indivíduo nesta situação chegará ao ponto desejado? Foi proposto que os indivíduos poderiam pensar na distância que quisessem entre esses dois pontos, por exemplo, a distância entre as duas laterais opostas de uma mesa, ou entre o lugar em que eles se encontravam naquele momento e um outro lugar qualquer que ele quisesse imaginar.

Para obter mais subsídios para a análise, foi solicitado a cada sujeito da pesquisa, nesse grupo de alunos do ensino fundamental, que propusesse uma resposta ao somatório da série infinita alternada representada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$

Esse somatório foi apresentado como uma soma com infinitos termos, em uma notação simplificada, do tipo + 1 – 1 + 1 –1 + 1 – 1 ... , em que a quantidade infinita de termos da soma estava caracterizada pelas reticências. A pesquisadora ressaltou esse detalhe já conhecido, pois é uma notação utilizada no ensino fundamental para descrever conjuntos que são representados por seqüências infinitas de números.

Aos sujeitos professores do ensino fundamental, com licenciatura em matemática, a proposta foi para que organizassem uma opinião a respeito do paradoxo de Zenão, em uma abordagem que pudesse ser utilizada em situações de sala de aula. Esses professores deveriam ter em mente pelo menos as duas opiniões mais prováveis que poderiam ser dadas por seus alunos: a de que se chegaria ao ponto desejado ou a de que não se chegaria. A proposição foi no sentido de tentar entender os argumentos que cada um compreende que poderia ser utilizado para seus alunos, a respeito desse problema.

Ao terceiro grupo, dos sujeitos pós-graduados em Matemática, foi proposto que emitissem parecer sobre as possibilidades de discursos em torno da utilização do paradoxo de Zenão como instrumento didático para se abordar o conceito de infinito e de infinitésimo na educação básica, e então a possibilidade de explorar esses conceitos atribuindo uma relevância na utilização das dízimas periódicas, com seus componentes paradoxais, da mesma natureza que o paradoxo citado.

Os alunos do Ensino Fundamental

As declarações que os sujeitos do primeiro grupo, alunos do ensino fundamental, emitem, diante da questão sobre o que seria infinito, evidenciam a existência de noções sobre esse conceito, expostas de certa forma com naturalidade. Essas noções foram observadas em uma primeira categoria de respostas onde surgem exemplos de infinito presentes em uma relação desse conceito com algum tipo de linguagem científica utilizada para descrever o infinito. E então, o conceito de infinito é expresso em termos de universo infinito, e principalmente de números, como nas colocações abaixo:

S1: *Os números, o universo.*

S2: *assim... que não tem fim, assim... tipo os números da matemática, o número de estrelas, o universo... uma coisa que num pode ter fim assim... num pode se encontrar nenhum fim.*

S4: *Ahn! Ahn! Ahn! …(silêncio de aproximadamente trinta segundos) pode ser número, né? Acho que não tem fim, pra mim não tem.*

S6: *tipo assim, nunca acaba, como o universo, ninguém nunca viu um fim dele.*

Nessa categoria de respostas dadas pelos sujeitos *S1, S2, S4* e *S6,* observa-se a utilização da implicação final de uma metáfora básica de infinito, para descrever suas idéias sobre infinito. Esses sujeitos apresentam uma compreensão de infinito sem a explicitação do passo a passo, como nos processos descritos por Lakoff & Nüñez(2000) nos protótipos de metáfora básica do infinito. A linguagem utilizada na descrição está voltada para as idéias matemáticas, mas não há evidência do domínio de uma representação em linguagem matemática formal. A idéia matemática mais usada é a dos infinitos números naturais.

Em uma outra categoria de resposta detectada não se observa, inicialmente, nenhuma referência ao universo ou a idéia matemática sobre o infinito. E as primeiras impressões sobre infinito, deixadas por esses sujeitos foram:

S3: que não tem fim

S5*: infinito é uma coisa que não tem fim, né? Que não tem fim, infinito.*

S7: *o mar, o amor...*

Percebe-se nessas respostas de *S3, S5* e *S7*, uma construção diretamente relacionada com o desenvolvimento da linguagem natural. Uma lógica primária, que se percebe nesse caso, com bastante obviedade, o que eles colocam é que o infinito é o que não é finito. O sujeito *S7* atribui a característica não finita a entidades particulares, no caso, o amor. Pode-se inferir que o conceito provoca-lhe uma abstração imediata, e uma outra declaração voltada para sua percepção visual imediata, atribuindo a propriedade de infinito, ao mar. Esse sujeito passa de uma entidade totalmente abstrata para uma totalmente concreta. Porém, essas primeiras declarações desses sujeitos vão se modificando com a continuidade dos diálogos.

Por exemplo, o sujeito S3 declara uma outra forma de expressar o infinito, completando a expressão que iniciara sob uma pergunta da pesquisadora:

P: você conhece alguma coisa que não tem fim?

S3: os números da matemática.

E então, mais uma vez, a idéia matemática de números aparece para descrever o infinito, também para esse sujeito *S3.*

Os sujeitos S5 e S7, ao continuar emitindo suas outras formas de perceber o infinito constroem interessantes descrições sobre o infinito. Esses sujeitos conseguem descrever as idéias que são muito importantes para essa análise, no caso, a descrição de processos contínuos. Esses processos são descritos por esses sujeitos, sob forma de movimento iterativo contínuo ou uma forma própria de descrever iterações como ciclos de criação e recriação percebidos na natureza.

P: [...] você encontraria coisas infinitas na natureza?

S5: não, porque à medida que o tempo passa as pessoas vão destruindo a natureza. Aí nunca que vai ter jeito. [...] não é sempre infinita né? Sempre muda, pro... pra... como é que se diz? Pra... a natureza a... floresta assim, entende? Pras pessoas... destrói elas, pra colher pedras, coisas... aí ela tem fim.

Esse sujeito *S5* demonstra uma compreensão indutiva do conceito de infinito relacionado a uma percepção de processos finitos, mas que, segundo as suas declarações, compreende que poderiam ser infinitos. Ele acredita que se a relação dos seres humanos com a natureza fosse diferente do que é, então ela seria infinita. Esse sujeito compreende uma possibilidade de infinito na percepção de ciclos, construído sob a idéia de processos iterativos, que são interrompidos.

O sujeito S7 foi conduzido, durante o diálogo, a uma possível descrição utilizando idéias matemáticas do conceito de infinito que acata sem problemas:

P: [...]Você estuda matemática e você está na oitava série não é?

S7: É.

P: *então, os números, por exemplo, os números naturais, tem alguma coisa de infinito nos números naturais?*

S7: *tem.*

P: *essa idéia que você tem de infinito dos números naturais, ajuda você a pensar em outras coisas infinitas?*

S7: *ajuda.*

Na descrição do infinito dos números, esse sujeito mostra uma compreensão traduzida em forma de movimento, percebido e narrado como um processo contínuo e iterativo.

P: *como é que é o infinito dos números?*

S7: *bom, é uma coisa que vai sendo, vai sendo, vai sendo... e nunca acaba... ele vai, vai, vai, vai até...*

Nos dois sujeitos acima, *S5 e S7*, observa-se uma descrição de infinito como percepção de movimento em processos contínuos. Esses processos são reproduzidos por esses sujeitos através de uma linguagem própria. Em *S7,* a idéia de números, também é a abstração que contribui para a descrição dos processos contínuos.

Essa percepção de processo iterativo contínuo também foi observada nas colocações do sujeito *S1* a respeito de um possível resultado para a soma da série infinita alternada: 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 ...

S1: *Eh! Acho que zero, porque... assim, tem... sempre você tem mais um você diminui um, sempre vai dar zero, mais um menos um, zero, vai ser sempre assim* **sendo** *zero.*

Em um próximo passo, para averiguar noções de infinito presente nos processos de construção do conceito do infinitamente pequeno, foi proposto para esses alunos do ensino fundamental, que tirassem uma conclusão a respeito do problema de Zenão.

Nas respostas sobre o que aconteceria ao se tentar chegar a um ponto desejado, caminhando por metades, foram observadas três tipos de conclusões expostas por esses sujeitos. Essas respostas também detectadas por Nüñez (1994), são: os que afirmaram que chegariam ao ponto desejado; outros, que afirmaram que não chegariam; e os que consideraram as duas respostas possíveis, oscilando entre as duas possibilidades diante dos contra-argumentos.

Durante a construção do diálogo, quando percebe a postura do sujeito afirmando que chegaria ou que não chegaria ao ponto desejado, a pesquisadora usa o contra-argumento, ou seja: se o aluno afirma que chegaria ao ponto desejado, a pesquisadora usa o contra argumento baseado na possibilidade de se dividir infinitamente; de outro modo, ou, para aqueles sujeitos que afirmam que jamais chegarão, o contra-argumento usado é a proposta da realização de uma experiência física com uma distância mínima usada entre os dois pontos, e propondo que ele, o sujeito pesquisado, é quem está *caminhando* do ponto A até o ponto B, dividindo o percurso em metades.

Os argumentos utilizados para dizer que chega ou que não chega, tem uma construção semelhante sob alguns aspectos. Analisando abaixo as colocações de *S2*, que representa um sujeito do tipo que afirma que chega, tem-se:

P: *[...]Por que chega?*

S2: *Vai sendo... dividindo e vai e chega...vai diminuindo menos a distância.*

Nessa resposta de *S2* observa-se sua compreensão da chegada, por um movimento contínuo de diminuição da distancia. Para ele, parece óbvio que chegará ao local desejado. Ele parece perceber a impossibilidade de continuar dividindo, ao chegar em algum ponto, embora não consiga argumentar o porquê dessa sua certeza. Esse sujeito percebe o movimento contínuo, por metades, porém subentende uma compreensão da impossibilidade de dividir infinitamente nessa situação vivenciada. Então, ele determina um estado final finito de divisões, e a distância que diminui gradativamente, em algum momento passa a não ter correspondência com nenhum número real. A distância deixa de ser um número real, em algum determinado momento da *caminhada*. Nesse instante ele sai do sistema matemático das divisões, quebra a condição do problema, e considera apenas a possibilidade física. Porém, não consegue descrever com palavras o que acontece e por que ele quebra as condições propostas do problema, e chega.

Essa conclusão é considerável para a análise. Porém, não fica claro nem para esse próprio sujeito, como justificar essa sua resposta. Para ele parece óbvia do ponto de vista da experiência, mas cria uma lacuna entre seus conhecimentos básicos sobre divisões, e uma explicação do fenômeno vivenciado.

Já *S1,* convicto das verdades matemáticas não consegue se transportar para uma realidade física e limita-se à possibilidade matemática de efetuar infinitas divisões. Embora esse sujeito construa uma metáfora do limite de uma seqüência infinita, mostrando compreensão sobre a noção de infinitésimo, não consegue ver o problema como uma situação realizável.

S1: *Ah! É impossível eu chegar do ponto A, he! ao ponto B andando metade do caminho, porque cada vez que você vai andando a metade, metade da metade, aí a metade da metade da metade, você nunca vai conseguir chegar a um ponto B, porque nunca você vai conseguir andar o caminho inteiro, vai sempre, sempre assim[...]*

A semelhança entre esse sujeito *S1* e o sujeito *S2*, é que os dois iniciam a observação ao problema associando a distância que vai diminuindo a um processo de divisão representado pelos números, e a diferença crucial é que *S1* em nenhum momento deixou de associar essa distância a uma representação numérica, não conseguindo refletir sobre as condições físicas do problema. *S2* deixa de refletir numericamente e passa a analisar apenas sob uma condição física de realização do problema.

O que se observa nas duas posturas é uma prioridade dada a uma ou outra linguagem: a linguagem apenas do que se vê através dos sentidos, a experiência física, ou a linguagem puramente abstrata das divisões, sem nenhuma possibilidade de aplicação. Observa-se a necessidade de uma mediação entre essas percepções unilaterais, uma linguagem que possa explicar o fenômeno.

O sujeito *S7* está entre os que oscilam diante dos contra-argumentos depois de ter afirmado que chegaria, entra em conflito após a introdução do contra-argumento das divisões infinitas ao diálogo e reconsidera a resposta anterior, mas também não consegue expressar suas dúvidas.

P: *[...]Quando tem um pedacinho, a gente pode dividir. Pegar o que sobra e pode dividir. Sempre pode dividir. E isso pode não acabar nunca. Aí, no caso, eu nunca chegaria?*

S7: *é, tem essa possibilidade.*

P: *tem essa possibilidade?*

S7: *é, tem.*

P: *como assim?*

S7: *(   ) vai até chegar num local determinado, aí sempre vai ter, sempre vai ter as dificuldades.*

P: *no caso (essa dificuldade) vai ser as divisões infinitas?Por menorzinho que seja, a gente pode dividir?*

S7: *Anhan.(expressão afirmativa com a cabeça).*

P: *você acha que pode?*

S7: *acho que sim, porque sempre tem uma brechinha com alguma coisa.*

P: *você não chegaria?*

S7: *depende, talvez.*

P: *talvez?*

S7: *é talvez.*

Os conflitos são introduzidos com certa facilidade no sujeito *S7,* provavelmente porque a linguagem matemática está presente, com relevância, no referencial teórico nesse nível de ensino. Esse sujeito concorda durante o diálogo que o conceito de número ajuda a organizar uma descrição de infinito, narrado depois da *lembrança* da pesquisadora, como um processo iterativo contínuo.

Considerações:

Os sujeitos pesquisados nesse primeiro grupo utilizam metáforas matemáticas para descrever o infinito. A abstração mais evidente é a construção infinita dos números. Nas respostas observadas sobre o que seria infinito há evidência da construção da metáfora básica do infinito, no infinitamente grande e no infinitamente pequeno; os sujeitos pesquisados demonstram entender o conceito de infinito de uma forma dinâmica, ou seja, através da percepção de coisas em movimento, alguns chegam a um refinamento descrevendo, de uma maneira própria, como seriam esses processos iterativos contínuos.

Há uma ausência de utilização de linguagem matemática formal para descrição desses processos infinitos, além das demonstrações de estar nos números a idéia que melhor descreve o infinito.

