

TESE DE DOUTORADO

Transformações de Holonomia
em Cordas Negras
e Espaços Cônicos

ALEXANDRE MANOEL DE MORAIS CARVALHO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

Transformações de Holonomia em Cordas Negras e Espaços
Cônicos

ALEXANDRE MANOEL DE MORAIS CARVALHO

Tese apresentada no Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos créditos para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Prof. Fernando Jorge Sampaio Moraes

Co-orientador: Prof. Claudio Benedito da Silva Furtado

Banca Examinadora

Prof. Fernando Jorge Sampaio Moraes - UFPE (Presidente e orientador)
Prof. Claudio Benedito da Silva Furtado - UFPB (Membro e co-orientador)
Prof. Maurício Domingues Coutinho Filho - UFPE (Membro)
Prof. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo - UFPE (Membro)
Prof. Luis Carlos Garcia de Andrade - UERJ (Membro)
Prof. Vilson Tonin Zanchin - UFSM (Membro)

Recife - Pernambuco - Brasil

Abril - 2003

Dedico esta tese à minha mãe
Ivanilde

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos professores Fernando Moraes e Claudio Furtado pela precisa orientação ao longo desse trabalho. Ambos são exemplos de dedicação, entusiasmo e competência em física.

À todos os amigos e colegas do Departamento de Física, com os quais tive uma boa convivência. A amizade, o respeito e o apoio de todos foram imprescindíveis em vários momentos ao longo desses anos.

Estendo os meus agradecimentos e respeito a todo o corpo de funcionários do DF, eles são exemplos de profissionalismo e qualidade no serviço público.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro, essencial para a realização dessa tese.

Resumo

Nesta tese, empregamos o conceito de transformações de holonomia para caracterizar as propriedades geométricas dos mais diversos sistemas físicos, desde sistemas cosmológicos, como por exemplo, o buraco negro BTZ e a corda negra, a física da matéria condensada, cones de grafite e superfluidos. A holonomia pode ser interpretada geometricamente como o resultado do transporte paralelo de vetores ou espinores ao longo de caminhos fechados. Ela é justamente uma medida da mudança adquirida por essas entidades quando transportadas paralelamente ao longo de caminhos fechados ou via diferentes caminhos. A holonomia determina o ângulo de déficit entre as posições final e inicial dos vetores e espinores. Ela é uma propriedade global da variedade e como tal serve como ferramenta para classificação de espaços-tempos.

Analisamos o transporte paralelo de vetores e espinores no espaço-tempo do buraco negro BTZ e em seguida estendemos nossas análises para a corda negra, que pode ser interpretada como a folheação de vários buracos negros BTZ ao longo do eixo-z. Estudamos o comportamento de várias órbitas e verificamos a existência de banda de invariância de holonomia para certos valores do raio da órbita em função das propriedades do buraco e da corda negra. Em seguida discutimos as transformações de holonomia como uma fase geométrica existente em estruturas curvas de grafite. Essas estruturas possuem simetria cônica e são formadas a partir da retirada ou inserção de material da folha de grafite. Estudamos a equivalência entre o hamiltoniano *tight-binding* e o hamiltoniano de Dirac para férmions não massivos em espaços curvos e determinamos os estados eletrônicos, bem como a fase de Berry do sistema. Estudamos ainda as propriedades geométricas de sistemas análogos. Tais sistemas têm sido extensivamente empregados como laboratório para sistemas cosmológicos e gravitacionais. Analisamos a geometria de um vórtice através de uma métrica equivalente à métrica de uma corda cósmica com estrutura interna. E por fim, determinamos as transformações de holonomia para d-branas, isto é, estudando as propriedades topológicas de um buraco negro embebido num espaço-tempo de dimensão superior.

Abstract

In this thesis we use the concept of holonomy transformations in order to characterize the geometrical properties of some physical systems. Since cosmological systems, for instance, BTZ black hole and black string, to physics of condensed matter. That it includes graphitic cones and superfluids. The holonomy could be geometrically interpreted as the result of a parallel transport of vectors or spinors throughout closed paths. It is exactly the measure of the change acquired for these entities when they are parallel transported throughout closed or through different paths. The holonomy determines the deficit angle between the final and initial positions of the vectors or spinors. It is a global property of the manifold and such serves as a tool for the classification of different space-times.

We analyze the parallel transport of vectors and spinors in the space-time of a BTZ black hole. And after we extend our analyzes to a black string which could be interpreted as a foliation of many black holes to long z-axis. We study the behaviour of many orbits and verify the existence of holonomy invariance band for certain values of the orbits radius. We also argue the holonomy transformations as a geometrical phase existing in the curved structure of graphite. These structures possess conical symmetry and are formed from the extraction or insertion of material from the graphite leaf. We study the equivalence between the tight-binding Hamiltonian and the Dirac equation for non massive fermions in curved spaces and determine the electronic states, as well the Dirac Phase of the system. We also examine the geometric properties of analogous systems. Such systems have been extensively used as a laboratory for study the properties of gravitational and cosmological systems. We analyze the geometry of a vortex by means of a metric equivalent to the metric of a cosmic string with internal structure. And finally we determine the holonomy transformations for a d-brane.

Sumário

Folha de rosto	i
Dedicatória	ii
Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Abstract	v
Prefácio	xi
1 Holonomias	3
1.1 Introdução	3
1.2 Transporte Paralelo	4
1.3 Holonomias e Variáveis de Contorno de Wilson	8
1.4 Formalismos	10
1.4.1 Formalismo de Segunda Ordem	10
1.4.2 Formalismo de Primeira Ordem	12
1.5 Fases Geométricas e Topológicas	15
1.5.1 Fases de Berry	15
2 Transformações de Holonomia na Geometria de Buracos Negros e Cordas Negras	19
2.1 Buracos Negros	19
2.2 Buraco Negro BTZ	21
2.2.1 Transformações de Holonomia para o Buraco Negro BTZ	24
2.3 Cordas Negras	33
2.3.1 Transformação de Holonomia para a Corda Negra	34
2.3.2 Análise de Órbitas	42

2.3.3	Transporte Paralelo de Spinores	46
2.4	Conclusões	48
3	Transformações de Holonomia em d-Branas	50
3.1	Introdução	50
3.2	Métrica de uma Corda Negra numa Parede de Domínio	51
3.3	Transformações de Holonomia	52
3.3.1	Transformações de Holonomia na Geometria de Schwarzschild	52
3.3.2	Transformações de Holonomia na Parede de Domínio	57
3.4	Conclusões	66
4	Modelos Análogos	67
4.1	Introdução	67
4.2	Dinâmica de Fluidos	69
4.3	Elemento de Linha para um Vórtice	72
4.4	Holonomia na Métrica de um Vórtice	74
4.5	Propriedades Geométricas da Métrica de um Vórtice	78
4.6	Conclusões	80
5	Estruturas Curvas de Grafite	81
5.1	Introdução	81
5.2	Modelo Contínuo	84
5.3	Abordagem Geométrica	88
5.4	Holonomias	90
5.5	Equação de Dirac em Espaços Curvos	92
5.5.1	Conexão Spinorial	96
5.6	Solução da Equação de Dirac em Espaços Curvos	98
5.7	Transformação de Holonomias em Múltiplos Cones	102
5.8	Conclusões	103
	Conclusões	104
A	Noções Elementares de Geometria Diferencial	107
A.1	Variedades Diferenciáveis	107

A.2	Campos Vetoriais	108
A.2.1	Vetores Tangentes	109
A.3	Formas Diferenciáveis	110
A	Equação de Dirac	112
B	Teoria de Defeitos em Sólidos	115
B.1	Teoria Geométrica de Defeitos	115
B.1.1	Equações de Equilíbrio	116
B.1.2	Desclinações e Deslocações Laterais	118

Lista de Figuras

1.1	A figura mostra o transporte paralelo de um vetor tangente ao longo de dois caminhos diferentes. O resultado final mostra a dependência do caminho escolhido.	5
1.2	Uma n -simplex é utilizada para a descrição da série do processo iterativo da equação (1.4). Uma 0-simplex é um ponto, uma 1-simplex é um segmento, uma 2-simplex é um triângulo cheio e uma 3-simplex é um tetraedro cheio.	7
2.1	Diagrama do plano $t \times r$	21
5.1	Molécula de fulereno C_{60}	82
5.2	Moléculas de fulereno.	83
5.3	A figura mostra nanocones de carbono formados com diversos ângulos de desclinação.	85
5.4	A figura mostra nanocones de nitrato de boro formados com diversos ângulos de desclinação.	86
5.5	A figura mostra a construção de um cone a partir de uma camada de grafite. Retire o setor $\alpha\beta\gamma$ e junte $\alpha\beta$ a $\alpha\gamma$ produzindo um cone($n_\Omega = 1$) cujo ápice é um pentágono. Retirando um segundo setor e juntando as linhas $\alpha\beta$ a $\alpha\delta$ produz-se um cone($n_\Omega = 2$) com um ângulo de abertura menor. Forma-se uma estrutura pouco estável com anéis 4-membros.	87
5.6	O Processo de Volterra para a formação de uma desclinação.	89
B.1	Uma desclinação de um ângulo m . Se $-2\pi < m < 0$ um setordo meio é retirado e se $0 < m < \infty$ um setor é adicionado ao meio.	121

B.2 Uma deslocação lateral corresponde a um dipolo,consistindo de duas desclinações de um ângulos m e $-m$	122
--	-----

Lista de Tabelas

3.1	A tabela apresenta valores do raio crítico no qual ocorre a invariância de holonomia para órbitas com tempo constante no plano equatorial.	55
3.2	A tabela apresenta valores para o raio crítico no qual ocorre a invariância de holonomia para órbitas com tempo e o ângulo azimutal constantes.	56
3.3	a tabela mostra os valores do parâmetro ν e da função f_μ , para três órbitas distintas.	66
5.1	A tabela mostra vários valores para as transformações de holonomia quando retiramos um setor de $\pi/3$	103

Prefácio

A noção de holonomia tem sido vastamente empregada para caracterizar a geometria de diversos espaços-tempos. As transformações de holonomia são uma medida da mudança adquirida na direção de um vetor ou um *spinor* quando esses são transportados paralelamente ao redor de caminhos fechados ou entre pontos distintos, por diferentes caminhos. Esse transporte paralelo resulta numa deficiência angular entre as posições final e inicial do vetor ou *spinor*. A holonomia tem sido determinada para uma miríade de sistemas físicos, envolvendo desde cosmologia, física da matéria condensada, sistemas análogos a computação quântica. Outra variável fundamental conectada à holonomia, também bastante utilizada para a compreensão das propriedades topológicas de vários espaços-tempos, são as variáveis de contorno que são objetos matemáticos que contêm informações de como os vetores ou espinores mudam depois de sofrer a ação de um transporte paralelo.