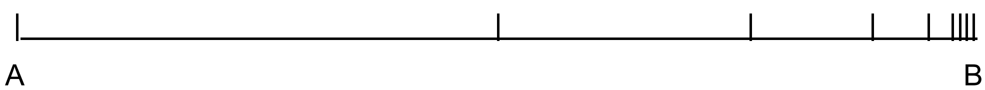
Observa-se a presença de uma outra metáfora, associada aos números. Essa outra, é a metáfora das distâncias que variam, associadas a números nas descrições do paradoxo de Zenão. Essa é uma metáfora importante, pois, se encontra também na construção matemática do conceito de infinitésimo. É um indício de como sujeitos nessa faixa de escolaridade constroem o pensamento matemático e apontam uma direção sobre quais metáforas conceituais podem ser aproveitadas para uma transposição até uma representação matemática do infinito e infinitésimo, que são definições iniciadas com a problemática de Zenão.

Um ponto relevante para reflexão nessa pesquisa ocorreu na relação normativa que indivíduos do tipo *S1* têm com os conteúdos matemáticos, já nesse nível de ensino. Este tipo de sujeito não consegue sair do sistema formal numérico e reconsiderar sua análise baseando-se na própria experiência. A distância que falta, para ele, é sempre um número Real que pode ser dividido.

S1: *Não, porque é assim: tem um birô, e a porta, você andando a metade. Depois a metade da metade, depois a metade da metade da metade, vai ficar uma distância muito pequena, mas mesmo assim você não vai conseguir chegar ao seu ponto certo. Porque você vai dar uma distância muito pequena e você não vai conseguir chegar ao ponto certo, porque nunca vai, che... assim, um ponto total, porque, assim se.. você tem uma distância de 1cm, você sempre vai ter que andar zero vírgula cinco, ... você nunca vai poder andar o zero vírgula cinco, aí depois o zero vírgula vinte e cinco, depois o zero do...vírgula cento e vinte e cinco, aí nunca vai conseguir chegar ao ponto certo. (*S1 continua riscando, riscos que não representam mais a metade do que falta, figura 2)

Nessa resposta, evidencia-se que a limitação da linguagem matemática utilizada nas explicações no ensino fundamental impede o avanço conceitual em indivíduos que chegaram nesse estágio de compreensão numérica.

Figura 2



Professores do Ensino Fundamental

Aos sujeitos do segundo grupo, professores da educação básica, o diálogo discorreu no sentido de tentar perceber que tipo de discurso articulado eles seriam capazes de produzir para alunos desse nível de ensino, sobre o problema de Zenão, já que esse tipo de questão não é tratado nos cursos para formação de professores de matemática.

Entre os três sujeitos que participaram desse grupo, observaram-se tanto semelhanças quanto diferenças, nos discursos que eles articularam. Por exemplo, no rol das diferenças está o aspecto das elaborações de *S8,* totalmente voltada para os aspectos teóricos da matemática formal. E o argumento formulado sobre o que ele diria aos alunos a respeito de chegar ou não chegar ao ponto desejado foi o seguinte:

S8: teoricamente ele nunca chegaria, ou... Chegaria cada vez mais próximo.

A pesquisadora, ao perceber que *S8* permanece no sistema numérico, sem considerar qualquer experimento concreto, introduz no diálogo o contra argumento, construindo-o como se fora do ponto de vista dos alunos investigados, e o faz com a seguinte colocação:

P: [...] e eles (os alunos) me garantiram que chegariam, o que você diria para eles?
S8: diria que... o seguinte: o ... problema da matemática é o seguinte: é que é o ideal,
Num tá num ambiente do dia-a-dia...

O sujeito S8 permanece no argumento matemático, mesmo diante do contra-argumento. Esse sujeito considera o problema um paradoxo, compreendendo-o literalmente. Também não considera os referencias pedagógicos (PCN's, 1998 - 1999), que propõem que a matemática seja a linguagem das ciências, ou referenciais psicopedagógicos, que propõem a construção de significados através da educação matemática.

A pesquisadora insiste então no argumento matemático, sobre a noção de aproximação que ele deixa transparecer no início do diálogo, e propõe tratar o paradoxo como uma soma infinita, da mesma natureza de dízimas periódicas. Então, o sujeito reconhece o problema de Zenão como sendo a soma de uma série infinita e propõe que essa questão deveria ser tratada utilizando-se a teoria dos limites.

S8: [...]ele vai chegar no limite.
P: você falaria no limite?
S8: certo, seria... você nunca vai chegar lá. Você vai caminhar daqui até ali, aí precisa novamente caminhar a metade de novo[...] por menor que seja e você vai caminhar a metade dele

Ao tratar o problema como uma soma com infinitos termos, esse sujeito admite a convergência da soma para o limite. E afirma que chegará ao limite. Ao mesmo tempo em que usa a impossibilidade matemática de chegar ao ponto desejado, *S8* parece ter visualizado a experiência física quando utiliza o verbo *caminhar* para ilustrar a idéia mas, volta a interpretar o problema sob uma visão normativa da matemática, não concebendo outra possível análise para o fenômeno.

P: *mas é isso que eu quero saber...*

S8: *pronto esse obstáculo que você quer chegar é o limite.*

S8 conclui admitindo que não chegará, valendo-se de noções de limites, de aproximação. Esse sujeito usa argumentos voltados totalmente para a justificativa matemática. Continuando firme na sua convicção, até o final.

S8: *se o pessoal prestar atenção vai entender ... sempre vai ter um* epsilonzinho *bem pequenininho que você vai dividir por dois, e você nunca vai chegar, é como 1/n quando* ***n*** *tende pro infinito.* (vai se levantando do local da filmagem e mudando de assunto)

Percebe-se uma inquietação de *S8* nessas suas últimas palavras e gesto, é como se concordasse que deveria propor uma explanação enaltecendo a teoria dos limites, porém, como sua visão de ensino é de uma matemática normativa, puramente formal, reproduz uma postura tradicional. Esse sujeito conclui, afirmando que não chegaria, e a justificativa é voltada para a construção do conceito matemático de infinitésimo, porém, utilizando o termo *epsilonzinho* que é o diminutivo de épsilon, letra grega usada como variável, na definição formal de limite em matemática.

O discurso de *S8* é totalmente voltado para o conhecimento matemático formal. A diferença dos argumentos desse sujeito para aqueles da época de Zenão está no âmbito do desenvolvimento dos argumentos matemáticos atuais, que permite uma reflexão sobre o problema de forma diferenciada daqueles da antiguidade. Essa diferença evidencia-se em sua disposição ao fazer referência ao conceito de limite.

O sujeito S9 demonstra uma maior preocupação em tentar esquematizar e inserir-se no contexto do problema, assume um comportamento como se estivesse vivenciando, construindo uma idéia, passo a passo. Essa postura o conduz a conclusões coerentes, diante das condições físicas que atribuiu ao problema:

S9: *como é? O cara vai... como? A metade né? Vamos trabalhar com 10 metros (falando e fazendo um segmento de reta com uma caneta em um quadro branco, escrevendo A e B nas extremidades desse segmento) uma medida certa né? Dez metros. Aí com dez metros ele vai sempre pular a metade né?*

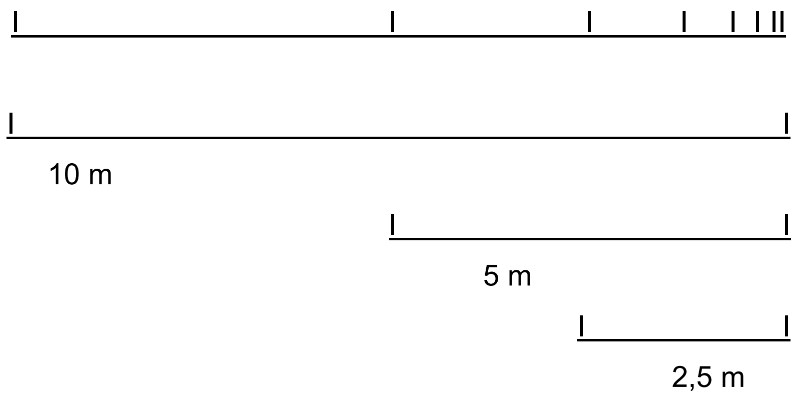
Agora então... tem o ponto C (determinando no quadro o que corresponde a mais ou menos a metade do segmento riscado) então o ponto C seria a metade, seria agora o cinco, uma média não é isso? Ele pulou cinco, depois a metade de cinco... ele tá aqui agora (seguindo em frente e fazendo uma marca no que seria a metade da metade) , chegou aí, pulou a metade de novo, dois e meio... um virgula cento e vinte e cinco... (representando com marcas no segmento riscado) Mas se depender do tamanho do pé do cara né? Acho que ele chega né? [...]

A pesquisadora tenta quebrar o argumento prático desse sujeito, como se pretendesse reconduzi-lo a uma postura tradicional, propondo que ele traduza isso matematicamente. Isso faz com que esse sujeito busque em sua bagagem teórica de literatura matemática, algum argumento convincente.

S9: *se você trabalhar com esse intervalo aberto... por mais que se aproxime ele não chega, mas essa é uma idéia, um raciocínio bem análogo, bem próxima da...infinitas... divisões por dois né? Que é a metade do percurso que o cara devia fazer né? Não é fácil pro aluno entender, perceber...Claro que ele vai conseguir...A conclusão aqui, [...] Eu acho que fazendo a experiência o cara vai chegar né? Porque... não tem condições, (*sorriso*) o cara com... o tamanho do pé... o cara vai chegar.*

S9 mergulha na idéia da experiência e percebe-se diante de uma impossibilidade de continuar dividindo. A linguagem da análise matemática que detém enquanto conhecimento formal só se manifesta com a interferência da pesquisadora. Nesse processo em que expõe um esquema (figura 3) e narra o problema, entre as idas ao conhecimento formal e vindas à experiência predomina a reflexão sobre a experiência vivenciada. Embora tenha feito apenas um desenho, um segmento de reta e supondo dividi-la continuamente, o sujeito transporta-se para o problema, sentindo-o como na prática.

Figura 3



Inicialmente, *S9* a cada distância faz corresponder um número, mas, ao chegar na distância ao qual faz corresponder o número *um vírgula vinte e cinco*, ele quebra a condição inicial do problema, fazendo uma referência a uma parte do corpo, *o pé*, que para ele, naquele momento, é um instrumento de medida. É o que o faz antecipar a impossibilidade de continuar dividindo e, então, ele abandona a associação que vem fazendo entre a distância que falta e os números Reais.

Quando *S9* abandona o sistema de representação numérico, naquele ponto, *1,25,* fazendo uma referência, agora, ao *tamanho do pé do cara,* demonstra estar voltado para a construção de significado na experiência. Porém, esse sujeito não constrói uma justificativa elaborada em uma linguagem mais adequada para o problema. Porém, mostra uma evidência do que o fez quebrar a regra do problema, ele não consegue explicitar claramente, mas, fica implícito que, quando a distância que falta for menor ou igual ao *tamanho do pé do cara,* ele quebrará a regra do problema, e chegará ao ponto desejado. *S9* oscila, passando do argumento teórico, puramente matemático, quando se refere ao *intervalo aberto,* ao muito informal, relacionado à experiência, referindo-se ao *tamanho do pé do cara.*

A diferença desse sujeito *S9*, para os sujeitos alunos do ensino fundamental, que também quebram a regra do problema e afirmam que chegam, é basicamente uma: ele percebe e apresenta uma *escala de medida* , ou seja, o instrumento de que dispõe para medir - no caso - o pé. No início da caminhada ele divide em metros, e, ao final, ele percebe que precisa dividir em pés.

As questões acima apontam para uma evidência, mais especificamente a necessidade de uma linguagem que faça a transposição entre a percepção de um conceito através de uma experiência e uma definição matemática.

O sujeito *S10* também demonstra uma preocupação com a compreensão do aluno e tenta, através de elaborações pessoais, explicar a importância do conceito de infinito, mantendo uma postura de quem quer construir idéias com significados. Inicia a abordagem do problema da seguinte maneira:

S10: *[...]a primeira coisa que a gente tem que fazer pra que o nosso aluno consiga imaginar o quão significa infinito, por que o infinito não é um número, infinito é um significado... ele precisaria ter noção de distância, ter uma idéia de que distância nós estamos falando... por que é intrínseco do ser humano, ele só constrói seu conhecimento quando aquele conhecimento faz sentido pra ele, não adianta... você querer que o aluno aprenda um conceito que ele não vê... nenhuma relação com a vida dele.*

A primeira coisa de distância... uma distância que se conhece...

[...]percorrer essa distância uma quantidade determinada de vezes, pra equivaler à distância...

S10 apropria-se de uma metáfora conceitual de distância que acredita que pode ser um elemento constituinte do conceito de infinito. É como se estivesse em busca de uma medida padrão conhecida, que faça sentido, e afirma que o conceito poderá ser construído iterativamente, a partir desse referencial conhecido. *S10* acredita que esse referencial é um ponto de partida, e o infinito seria um múltiplo indefinido dele.

É relevante observar que nesse breve exemplo de construção que *S10,* professor do ensino fundamental, propõe-se fazer para introduzir o conceito de infinito para seus alunos, ele utiliza raciocínios elementares, no caso, a operação de adição aplicada a uma distância. Isso pode ser visto como uma tentativa plausível de construção de metáfora básica de infinito, na qual se percebe um estado inicial, uma iteração, um número muito grande dessa iteração, e uma implicação final que poderia ser um estado de infinito. (Lakoff & Nüñez, 2000, p.187) Esse processo propõe implicitamente instâncias para a metáfora do infinito, detectado quando *S10* propõe que a distância gerada pode ser *tão grande quanto se queira.*

S10: *[...] a partir dessa situação você começa a construir... a aumentar essa distância [...] uma quantidade sem fim de vezes... você vai aumentando, tornando cada vez maior, e como dizem, na... quando você estuda limite, é uma quantidade tão grande quanto se queira[...]*

Essa última frase do parágrafo anterior merece mais um destaque, porque evidencia uma característica peculiar do conceito de infinito, que é a possibilidade de se trabalhar esse conceito atribuindo uma certa autonomia intelectual àqueles que participam de sua construção. Na concepção teórica da construção dos conceitos, são atribuídas relações às entidades conceituais, e não propriedades necessárias e suficientes, como na concepção clássica. A frase "*uma quantidade tão grande quanto se queira*" foi lembrada durante esse diálogo, exatamente por fazer parte de um discurso dos professores de cálculo, no ensino superior, quando tentam explicitar essa natureza peculiar na construção do conceito de infinito e de infinitésimo.

Seguindo uma perspectiva de construção do conceito de infinito *S10*, embora não conheça os trabalhos de Lakoff e Nüñes(2000), conclui, afirmando que a mesma idéia que está presente na descrição do infinito está na descrição de infinitésimo, ou como diriam os autores citados, faz-se uso de uma mesma metáfora.