A tese está organizada da seguinte maneira: no primeiro capítulo, discutimos os conceitos necessários para introduzir a noção de holonomia. No segundo, estudamos o transporte paralelo de vetores e espinores no espaço tempo do buraco negro BTZ e em seguida estendemos nossas análises para a corda negra, que pode ser interpretada como a folheação de vários buracos negros BTZ ao longo do eixo-z. No terceiro capítulo, estudamos as transformações de holonomia para d-branas. No quarto capítulo, estudamos as propriedades geométricas de sistemas análogos. Tais sistemas têm sido extensivamente empregados como laboratório para sistemas cosmológicos e gravitacionais. Analisamos a geometria de um vórtice através de uma métrica equivalente à métrica de uma corda cósmica com estrutura interna. No quinto estudamos as transformações de holonomia como uma fase geométrica em estruturas curvas de grafite. Essas estruturas possuem simetria cônica e são formadas a partir da retirada ou inserção de material da folha de grafite. Estudamos

a equivalência entre o hamiltoniano “tight-binding” e o hamiltoniano de Dirac para férmions não massivos em espaços curvos e determinamos os estados eletrônicos, bem como a fase de Berry do sistema. E por fim apresentamos as conclusões.

Capítulo 1

Holonomias

1.1 Introdução

Neste capítulo, apresentamos uma definição formal a respeito de holonomias, bem como uma interpretação geométrica, mostrando, de certo modo, a equivalência entre os conceitos de holonomia e de transporte paralelo. Introduziremos os formalismos necessários para apresentar holonomias como uma teoria gravitacional.

O progresso realizado pela teoria de *gauge* [1, 2] na unificação das interações eletromagnética e fraca gerou uma enorme motivação pela extensão dessa unificação de modo que as interações gravitacional e forte sejam incluídas. O caminho mais provável que deve ser seguido, em busca de uma unificação é através da abordagem dos vários aspectos da estrutura de *gauge* das teorias gravitacionais de Einstein e Einstein-Cartan [3]. Para que se obtenha uma dinâmica de campos de *gauge* exige-se que os campos de *gauge* possuam uma estrutura de grupo¹ de holonomia não-trivial. O grupo de holonomia de um espaço fibrado é definido da seguinte forma[4]: para um dado ponto z no espaço fibrado principal E , o grupo de holonomia

¹Um grupo \mathcal{G} é uma classe de transformações ou operações (binárias, \cdot) sobre elementos de um dado conjunto, a, b, \dots , satisfazendo os seguintes axiomas:

- $a \cdot b \in \mathcal{G} \quad \forall a, b$;
- \exists um elemento identidade e , tal que: $a \cdot e = a \quad \forall a$;
- a “multiplicação é associativa: $(ab)c = a(bc)$;
- cada elemento a possui um elemento inverso a^{-1} , tal que: $a \cdot a^{-1} = e$.

de uma dada conexão no ponto z é o conjunto de elementos $g \in G$, tal que os pontos z e zg^{-1} podem ser juntados por um caminho horizontal. No contexto de qualquer formulação teórica da gravitação, a qual está fortemente ligada a noção de curvatura riemanniana, a estrutura do fibrado do grupo infinitesimal de holonomia é sinônimo de curvatura, conseqüentemente também é de gravitação[3]. A compreensão a respeito dos conceitos de conexão e holonomia torna-se necessário para analisar as propriedades geométricas de diversos sistemas físicos.

Mandelstam, em 1962 foi o primeiro a utilizar as variáveis de holonomia numa teoria de campos de *gauge* [5]. Ele propôs um novo formalismo para a eletrodinâmica e a gravitação, no qual os campos dependem mais dos caminhos do que dos pontos extremos. A quantidade fundamental que surge desta nova abordagem dependente do caminho, é o **fator de fase não-integrável**. Wu e Yang[6] mostraram que o eletromagnetismo é uma manifestação invariante de *gauge* do fator de fase não-integrável. Esta abordagem foi generalizada por Bialynicki-Birula e pelo próprio Mandelstam [7], para as teorias de *gauge* não-abelianas[8]. O interesse por este assunto ressurgiu no final dos anos 70, através da formulação dependente do caminho da teoria de Yang-Mills² [9, 10]. Foi observada a semelhança entre as equações de Yang-Mills em termo das variáveis de holonomia com as equações de movimento do modelo σ não-linear bidimensional³ [11]. Outros trabalhos marcantes foram desenvolvidos por Voronov, Makeenko e Migdal [12, 13, 14, 15]. Eles mostraram que às equações de contorno, nesta abordagem, são equivalentes as equações de Einstein. Podemos fazer uma formulação da gravitação baseada nos fatores de fase não-integráveis e esses fatores dependem do caminho realizado. Mandelstam propôs certas relações as quais essas variáveis devem satisfazer e que as mesmas contêm informações sobre a curvatura do espaço-tempo.

1.2 Transporte Paralelo

Pode-se dizer que o fato principal que caracteriza a diferença entre espaços

²A teoria de Yang-Mills é uma generalização do eletromagnetismo, no qual a função de onda complexa de uma partícula carregada é trocada por uma função de onda de duas componentes, $\psi = \psi^i(x)$, $i = 1, 2$.

³O modelo σ não-linear em d dimensões surge da aproximação do contínuo do antiferromagnetismo quântico de Heisenberg em $d - 1$ dimensões.

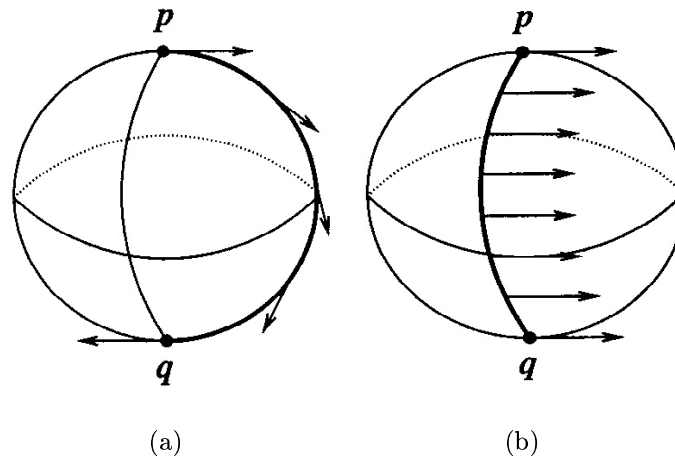


Figura 1.1: A figura mostra o transporte paralelo de um vetor tangente ao longo de dois caminhos diferentes. O resultado final mostra a dependência do caminho escolhido.

planos (euclidianos) e curvos é que em espaços curvos o resultado do transporte paralelo de um vetor dependerá do caminho seguido por este vetor [16], como podemos ver no exemplo a seguir. Considere o transporte paralelo de um vetor do pólo norte ao pólo sul de uma esfera S^2 , de acordo com a Figura 1.1. O mesmo vetor é transportado ao longo de dois caminhos diferentes, porém, preservando sua direção constante. Nota-se que os resultados do transporte diferem entre si. Este fenômeno é uma manifestação direta da presença de curvatura na esfera S^2 . Faz-se necessário, então, uma melhor compreensão a respeito do transporte paralelo, além disso, a noção de transporte paralelo está intimamente ligada à existência de uma conexão sobre a variedade. A noção de conexão permite o transporte paralelo de objetos geométricos⁴.

Vamos apresentar uma noção mais precisa de transporte paralelo [17]. Seja E um fibrado⁵ sobre a variedade \mathcal{M} , equipado com uma conexão A . Seja $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}$ um caminho suave do ponto p ao ponto q , suponha que $t \in [0, T]$, $u(t)$ é um

⁴No contexto histórico, as primeiras considerações sobre conexões foram sobre o transporte paralelo de vetores tangentes sobre uma determinada variedade. Esse conceito foi generalizado para uma enorme gama de abordagens, devido ao seu grande interesse em teorias de *gauge*.

⁵Um fibrado é uma estrutura consistindo de uma variedade E , uma variedade \mathcal{M} e um mapa

vetor no fibrado E sobre $\gamma(t)$. O vetor, $u(t)$, é dito ser transportado paralelamente ao longo de uma curva, γ , se sua derivada covariante ao longo desse caminho for nula,

$$u(0) = u, \quad D_{u(\gamma'(t))}u(t) = 0. \quad (1.1)$$

Segue, da definição de derivada covariante que

$$\frac{d}{dt}u(t) + A(\gamma'(t))u(t) = 0. \quad (1.2)$$

Esta equação diferencial de primeira ordem é conhecida como Equação de Transporte Paralelo e A é a conexão. A idéia de conexão permite definir a derivada covariante como apresentada na equação (1.2) e especificar o modo no qual o vetor em um fibrado E é transportado ao longo de uma curva numa dada variedade \mathcal{M} .

Integrando a equação (1.2), obtemos

$$u(t) = u - \int_0^t A(\gamma'(t_1))u(t_1)dt_1. \quad (1.3)$$

Iterando sucessivamente a expressão (1.3), pode-se encontrar uma fórmula de recorrência para $u(t)$ em termos de uma soma infinita

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \int_{t \geq t_1 \geq \dots \geq t_n \geq 0} A(\gamma'(t_1)) \dots A(\gamma'(t_n)) dt_n \dots dt_1 \right) u. \quad (1.4)$$

O n -ésimo termo da série é uma integral em um triângulo n -dimensional ou um **n -simplex**[18] (ver figura 1.2). Pode-se simplificar esta integração considerando a integral sobre um n -cubo, ao invés de uma n -simplex. Sabe-se que em cada cubo existem $n!$ simplexes, deste modo deve-se multiplicar a integral por um fator, $(1/n!)$, a fim de compensar o volume extra. Além disso, introduz-se o operador **produto ordenado** ou **propagador paralelo**, \mathcal{P}

$$\mathcal{P} A(\gamma'(t_1)) \dots A(\gamma'(t_n)), \quad (1.5)$$

$\pi : E \rightarrow M$. Para cada ponto $p \in M$, o espaço

$$E_p = \{q \in E : \pi(q) = p\},$$

é chamado de fibrado tangente sobre p .

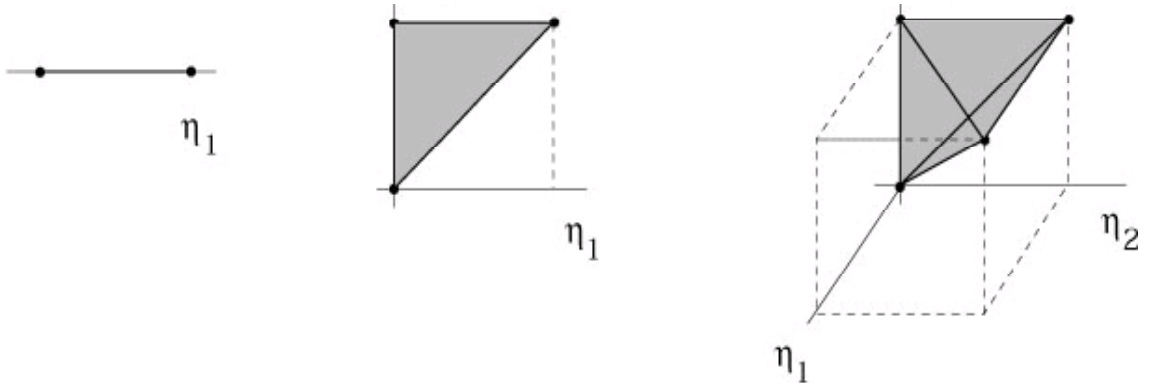


Figura 1.2: Uma n -simplex é utilizada para a descrição da série do processo iterativo da equação (1.4). Uma 0-simplex é um ponto, uma 1-simplex é um segmento, uma 2-simplex é um triângulo cheio e uma 3-simplex é um tetraedro cheio.

como sendo o produto com os fatores permutados

$$A(\gamma'(t_{\sigma(1)})) \dots A(\gamma'(t_{\sigma(n)})), \quad (1.6)$$

ordenados de modo que os maiores valores de t_i apareçam primeiro. Sendo assim define-se o produto exponencial ordenado como sendo

$$\mathcal{P} \exp \left(- \int_0^t A(\gamma'(s)) ds \right) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \mathcal{P} \left(\int_0^t A(\gamma'(s)) ds \right)^n. \quad (1.7)$$

E finalmente, obtemos uma expressão para

$$u(t) = \mathcal{P} \exp \left(- \int_0^t A(\gamma'(s)) ds \right) u. \quad (1.8)$$

O caso interessante ocorre quando o caminho é um circuito fechado e se a conexão é compatível com a métrica, a matriz resultante é uma transformação de Lorentz no espaço tangente daquele ponto. Essa transformação é conhecida como holonomia do circuito.

Pode-se dizer que **holonomia** é um processo que atribui a cada caminho fechado uma transformação linear que mede a rotação de um vetor quando trans-

portado paralelamente ao longo de uma dada curva. O conjunto de todas as matrizes de holonomia formam um grupo, chamado de **grupo de holonomia**⁶. A não-trivialidade da holonomia está associada à existência de curvatura na região englobada pelo caminho fechado. A holonomia de caminhos fechados pode ser vista como uma medida da curvatura (ou da intensidade do campo) de um determinado espaço-tempo. A holonomia atua de maneira importante nas teoria de *gauge* da física. No eletromagnetismo [19], por exemplo, ela representa a fase adquirida por uma função de onda de uma partícula carregada quando se move ao longo de um contorno [20].

1.3 Holonomias e Variáveis de Contorno de Wilson

A noção de contorno⁷ é muito importante no eletromagnetismo, na teoria da *gauge* e em novas abordagens para a gravitação quântica conhecida como “representação de contorno” (*loop representation*) [21]. Em todas essas teorias a idéia central é entender campos como partículas que se movem ao longo de um contorno e que de alguma forma durante este processo suas propriedades são modificadas. Os caminhos fechados atuam de modo importante na teoria de *gauge* para férmions.

Suponha que $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}$ é um caminho suave de p a q na variedade \mathcal{M} e E é um fibrado com conexão D . Dado $u \in E_p$, seja $H(\gamma, D)u$ o resultado do transporte paralelo de u ao longo de γ . Desde que, a equação diferencial que define o transporte

⁶O grupo de holonomia é o grupo das transformações dos vetores do espaço tangente à fibra obtida como resultado de seu transporte paralelo ao redor de todos os caminhos possíveis do ponto base inicial a um dado ponto x . Se considerarmos apenas caminhos contidos numa dada vizinhança do ponto, o grupo de holonomia é chamado de local. Se o transporte é feito apenas ao longo de caminhos que podem ser contraídos a um ponto, o grupo de holonomia é dito restrito. Se o transporte paralelo é definido sobre o espaço inteiro e a escolha dos pontos não é restrita, o grupo é simplesmente chamado de grupo de holonomia.

⁷Dada uma variedade diferenciável S de dimensão d , um caminho em S é um mapa contínuo γ de um intervalo fechado da reta \mathbb{R} na variedade S

$$\gamma : [s_1, s_2] \rightarrow S \tag{1.9}$$

$$s \mapsto \gamma^\mu(s), \tag{1.10}$$

este caminho será um contorno (*loop*) se ele terminar onde começou, isto é $\gamma(s_1) = \gamma(s_2) = p$ para algum ponto $p \in S$. Também dizemos que γ é um caminho baseado em p ou p é o ponto base de γ .

paralelo seja linear, o mapa $H(\gamma, D) : u_p \rightarrow E_q$ também é linear. Este processo é conhecido como holonomia ao longo do caminho γ . Esta noção também pode ser estendida a caminhos que sejam seccionalmente suaves. Seja $\gamma_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathcal{M}$, com $1 \leq i \leq n$ e podemos definir a holonomia como sendo a composição

$$H(\gamma, D) = H(\gamma_n, D) \cdots H(\gamma_1, D).$$

O transporte paralelo de vetores ao longo de caminhos que sejam seccionalmente contínuos é realizado transportando-os em uma secção a cada tempo.

Considerando a holonomia ao longo de um caminho fechado, se γ é um contorno baseado em $p \in \mathcal{M}$, a holonomia $H(\gamma, D)$ é um mapa linear de $E_p \rightarrow E_p$, com

$$H(\gamma, D) \in \text{End}(E)_p, \quad (1.11)$$

onde $\text{End}(E)_p$, denota o conjunto de todos os endomorfismos⁸. Quando aplica-se uma transformação de *gauge* g à conexão D , tem-se

$$H(\gamma, D') = g(p)H(\gamma, D)g(p)^{-1}. \quad (1.12)$$

Tomando o traço de $H(\gamma, D)$, obtém-se um número que não se altera quando sofre um transformação de *gauge*

$$\begin{aligned} \text{tr}(H(\gamma, D')) &= \text{tr}(g(p)H(\gamma, D)g(p)^{-1}) \\ &= \text{tr}(H(\gamma, D)). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Sendo assim, verifica-se que $\text{tr}(H(\gamma, D))$ é um invariante de *gauge*. O traço da holonomia ao longo de um caminho fechado recebe o nome de **contorno de Wilson**[22] e é escrito como

$$W(\gamma, D) = \text{tr}(H(\gamma, D)). \quad (1.14)$$

A quantidade $W(\gamma, D)$ foi introduzida por K. Wilson como o indicador do comportamento de confinamento numa teoria de *gauge* de rede[22]. O traço é feito sobre toda a representação do grupo. Esse grupo é o grupo de holonomia[23], que mede o desvio do espaço em relação ao espaço plano global.

⁸Dado um espaço vetorial V , as funções lineares que levam $V \rightarrow V$, são chamadas de endomorfismos.

A quantidade invariante $W(\gamma, D)$ apresenta informação sobre as propriedades físicas e geométricas dos espaços-tempos. A holonomia ao longo de um caminho fechado é alterada quando a conexão sofre uma transformação de *gauge*, a menos que esta transformação seja abeliana. É necessário determinar o traço da holonomia a fim que seja possível extraír alguma informação sobre o invariante de *gauge*. Na teoria de *gauge* do grupo $U(1)$, o contorno de Wilson é simplesmente a fase adquirida por uma partícula carregada quando se move ao longo de γ na presença de um potencial vetor. Esse efeito nada mais é do que o efeito Aharonov-Bohm. O contorno de Wilson é uma medida da auto-interação de uma partícula movendo-se num caminho fechado na presença de um campo de *gauge*. O contorno de Wilson possui várias propriedades importantes [21]

- ele é invariante sob transformações de *gauge* locais, sendo assim um observável na teoria de Yang-Mills;
- ele é invariante sobre as reparametrizações que preservam a orientação do contorno γ ;
- é independente da escolha do ponto base sobre γ .

1.4 Formalismos

Vamos apresentar uma descrição do formalismo de holonomias empregado para uma abordagem específica de gravitação, a qual será de fundamental importância para o desenvolvimento de toda a tese.