S10: *[...] essa idéia de infini... de infinitésimo também seria indicação, para uma coisa infinitamente grande.*

[...]se matematicamente você construiu uma distância, uma idéia de coisa muito grande... Ah! Já que conseguiu imaginar coisas grandes, aproveitar essa idéia e relacionar com coisas muito pequenas também é aí que o paradoxo de Zenão serve de link, pra idéia de limite, tanto limites infinitos quanto limites ínfimos[...]

S10 mostra evidências de uma prática voltada para a construção do conhecimento e consegue perceber uma relação entre os conceitos do infinito e do infinitésimo. Conclui concordando com a utilização do paradoxo de Zenão para se trabalhar esses conceitos, na educação básica.

As maiores evidências de mudanças de comportamentos, em professores de matemática, encontra-se na concordância da pertinência do uso de problemas do tipo proposto por Zenão, já no ensino fundamental. Assim como também detecta-se uma aparente preocupação com a construção de conceitos como os de limite, infinito e infinitésimo. Esses sujeitos reconhecem que, nas teorias e currículos atuais, há uma linguagem a ser explorada, mas também lhes faltam argumentos que justifiquem as formas de conduzir abordagens a esses conceitos, nesse nível de ensino.

Nessas práticas observadas, evidenciam-se também, diferenças que se revelam de formas muito amplas, como por exemplo: encontra-se uma prática mais arraigada nas posturas tradicionais, uma prática que aparenta um meio termo, detectável na tentativa de se manter uma coerência entre teoria e prática, e uma outra, que se apresenta como uma tendência voltada para idéias construtivistas. Nessa última, chega-se a construir uma instância de metáfora básica do infinito sem a utilização de modelos formais. Qual seria a diferença entre essas práticas? Provavelmente uma maior ou menor apropriação das teorias cognitivas, para construção do significado em matemática.

Os matemáticos

Aos sujeitos do grupo três, os matemáticos, a principal proposta foi para que explanassem sobre o que significa o paradoxo de Zenão para eles, para a matemática, e para a construção do conceito de infinito em alunos da educação básica.

O sujeito *S11* tem uma postura voltada para os fundamentos da moderna matemática, e o ponto de vista exposto por ele é nessa direção. Esse sujeito mostra uma convicção da separação entre física e matemática, e então, divide em duas, as formas que propõe para se analisar o problema: uma física, outra matemática.

Ao analisar o problema sob uma concepção *física* admite que *caminhando por metades,* chegará ao local desejado. No entanto, explicita que estará quebrando a regra do problema. Esse sujeito propõe que fisicamente não é uma experiência realizável.

S11: [...] a idéia do paradoxo de Zenão, e eu vou dizer logo de antemão, que ele não é um paradoxo, e... essa palavra não é apropriada. O que ocorre é o seguinte: [...]Se você pega um caminho qualquer de... vamos supor 10 metros e você é obrigado a caminhar cada ... (fala lentamente) metade do que você caminhou antes. Vamos dizer 10 metros, você caminha 5, depois você vai caminhar 2,5, depois você vai caminhar..., dois e meio você vai dividir por dois e subseqüentemente sempre dividindo por dois, a pergunta é que se você caminha desse jeito você vai chegar no fim do caminho? Esse é o Problema de Zenão. Esse é o problema que ele pôs, a resposta, ah! depende de como você se posiciona. Se você olha do ponto de vista físico, primeiro você não vai conseguir dar passos que divida sempre em dois, porque vai chegar um momento quando seu pé é maior do que a possibilidade de dividir então você não vai conseguir fisicamente dividir eh! Dividir por dois. Ou seja, você não vai conseguir realizar a proposta do Zenão, então naturalmente você vai chegar lá, você vai chegar lá, mas você vai chegar, é, não obedecendo às regras do problema que era sempre sair subdividindo em dois então, (   ) [...]você vai quebrar essa regra, porque seu pé vai ficar maior e você vai pular, e por *conseguinte você chega. Bom, mas isso é um problema físico. Esse é um problema físico.*

S11 usa o mesmo argumento de *S9*, professor de matemática do ensino fundamental, tem consciência de que está *caminhando*, e então, esclarece que está diante de um problema físico, e tem plena convicção de que chegará ao ponto desejado, olhando para o problema, dessa forma. Porque o parâmetro, o instrumento de medida tem um tamanho físico, pois, trata-se do pé. Então, admite que chegará, porém rompendo com as condições matemáticas do problema.

Continuando sua análise do problema, *S11* se posiciona do ponto de vista matemático. Seu discurso é iniciado, descrevendo o problema matemático que envolve o paradoxo de Zenão, pegando uma caneta nas mãos, tratando-a como a representação de uma reta, ou um modelo de reta. Conclui dizendo que em determinado momento, diante da impossibilidade física de dividir a caneta, a operação de divisão continua apenas mentalmente.

O problema matemático é de outra ordem, o problema matemático é... se você tem um comprimento, um comprimento qualquer – o comprimento dessa caneta – (pega uma caneta com as duas mãos, cada mão em uma extremidade da caneta) eu posso dividir ela pela metade? Posso. E depois essa metade eu posso dividir ela novamente na metade? Posso. Depois o que sobrou eu posso dividir novamente a metade? Posso. E vou podendo dividir sempre. Do ponto de vista matemático, isso é verdade, porque eu não estou trabalhando com a Caneta, eu estou usando a caneta como modelo, não é? Um modelo. O que seria um pedaço de reta. Mas, a reta é uma outra ... é uma construção mental, certo?[...]

Nesse instante observa-se que, mesmo sem se dar conta, *S11* sugeriu a caneta, um objeto físico, inicialmente, para representar a reta, que é um objeto matemático. Ele acredita que a abstração necessária à compreensão da divisibilidade infinita, aconteceria após essa percepção da divisão da caneta, que é uma operação concreta. Então, depois da percepção das divisões realizadas concretamente, a abstração, imaginando-se não mais uma divisão física, mas, a partir de um certo momento seria possível apenas realizar divisões matemáticas. E conclui dizendo:

S11: [...] o paradoxo de Zenão não é um paradoxo do ponto de vista matemático, certo? E não é um paradoxo do ponto de vista físico porque fisicamente você *não pode realizá-lo, você não pode realizá-lo por experiência, existem experiências em física que você.. que você realiza neh? (...)*

O sujeito S11 lembra que o paradoxo tem esse nome por ter se originado em um momento histórico em que não havia distinção entre a física e a matemática. Esse tempo ao qual ele se refere ocorreu durante a maior parte da história, desde a Grécia antiga até por volta do século XVIII. Mas, com a revolução científica, no renascimento, matemáticos e físicos tentaram distinguir a física da matemática. A partir dessa época, a maioria dos matemáticos rende glórias ao rigor matemático, através do método axiomático na análise matemática. Esses matemáticos sentem-se apoiados nas obras que foram desenvolvidas, inicialmente, por Lagrange (1736-1813), Cauchy (1789-1857), Weierstrass (1815-1897), essa é a vitória formalista na pretendida *aritmetizaçao da análise* (Eves, 1997, p.609) e na física, há a incorporação da experimentação sistemática ao elenco dos métodos científicos empregados na investigação científica (Abrantes, 1998).

S11: [...] havia uma simbiose muito grande e por causa disso usava-se conceito um dos

outros, mas chegou-se ao momento, na época de Cauchy e Weierstrass etc, que se começou a separar claramente os conceitos físicos dos conceitos matemáticos neh? a física é uma modelagem do mundo no qual nós vivemos, a matemática não é uma modelagem de um mundo no qual nós vivemos, a matemática é fruto de construções, de elaborações puramente intelectuais certo? Através da axiomática ou através de outras construções[...]

Observa-se que, deixando de lado a história, corre-se o risco de cometer equívocos, pode-se, por exemplo, construir uma idéia de que a matemática é uma linguagem independente de qualquer raiz empírica e apenas voltada para seus próprios desenvolvimentos, idealizados a partir de um corpo de axiomas, fiéis aos princípios da lógica formal, e que isso lhe basta. Ou por outro lado acreditar que a Física é uma ciência experimental em todo seu desenvolvimento.

Sabe-se que essa independência não é verdadeira. Por isso, depois dos argumentos aparentemente convictos de *S11*, a pesquisadora relata um pouco da história da matemática, lembrando que a matemática se desenvolveu na intenção de descrever ou representar problemas físicos, e então *S11* argumenta:

S11: [...]a matemática ainda hoje... ela tira inspiração no físico, obviamente... é uma construção humana... a matemática não deixa de ser uma construção humana ok?

S11 reconsidera parte do que havia afirmado anteriormente, diante de uma breve argumentação sobre o processo histórico de desenvolvimento da matemática.

Na continuidade do diálogo, *S11* declara sua crença na possibilidade de traduzir estruturas matemáticas a partir de experiências sensoriais, e propõe que esse seria o papel da educação, fazer essa transposição, do sensorial às estruturas matemáticas. *S11* destaca sua preocupação em relação ao tempo para essa transposição, pois admite que deve haver um tempo necessário para que representações matemáticas sejam incorporadas pelos indivíduos, após o *refinamento,* a partir de uma percepção.

S11: [...]Você vai ter sempre esse problema, você vai ter que conciliar o elemento empírico, a experiência sensorial que uma criança tem do mundo e mostrar que dentro da experiência sensorial dela, existem estruturas ou formas matemáticas, mas que você tem que sair gradativamente, refinando a idéia, até você chegar no conceito. Nós... é claro que isso não tem que ser feito em um ano, em dois anos em três anos, mas é esse o seu movimento final. Certo? Você vai sair de uma situação empírica ou de dados sensoriais, vai gradativamente refinando até chegar ao conceito matemático, que não tem nada a ver com realidade física.

.

S11 mostra, posteriormente, uma preocupação com o refinamento dos conhecimentos, do sensorial ao formal, porque acredita que aquele que pretender alcançá-la terá que se apropriar de conhecimentos bem avançados. Nessa proposição ele acredita que há muitos caminhos a percorrer até alcançar a pretendida formalização. A preocupação maior em *S11* é que acredita que o indivíduo que fará a transposição não poderá cometer desvios que possam vir a prejudicar uma possível formalização do problema. O conhecimento matemático avançado muitas vezes deve ser usado apenas para transpor o problema, da experiência para uma compreensão matemática.

Essa preocupação de *S11* com as transposições, partindo de uma percepção através de uma experiência, até uma idéia matemática, fica mais clara quando a pesquisadora propõe tratar objetos matemáticos da mesma natureza do paradoxo de Zenão e das dízimas periódicas através das somas infinitas, culminando no conceito de limite, em que as colocações de *S11* são as seguintes:

S11: *O conceito de limite não é um conceito trivial, não é um conceito simples, não é. Primeiro o conceito de limite no seu aspecto geral[...] alguns limites são simples de entender e de perceber, mas o esforço intelectual exigido para você entender o processo de limite, é um esforço intelectual considerável, certo? Vou te dar um exemplo, na França, no currículo tradicional de medicina, você é obrigado a fazer o nosso equivalente ao cálculo I e II, [...]entende-se que se você percebe a noção de limite, você tem... você chegou num nível intelectual tal que você pode perceber outras abstrações, certo?[...]*

S11 demonstra estar consciente da importância do desenvolvimento do conceito de limite, que deve estar explicitado nas construções do conceito do infinitamente pequeno, e diante da possibilidade de explicitar o conceito de limite, no ensino fundamental, expõe suas preocupações.

S11: Creio que sim, é, tem que ter muito cuidado, porque... sair refinando as coisas. Por exemplo, o "paradoxo" de Zenão e a divisibilidade da reta envolvem os conceitos de limite, e que você pode apresentar na sala de aula, mas se não fizer isso com muita clareza, com muito cuidado, pra você sair de uma situação empírica você chegar numa situação de um conceito matemático de divisibilidade, se você não fizer isso você vai confundir as pessoas, [...]

Mesmo mantendo as preocupações, acreditando que exposições equivocadas podem conduzir a noções matemáticas não pretendidas, *S11* propõe possíveis abordagens que visem introduzir esse conceito, considerado da matemática avançada, já em níveis educacionais bem elementares. Ele expressa essa idéia, quando concorda com a pertinência da introdução ao conceito de limite, que considera necessária a compreensão matemática do paradoxo de Zenão. Mas, principalmente, porque acredita que a iniciação a esse conceito, quanto mais cedo, melhor. E propõe uma abordagem adequada, que conduziria a um nível de desenvolvimento mental mais elaborado.

S11: Eu acho que é possível e deve ser feito...um conceito que quanto mais cedo você aprender, quanto mais cedo você tiver... experiência com ele, melhor para o seu desenvolvimento intelectual[...]

S11 hesita diante de sua própria proposta, pois, tem consciência das condições precárias na formação de professores de matemática, contingente necessário para essa tarefa. Acredita que é mais uma questão de qualidade do profissional que se forma, e que isso pode ser um empecilho para a transposição desejada.

S11: Só que é necessário que o instrutor tenha bem claro na cabeça dele o que é que significa números reais, o que é construção dos reais, tudinho, não que ele vá passar isso pros alunos, mas para ele fazer a transição correta entre dado empírico e o conceito matemático.

As questões colocadas por *S11* apontam para questões mais gerais: a de que mesmo matemáticos formalistas convictos compreendem necessidades de mudanças, mesmo que isso implique a introdução de novos discursos, construídos para esses fins específicos, e acreditam na importância da educação para as transformações pretendidas; e ainda mais, mostram clareza sobre a importância de conceitos como o de limite, para o desenvolvimento do pensamento abstrato.

O sujeito *S12,* ao ser interpelado a pronunciar-se sobre o paradoxo de Zenão, comporta-se com hesitação. Esse sujeito vai lentamente refletindo sobre o problema, não como problema matemático, mas, reconhecendo-o como possível objeto para ser usado na construção do conceito de infinito na educação básica. Acostumado a ver os conhecimentos de forma compartimentada, não se considera capaz de emitir um parecer sobre um problema que considera ser do ensino da matemática. Acredita que o problema de Zenão transcende a sua potencialidade, mesmo tendo uma prática docente de mais de quinze anos dedicados à formação de professores de matemática.