1.4.1 Formalismo de Segunda Ordem

Nesta secção, descreveremos o chamado formalismo de segunda ordem ou métrico [24] para espaços-tempo lorentzianos ou pseudo-riemannianos, cuja geometria é determinada pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$ de assinatura $(-1, 1, 1, 1)$. A variação de um vetor V^α quando deslocado por uma distância infinitesimal dx^μ é definida por:

$$dV^\alpha = \Gamma_{\mu\beta}^\alpha(x)V^\beta dx^\mu, \quad (1.15)$$

sendo $\Gamma_{\mu\beta}^\alpha$, o símbolo (ou conexão) de Christoffel, que é definido, de forma única, em termos do tensor métrico, por[25]

$$\Gamma_{\mu\beta}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma} (\partial_\mu g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\mu\gamma} - \partial_\gamma g_{\mu\beta}). \quad (1.16)$$

Integrando a equação (1.15), encontra-se o chamado transporte paralelo de V ao longo de uma curva finita e diferenciável, conectando os pontos x e x' . Este transporte paralelo é representado pela matriz

$$U_\beta^\alpha(x, x') = \mathcal{P} \exp \left[\int_x^{x'} dy^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha(y) \right]. \quad (1.17)$$

O produto ordenado \mathcal{P} faz com que as matrizes $(\Gamma_\mu)_\beta^\alpha = \Gamma_{\mu\beta}^\alpha$ sejam ordenadas ao longo do caminho. Os índices da matriz $U_\beta^\alpha(x, x')$ são baixados ou levantados, por $g_{\alpha\gamma}(x)$ e $g^{\beta\gamma}(x')$, respectivamente.

Quando a variedade é curva, a matriz U depende não apenas dos pontos extremos, mas também, do caminho percorrido. Se γ é uma curva fechada na variedade \mathcal{M} , define-se o funcional de contorno ou holonomia por

$$W(\gamma) = \text{Tr} \mathcal{P} \exp \left[\oint dx^\mu \Gamma_\mu(x) \right]. \quad (1.18)$$

Este funcional também é conhecido como contorno de Wilson.

Sob transformações de coordenadas $x \rightarrow \zeta$, a matriz U transforma-se de acordo com a expressão

$$U_\beta^\alpha(x, x') \rightarrow U_\beta^\alpha(x, x') \left. \frac{\partial \zeta^\gamma}{\partial x^\alpha} \right|_x \left. \frac{\partial x^\beta}{\partial \zeta^\epsilon} \right|_{x'}. \quad (1.19)$$

Para uma curva fechada, esta transformação deve ter a forma

$$U \rightarrow \Omega U \Omega^{-1}, \quad (1.20)$$

como o traço é invariante em relação à escolha de coordenadas o funcional de contorno é invariante sob transformações de coordenadas.

1.4.2 Formalismo de Primeira Ordem

Além do formalismo métrico, é possível usar o formalismo de primeira ordem, que consiste no uso campos de tetradas⁹ ou *vielbein*¹⁰ $e_\mu^a(x)$ e suas inversas E_a^μ . Esses campos de tetradas¹¹ satisfazem as seguintes relações [26, 27]

$$E_a^\mu e_\nu^a = \delta_\nu^\mu, \quad (1.21a)$$

$$e_\mu^a E_b^\mu = \delta_b^a. \quad (1.21b)$$

e_a^μ e E_a^μ são usados para converter índices latinos e gregos quando necessário. e_a^μ é uma matriz que transforma as bases coordenadas¹² dx^μ de $T_x^*(\mathcal{M})$ a um espaço ortonormal a $T_x^*(\mathcal{M})$, da seguinte forma

$$e^a = e_\mu^a dx^\mu. \quad (1.22)$$

De modo análogo, E_a^μ é uma transformação de uma base¹³ $\partial/\partial x^\mu$ de $T_x(\mathcal{M})$ a uma base ortonormal a $T_x(\mathcal{M})$

$$E_a = e_a^\mu \partial/\partial x^\mu. \quad (1.23)$$

O tensor métrico pode ser decomposto em termos das tetradas e_μ^a , da seguinte maneira

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b, \quad (1.24)$$

aqui η_{ab} é a métrica de um espaço plano. A métrica não é alterada se o campo das tetradas está sujeito a uma transformação de Lorentz, do tipo: $e^\alpha(x) \rightarrow \Lambda_\beta^\alpha(x) e^\beta$ [28]. Por exemplo, caso seja um espaço euclidiano quadridimensional teremos, $\eta_{ab} = \delta_{ab}$ $a, b = 1, 2, 3, 4$. Um outro exemplo seria o espaço de Minkowski, neste caso,

⁹Os vetores base de um sistema ortogonal local na Teoria Geral da Relatividade são chamados de tetradas.

¹⁰do alemão, “muitas pernas”. Dependendo da dimensionalidade do espaço-tempo em questão, encontra-se *vierbein*(4), *dreibein*(3), *zweibein*(2) e assim por diante.

¹¹do grego *tetras*, “grupo de quatro”.

¹²Usa-se também a notação: $\hat{\theta}^{(\mu)} = dx^\mu$.

¹³Usa-se também a notação: $\hat{e}_{(\mu)} = \partial_\mu$.

η_{ab} seria dado por

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b = 0, 1, 2, 3. \quad (1.25)$$

Observando a expressão (1.24), pode-se pensar, de certo modo, e_a^μ como a raiz quadrada da métrica.

Pode-se agora, introduzir a 1-forma conexão afim de *spin* ou simplesmente, de conexão de *spin*¹⁴ ω_b^a e definir

$$de^a + \omega_b^a \wedge e^b \equiv T^a = \frac{1}{2} T_{bc}^a e^b \wedge e^c, \quad (1.26)$$

T^a é a 2-forma torção . Para espaços-tempo sem a presença de torção, devemos ter $T^a = 0$ e a equação (1.26) fica reduzida à

$$de^a + \omega_b^a \wedge e^b = 0. \quad (1.27)$$

Tomando a derivada exterior de (1.27), ficamos com a seguinte equação

$$\begin{aligned} d(de^a + \omega_b^a \wedge e^b) &= 0, \\ d\omega_b^a \wedge e^b - \omega_b^a \wedge de^b &= 0, \end{aligned} \quad (1.28)$$

substituindo recursivamente a equação (1.27), na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} (d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c) \wedge e^b &= 0, \\ d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c &= 0. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Calculando a derivada covariante de η_{ab} , obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \eta_{ab} &= \partial_\mu \eta_{ab} - \omega_{\mu a}^c \eta_{cb} - \omega_{\mu b}^c \eta_{ac} \\ &= -\omega_{\mu ab} - \omega_{\mu ba}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

¹⁴a origem do nome vem do fato de que ela pode ser usada para tomar derivadas covariantes de espinores, o que é impossível de se fazer com as conexões convencionais.

A métrica $g_{\mu\nu}$ é compatível, isto é $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$. Com isso, a conexão de *spin* é antissimétrica

$$\omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba}. \quad (1.31)$$

Sob transformações de Lorentz, as 1-forma conexões transformam-se de forma idêntica aos potenciais de *gauge* numa teoria não-abeliana, isto é $\omega(x) \rightarrow \Lambda(x)\omega(x)\Lambda(x)^{-1} - d\Lambda(x)\Lambda(x)^{-1}$.

A 2-forma curvatura de uma conexão é definida como sendo

$$R_b^a = d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c = \frac{1}{2}R_{bcd}^a e^c \wedge e^d. \quad (1.32)$$

A curvatura em um dado ponto pode ser pensada como a holonomia de um circuito infinitesimal fechado através desse ponto. As equações (1.26) e (1.32) são conhecidas como equações de estrutura de Cartan¹⁵. Essas duas equações correspondem justamente às definições de torção e de curvatura, ambas são propriedades locais da conexão. Existem várias formas de se definir curvatura, entre outras pode-se definir em termos do transporte paralelo. Entende-se curvatura como uma medida da extensão de quanto o transporte paralelo é dependente do caminho. A curvatura 2-forma é obtida a partir da 1-forma conexão, da mesma maneira que a intensidade de campo de Yang-Mills é obtida a partir do potencial de *gauge*.

Qualquer vetor V^μ pode ser escrito em termos de suas componentes em uma base ortonormal da seguinte forma

$$V^a = V^\mu e_\mu^a(x), \quad (1.33)$$

e qualquer deslocamento infinitesimal deste é descrito pela equação

$$dV^a = \Gamma_{\mu b}^a(x) V^b dx^\mu. \quad (1.34)$$

Com isso, a matriz de holonomia passa a ser escrita como

$$U_b^a(x, x') = \mathcal{P} \exp \left[\int_x^{x'} dy^\mu \Gamma_{\mu b}^a(y) \right] \quad (1.35)$$

¹⁵Algumas vezes chamadas de equações de estrutura de Maurer-Cartan.

É sabido que a gravitação no formalismos das tetradas possui invariância local de Lorentz e que a conexão é completamente análoga a conexão de *gauge* usual.

1.5 Fases Geométricas e Topológicas

A mensurabilidade da fase geométrica na evolução temporal de sistemas quânticos é uma das propriedades estruturais mais significativas da teoria quântica. M.V. Berry[29, 30] mostrou que quando um sistema sofre uma evolução cíclica, devido a variações adiabáticas¹⁶ dos parâmetros do hamiltoniano, surge uma contribuição à fase, que é de origem puramente geométrica.

O efeito Aharonov-Bohm tem sido extensivamente estudado e inúmeras analogias gravitacionais vêm sendo apresentadas. Em ambos os casos, as características topológicas atuam de maneira relevante. Desde que a fase geométrica foi descoberta por M.V. Berry, ela tem sido aplicada em vários ramos da física. Lidando desde holonomia[31], estatística fracionária, monopólos e anomalias topológicas, sendo também estendida a discussão para o caso não-adiabático[32, 33]. O caso relativístico foi discutido por Wang e Li[34], baseado na equação de Dirac. Neste caso a fase de Berry satisfaz a invariância das transformações de Lorentz na teoria quântica relativística.

1.5.1 Fases de Berry

Queremos determinar uma fórmula geral para o fator de fase. Para isso, seguiremos o mesmo procedimento adotado por Berry. Dado o hamiltoniano \mathcal{H} , o qual pode ser alterado variando-se os parâmetros $\vec{R} = (x, y, \dots)$, sobre os quais ele depende. A evolução do sistema entre os pontos $t = 0$ e $t = T$ pode ser obtida por meio do transporte ao redor de um caminho fechado, $R(t)$ no espaço dos parâmetros, com a condição $R(0) = R(T)$. Esse caminho é chamado de circuito e denotado por C .

O estado $|\psi(t)\rangle$ evolui de acordo com a equação de Schrödinger

$$\mathcal{H}(\vec{R})|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle. \quad (1.36)$$

¹⁶Um processo adiabático é caracterizado por uma variação gradual dos parâmetros externos.

Em qualquer instante de tempo, a base natural consiste dos auto-estados $|n(\vec{R})\rangle$ de $\mathcal{H}(\vec{R})$ para $\vec{R} = \vec{R}(t)$, satisfazendo a equação de auto-valores

$$\mathcal{H}(\vec{R})|n(\vec{R})\rangle = i\hbar E_n(\vec{R})|n(\vec{R})\rangle, \quad (1.37)$$

com energias E_n .

Num processo adiabático, um sistema preparado em um desses estados representado por $|n(\vec{R}(0))\rangle$, evoluirá de acordo com o hamiltoniano e estará num estado $|n(\vec{R}(t))\rangle$ num tempo t qualquer. O vetor de estado $|\psi(t)\rangle$ pode ser escrito como

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' E_n(\vec{R}(t'))\right\} \exp(i\gamma_n)|n(\vec{R})\rangle \quad (1.38)$$

O primeiro termo é conhecido como fator de fase dinâmico. E qualquer fase extra, γ_n é chamada de fase geométrica. Berry notou que γ_n é não integrável e que não pode ser escrita em termos de \vec{R} . Além disso, não é unívoca sobre uma continuação ao redor do circuito, portanto $\gamma_n(0) \neq \gamma_n(T)$.

A função $\gamma_n(t)$ é determinada usando a exigência de que $|\psi(t)\rangle$ satisfaça a equação de Schrödinger. Substituindo (1.38) em (1.36), obtemos

$$\dot{\gamma}_n(t) = i \langle n(\vec{R}(t)) | \nabla_{\vec{R}} n(\vec{R}(t)) \rangle \cdot \dot{\vec{R}}(t). \quad (1.39)$$

A mudança de fase total é dada por $|\psi\rangle$, que ao longo do caminho C , é dada por

$$|\psi(T)\rangle = \exp(i\gamma_n(C)) \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt E_n(\vec{R}(t))\right\} |\psi(\vec{R})\rangle, \quad (1.40)$$

onde a fase geométrica é dada por

$$\gamma_n(C) = i \oint_C \langle n(\vec{R}) | \nabla_{\vec{R}} n(\vec{R}) \rangle \cdot d\vec{R}. \quad (1.41)$$

A fase $\gamma_n(C)$ é dada por uma integral circuital no espaço de parâmetros e é independente de como o circuito é feito. O termo $\gamma_n(T)$ é chamado de fase de Berry.

Efeito Aharonov-Bohm

No trabalho pioneiro de Y. Aharonov e D. Bohm[20], eles estudaram as propriedades dos potenciais eletromagnéticos no domínio quântico. E mostraram que diferentemente da física clássica, existem efeitos do potencial vetor sobre as partículas carregadas, mesmo na região onde todos os campos são nulos. Suponha um elétron numa caixa (barreira de potencial infinita) centrada na origem. A função de onda $\chi(r)$ do estado fundamental é real e a equação de Schrödinger

$$\left[\frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) \right] \chi(\vec{r}) = E\chi(\vec{r}). \quad (1.42)$$

O deslocamento \vec{R} da posição do centro da caixa provoca uma modificação no hamiltoniano, dada por

$$\mathcal{H}(\vec{R}) = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r} - \vec{R}). \quad (1.43)$$

Devido à invariância translacional, a dependência do vetor de estado com \vec{R} é dada por: $\langle \vec{r} | \psi(\vec{R}) \rangle = \chi(\vec{r} - \vec{R})$, enquanto o auto-valor é independente de \vec{R} . Suponha agora que um campo magnético é ligado em alguma região do espaço. Então o novo hamiltoniano é dado por

$$\mathcal{H}(\vec{R}) = \frac{1}{2m} \left[\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}) \right]^2 + V(\vec{r} - \vec{R}), \quad (1.44)$$

onde \vec{A} é o potencial vetor e e é a carga do elétron. A solução da equação Schrödinger pode ser formalmente escrita na forma

$$\langle \vec{r} | \psi(\vec{R}) \rangle = \exp \left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} \vec{A}'(\vec{r}') d\vec{r}' \right) \chi(\vec{r} - \vec{R}). \quad (1.45)$$

Uma solução dessa forma, em geral, não é uma função unívoca de \vec{r} , desde que a fase dependa do caminho escolhido. A fim de evitar esse transtorno, a forma do campo magnético é restringida a um campo tipo solenóide. O vetor indução magnética \vec{B} é não zero apenas dentro de um dado cilindro. Além disso, não é permitido a caixa sobrepor o cilindro pela escolha adequada do domínio de \vec{R} . Isso garante a unicidade local da solução dentro de tal domínio.

O resultado mais relevante do artigo de Y. Aharonov e D. Bohm [20] surge no

estudo de um sistema quântico numa região sem campo magnético. Na física clássica, o campo \vec{B} e o potencial vetor são apenas construções matemáticas, afetadas pela arbitrariedade do *gauge* e a não mensurabilidade do segundo. A partícula clássica pode ser afetada apenas pelo campo \vec{B} em sua posição. Nenhum efeito mensurável ocorre quando a partícula orbita a região exterior ao solenóide. Os resultados da mecânica quântica são qualitativamente diferentes. O sistema “sente” através de efeitos mensuráveis o efeito do campo \vec{B} em regiões não visitadas. Esses efeitos já foram verificados experimentalmente e manifestações macroscópicas são verificadas em supercondutores através do efeito Josephson e são a base para a tecnologia de SQUID. O efeito Aharonov-Bohm é um paradigma de uma classe de fenômenos, conhecidos como fases de Berry [29].

Capítulo 2

Transformações de Holonomia na Geometria de Buracos Negros e Cordas Negras

Neste capítulo iremos estudar as características topológicas do espaço-tempo do buraco negro BTZ e o de uma corda negra através das propriedades das transformações de holonomia. As características globais desses sistemas serão investigadas por meio do cálculo das variáveis de contorno. Esses espaços-tempos não são assintoticamente planos como o buraco negro de Schwarzschild, possuindo curvatura constante em toda a região do espaço-tempo. Inicialmente, faremos uma breve introdução sobre buracos negros antes de nos voltarmos especificamente para o BTZ e a corda negra. Estudamos as transformações de holonomia para os casos não girantes e girantes. Além disso, analisaremos órbitas fechadas ao longo dessas estruturas, tanto para vetores quanto para espinores [35].

2.1 Buracos Negros

Os buracos negros constituem uma das estruturas mais fascinantes e intrigantes da natureza. Eles formam uma estrutura macroscópica construída apenas em termos dos conceitos de tempo e espaço. Eles surgem como consequência natural da relatividade geral. Embora os buracos negros sejam descritos de modo completo e preciso pela teoria da relatividade geral, os mesmos podem ser definidos de forma

elementar num contexto newtoniano. Diz-se que um buraco negro é uma região do espaço-tempo no qual o potencial gravitacional excede o quadrado da velocidade da luz, isto é

$$\frac{GM}{R} > c^2. \quad (2.1)$$

Esta definição independe dos detalhes da teoria gravitacional adotada. Uma outra definição elementar pode ser apresentada da seguinte forma : um corpo astronômico cuja velocidade de escape excede a velocidade da luz pode ser um buraco negro.

A primeira solução não trivial das equações de Einstein foi encontrada por Schwarzschild [25], em 1916. Ele encontrou que a métrica que descreve o espaço-tempo ao redor de um corpo esfericamente simétrico é dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.2)$$

onde, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ é a métrica da esfera bidimensional. Adotamos para a velocidade da luz, $c = 1$. M é um parâmetro que pode ser interpretado como a massa newtoniana. No limite $M \rightarrow 0$ a métrica de Schwarzschild (2.2) coincide com a métrica de Minkowski. Por outro lado, ela também se torna uma métrica de Minkowski quando $r \rightarrow \infty$. Quando isso ocorre a métrica é dita ser assintoticamente plana. A métrica de Schwarzschild (2.2), além de ser esfericamente simétrica e descrever o vácuo, é estática, isto é, as componentes do tensor métrico independem do tempo¹.

Nota-se também que o elemento de linha (2.2) torna-se singular quando $r = 2M$. Esta singularidade pode ser removida através da escolha adequada de coordenadas². A singularidade de fato ocorre quando $r = 0$, neste caso as componentes da curvatura divergem e essa singularidade não pode ser removida por uma simples mudança de variáveis. Analisando o caso de geodésica radiais nulas, isto é, $ds^2 = 0$ e $d\Omega = 0$, na região interior ao raio $2MG$, temos

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}. \quad (2.3)$$

¹O teorema de Birkhoff estabelece que a solução de Schwarzschild é a única solução esfericamente simétrica das equações de Einstein para o vácuo.

²O primeiro passo para a solução deste problema foi dado por Eddington e Finkelstein, no início do anos 30, mas só foi resolvido completamente nos anos 60.