S12: [...] eu não sou uma pessoa muito indicada pra isso, porque eu creio que... esse tipo de assunto, esse tipo de problema transcende a minha potencialidade [...] isso é mais um problema que seria discutido assim... no âmbito da área de ensino da matemática para pessoas de pouca idade... e não tenho muita experiência nesse ramo,[...]

Esse sujeito, *S12*, foi escolhido para essa pesquisa por sua experiência com ensino de matemática na educação superior, e também na educação básica, no início de sua carreira. Porém, para dar continuidade ao diálogo, a pesquisadora teve que propor o problema de Zenão, de outra forma. Ela introduziu no diálogo a versão do problema como proposto em *a dicotomia*, citado na primeira seção, que propunha que se o espaço pudesse ser dividido infinitamente, então não existiria movimento.

S12 interessa-se por essa versão do problema e se envolve com o problema, e depois de refletir um pouco, encontra uma ligação dos conceitos envolvidos no problema com algumas deficiências que percebe em seus alunos. Nessa reflexão sobre o paradoxo de Zenão, *S12* toma consciência de que os conceitos envolvidos nessa questão têm uma natureza diferente daqueles que, tradicionalmente, são cobrados na educação básica. E acredita que a natureza dos conceitos envolvidos no paradoxo tem as características dos conceitos que seriam necessários à educação básica, para ensinar a *pensar*.

S12 propõe que, de alguma forma, o conceito matemático de limite pode explicitar o que acontece no paradoxo de Zenão. Esse sujeito deixa claro que, para esse nível de ensino, é importante que se priorizem procedimentos envolvendo conceitos que ensinem a pensar. E afirma que esses procedimentos nada têm a ver com as *calculeiras* priorizadas tradicionalmente.

S12 acredita na necessidade de mudança e que é necessário dedicar mais atenção às mudanças na educação básica. E acredita que essas mudanças devem surgir em outras instâncias, por aqueles que se dedicam ao *ensino de matemática para alunos de pouca idade*.

S12: entendo que no tocante a isso que você falou dos paradoxos, eu acho que eles vão em cima da ferida... da idéia de limite[...] a matemática no curso secundário não é a formação de matemáticos, de... de físicos, de astrônomos... a... matemática nas classes elementares é exatamente... a que desenvolve o pensamento lógico... criativo... e não de criar nas pessoas mecanismos que uma calculadora faz melhor do que ele, não e? [...] é uma oportunidade que a gente tem de desenvolver o pensamento crítico da pessoa... a percepção de coisas que na vida comum ele passa e não pressente. [...] eu acho que no curso secundário, pelo que percebo, a matemática tem sido extremamente desprezada... a matemática como instrumento de desenvolvimento do raciocínio é privilégio do... de uma parte que não é importante, que é a parte da calculeira.

S12 evidencia que o que seria o principal objetivo da matemática, vem sendo desprestigiado por práticas pedagógicas que cometem erros históricos, privilegiando o cálculo, que acredita, não são as formas ideais de estimular o raciocínio. *S12* propõe que atitudes devem ser tomadas para solucionar problemas no *ensino* *secundário*[10]. Ele considera que há uma defasagem nos processos de ensino de matemática e que muitos dos procedimentos tradicionais são inadequados. Segundo ele, as práticas tradicionais *não ensinam a pensar*. Esse sujeito acredita que o ensino de matemática na educação básica deve mudar porque não está cumprindo o seu principal papel, que é o de ensinar a pensar.

S12: [...] eu agora me lembrei de um fato do tempo em que eu ensinava no colégio Marista, tinha um professor de história, e uma vez ele disse: olha (   ), nós professores de história, exploramos muito mais o raciocínio dos alunos do que os de matemática... e eu me revoltei naquela hora assim... eu não achei bom, não é? Apesar de eu não ensinar na oitava série que era onde ele ensinava... aí ele disse: "por exemplo a gente coloca questões nas provas que levam os alunos a raciocinar sobre os fatos... sobre as conseqüências históricas... vocês da matemática:...Resolva essa equação do segundo grau. Ache o vértice dessa parábola. Procure as raízes dessa equação. Não é? Ache a intersecção no eixo dos y. Uma prova dessa que mede apenas a capacidade de você fazer conta", nesse caso eu me curvei à proposição dele.[...]

Embora com toda essa experiência didática e consciência adquiridas ao longo dos anos na prática pedagógica *S12,* que é responsável pelas disciplinas de cálculo, segue os moldes tradicionais na formação de professores de matemática. Porém, em suas declarações denuncia que há algo errado nas condições em que os jovens chegam à universidade. Manifesta sua preocupação com o baixo nível de desenvolvimento intelectual que fica diagnosticado, através das avaliações, nas disciplinas que leciona.

Nessa reflexão de S12 sobre a condição em que os alunos chegam à universidade, que ele qualifica como sem saber pensar, ele considera que a solução do problema está na base do desenvolvimento do pensamento. E, então, estaria na forma como os conceitos matemáticos são trabalhados na educação básica.

*S12: [...] aqui na universidade, por exemplo, a dificuldade quando se põe na prova uma questão teórica... uma questão que exija pensar, não é? Essa questão que eu estou corrigindo aqui na prova de cálculo (*aponta para uma pilha de papéis em sua mesa) *é uma questão em que você não tem que usar raciocínio nenhum... calcular uma integral imediata... então é uma questão*

[10] S12 se refere ao ensino fundamental de 5ª. a 8ª. séries, usando uma terminologia antiga.

onde a maioria das pessoas acertou. Mas as questões que carecem da pessoa pensar... pelo hábito que têm de não pensar... gera dificuldades... é assim... ele não foi ensinado a pensar. O aluno em geral, tem muita dificuldade de pensar.

S12 demonstra uma preocupação muito grande com a construção do pensamento nas séries iniciais, pois tem consciência de que isso se reflete nos níveis posteriores. Acredita no potencial da matemática com seus desenvolvimentos conceituais atuais, para estimular determinados comportamentos cognitivos, que ele classifica como ensinar a pensar.

S12 coloca o conceito do infinitamente pequeno no rol dos que considera conceitos que ensinam a pensar. E também o conceito de limite, ao qual faz referência no início do discurso e conclui dizendo que ensinar matemática sem ensinar a pensar é edifício sem alicerce. O alicerce da matemática, então, seriam esses conceitos que ensinam a pensar, nos quais as *calculeiras* e as *fórmulas* não estão incluídas.

S12: [...] e...eu acho que é um momento de reflexão nessa história da divisibilidade, não é? [...] o infinitamente pequeno que a gente despreza, porque dá trabalho ensinar a pensar...ensinar a pensar, dá trabalho, é muito mais fácil você ensinar a usar fórmula. Mas ensinar a pensar, não é fácil. [...] tudo é baseado em conceitos né? Iniciais das coisas. Senão você começa a montar um edifício sem alicerce, sem os conceitos, sem as idéias... porque tudo depende.. tudo depende do conceito né?

A experiência de *S12* o conduz a identificar os aspectos bem gerais sobre as questões do tipo do paradoxo de Zenão. Depois de uma primeira declaração, em que não se sentia capaz de explanar sobre o problema colocado, ele consegue perceber uma importante relação, dos conceitos envolvidos com a qualidade do desenvolvimento do pensamento. Na reflexão, chega a criar uma expectativa sobre a interferência didática envolvendo o conceito de infinito e infinitésimo na educação básica, acreditando que pode gerar uma outra realidade.

Nas declarações de *S13,* também surgem propostas para introdução de conceitos matemáticos que possam resolver algumas insuficiências dessa linguagem, para abordagens atuais, na educação básica. Esse sujeito sugere que para tratar problemas do tipo do paradoxo de Zenão, de alguma forma, deve ser introduzida a idéia dos limites matemáticos.

S13 destaca que essa questão também tem a ver com a necessidade de se explicitar as diferenças entre os tipos de igualdades em matemática. Para isso, salienta formas de como fazer compreender as declarações matemáticas do tipo 0,999...= 1, lembra que não pode deixar de ficar claro que não se trata de uma igualdade do tipo *comum,* mas que está implícito um processo de algo que *está indo*, uma idéia de movimento, uma idéia de limite, uma idéia de infinito.

S13: Sobre essa questão do paradoxo de Zenão eu acho que ... todo esse processo... passaria pela introdução, de alguma forma, da...da... desse conceito né? De limite, né? A questão do limite. Porque quando você tem, por exemplo, essa questão da dízima né? Essa questão da dízima... essa igualdade representa, representa, um limite de uma seqüência... então... essa noção, tá? De limite, parece-me que é extremamente necessária para tornar isso claro, né? Na hora que você escreve a igualdade aí, você... você tá abrindo mão de uma verdade, você não tem uma igualdade, você tem... você tem num limite, quer dizer, num limite no infinito você tem a igualdade, isso não significa dizer que... do ponto de vista prático, essa igualdade seja uma igualdade... absoluta né? Você tem a igualdade no limite. Que é uma coisa que você tá indo pro infinito, aquele processo de movimento que você tem. [...]

Lakoff & Nüñez(2000) também dá uma relevância a esse aspecto da diferença entre as igualdades em matemática, lembrando que até o século XVI não havia um único símbolo matemático para estabelecer diferentes tipos de igualdades, usavam-se várias linguagens com significados bem específicos como: “dado”, “produção”, “pode ser decomposto em”, “pode ser fatorado em”, “resultando em”, e assim por diante. Esse autor acrescenta, então, que uma compreensão do que “=“ representa, requer uma análise cognitiva das idéias matemáticas envolvidas.

As diferenças entre as igualdades matemáticas, traduzidas no discurso de *S13* está associada, nesse caso, a sua percepção do conceito de infinito como a percepção de processos, de movimento. Esse sujeito ressalta um outro conceito, a idéia de limites matemáticos. Destaca a importância em se estabelecer a diferença que há entre a igualdade em um limite, e um outro tipo de igualdade, que ele chama de *absoluta.*

S13: [...] a gente tava falando sobre a questão das dízimas periódicas, que na minha concepção é uma problema do mesmo tipo do, do... paradoxo de Zenão e... acho que só fica claro também, essa..., essa coisa com relação a essas igualdades certo? Se a gente trabalhar, novamente o conceito de limite, com a *criançada tá certo? Porque de fato, nós não temos uma igualdade não é? É um processo, novamente volto àquela história, é um processo de movimento é um processo que você, que você tá caminhando, caminhando, é um processo infinito. Então na verdade... quando você escreve uma igualdade não é uma igualdade de forma absoluta não é? É igualdade relacionando o limite. O limite que é igual àquilo ali, tá certo?*

Parece estar claro nas colocações de *S13* que, deixando de abordar questões como as dízimas periódicas, com essa linguagem apropriada, dos limites, está-se perdendo a oportunidade de desenvolver noções sobre diferentes tipos de igualdades. Outro ponto importante nas declarações de *S13* foi o destaque sobre o fato do conceito de infinito implicar uma noção de movimento, na percepção de processos.

S13 deixa claro que, não seria priorizando apresentações formais de limite matemático, que se encontraria a forma mais adequada para iniciar uma abordagem a esse conceito. Esse sujeito propõe que se haveria de pensar em outras formas, para se iniciar esse conceito em alunos no ensino fundamental. Ele expõe sua compreensão sobre a necessidade de se tratar de conceitos como o de limites, e de aproximação. Porém se considera sem nenhuma proposta didática para iniciar essas abordagens aos conceitos em níveis básicos, declarando que:

S13: Então eu acho que tudo isso aí passa pela introdução, de alguma forma, não sei como, tá certo? Desse conceito né? O conceito de limite. Conceito de aproximação.[..]

Mais uma vez, observa-se nas declarações desse sujeito, questões apontadas por Lakoff & Nüñez (2000, p.187) no caso dessa última frase de *S13*, a percepção de uma metáfora básica do infinito que se pode caracterizar em processo de aproximação. E então aí estaria a proposta de *S13*, o conceito de aproximação.

4.2 - Conclusões :

Essa pesquisa indica que o conceito de infinito é responsável por vários níveis de abstração, mas, prioritariamente, uma abstração fundamental, a percepção de processos, percepção de movimento nos fenômenos.

Noções de movimento se apresentam nas várias formas de descrever e representar o conceito de infinito. Há as descrições mais simples, que utilizam noções de números Naturais, como seqüência infinita, até noções de infinitésimos, através dos números Reais.

De uma maneira geral, são noções que descrevem processos iterativos contínuos, que são protótipos de metáfora básica de infinito. Objetivamente, percebe-se que essas descrições, com um menor ou maior aprofundamento, encontram seu estímulo na linguagem matemática, linguagem de ciências.

Porém, também se observa que, para a descrição de fenômenos aparentemente simples, como o paradoxo de Zenão, a linguagem matemática está precária, na verdade está sub utilizada. Dada a riqueza dos desenvolvimentos conceituais atuais para descrever fenômenos desse tipo, e as formas de abordagens tradicionais utilizadas, por exemplo, para descrever as dízimas periódicas, estas, que são modelos matemáticos adequados para compreensão de fenômenos do tipo citado, deveriam ter um tratamento conceitual dentro de uma linguagem da moderna matemática, necessária à compreensão do problema.

Nas descrições de processos como o paradoxo de Zenão, dadas por sujeitos, alunos do ensino fundamental, há uma associação da distância que estão cobrindo, que diminui gradativamente, com um número Real. Os sujeitos que abandonaram essa associação, afirmaram que chegariam ao ponto desejado, mas, não explicitam qual a idéia que os faz quebrar a regra do problema. E os que continuaram a pensar na distância como um número Real, afirmaram que não chegariam, jamais, ao ponto pretendido. Esses últimos não conseguiram associar o conhecimento matemático às possibilidades físicas de existência do problema. O terceiro grupo de respostas, ou seja, os sujeitos que hesitaram entre uma possibilidade e outra, também não tinham linguagem para argumentar sobre o porquê de suas dúvidas.

Essas questões evidenciaram a necessidade de introdução de outros conceitos que surgem a partir dos próprios argumentos dos sujeitos, até uma linguagem mais elaborada. Ou seja, evidencia-se que se deve acrescentar algum componente, uma linguagem que melhor descreva o problema. Essa linguagem deve contemplar o desenvolvimento de conceitos envolvidos no problema observado, a partir da experiência vivenciada.