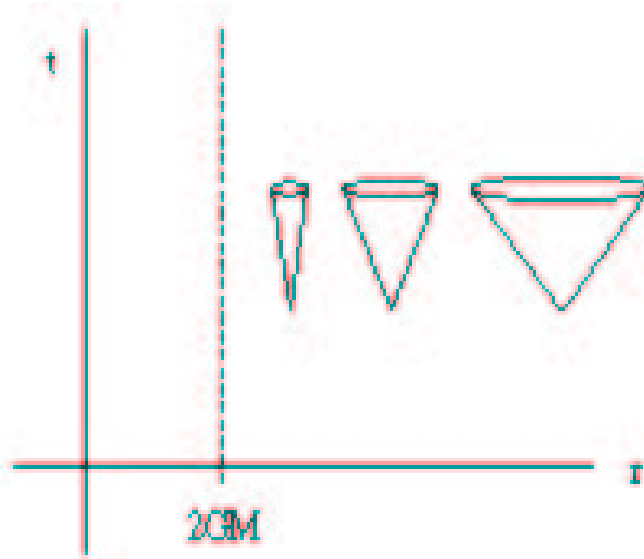


Figura 2.1: Diagrama do plano $t \times r$.

A equação (2.3) representa uma medida da inclinação dos cones de luz no diagrama do plano $t \times r$. Para valores grandes de r a inclinação vale ± 1 , com isso o espaço pode ser considerado plano. Outro limite interessante ocorre quando nos aproximamos da região $r = 2GM$, temos $dt/dr \rightarrow \infty$, desse modo, os cones de luz vão se fechando como mostra a Fig. (2.1). A verdade é que não existe nenhum problema quando se chega ao ponto $r = 2GM$. Isso tudo é devido às coordenadas que estamos usando. A solução de Schwarzschild representa uma importante conquista para a Relatividade Geral, já que é a primeira solução da equação de Einstein esfericamente simétrica.

2.2 Buraco Negro BTZ

Gravitação em $(2 + 1)$ dimensões é largamente utilizada como laboratório para estudar questões conceituais. Porém, considerando aspectos gerais, este modelo era considerado demasiadamente irrealístico para que pudesse fornecer alguma informação sobre sistemas gravitacionais reais em $(3 + 1)$ dimensões. De modo surpreendente, Banãdos, Teitelboim e Zanelli, em 1992 [36], mostraram a existência

de solução tipo buraco negro de $(2+1)$ dimensões e num artigo posterior, ao lado de Henneaux [37], detalharam diversas propriedades físicas desta solução. Este buraco negro é solução da equação de vácuo de Einstein com constante cosmológica negativa. Assim, como o espaço-tempo anti-de-Sitter, o buraco negro BTZ possui curvatura negativa, embora ambas as soluções difiram em aspectos topológicos globais. Além disso, a curvatura do buraco negro BTZ não possui singularidade na origem.

A ação de Einstein-Hilbert para o vácuo tem a seguinte forma [38]

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2x dt \sqrt{-g} [R - 2\Lambda]. \quad (2.4)$$

Aplicando o princípio da mínima ação, isto é, extremizando a ação (2.4) com relação à métrica $g_{\mu\nu}$, encontra-se as seguintes equações de movimento

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.5)$$

estas equações são conhecidas como equações de Einstein. A métrica tridimensional derivada da ação (2.4) e solução da equação de Einstein(2.5), encontrada por Banãdos, Teitelboim e Zanelli dada por

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + N^{-2} dr^2 + r^2 (N^\phi dt + d\phi)^2, \quad (2.6)$$

com

$$N^2(r) = -8M + r^2\alpha^2 + \frac{16J^2}{r^2}, \quad (2.7a)$$

$$N^\phi(r) = -\frac{4J}{r^2}, \quad (2.7b)$$

é conhecida como buraco negro BTZ. Sendo M um termo associado à massa do buraco negro, J , o termo de momento angular e α , é um termo associado à constante cosmológica, dado por $\Lambda = -\alpha^2$. As funções (2.7) são chamadas respectivamente de função lapso $N(r)$ e função deslocamento angular, $N^\phi(r)$. Nota-se que a métrica (2.6) é estacionária, já que é independente do tempo e que além disso, possui simetria axial.

A função lapso $N(r)$, anula-se para dois valores distintos de r que correspon-

dem a

$$r_{\pm}^2 = \frac{4M}{\alpha^2} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J\alpha}{M}\right)^2} \right\}. \quad (2.8)$$

r_{\pm} são chamados, respectivamente, de horizonte de evento externo e horizonte interno. Para que os horizontes existam, as condições

$$M > 0 \quad \text{e} \quad |J| \leq M/\alpha \quad (2.9)$$

devem ser satisfeitas. As duas condições (2.9) garantem que os raios dos horizontes sejam quantidades reais. No caso extremo no qual $|J| = M/\alpha$, o horizonte de evento interno e horizonte externo coincidem, isto é, $r_+ = r_-$. Observando o caso em que o buraco negro não possui rotação, o que corresponde a fazer $J = 0$, o buraco negro BTZ, de modo semelhante ao buraco negro de Schwarzschild, possui um único horizonte de eventos, dado por $r = \sqrt{8M/\alpha^2}$. A massa e o momento angular do buraco negro podem ser escritas em termo dos raios dos horizontes de evento da seguinte maneira

$$M = \alpha^2 \frac{r_+^2 + r_-^2}{8}, \quad (2.10a)$$

$$J = \frac{r_+ r_-}{4\alpha}. \quad (2.10b)$$

As expressões (2.10) permitem reescrever a métrica (2.6) do buraco negro BTZ em termos dos raios dos horizontes de eventos (2.8).

O chamado estado de vácuo, que pode ser pensado como o espaço vazio, é obtido fazendo o buraco negro desaparecer. Isso ocorre quando o horizonte de eventos é nulo. Para isso, deve-se tomar o limite $M \rightarrow 0$. Conseqüentemente, devido às condições (2.9), $J \rightarrow 0$. Assim, obtém-se o seguinte elemento de linha para o vácuo

$$ds_{\text{vácuo}}^2 = -(r\alpha)^2 dt^2 + (r\alpha)^{-2} dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (2.11)$$

Fazendo $M = -1$ e $J = 0$ a métrica BTZ pode ser identificada como o espaço anti-de Sitter usual, dada por

$$ds^2 = -(-8 + r^2\alpha^2)dt^2 + (-8 + r^2\alpha^2)^{-1}dr^2 + r^2d\phi^2. \quad (2.12)$$

Enquanto o caso $M = 0$ e $J = 0$ que apresenta um *gap*³ de massa em relação ao espaço anti-de Sitter e é chamado de buraco negro não massivo.

2.2.1 Transformações de Holonomia para o Buraco Negro BTZ

Buraco Negro BTZ sem Rotação

Vamos analisar o caso no qual o momento angular é nulo, isto é $J = 0$, sendo assim, o buraco negro não possui rotação. Neste caso, as funções lapso (2.7a) e deslocamento angular (1.15) ficam reduzidas a

$$N^2(r) = -8M + r^2\alpha^2, \quad (2.13a)$$

$$N^\phi(r) = 0. \quad (2.13b)$$

Para se obter as variáveis de contorno, precisamos encontrar uma expressão para a conexão. O fato do momento angular ser nulo nos permite escolher uma base dual de 1-formas para a métrica (2.6) como sendo

$$e^0 = Ndt, \quad (2.14a)$$

$$e^1 = N^{-1}dr, \quad (2.14b)$$

$$e^2 = rd\phi. \quad (2.14c)$$

A variável fundamental no formalismo de primeira ordem são as triádes, $e^a = e^a_\mu dx^\mu$ e as conexões. As triádes, nesse caso, são dadas por

$$e^0_0 = N = \sqrt{-8M + r^2\alpha^2}, \quad (2.15a)$$

$$e^1_1 = N^{-1} = \frac{1}{\sqrt{-8M + r^2\alpha^2}}, \quad (2.15b)$$

$$e^2_2 = r. \quad (2.15c)$$

Podemos utilizar a primeira equação de estrutura de Cartan, dada por

$$de^\alpha + \omega^\alpha_\beta \wedge e^\beta = 0, \quad (2.16)$$

³A origem do termo *gap* vem do fato que dos demais valores para $M \neq 0$ a solução é AdS.

para obter as conexões de *spin* do buraco negro BTZ com momento angular nulo. Para isso, vamos determinar a derivada exterior do conjunto de 1-formas (2.14)

$$de^0 = N' dr \wedge dt, \quad (2.17a)$$

$$de^1 = 0, \quad (2.17b)$$

$$de^2 = dr \wedge d\phi. \quad (2.17c)$$

Para determinar as conexões ω_β^α , precisamos resolver o sistema de equações abaixo:

$$de^0 + \omega_0^0 \wedge e^0 + \omega_1^0 \wedge e^1 + \omega_2^0 \wedge e^2 = 0, \quad (2.18a)$$

$$de^1 + \omega_0^1 \wedge e^0 + \omega_1^1 \wedge e^1 + \omega_2^1 \wedge e^2 = 0, \quad (2.18b)$$

$$de^2 + \omega_0^2 \wedge e^0 + \omega_1^2 \wedge e^1 + \omega_2^2 \wedge e^2 = 0. \quad (2.18c)$$

As únicas conexões não nulas encontradas foram as seguintes

$$\omega_1^0 = \omega_0^1 = NN' dt = r\alpha^2 dt, \quad (2.19a)$$

$$\omega_2^1 = -\omega_1^2 = -Nd\phi = -\sqrt{-8M + r^2\alpha^2}d\phi. \quad (2.19b)$$

As conexões de *spin* podem ser obtidas a partir da relação, $(\Gamma_\mu)_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha dx^\mu$, sendo assim

$$\Gamma_\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N \\ 0 & N & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

e

$$\Gamma_t = \begin{pmatrix} 0 & NN' & 0 \\ NN' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

A conexão de spin Γ_ϕ está associada a órbitas com tempo constante enquanto a conexão Γ_t corresponde a órbitas com ângulo azimutal constante. Note que elas dependem dos parâmetros M e α , além é claro, da variável r .