Os sujeitos *S8, S9* e *S10* , professores do ensino fundamental são, aparentemente portadores de uma mesma formação, pois todos obtiveram licenciatura em matemática na Universidade Federal de Alagoas e têm aproximadamente o mesmo tempo de experiência docente na educação básica. No entanto, observam-se posturas diferentes e práticas desiguais. Isso evidencia uma evolução na prática docente da disciplina matemática, porque há algum tempo, traçava-se um perfil único dos professores de matemática, caracterizado por comportamentos equivalentes. Essa flexibilidade, observada na prática atual do professor de matemática, aponta uma perspectiva de mudança já iniciada, percebida no discurso e na prática. Pode-se observar que esses sujeitos pesquisados, por mais tradicionais que aparentem suas posturas ou declarações, apresentam diferentes graus de evolução no sentido da articulação de um discurso comprometido com o pensamento matemático moderno, e com as teorias cognitivas.

Nos diálogos da pesquisa, ocorreram em vários aspectos, construções de idéias que apontaram para uma direção: uma necessidade de mudança. Uma mudança, através de uma apropriação do conhecimento atual, e claramente da apropriação de uma outra postura para o ensino de matemática. Essa postura aparece em forma de proposta para que exista uma educação matemática voltada para a construção de conceitos fundamentais. No caso específico, conceitos que possam explicar um fenômeno do tipo do paradoxo de Zenão, que envolve o conceito de infinito e infinitésimo, entre outros que estão atrelados a estes, como os conceitos: de limite, de aproximação, de diferença entre igualdades matemáticas.

Essas propostas de mudança, para inclusão de conceitos matemáticos, têm um aspecto novo em relação às posturas tradicionais, porque trazem em seu formato uma questão fundamental para a educação matemática: a apropriação da linguagem matemática através da introdução de conceitos que expliquem fenômenos, com abordagens, para a educação básica, que não devem ser formalizadas, a princípio.

Outro ponto relevante identificado na pesquisa é que os docentes acreditam que a introdução de conceitos como o de limite, de infinitésimo, tem características que podem ser fundamentais para o desenvolvimento do pensamento matemático, e por isso importantes para o desenvolvimento do pensamento abstrato.

É importante reafirmar que esse pensamento abstrato inicia-se nas metáforas conceituais que traduzem a percepção de processos iterativos contínuos, ou seja, o conceito de infinito está associado a uma visão dinâmica de se perceber fenômenos, utilizando-se, principalmente, a linguagem matemática, como apontada por Lakoff & Nüñez(2000).

As representações matemáticas do infinito, como se procurou deixar claro nesse trabalho, são protótipos para construção de Metáfora Básica de Infinito (Lakoff e Nunez, 2000), evidenciando-se nessa linguagem matemática atual expressões que traduzem movimento.

Existe uma preocupação, por parte dos professores formadores de professores, com relação à construção do pensamento matemático nas séries iniciais, pois têm consciência de que isso tem desdobramentos nos níveis posteriores. Esses sujeitos também concordam com a insuficiência de conceitos matemáticos, destinados ao ensino fundamental para tratar problemas do tipo do paradoxo de Zenão, e, por conseguinte, do infinito no pequeno.

Há uma concordância entre os professores do ensino fundamental e os matemáticos, formadores desses professores, para que haja uma introdução de idéias matemáticas consideradas avançadas, nos níveis básicos de escolaridade, por via conceitual sem privilegiar a formalização nas abordagens iniciais. Existe uma idéia entre os matemáticos, a respeito de problemas do tipo do paradoxo de Zenão, de que estes só podem ser tratados através do conceito dos limites matemáticos, e que se trata de um outro tipo de igualdade. Esses sujeitos concordam que a linguagem matemática utilizada na educação básica é insuficiente, mas, insistem que as abordagens desses conceitos, para níveis básicos, não podem ser nos moldes puramente formais, como na educação superior.

Enfim, percebe-se que as idéias matemáticas estão presentes na construção do conceito de infinito e que o conceito de infinito é constituído por metáforas conceituais e metáforas matemáticas. Ou seja, o conceito de infinito através da linguagem matemática contribui para níveis mais elaborados de pensamento abstrato.

5 - Intervenção no Desenvolvimento das Metáforas Básicas do Infinito

O fato do paradoxo de Zenão ser um foco central nessa pesquisa é por ser um problema dos mais antigos sobre uma representação do infinito, desde os primórdios do desenvolvimento do pensamento, pois ao que consta "*o infinito surgiu foi sob a forma de processos convergentes ilimitados, em que o primeiro testemunho literário disto temos em Zenão de Eléa"* (Becker,1965, p.84), mas, principalmente, por ter continuado a estimular questões, inclusive na própria teoria matemática, que propõe em linguagem matemática atual, uma nova descrição desse problema, depois de ter superado conflitos teóricos.

Recentemente, também, através de Lakoff & Nüñez(2000), surgem as análises do ponto de vista cognitivo sobre essas idéias matemáticas e nessa confluência de idéias, a eminência de um novo olhar sobre questões como a de Zenão. As novas abordagens possíveis ao problema delineiam-se como proposta para uma interferência principalmente, através da educação matemática.

Na obra desses autores, as análises feitas ao conceito de infinito estão presentes em toda estrutura do trabalho, naturalmente, pois esse conceito está na maioria dos conflitos da matemática antiga e em todo pensamento matemático atual. As conclusões a que chegaram esses pesquisadores são de máxima importância para as análises nessa pesquisa, as idéias desenvolvidas por Lakoff & Nüñez podem ser consideradas um *ponto de máximo* contemporâneo para a educação matemática. A interferência pretendida parte do principio da análise cognitiva das análises matemáticas que considera a matemática como uma linguagem constituída a partir de metáforas conceituais.

Segundo a visão de Kuhn (2001) há necessidade de se aguçar os olhares diante de novos paradigmas para que se possa rastrear por vários campos do conhecimento suas formas de desenvolvimento e que diante desses novos referenciais, muitas outras abordagens podem ser explicitadas.

Em se tratando do conceito de infinito têm-se na história, nas ciências cognitivas, no desenvolvimento do pensamento matemático, no currículo na educação básica, nos paradoxos do infinito, em praticamente toda área de desenvolvimento científico atual, campos de conhecimentos que se articulam em um todo mais consistente, no sentido de poder serem traduzidos em práticas, processos que possam interferir positivamente no desenvolvimento do pensamento matemático.

A proposta de Lakoff & Nüñez é de uma mudança radical, é de uma nova consciência sobre os fundamentos da matemática que se inicia com a compreensão de que a linguagem matemática se constrói através das metáforas conceituais, originadas nas relações do mundo com as formas de expressar e representar essa percepção. A linguagem matemática, então, constitui-se de metáforas, e metáforas de metáforas. Por isso, as estruturas metafóricas do pensamento matemático tornam-se cada vez mais ricas, mais completas. Essas metáforas matemáticas aperfeiçoam-se ao longo da história, e retornam como novo instrumento do pensamento, em um movimento constante.

Nesse momento histórico, a linguagem matemática é imprescindível por sua riqueza metafórica, e por ser a mais dialética das ciências, como propõe Caraça (2002), pois, encontra impulsos nos pontos mais contraditórios como, no caso das atuais representações do conceito de infinito. Dessa forma pode-se afirmar que é a mais humana de todas as linguagens, tornando-se cada vez mais indispensável para a compreensão e expressão de pensamentos e fenômenos.

E, de uma maneira mais geral, o conceito de infinito, inerente ao pensamento matemático atual, pode modificar o eixo de condução nas abordagens dos fenômenos, e por conseqüência, na forma de construir o pensamento matemático, a partir da educação básica.

A visão de Lakoff e Nüñez provoca uma tendência em educação matemática: é entender a idéia matemática, fazer análise das idéias matemáticas e, através de investigações apropriadas, chegar a uma compreensão sobre que metáforas conceituais geram metáforas matemáticas e podem servir para a construção de conceitos.

A importância dada a essa forma de conduzir a construção do pensamento matemático é principalmente, por se tratar de uma direção para construção de significado em matemática.

Os conteúdos matemáticos que carregam noções do infinitamente grande e do infinitamente pequeno e que fazem parte do currículo atual da educação básica, são obscurecidos nas etapas iniciais de escolaridade, praticamente não recebe nenhum tratamento didático. Provavelmente, isso aconteça porque nas tradicionais formas de expor os conteúdos matemáticos, há pouca chance de se conseguir uma introdução que não seja traduzida em paradoxos, e não há requisito na formação de professores de matemática que os prepare para enfrentar questões desse tipo.

A supervalorização dos desenvolvimentos formais, se por um lado proporcionou um volume muito grande de desenvolvimento matemático, por outro lado, tentou separar o conhecimento matemático de sua origem empírica, distanciando-se muito de novas perspectivas como a construção de significado em matemática. Isso obscureceu idéias sobre uma linguagem matemática voltada para descrever fenômenos.

Nesse momento, portanto, é imprescindível se tomar novas atitudes como, por exemplo, construir um corpo de noções matemáticas apoiadas nas análises das idéias matemáticas. E nesse processo, a observação das construções metafóricas, diante de exposições a paradoxos, por exemplo, pode ser uma experiência bastante fecunda.

Para se ter uma idéia do que pode ser feito, a partir da observação dos registros dos diálogos construídos nas declarações a esse problema de Zenão, com os sujeitos da pesquisa, o conceito de infinito aparece construído sob uma metáfora de distância, uma distância variável, que diminui gradativamente.

Lakoff & Nüñez propõem que, iniciado algum processo semelhante ao da percepção de uma metáfora básica de infinito, esse processo estará representado nos infinitos matemáticos. Na verdade, há elementos comuns nas metáforas da linguagem do dia-a-dia e na linguagem matemática, como aquelas das distâncias, detectadas na pesquisa.

Na construção do conceito de infinitésimo, depara-se com um outro conceito, relacionado ao conceito de infinito, presente no paradoxo de Zenão, ou em quaisquer processos infinitos convergentes; trata-se, pois, do conceito de limite. Na verdade, trata-se da construção de um novo tipo de igualdade, ou o conceito *de "tender a".*

As observações mostram que para esclarecer um conceito, precisa-se analisá-lo, e, muitas vezes, adiantar outras noções relacionadas a ele, mesmo se o objetivo é a construção de um determinado conceito, pode ser necessário uma grande quantidade de relações metafóricas, nessas etapas da construção, que precisam ser expostas claramente.

A intervenção didática específica pretendida com esse trabalho está delineada na valorização da proposta de uma análise cognitiva das idéias matemáticas, citadas anteriormente, propondo-se, então, o desenvolvimento de outras formas de abordagens, que possam interferir na construção dos conceitos matemáticos, especificamente, o conceito de infinito e de infinitésimo.

Trata-se de uma reflexão sobre os instrumentos que se tem hoje, que podem ser utilizados como ferramenta na educação para construção do conceito. Pode-se abrir um leque de possibilidades, e então, perceber quais são as situações que podem se caracterizar propícias a uma construção mais elaborada. O objetivo nessa reflexão é detectar situações favoráveis, à maneira como propõe Brousseau (1996), situações didáticas favoráveis, com uma visão ampla, na direção da construção de um campo conceitual de infinito.

A exploração do uso de paradoxos parece ser uma situação didática bastante favorável, dentro de uma compreensão dialética. Deve-se compreender que o debate na presença da contradição, é ponto que favorece o desenvolvimento. E este momento histórico determina uma situação favorável para muitos debates, visando ao desenvolvimento da educação matemática.

Um exemplo do que pode ser feito, como se observou durante a pesquisa, para uma abordagem atual do problema de Zenão, parece ser imprescindível o desenvolvimento de noções que envolvam conceitos como limites, infinitésimos, distâncias variáveis, aproximações matemáticas, metáforas conceituais etc. Essas noções conceituais aparecem, não só nas definições matemáticas, mas, nas metáforas conceituais nos discursos dos sujeitos de pesquisa; e nas análises cognitivas de Lakoff & Nüñez.

Uma primeira preocupação poderia ser com as questões que envolvem a construção do conceito de infinitésimo, na metáfora da aproximação, na metáfora básica das somas infinitas com limite, etc. pois, deve-se respeitar os níveis de desenvolvimento cognitivo daqueles que se pensa em favorecer, e ao mesmo tempo manter a preocupação em não comprometer futuras idéias matemáticas que poderão ser desenvolvidas a partir das primeiras noções, até uma representação formal.

Iniciando com uma análise dos relatos dos alunos do ensino fundamental, como referencial, fica claro, que é necessário que se desenvolva algum tipo de abordagem, uma explicação a respeito do que acontece em uma situação similar ao paradoxo de Zenão. Nesses relatos observou-se, através das descrições usadas por esses sujeitos, um infinito representado por processos iterativos contínuos, em que as quantidades que variavam, se relacionavam com uma distância que diminuía, iterativamente. Essas representações são instâncias para metáfora básica do infinito que, por sua vez, é fundamental para a construção de uma proposta didática que possa favorecer uma introdução a esses conceitos.

Nesse processo de observações, há uma constatação muito importante: do ponto de vista de uma análise matemática, ou da interpretação dada por Weierstrass (Lakoff & Nüñez, 2000) ao descrever analiticamente o limite matemático, encontra-se por trás da representação formal matemática do conceito de limite, uma metáfora conceitual de distância variável.

A metáfora matemática utilizada para representar a distância variável é a metáfora do “módulo”, essa metáfora dos módulos é usada na geometria analítica para atribuir um valor numérico positivo a uma distância qualquer, entre dois pontos, em uma reta numérica. A metáfora da distância aparece também na idéia matemática da definição de limite.

No caso do paradoxo de Zenão, e de muitos outros problemas similares, a idéia de como se deve avançar até o limite, é a de uma distância que é diminuída por um processo iterativo, ou seja, a variação da distância é definida por uma idéia, que determina como essa iteração deve acontecer. Como já visto anteriormente, no problema de Zenão, é de metades em metades, matematicamente definida como: $f(n) = \frac{1}{2^n}$, a compreensão de limite nesse caso tem uma relação com a construção do conceito de infinitésimo, que corresponde à metáfora básica das seqüências de somas infinitas com limite, em que se afirma que "*Não há número real positivo r tal que* $0 < r < | f_n - L |$" em que f_n é a função que representa o paradoxo, e L nesse caso é zero, pois se trata da noção vista anteriormente, que mostra que essa função é um infinitésimo, e tende para zero, quando *n* tende para o infinito.

A desigualdade acima, $0 < r < | f_n - L |$, junto à afirmativa de que não há número Real r, nessas condições, está querendo dizer, com outras palavras, que, por menor que seja r (um número Real) a distância que falta, para o limite, $|f_n - L|$, pode ser ainda menor, do que qualquer r imaginado.