Estamos interessados em efetuar o transporte paralelo de vetores em torno do buraco negro BTZ e analisar o efeito da curvatura sobre o resultado final do

transporte. A matriz de holonomia associada ao transporte paralelo de vetores ao longo de caminhos fechados, γ , é definida por

$$U(\gamma) = \mathcal{P} \exp \left(- \oint_{\gamma} \Gamma_{\mu} dx^{\mu} \right). \quad (2.22)$$

O primeiro caminho a ser analisado será a órbita de tempo constante centrado na origem, neste caso $\Gamma_{\mu} dx^{\mu} = \Gamma_{\phi} d\phi$. Como Γ_{ϕ} é independente do ângulo azimutal ϕ , a integral de holonomia (4.39) pode ser facilmente calculada

$$\begin{aligned} U(\gamma) &= \exp \left(- \oint \Gamma_{\phi} d\phi \right) \\ &= \exp(-2\pi\Gamma_{\phi}), \end{aligned} \quad (2.23)$$

fazendo a expansão da exponencial acima em série de Taylor,

$$U(\gamma) = 1 - 2\pi\Gamma_{\phi} + \frac{(2\pi\Gamma_{\phi})^2}{2!} - \frac{(2\pi\Gamma_{\phi})^3}{3!} + \frac{(2\pi\Gamma_{\phi})^4}{4!} + \dots, \quad (2.24)$$

podemos escrever todos os expoentes de ordem superior em termos de Γ_{ϕ} e de Γ_{ϕ}^2 . Deste modo, pode-se escrever de uma maneira mais compacta a equação (2.24) como

$$U(\gamma) = 1 - \frac{\Gamma_{\phi}}{N} \sin(2\pi N) + \frac{\Gamma_{\phi}^2}{N^2} [1 - \cos(2\pi N)]. \quad (2.25)$$

Esta expressão corresponde à transformação de holonomia para caminhos circulares com o tempo constante. Podemos escrever a integral de holonomia em sua forma matricial,

$$U(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi N) & \sin(2\pi N) \\ 0 & -\sin(2\pi N) & \cos(2\pi N) \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Esta matriz pode ser interpretada como o gerador de rotações em torno do eixo z , com $U(\gamma) = \exp(-2\pi i N J_{12})$. Se o vetor percorrer o caminho γ n vezes, a matriz de holonomia passa a ser dada por: $U(\gamma) = \exp(-2\pi i n N J_{12})$. Neste caso, o ângulo de déficit é dado por $2\pi n N$. Queremos determinar a existência de um raio crítico no

qual a holonomia é a própria matriz identidade. Essa condição é dada por

$$2\pi nN = 2\pi m, \quad (2.27)$$

com $m = 1, 2, 3, \dots$. Este raio crítico é dado por

$$r_{cr} = \frac{\sqrt{8M + (m/n)^2}}{\alpha}. \quad (2.28)$$

Sabemos que o espaço ao redor do buraco negro BTZ tem curvatura negativa, mas como explicar a existência de uma região com curvatura nula? Isto ocorre porque a densidade de massa do buraco negro contribui com uma curvatura positiva que é responsável pelo balanceamento da curvatura do espaço. Isto faz com que na região interna a $r = r_{cr}$ a curvatura média seja nula.

Um outro caminho pode ser obtido fixando-se o ângulo azimutal, $\Gamma_\mu dx^\mu = \Gamma_t dt$, sendo assim a transformação de holonomia é dada por

$$\begin{aligned} U(\gamma) &= \exp\left(-\oint \Gamma_t dt\right) \\ &= \exp(-T\Gamma_t), \\ &= 1 - T\Gamma_t + \frac{(T\Gamma_t)^2}{2!} - \frac{(T\Gamma_t)^3}{3!} + \frac{(T\Gamma_t)^4}{4!} + \dots \end{aligned} \quad (2.29)$$

Reagrupando os termos, obtemos a seguinte expressão para a fase (4.39)

$$U(\gamma) = 1 - \frac{\Gamma_t}{NN'} \sinh(NN'T) + \frac{\Gamma_t^2}{(NN')^2} [\cosh(NN'T) - 1]. \quad (2.30)$$

Notamos que a holonomia carrega informação a respeito da constante cosmológica. Escrevendo $U(\gamma)$ na sua forma matricial, obtem-se

$$U(\gamma) = \begin{pmatrix} \cosh(NN'T) & -\sinh(NN'T) & 0 \\ -\sinh(NN'T) & \cosh(NN'T) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

ou de modo mais explícito

$$U(\gamma) = \begin{pmatrix} \cosh(r\alpha^2 T) & -\sinh(r\alpha^2 T) & 0 \\ -\sinh(r\alpha^2 T) & \cosh(r\alpha^2 T) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

A matriz $U(\gamma)$ é a identidade apenas quando r, α e/ou T são nulos. Caso contrário, o vetor sempre será modificado quando transportado paralelamente em torno do buraco negro.

Um caminho mais geral, é o caso no qual nem o tempo t , nem o ângulo azimutal ϕ , são tomados como constantes. Sendo assim, a conexão de *spin*, pode ser escrita como a soma de dois termos, dadas por

$$\Gamma_\mu dx^\mu = \Gamma_t dt + \Gamma_\phi d\phi. \quad (2.33)$$

Rescrevendo-a em termos de $\beta = dt/d\phi$, obtemos

$$\Gamma_\mu dx^\mu = (\beta\Gamma_t + \Gamma_\phi) d\phi. \quad (2.34)$$

Define-se a conexão de *spin* “generalizada” por

$$\Gamma_s \equiv \beta\Gamma_t + \Gamma_\phi, \quad (2.35)$$

Γ_s na sua forma matricial é dada por

$$\Gamma_s = \begin{pmatrix} 0 & \beta NN' & 0 \\ \beta NN' & 0 & -N \\ 0 & N & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Podemos agora, determinar a matriz de holonomia

$$\begin{aligned}
U(\gamma) &= \exp\left(-\oint \Gamma_\mu dx^\mu\right) \\
&= \exp\left(-\oint \Gamma_s d\phi\right) \\
&= \exp(-2\pi\Gamma_s) \\
&= 1 - 2\pi\Gamma_s + \frac{(2\pi\Gamma_s)^2}{2!} - \frac{(2\pi\Gamma_s)^3}{3!} + \frac{(2\pi\Gamma_s)^4}{4!} + \dots \quad (2.37)
\end{aligned}$$

Utilizamos as propriedades da matriz Γ_s que estabelece que os termos de expoentes ímpares satisfazem a relação $\Gamma_s^{2j+1} = \left(\beta\sqrt{(NN')^2 - N^2}\right)^{2j} \Gamma_s$, enquanto os termos pares satisfazem: $\Gamma_s^{2j} = \left(\beta\sqrt{(NN')^2 - N^2}\right)^{2j} \Gamma_s^2$. Isso nos permite reescrever a matriz de holonomia $U(\gamma)$ como sendo

$$\begin{aligned}
U(\gamma) &= 1 - \frac{\Gamma_s}{\beta\sqrt{(NN')^2 - N^2}} \sin(2\pi\beta\sqrt{(NN')^2 - N^2}) + \\
&\quad \frac{\Gamma_s^2}{\beta^2((NN')^2 - N^2)} \left[1 - \cos(2\pi\beta\sqrt{(NN')^2 - N^2})\right]. \quad (2.38)
\end{aligned}$$

Buraco Negro BTZ com Rotação

Queremos discutir o caso mais geral, no qual o buraco negro possui momento angular não nulo, isto é $J \neq 0$. A base dual generalizada para a métrica (2.6) é dada por

$$e^0 = Ndt, \quad (2.39a)$$

$$e^1 = N^{-1}dr, \quad (2.39b)$$

$$e^2 = r(N^\phi dt + d\phi), \quad (2.39c)$$

com o seguinte conjunto de tríades

$$e_0^0 = N = \sqrt{-8M + r^2\alpha^2 + \frac{16J^2}{r^2}}, \quad (2.40a)$$

$$e_1^1 = N^{-1} = \frac{1}{\sqrt{-8M + r^2\alpha^2 + \frac{16J^2}{r^2}}}, \quad (2.40b)$$

$$e_0^2 = rN^\phi = -\frac{4J}{r^2}, \quad e_2^2 = r. \quad (2.40c)$$

Utilizando novamente a equação de estrutura de Cartan (2.16), podemos obter as conexões de *spin* generalizadas⁴ da métrica (2.6). Para isso, vamos determinar a derivada exterior do conjunto de 1-formas (2.39)

$$de^0 = NN'dr \wedge dt, \quad (2.41a)$$

$$de^1 = 0, \quad (2.41b)$$

$$de^2 = N^\phi dr \wedge dt + dr \wedge d\phi + r \frac{\partial N^\phi}{\partial r} dr \wedge dt. \quad (2.41c)$$

Para determinar as conexões ω_b^a , precisamos resolver o sistema de equações abaixo

$$de^0 + \omega_0^0 \wedge e^0 + \omega_1^0 \wedge e^1 + \omega_2^0 \wedge e^2 = 0, \quad (2.42a)$$

$$de^1 + \omega_0^1 \wedge e^0 + \omega_1^1 \wedge e^1 + \omega_2^1 \wedge e^2 = 0, \quad (2.42b)$$

$$de^2 + \omega_0^2 \wedge e^0 + \omega_1^2 \wedge e^1 + \omega_2^2 \wedge e^2 = 0. \quad (2.42c)$$

As conexões de *spin* generalizadas não nulas encontradas são

$$\omega_1^0 = \omega_0^1 = NN'dt, \quad (2.43a)$$

$$\omega_2^1 = -\omega_1^2 = -N(N^\phi dt + d\phi). \quad (2.43b)$$

As conexões de *spin* podem ser obtidas a partir da relação, $(\Gamma_\mu)_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha dx^\mu$, sendo

⁴Usamos a expressão “generalizadas”, apenas para indicar a presença do termo de rotação.

assim

$$\Gamma_\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N \\ 0 & N & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

e

$$\Gamma_t = \begin{pmatrix} 0 & NN' & 0 \\ NN' & 0 & -NN^\phi \\ 0 & NN^\phi & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Vemos que quando $J = 0$, as conexões de *spin* (2.44) e (2.45) se reduzem às conexões do buraco negro sem rotação (2.20) e (2.21).