Na perspectiva de se construir conceitos através do problema de Zenão, e tentando utilizar todos esses conhecimentos disponíveis, pode-se pensar, então, em expor o problema para alunos do ensino fundamental, de uma outra forma, como por exemplo, depois de colocar o mesmo problema de Zenão, como tradicionalmente, em vez de perguntar, simplesmente, se o sujeito chega ou não ao ponto desejado, pode-se propor uma outra questão, perguntando-se:

"Depois de caminhar todas as metades possíveis, qual é a menor distância, em relação ao ponto onde se quer chegar, onde a partir daí o sujeito não conseguirá mais dividir, e o sujeito poderá, ou quebrar a regra do problema e chegará, ou então, ficará parado por não conseguir mais dividir, e assume que não chegará ao ponto desejado".

Para dar essa resposta, o aluno deverá ter utilizado, inicialmente, qualquer objeto físico que possa servir como padrão de medida para dividir e que, a partir de um certo ponto, diante das condições individuais, instrumentais, de cada um, que se possa pensar nas condições de divisões propostas no problema.

Expondo o problema de Zenão como nos parágrafos acima, o que estaria proposto seria o início de uma discussão em torno do problema. A partir das possibilidades vivenciadas e das respostas que fossem dadas, então, seriam criados novos argumentos, para continuar o processo de construção. Então, poderiam ser consideradas outras possibilidades físicas, como instrumentos mais precisos. E, esgotando-se as possibilidades instrumentais atuais, conseqüentemente, se partiria rumo às possibilidades matemáticas e à construção da idéia de números Reais, e infinitésimo, em que se poderia trabalhar o fenômeno das divisibilidades como um processo de aproximação.

Propondo o problema dessa forma, seria possível criar um campo de discussões para esclarecer as três categorias de respostas encontradas naqueles alunos do ensino fundamental. O objetivo, para todos esses sujeitos, seria ampliar as condições de observação do fenômeno, através das noções dos números reais, construindo significado. Essa perspectiva de compreensão do problema seria ampliada, através da construção de noções de infinitésimo, não necessariamente nessa ordem.

Aproveitando-se da metáfora da distância que vai diminuindo, associando a cada distância que é gerada, um número Real, seria introduzida a noção desses números, que nesse processo infinito de divisão vão ficando cada vez menores, mas que são sempre maiores que zero, estaria destacando-se a idéia de movimento, implícita, também no conceito de infinitésimo.

O objetivo final seria a noção de infinitésimo, mas se poderia propor que estes números reais poderiam ser tão pequenos quanto se quisessem. Essa é uma construção de um processo iterativo sem um fim determinado, até a compreensão de que a distância que falta não é um número real, mas, uma variável, que fica menor do que qualquer número Real que se possa “pensar”. E eis então uma MBI, definida como na declaração anterior, “*Não há número real positivo* r *tal que* $0 < r < \ / f_n - L /$ “ , que pode ser lida da seguinte forma: para qualquer número real imaginado, a distância que falta, pode ser ainda menor do que ele, mas sempre é maior que zero.

Usando a metáfora da distância variável misturada com a metáfora dos números Reais, pode-se propor que os indivíduos analisem, perguntando-se, até que ponto essa distância deve ser dividida, interessa ser dividida, ou pode ser dividida, considerando-se recursos instrumentais. E, então, após a extrapolação do possível dentro de uma realidade física, caminha-se rumo à possibilidade matemática de ser infinitésimo.

É fundamental se considerar o caráter metafórico da linguagem matemática nesse processo e atentar para as novas questões que vão surgindo, como outros tipos de igualdades. Nesse processo da análise cognitiva percebe-se que as diferentes igualdades matemáticas (Lakoff & Nüñez, 2000, p. 376), como já dito anteriormente, estão totalmente associadas à construção dos conceitos envolvidos. Então, precisa-se refinar também, o tratamento dado às igualdades do tipo “*tender a*”, presentes em problemas como o de Zenão.

Esse enfoque visa conduzir, principalmente, à percepção de que a linguagem matemática está muito mais próxima das formas de expressões, de descrições dos fenômenos, do que as abordagens tradicionais deixam transparecer. Matemáticos eminentes como Weiertrass que, embora não tenha deixado explicito, em linguagem natural, construiu metáforas conceituais, pois deixou registrado em linguagem matemática. Nessa dinâmica da construção e reconstrução de conceitos, símbolos matemáticos também são criados historicamente, por exemplo, o símbolo "=" também não existia antes do século XVI. A linguagem matemática redefine historicamente uma situação como a do paradoxo de Zenão, e também por esse motivo, deve estar cada vez mais presente, enquanto linguagem, e deve ser explorada através de seus símbolos e significados.

Os argumentos físicos fazem parte do argumento matemático, não se pode afirmar necessariamente quando há a confluência entre os dois argumentos. A percepção de processos iterativos contínuos faz parte da compreensão de fenômenos desse tipo analisado, é importante para a construção do conceito, representar o infinito matematicamente, para uma possível passagem à metáfora básica do infinito, que aperfeiçoará a análise dos fenômenos. Essa é, pois, a perspectiva dialética do desenvolvimento do pensamento.

Essa perspectiva conduz a uma necessidade de se redescobrir a linguagem matemática, sob os referencias de análises cognitivas, porque pelo que se evidencia, uma compreensão endossa a outra e as duas juntas podem evoluir a largos passos.

Continuando com essa exposição encontra-se na linguagem de análise matemática dos números Reais, também um outro tratamento interessante para essa distância que vai diminuindo gradativamente. A essa distância chama-se de *erro* (Lages, 1976), esse *erro* é variável, e fica tão menor, quanto mais se avança nas metades, ou, num processo mental, quanto mais se queira dividir. Essa relação é representada analiticamente pela expressão $/ f_n - L / < \varepsilon$, em que, o *erro,* é "$\varepsilon$", chamado de épsilon (quinta letra grega minúscula, freqüentemente usada em notação matemática). Analisando o porquê do uso dessa letra grega, pode-se encontrar justificativa, a princípio, argumentado que se trata de uma matemática vinculada a sua linguagem de origem, com suas letras do vocabulário de origem, dos escritos matemáticos de longa tradição.

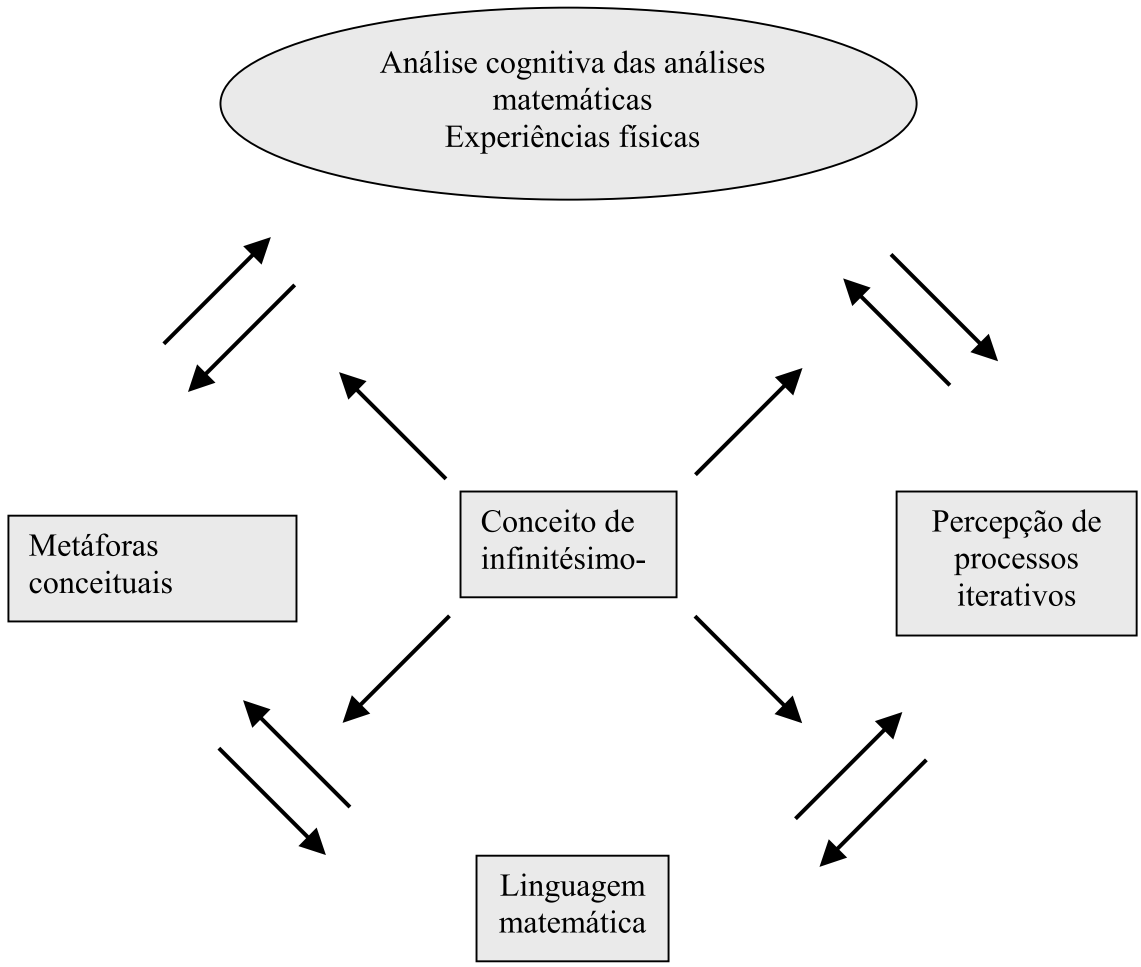
Quanto ao significado do *erro,* e esse pode ser muito importante para uma proposta de construção, pois, se em análise matemática trata-se da distância que sempre faltará para se percorrer, nunca será nula, tendendo ao limite, como se diria, não se podendo alcançá-lo. Pode-se aproveitar a conotação desse termo, "*o erro",* poder-se-ia também aproveitar essa idéia para fazer uma abordagem ao problema de Zenão. E, quando estivesse em condições experimentais, com distâncias verdadeiras, que pudessem ser vencidas, sob aquelas condições conhecidas, então, poder-se-ia associar o sentido matemático ao sentido físico e debater questões diante de um problema concreto, indagando: com determinados instrumentos disponíveis, qual seria o valor numérico do "*erro*" em que se deveria quebrar as condições do problema, diante da impossibilidade instrumental de se continuar dividindo? E depois, até que ponto, com instrumentos, esse "*erro"* poderia ficar menor?

A construção dos conceitos carregados de significados em estado constante de elaboração e reelaboração, é um dos princípios do que se pretende, o principio do movimento. Os desenvolvimentos pretendidos, os serão, principalmente nos processos educacionais, onde a "correlação entre o estágio do pensamento lógico atingido e a escolaridade... é altíssima..." (Freitag, 1984, p.191) na busca do racional, destacando-se a natureza lógica do pensamento humano descrita por Piaget (1993), e sua natureza sócio-histórica descrita por Vygotsky (2000).

Sobre o desenvolvimento do pensamento matemático, especificamente do conceito de infinito, encontram-se pesquisas que apontam para uma compreensão de desenvolvimento como um processo cíclico na aquisição dos conceitos. Passando pelas percepções nas experiências do mundo empírico, em sua relação com as linguagens, especificamente as metáforas matemáticas, utilizada até as operações e generalizações.

Os dados construídos apontam para um modelo em que o conceito de infinito é o resultado de mútuas relações interdependentes, entre as abordagens possíveis a respeito da construção desse conceito de infinito, que estão presentes em diferentes partes do conhecimento humano.

Ciclo de desenvolvimento



Convém lembrar que nessa proposta "*a figura do ciclo não significa ser normativa*, *exceto por uma ligação das partes do processo*".(Valsiner, 2000, p. 64)

Objetivamente, as três categorias de respostas encontradas nos alunos, sujeitos da pesquisa, conduziram para essa abordagem que analisa o problema da distância que falta como o *erro.* Essa reunião de argumentos matemáticos, associados às condições materiais de observação do problema, e principalmente das propostas de análises de Lakoff e Nüñez, não oferece impedimento para outras futuras abordagens formais de representar o problema. Então pode constituir-se uma linguagem científica que justificaria e apresentaria uma resposta para cada sujeito, aluno do ensino fundamental. E, principalmente, poderia conduzir ao conceito de infinitésimo, pretendido pelo problema. Construir-se-ia significado, adaptando-se às impressões iniciais que cada indivíduo tem do problema.

6- Comentários Finais

A sociedade ocidental tem o desenvolvimento baseado no conhecimento científico. Esta tradição, que se caracteriza hegemônica, está presente em todas as áreas do conhecimento. Os conceitos científicos, na sociedade atual devem estar expostos para fazer parte do cotidiano, em um ideal democrático. A produção de argumentação cientifica dos fenômenos físicos é um caminho para produção de significados através da educação.

A humanidade tem evoluído à medida que compreende os problemas, acumula conhecimentos, supera contradições, envolve-se com novos problemas. Essa compreensão dialética do desenvolvimento pode ser percebida na historia do desenvolvimento do conhecimento na humanidade.

Na sociedade contemporânea, há uma busca constante de práticas que possam potencializar a aquisição e a evolução dos conhecimentos. Nas últimas décadas têm-se destacado muitas pesquisas nas ciências cognitivas evidenciando os processos educacionais como excelência no campo de atuação e interferência. A Educação Matemática se desenvolve com as ciências cognitivas elaborando propostas e apontando para muitos caminhos em que o objeto é a construção do conhecimento.

O conceito de infinito é a incorporação pela mente, da percepção do movimento, da percepção de processos. Partindo da categoria da dialética, realidade-possibilidade, e tomando consciência de que qualquer possibilidade só se transforma em realidade quando existem condições determinadas, e, conhecendo essas ou aquelas possibilidades, deve-se interferir no curso objetivo dos acontecimentos e criar artificialmente as condições requeridas para sua transformação em realidade.

O que se pretende com essa exposição é chamar a atenção para a importância da educação nos processos de interferência na realidade, para que cumpra seu papel de apontar formas de se perceber e descrever a natureza, os fenômenos, aguçando a capacidade de abstração, aperfeiçoando noções conceituais.

O conceito de infinito, de alguma maneira já está presente em muitas percepções atuais, como por exemplo, para muitos, a abóbada celeste que era o símbolo da permanência, hoje representa um lugar das maiores transformações que se pode imaginar. O céu é entendido como uma espécie de laboratório natural. E é interessante notar que no espaço encontra-se a junção das várias correntes da ciência contemporânea. As dimensões colossais, os tempos mais longínquos estão todos nesse espaço, do qual a ciência humana conhece apenas uma fração.

Esta é uma realidade que se apresenta aos sentidos, experiências que são referenciais para as construções metafóricas. Mas o momento é de diálogo com os diferentes referenciais dentro de um mesmo corpo científico que se desenvolve, ampliando a possibilidade de outras realidades.

Então, deve-se sair ao encalço de formas para abordar esse conceito, aproveitando-se da linguagem matemática mais primária, como a da existência de quantidades muito grandes como, por exemplo, o tempo de existência do universo, sua extensão, quantidades muito pequenas como o tamanho de corpos unicelulares. O objetivo é a construção de significado, apropriando-se de todo conhecimento científico que permita explorar as possibilidades de construção dos conceitos.

O que se pretende também é traduzir em referenciais, as relações desse mundo físico, com as formas de *visualizar* o infinito a partir do finito, como propõe Russel (1978). Pode-se encontrar objetos para essas relações em muitos campos de desenvolvimentos como, por exemplo: as observações e catalogação, utilizando-se grandes telescópios, de aglomerados de estrelas cada vez mais distantes, abrindo-se precedentes para se imaginar outras mais longe; o desenvolvimento da nanociência com a construção de nanocomputadores, ou seja, objetos com dimensões da ordem de nanômetros (um bilionésimo do metro), pressupondo a possibilidade de construção de objetos cada vez menores; A detecção da existência de partículas cada vez menores, como o próton, o quark, o mions, etc, ou o universo cada vez maior, são perspectivas para se poder pensar em quantidades cada vez maiores, ou cada vez menores. Essas relações com a realidade científica atual podem ser base para a construção dos conceitos de infinito e de infinitésimo, aliada às representações matemáticas, rumo à construção da Metáfora Básica de Infinito.

O infinitésimo está associado a muitos conceitos como o conceito de números Reais, de aproximação, de limite. Mas em sua construção inicial, pode ser associado, em suas instâncias, a compreensões através de relações com pequenos números, que podem ser associados também a objetos do conhecimento científico. Uma situação que conduza a uma metáfora conceitual até metáforas matemáticas mais elaboradas, pode ser caminho para a construção de significado desse conceito.

O desenvolvimento do ser humano civilizado atual eleva sua condição para muitas percepções, através da linguagem matemática, linguagem de ciência, linguagem da natureza(PCN’s, 1999).

A tentativas de se trabalhar as disciplinas como objetos distintos, se por um lado proporciona alguns desenvolvimentos puramente matemáticos, por outro lado, muitas vezes leva a prejuízos para a ciência como um todo, mais especificamente, para a Educação Matemática. A distinção e separação entre disciplinas no desenvolvimento das ciências são tentativas muito recentes, e bastante complexas, porque mesmo com uma separação, sob alguns aspectos, quando são analisados sob outros, constata-se que a complementaridade entre essas disciplinas continua inevitável, e necessária.

Pensar em melhorar as condições das possibilidades, na articulação desse campo de significado do conceito de infinito, é acreditar em sua relação com a percepção do movimento nas ciências, com a percepção dos processos nos fenômenos físicos, sociais etc é a consciência de que o devir e a fluência são conceitos que ao contrário do pensamento platônico, são determinantes na compreensão e desenvolvimento do pensamento do ser humano atual.

O que se percebe é que, mesmo sob paradigmas mais recentes, ainda existem muitos campos em que a ciência deve-se mostrar amadurecida, desenvolver limpezas e promover acréscimos necessários para o momento.

"*as manipulações de teorias têm por objetivo apresentar uma nova aplicação do paradigma ou aumentar a precisão de uma aplicação já feita".*(Kuhn, 2001, p.51)

No discurso das ciências matemáticas, nos conflitos teóricos provocados pela presença dos paradoxos do infinito, por exemplo, na teoria dos números, superações são apontadas dentro de um desenvolvimento dialético dos conceitos. Aproveitando-se da sugestão de Laclau (2000), que entende que problemas teóricos nunca são solucionados, mas que podem ser superados, é nessa perspectiva que se deve compreender este momento, e perceber que muitos "paradoxos" estão superados. Então, sonegar a aquisição efetiva da linguagem matemática em suas considerações contemporâneas, é sonegar o conhecimento, pois esta é a linguagem que descreve fenômenos científicos na atualidade.

O que se pode afirmar é que as possibilidades se ampliaram, e não há só uma expectativa de mudança para os processos educacionais, mas condições concretas para se estimular o desenvolvimento. Muitas questões apontam para eminentes transformações, principalmente acreditando-se que a humanidade se transforma diante dos novos instrumentos do pensamento proporcionado por novas percepções científicas, pois, segundo Kuhn

> "*Um paradigma é um pré-requisito para a própria percepção. O que um homem vê depende tanto daquilo que ele olha como daquilo que sua experiência visual-conceitual prévia o ensinou a ver*" (Kuhn, 2001, p.128)

Essa é uma perspectiva dialética de desenvolvimento também do ser humano, pois, há que se ter prioridade em proporcionar, principalmente através da educação, novos instrumentos para o desenvolvimento do pensamento através das linguagens das ciências em plena consciência de que

"*assim como novos instrumentos de trabalho dão origem a novas estruturas sociais, novos instrumentos do pensamento dão origem a novas estruturas mentais"* (Edvard E.B. por Vygotsky, p.177).

Essa perspectiva é descrita por Shoenfeld (Apud Meira, no prelo), apontando que as fases, nos processos de raciocínios, dependem de uma passagem de uma situação para um sistema formal e vice-versa. Propõe-se um olhar diferente para as idéias matemáticas, suas metáforas, seus significados, porque é o objetivo principal, especificamente, das ciências cognitivas, saber que o conceito construído tem a ver com significantes, com o sentido. No caso, o conceito de infinito deve ser tratado com sua linguagem contemporânea, direcionada para a descrição de fenômenos.

Um conhecimento matemático, sem o compromisso com a construção de significado, como nas práticas tradicionais, leva às últimas conseqüências o formalismo para justificar o formalismo. Como, por exemplo, voltando às dízimas periódicas, existe uma proposta apresentada por Lages (1998) para que diante da igualdade 0,999...= 1, se faça uso de divisões "heterodoxas" para gerar 0,999..., a partir da unidade. Essa divisão heterodoxa é o resultado de um esforço formalista que culmina em um cálculo, no mínimo, "estranho". É um bom exemplo até onde pode chegar a crença nos argumentos puramente formais, sem nenhum vínculo com qualquer significado, em um sistema do mundo real.

Pelo bem da própria matemática, então, é importante desenvolver argumentos que não precisem contradizer outros argumentos, em instâncias básicas do desenvolvimento, e em outros campos de desenvolvimento da própria matemática. Nesse caso o mais importante seria mesmo desenvolver a compreensão da igualdade 0,999... = 1 por intermédio das somas infinitas e algumas noções de aproximações, com todas as suas metáforas associadas, pois essas seriam aplicáveis numa matemática superior como, por exemplo, na definição dos infinitésimos.

Deve-se, então, ressaltar a importância e autonomia da escola para promover o desenvolvimento cognitivo e deve-se atentar para as formas de abordagens que privilegiam a construção de conceitos com significados.

O desenvolvimento dos conceitos, a partir de uma perspectiva psicológica, como descrito por Falcão e Meira (1996) enfatiza o papel da atribuição de significados na formação de conceitos matemáticos, e integra competências operatórias no contexto das estruturas gerais do pensamento.

Esse compromisso com a construção de significado merece outras reflexões, até mesmo passando pelas considerações aos momentos de interação verbal, a que se refere Bakhtin, (1992):

"*a verdadeira substância da língua não é constituída por um sistema abstrato de formas lingüísticas nem pela enunciação monológica isolada, nem pelo ato psicofisiológico de sua produção, mas pelo fenômeno social da interação verbal, realizada através da enunciação ou das enunciações. A interação verbal constitui a realidade fundamental da língua* .(Bakhtin, 1992, p.122)

Essas idéias apontam que muitas soluções para o desenvolvimento encontram-se na mudança das ordens do discurso, caracterizando-se também uma possibilidade para o desenvolvimento do conceito de infinito, e as relações possíveis em matemática e nas ciências devem ser realidades apresentadas para a interferência nas formas de expor e conduzir o problema.

Segundo Fairclough(2001), produzindo cumulativamente mudanças estruturais nas ordens de discurso está-se articulando novas hegemonias discursivas. E "*tais mudanças estruturais podem afetar apenas a ordem de discurso 'local' de uma instituição, ou podem transcender as instituições e afetar a ordem de discurso societária"*

Esse discurso poderia estar apoiado inicialmente em algumas proposições para o desenvolvimento de conceitos formais como o esquema proposto por Weil Barais (Apud Da Rocha Falcão, 1996, p.163) que parte da idéia da construção de campos conceituais, e um nível representacional-simbólico na linguagem natural, representações gráficas, formalismo matemático. Esse esquema, também, não sugere nenhuma ordem de percurso.

Uma formação discursiva não define um conjunto unitário de conceitos estáveis com relações bem definidas entre si. Ao contrário, o quadro é de configurações mutáveis de conceitos em transformação. Foulcault propõe abordar formação de conceitos dentro de uma formação discursiva por meio de uma descrição de como é organizado o campo de enunciados a ela associado, dentro do qual seus conceitos surgiram e circularam.

A força transformadora está na apropriação do discurso científico, o qual deve ser visto no foco de suas principais idéias, como forma hegemônica de manifestação do pensamento moderno para descrição e relação entre os fenômenos.

As estratégias discursivas básicas, para o conceito de infinito, devem conter pontos de vista gerais, que unificam a produção intelectual básica de cada momento, em uma busca constante do que pode ser formulado e reformulado, em torno de noções básicas, que auxiliem na compreensão lógica e analítica.

A mudança nas ordens de discurso, à medida que ocorrem novas combinações nas convenções discursivas, propondo códigos e elementos de maneira nova em eventos discursivos inovadores, produz cumulativamente mudanças nas ordens de discurso, e segundo Fairclough (2001) desarticula ordens de discurso existentes e rearticula novas ordens de discurso, novas hegemonias discursivas.

Não se deve estabelecer uma luta entre paradigmas, porque se necessita, principalmente da história do conhecimento para preencher lacunas na compreensão das criações matemáticas e assim atribuir-lhes significados. Tem-se a favor desse processo pretendido, o acúmulo dos conhecimentos, a singularidade contextual, temporal, dessa sociedade atual e então muitas possibilidades.

Uma via nova, aberta por novos conceitos, como o de limite, permite resolver dificuldades antigas. Recordando a argumentação de Zenão de Eléia, a respeito da compreensão do movimento, em que se constroem duas sucessões de posições sucessivas de Aquiles e da Tartaruga e sugere contemplando-as em atitude estática, finitista, que a distância de Aqulies até a tartaruga matematicamente nunca é nula. E fisicamente trabalhando conceitos como o de velocidade verá como Aquiles pode alcançar a Tartaruga. Diante da idéia dos paradoxos de Zenão aparecem sugestões que explicitam a fluência, o movimento nos fenômenos das ciências naturais e sociais. A narrativa dos possíveis posicionamentos diante do problema de Zenão, na verdade explicita, hoje, uma visão de uma outra sociedade diferente daquela de Platão, mas que continua apavorando-se diante da mesma idéia paradoxal, por não tratar o problema com a coerência científica atual.

> *"um paradigma é um pré-requisito para a própria percepção. O que um homem vê depende tanto daquilo que ele olha como daquilo que sua experiência visual-conceitual prévia o ensinou a ver"* (Kuhn, 2001, p.148).

As abordagens dos últimos trezentos anos revelam novamente que a idéia dos números é a substância de conceitos fundamentais, como o de variável, de função e, portanto de infinito, de movimento.

A humanidade atual pode vangloriar-se de alguns avanços no estudo sobre linguagem e desenvolvimento. Novos referenciais modificam as condições de evolução, porém há muito a se fazer, e muito a se perceber. A presença de paradoxos em questões tão fundamentais é paradigmática. E por isso devem ter tratamento especial em todas as possíveis formas discursivas, com suas várias representações e expressões cientificas. Principalmente ter consciência de que:

> "*o mundo não deve ser visto como um complexo de objetos completamente acabados, mas sim como um complexo de processos no qual objetos aparentemente estáveis, nada menos do que suas imagens em nossas cabeças (nossos conceitos), estão em incessante processo de transformação...*"
> (Engels, in Feuerbach, apud Vygotsky, 2000)

Na sociedade contemporânea deve-se utilizar as dúvidas propostas na antiguidade, pois aparentam contradições, mas precisa-se apresentar às velhas contradições, as novas formas de ver o problema, pois, implicam outras possibilidades.

Esta pesquisa demonstra que a linguagem matemática já faz parte dos artefatos culturais contemporâneos e transita, traduzindo significado na construção dos conceitos. Nos estudos apresentados observou-se a presença da linguagem matemática esclarecendo e incrementando o conceito de infinito.

A exploração ao paradoxo de Zenão está longe de se esgotar. Em recente trabalho de Hofstadter (2001), esse paradoxo aparece em uma longa discussão sobre pensamentos recorrentes, que esse autor exemplifica, grosso modo, como pensamentos que produzem histórias dentro de histórias, pinturas dentro de pinturas, partículas dentro de partículas, de interesse para o desenvolvimento de Inteligência Artificial. Esses desenvolvimentos são compostos de programas, com procedimentos que podem recorrentemente chamar a si próprios, e a grande pretensão é a invenção de programas que possam modificar a si próprios. Programas que possam agir sobre programas, ampliando-os, aperfeiçoando-os, reparando-os e assim por diante. Hofstader afirma que sistemas recorrentes devidamente complicados poderiam ter força suficiente para romper com quaisquer padrões predeterminados.

"*O conhecimento matemático em um contexto amplo de experiência real, é o aspecto crucial da Inteligência Artificia*l" (Hofstadter, 2001, 673). Os resultados dessa pesquisa propõem que se deve sair de um sistema e entrar em outro, para resolver um problema específico. Escolher qual o momento de sair de um sistema, depende do sistema, e em quais condições está se trabalhando. Em se tratando dessa pesquisa, a pergunta seria, em qual instante que uma distância deixa de ser um número real, e passa a ser outra coisa, como por exemplo, uma distância ultrapassada? Onde estão as igualdades nas possíveis diferentes respostas?

Referências Bibliográficas

Abrantes, P. (1998). *Imagens de natureza, imagens de ciência*. Campinas, Papirus

Abrantes, P. (org.)(1994). *Epistemologia e Cognição*. *Rumo a uma Teoria Dialética de conceitos. Oliveira*. M.B.Brasília, Editora Universidade de Brasília.

Ávila, G. (1998). *Introdução ao Cálculo*. R.J. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.

Bakhtin, M. (1997). *Estética da Criação: os gêneros do discurso.* São Paulo, Martins Fontes.

Barreto, E.S.de S.(org). (1998), *Os Currículos do ensino Fundamental para as Escolas Brasileiras*. Campinas, SP, Ed. Autores Associados.

Becker, O. (1965). *O Pensamento Matemático*. *Sua grandeza e seus limites*. São Paulo, editora Herder.

Beth, E. W. (1966). *The Foundations of mathematics*. New York: Harper & Row.

Bolzano, B. (1993). *Les paradoxes de l`infini. Paris. Éditions du Seuil.*

Caraça, B. de J. (2002).*Conceitos fundamentais da matemática, Lisboa,6º e*dição, Gradiva.

Cedes, C. (1996). *Alguns "porquês" na história da matemática e suas contribuições para a educação matemática*, Sérgio Nobre. Campinas, Papirus.

Cheptulin, A. (1982). *A Dialética Materialista. Categorias e Leis da Dialética*. São Paulo, Editora Alfa-ômega.

Copi, I.M. (1978), *Introdução à lógica*. São Paulo, Editora Mestre Jou.

Courant, R. & Robbins, H. (2001). *O Que é Matemática*? *Uma abordagem elementar de métodos e conceitos*. Ed. UnB.

Eves, H. (1997). *Introdução à história da matemática*. Campinas, SP: Editora da UNICAMP

Da Rocha Falcão, J.T. (1996). *Elementos para uma abordagem psicológica do desenvolvimento dos conceitos Matemáticos*. In Dias M. G. & Spinillo, A.G. (org).*Tópicos em psicologia Cognitiva. (pp.141-167)* Recife, Editora Universitária da UFPE.

Fairclough, N.(2001). *Discurso e mudança social.* Brasília, Editora Universidade de Brasília.

Freitag, B. (1985). *Piaget: encontros e desencontros.* Rio de Janeiro, Tempo Brasileiro.

Gadotti, M. (2001). *Concepção Dialética da Educação, Um estudo Introdutório*. São Paulo, Editora Cortez.

Goodwin, C. (1999). *Action and embodiment Within situated human interaction*. Los Angelis, CA, University of California of Los Angeles.

Hofstadter, D. (2001). Gödel, Escher, Bach, um entrelaçamento de gênios brilhantes. São Paulo, editora universidade de Brasília.

Kuhn, T. S.(2001). *A estrutura das revoluções científicas.* São Paulo, Editora Perspectiva.

Lakoff, G., Nüñez, R.E. (2000). *Where Mathematics comes from: how the embodied mind brings mathematics into being. New York,* Basic Books

Lakoff, G., Nüñez, R.E. (1998). *Embodied mind brings mathematics into being.* New York*,* *B*asic Books.

Leontiev, A. N.(1978). *O desenvolvimento do Psiquismo*. Lisboa: Horizonte universitário.

Lima, E.L. (1992). *Curso de Análise.* Vol. I, 7ª. Edição, Rio de Janeiro, Iarte.

Lima, E.L. (1991*). Meu Professor de Matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro, Graftex Comunicação Visual.

Machado, N.J., (1998). *Matemática e língua materna*. Cortês editora, 4ª Edição.

Machado, N. J. (1998). *Matemática e Realidade.*. Cortês editora, 2ª edição.

Meira, L. (Prelo). *Students' early albebraic activity: Sense-making and the production of meanings in mathematics*. Federal University of Pernambuco, Brasil.

Meira, L. (1996). *Atividade algébrica e produção de significados em matemática: Um estudo de caso*. In Dias M. G. & Spinillo, A.G. (org).*Tópicos em psicologia Cognitiva. (pp.168-192)* Recife, Editora Universitária da UFPE.

Milies, C.P. & Coelho, S.P. (2001). *Números, Uma introdução à Matemática*. São Paulo, Editora Universidade de São Paulo.

Morris, R. (2000). *Uma breve história do infinito: Dos paradoxos de Zenão ao Universo Quântico*. RJ. Jorge Zahar editor.

Munem, M.A. & Foulis, D.J. (1978). *Cálculo, Vol. II*, Rio de Janeiro. R.J. Editora Guanabara Dois S.A.

Nüñez, R. (1994). *Development and Infinity in The Small: Paradoxes and Consensus* Berkeley, CA Editado por Ashwin Ram and Kurt Eiselt

Parra,C.& Saiz,I.(org). (1996). *Didática da Matemática.Reflexões Psicopedagógicas. Os Diferentes Papéis do Professor,* Brousseau*,G.* Porto Alegre, Artes Médicas.

PCN`s de 5ª a 8ª série -matemática & PCN's - *Ensino Médio de Matemática ciências e suas tecnologias* , Parâmetros Curriculares Nacionais (1998).

Prado Jr, C. (1968). *Notas Introdutórias à Lógica Dialética*.São Paulo, Ed. Brasiliense.

Richardson, R.J. (1999). *Pesquisa Social, Métodos e Técnicas*. São Paulo, Ed. Atlas.

Russel, B. (1966). *Nosso conhecimento do mundo Exterior*. São Paulo, Editora Nacional.

Russel, B. (1963). *Introdução à filosofia da matemática.* Rio de janeiro, Zahar editores.

Shokranian, S. Soares, M. Godinho, H. (1999). *Teoria dos Números*. Brasília, Ed. Universidade de Brasília.

Schliemann, A. & Carraher D. Meira, L. Falcão, J. (1997). *Estudos em Psicologia da Educação Matemática. Aprendizagem e Ensino de Funções*, Meira, L. Recife, Ed. Universitária da UFPE.

Singh S. (1999). *O Último Teorema de Fermat*. Rio de Janeiro, Record.

Vygostky, L.S. (1998). *Pensamento e linguagem*. São Paulo, Maritns Fontes.

Vygostky, L.S. (2000). *A formação social da mente.* São Paulo, Martins Fontes.

Zizek, S. (org) . (1999). *Um mapa da Ideologia*.

Apêndice 1

A agulha de Buffom

O problema da agulha de Buffom: suponha que se trace, num plano horizontal, um número grande de retas paralelas e eqüidistantes entre si. Sendo a a distância entre duas retas vizinhas, Buffom mostrou que a probabilidade de que uma agulha de comprimento $l < a$, lançada ao acaso sobre o plano, caia cortando uma das retas é dada por $p = \frac{2l}{\pi a}$. Em particular, quando $2l = a$, tem-se $p = \frac{1}{\pi}$.

Parece natural, mesmo para um aluno da escola básica, que a fórmula $p = \frac{2l}{\pi a}$. pode fornecer o valor de l, desde que sejam conhecidos os valores de π, p e a, e tem-se o valor de l. Ou, se for determinado empiricamente o valor de p e conhecendo o valor de π e a, pode-se estimar o comprimento l da agulha.

Que significado prático parecia ter um conhecimento de tal natureza no século XVIII? Quem poderia vislumbrar uma aplicabilidade? Séculos depois, uma outra face do problema se revelou. Esse procedimento pode ser especialmente útil em caso onde a agulha transfigura-se em um bastonete, ou uma formação linear qualquer, de natureza biológica, inacessível a uma medição direta de seu comprimento. Em situações como essas, as retas paralelas sobre uma folha de papel podem ser interpretadas com um feixe plano de radiações paralelas (raio X, laser ou outro) disparadas sucessivamente em um grande número de diferentes direções sobre o objeto linear, cujo comprimento se deseja determinar. Em outras palavras: na impossibilidade de jogar a agulha sobre as linhas, jogam-se as linhas sobre a agulha. Os feixes que atravessam a agulha são identificados por meio das medidas da intensidade dos raios na emissão e na recepção. O valor da probabilidade p é calculado contando-se os feixes que cruzam a agulha e dividindo-se o seu número pelo total de feixes emitidos. Assim o comprimento l pode ser determinado.

> *...“na exploração desta outra face da questão, proposta por Buffom, foram conduzidos os trabalhos de muitos pesquisadores, culminando com a atribuição em 1979, do prêmio Nobel de Medicina, conjuntamente a um físico e um engenheiro – M. Cormack e G.N. Hounsfield. Apoiados em resultados obtidos por um matemático que os precedeu em cerca de 20 anos (J. Random,*

1887 – 1956) eles tornaram possível a utilização comercial dos aparelhos de tomografia computadorizada, com notáveis aplicações na Medicina, na Biologia Molecular e com extensões importantes no campo da Rádio-astronomia." (Machado, 1998, p.70)

Apêndice 2

A Derivada

As definições de infinitésimo: a proposta de Leibniz foi a mais difundida e aceita em sua época, este considerou uma quantidade a qual deu o nome de Δx [11] que é definida como uma variação, uma diferença entre duas variáveis de um campo de variação ao qual pode-se denominar de um certo, x_2 e um certo, x_1,

Essa diferença, ou seja, quando no campo de variação dos *xis,* varia-se de , $x_2 - x_1$, ou seja de Δx *,* implica uma outra variação, em um outro campo de variação, digamos dos *ypslons*, de $y_2 - y_1$, ou seja, de Δy. Diante da variação em uma primeira quantidade acontece uma variação em uma outra quantidade com a qual a primeira está se relacionando.

Leibniz traduz da seguinte forma: dada uma função *f,* ou seja uma lei que rege uma relação, então ao variar Δx descreve-se a variação Δy*,* por essa lei. Então Δy, representará a pequena variação sofrida por y*,* quando houver uma pequena variação em x*.* Em notação de função será definida como sendo o resultado da diferença entre, a função $f(x)$ acrescida da variação Δx e a função $f(x)$ simplesmente sem acréscimos. Ou seja:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Essas definições conduzem a muitas possibilidades matemáticas, por exemplo, o fato de Δx ser uma diferença entre números distintos implicava ser Δx*,* diferente de zero, na verdade isto se caracterizava como condição de existência do problema, x_1 é diferente de x_2 , motivado pelo estudo do movimento que pairava sobre as pesquisas, e nesse caso específico em que x_1 e x_2 se tratavam de dois números associados a dois instantes distintos da trajetória de um móvel.

A condição de Δx ser diferente de zero estabelecia a possibilidade de algumas operações lógicas, como por exemplo, a possibilidade de se dividir por Δx*.* O que implicaria na igualdade:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

[11] Lê-se "delta xis", em que delta, (Δ*) é a quarta letra grega, maiúscula.*

E está descrita uma razão entre pequenas variações representadas pelo *delta ypslon e pelo delta xis*. Uma grande idéia. Mas quando utilizada em relação à função $f(x) = x^2$ que descreve o fenômeno da queda dos corpos, a relação entre dois instantes em que o corpo cai e a posição em que se encontra, acarreta a seguinte igualdade:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

Desenvolvendo o quadrado entre os parênteses implica a igualdade:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

Simplificando essa igualdade cancelando os simétricos, equivale matematicamente a:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

No lado direito da igualdade acima, uma operação lógica legítima, que não altera essa igualdade, é o cancelamento de um delta xis em cada um dos termos deste quociente, o que resulta em:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Considera-se que essa igualdade define a velocidade instantânea também denominada de derivada da função definida como $f(x) = x^2$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$$

Matematicamente, essa relação determinará muitas definições, como por exemplo, a velocidade instantânea do móvel em qualquer ponto. Mas havia um problema, considerando-se a última igualdade como uma igualdade absoluta, está-se assumindo um Δx igual a zero, o que é inaceitável matematicamente, pois se estaria admitindo em todo processo uma divisão por zero, o que é logicamente impossível.

Praticamente concomitante às elaborações de Leibnitz, na organização do cálculo como proposta por Isaac Newton, é uma outra forma de interpretar essa igualdade matemática. O problema é solucionado a partir da introdução de uma linguagem que torna essa igualdade menos absoluta, essa linguagem trata de um conceito fundamental para a matemática atual, o conceito de limite. Diz-se então que o limite do quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ com Δx *indo* para zero é então igual a $2x$ e escreve-se:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x$$

Observa-se que a diferença entre aquela igualdade, proposta por Leibnitz, e essa, que introduz uma noção de limite, está na introdução de movimento no conceito associado à linguagem matemática. Cria-se a possibilidade de uma variável como Δx *ir para zero sem precisar chegar* a ser zero de fato. Depurando a compreensão dessa linguagem, associada à percepção de fenômenos, o que se faz é introduzir uma linguagem que produz um outro tipo de igualdade. É uma construção compartilhada com a linguagem, e aborda-se o conceito de infinitésimo, utilizando-se o conceito de limite na linguagem matemática. Algo semelhante à indução sobre *n* nos números naturais que utiliza uma idéia de movimento continuado, entendendo-se que os números *estão indo.*

Apêndice 3

Os axiomas de Peano

Peano em 1879, na linguagem da época admite três conceitos primitivos: número natural, zero e sucessor. Estes conceitos estão relacionados entre si por cinco axiomas. Será indicado por *s(n)* o “sucessor” do número *n* e, como é usual o símbolo *0* para indicar o zero.

Com essas notações, os axiomas são os seguintes:

(1) *0* é um número natural.

(2) Todo número natural *n* tem um “sucessor” *s(n).*

(3)*0* não é “sucessor “ de nenhum número.

(4) Se *s(n)* = *s(m)*, então *n* = *m*.

(5) Princípio da Indução completa: Seja N um conjunto de números naturais tal que:

(a) 0 pertence a *N*

(b) Se *n* pertence a *N*, então *s(n)* pertence *N*

Então, *N* é o conjunto de todos os números naturais.

(Milies, 2001, p.178)

Que pode ser visto como:

(1) (o início de um estado, nenhum inteiro)

(2)(O resultado intermediário, processo de iteração, n > n-1)

(5) O inteiro ∞ é único e maior que todo outro inteiro.

“*Quadro 2, as seqüências sem fim, de inteiros”*(Lakoff & Nüñez, 2000, p.p 165-166)