Voltamos agora a analisar o transporte paralelo de vetores em torno do buraco negro BTZ, considerando os efeitos do momento angular. Considerando a órbita de tempo constante centrada na origem e assumindo que Γ_ϕ é independente do ângulo azimutal ϕ , a integral de holonomia (4.39) na sua forma matricial fica

$$U(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi N) & \sin(2\pi N) \\ 0 & -\sin(2\pi N) & \cos(2\pi N) \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Esta matriz pode ser interpretada como o gerador de rotações em torno do eixo z , com $U(\gamma) = \exp(-2\pi i N J_{12})$. Observando (2.24) ou (2.46) notamos a existência de um raio crítico no qual a holonomia é a própria matriz identidade. O raio crítico generalizado é dado por

$$r_{cr} = \frac{\sqrt{2M}}{\alpha} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - (\alpha J/M)^2}}. \quad (2.47)$$

Este novo raio crítico, além dos efeitos da curvatura, incorpora efeitos associados ao momento angular. Quando fazemos $J = 0$, o raio crítico generalizado (2.47) se reduz ao raio crítico (2.28).

Um outro caminho pode ser obtido fixando-se o ângulo azimutal, a fase geo-

métrica obtida é então

$$U(\gamma) = 1 - \frac{\Gamma_t}{\sqrt{(NN')^2 - (NN\phi)^2}} \sinh(\sqrt{(NN')^2 - (NN\phi)^2}T) + \frac{\Gamma_t^2}{(NN')^2 - (NN\phi)^2} \left[\cosh(\sqrt{(NN')^2 - (NN\phi)^2}T) - 1 \right]. \quad (2.48)$$

Rescrevendo $U(\gamma)$ na sua forma matricial,

$$U(\gamma) = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{(NN')^2 - (NN\phi)^2}T) & -\sinh(\sqrt{(NN')^2 - (NN\phi)^2}T) & 0 \\ -\sinh(\sqrt{(NN')^2 - (NN\phi)^2}T) & \cosh(\sqrt{(NN')^2 - (NN\phi)^2}T) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

identificamos $[(NN')^2 - (NN\phi)^2]T$ como o parâmetro de *boost* da transformação de Lorentz.

Sabe-se que a maneira natural de se construir uma quantidade que seja invariante sob uma transformação de *gauge* é determinando o contorno de Wilson que é definido por

$$W(\gamma) = \text{tr} \mathcal{P} \exp \left[- \oint_{\gamma} dx^{\mu} \Gamma_{\mu}(x) \right]. \quad (2.50)$$

Queremos determinar o contorno de Wilson para o buraco negro BTZ[39]. Para caminhos fechados com tempo constante o contorno de Wilson é dado por

$$W(\gamma) = 2 (1 + \cos 2\pi N). \quad (2.51)$$

O contorno de Wilson para um caminho fechado com ϕ constante é dado por

$$W(\gamma) = 2 [1 + \cosh((NN')^2 - (NN\phi)^2)]. \quad (2.52)$$

O ângulo de *deficit* χ é obtido quando comparado as posições final e inicial do vetor quando este é transportado paralelamente ao longo do caminho fechado com tempo constante, e é dado por

$$\cos \chi_A = U_A^A, \quad (2.53)$$

onde A é o índice tetrádico. Os termos de desvio angular não nulos ocorrem quando

$A = 1$ e 2 , então, temos

$$\cos \chi_{1ou2} = 2\pi N \quad (2.54)$$

ou

$$|\chi_{1ou2}| = |2\pi N + 2\pi n|. \quad (2.55)$$

No limite $N \rightarrow 0$ devemos ter $\chi_{1ou2} \rightarrow 0$, escolhemos $n = 0$, o que leva a

$$|\chi_{1ou2}| = |2\pi N|. \quad (2.56)$$

Esta expressão mostra que para $N \neq 0$, se transportamos paralelamente um vetor ao longo de um caminho fechado o vetor final não coincide com o vetor original. Este efeito pode ser interpretado como sendo o análogo gravitacional do efeito Aharonov-Bohm.

2.3 Cordas Negras

Recentemente, Lemos e Zanchin [40], transformaram o buraco negro BTZ tridimensional em um buraco negro cilíndrico quadridimensional, conhecido como **corda negra**. O processo de formação da corda negra é análogo ao da transformação de uma partícula pontual num espaço-tempo tridimensional numa corda cósmica num espaço quadridimensional. A conexão entre a relatividade tridimensional e a quadridimensional pode ser feita via

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b + dz^2. \quad (2.57)$$

Com a escolha adequada do tensor quadridimensional energia-momento, pode-se encontrar a partir da solução tridimensional a solução quadridimensional correspondente. A solução do buraco negro (2.6) é transladada ao longo do eixo z , obtendo-se a seguinte métrica quadridimensional

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + N^{-2} dr^2 + r^2 (N^\phi dt + d\phi)^2 + dz^2, \quad (2.58)$$

onde as funções lapso e deslocamento angular são as mesmas do buraco negro BTZ.

2.3.1 Transformação de Holonomia para a Corda Negra

Estamos interessados em estudar o transporte paralelo de vetores ao longo de caminhos fechados e caracterizar a geometria do espaço-tempo de uma corda negra.

Corda Negra sem Rotação

Mais uma vez, vamos iniciar pelo caso mais simples, que corresponde a uma corda negra sem rotação. Neste caso, a escolha da base de 1-formas para a métrica da corda negra sem rotação (2.58), pode ser feita de maneira semelhante à métrica do buraco negro BTZ sem rotação, acrescentando-se uma dimensão a mais devido ao eixo z , a base escolhida é dada por

$$e^0 = Ndt, \quad (2.59a)$$

$$e^1 = N^{-1}dr, \quad (2.59b)$$

$$e^2 = rd\phi, \quad (2.59c)$$

$$e^3 = dz. \quad (2.59d)$$

com o seguinte conjunto de tetradas

$$e_0^0 = N, \quad (2.60a)$$

$$e_1^1 = N^{-1}, \quad (2.60b)$$

$$e_2^2 = r, \quad (2.60c)$$

$$e_3^3 = z. \quad (2.60d)$$

Tomando a derivada exterior da base (2.59), obtemos o seguinte conjunto de 2-formas

$$de^0 = NN'dr \wedge dt, \quad (2.61a)$$

$$de^1 = 0, \quad (2.61b)$$

$$de^2 = dr \wedge d\phi, \quad (2.61c)$$

$$de^3 = 0. \quad (2.61d)$$

As conexões que correspondem à corda negra sem rotação são obtidas a partir do

sistema de equações abaixo

$$de^0 + \omega_0^0 \wedge e^0 + \omega_1^0 \wedge e^1 + \omega_2^0 \wedge e^2 + \omega_3^0 \wedge e^3 = 0, \quad (2.62a)$$

$$de^1 + \omega_0^1 \wedge e^0 + \omega_1^1 \wedge e^1 + \omega_2^1 \wedge e^2 + \omega_3^1 \wedge e^3 = 0, \quad (2.62b)$$

$$de^2 + \omega_0^2 \wedge e^0 + \omega_1^2 \wedge e^1 + \omega_2^2 \wedge e^2 + \omega_3^2 \wedge e^3 = 0, \quad (2.62c)$$

$$de^3 + \omega_0^3 \wedge e^0 + \omega_1^3 \wedge e^1 + \omega_2^3 \wedge e^2 + \omega_3^3 \wedge e^3 = 0. \quad (2.62d)$$

As 1-formas conexões não-nulas obtidas são

$$\omega_1^0 = \omega_0^1 = NN' dt, \quad (2.63a)$$

$$\omega_2^1 = -\omega_1^2 = -Nd\phi. \quad (2.63b)$$

Com isso, determina-se as conexões de *spin* para a corda negra sem rotação

$$\Gamma_\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N & 0 \\ 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

e

$$\Gamma_t = \begin{pmatrix} 0 & NN' & 0 & 0 \\ NN' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

Comparando as conexões de *spin* obtidas para o buraco negro BTZ e para a corda negra, ambos sem rotação, notamos que são equivalentes, exceto pela dimensionalidade. As matrizes da conexão de *spin* da corda negra possuem uma dimensão a mais, como era de se esperar.

Queremos determinar a matriz de holonomia associada ao transporte paralelo de vetores em torno da corda negra. O primeiro caso a ser discutido será o de curvas fechadas com tempo constante e centradas na origem. A matriz Γ_ϕ é independente do ângulo azimutal, com isso a integral de holonomia (4.39) pode ser calculada

diretamente

$$\begin{aligned}
U(\gamma) &= \exp\left(-\oint \Gamma_\phi d\phi\right) \\
&= \exp(-2\pi\Gamma_\phi) \\
&= 1 - 2\pi\Gamma_\phi + \frac{(2\pi\Gamma_\phi)^2}{2!} - \frac{(2\pi\Gamma_\phi)^3}{3!} + \frac{(2\pi\Gamma_\phi)^4}{4!} - \frac{(2\pi\Gamma_\phi)^5}{5!} + \dots \quad (2.66)
\end{aligned}$$

Esta série pode ser posta como uma soma de senos e co-senos, sendo assim, temos

$$U(\gamma) = 1 - \frac{\Gamma_\phi}{N} \sin(2\pi N) + \frac{\Gamma_\phi^2}{N^2} [1 - \cos(2\pi N)]. \quad (2.67)$$

A matriz de holonomia pode ser escrita com sendo

$$U(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi N) & \sin(2\pi N) & 0 \\ 0 & -\sin(2\pi N) & \cos(2\pi N) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

Esta matriz pode ser interpretada como o gerador de rotações quadridimensional em torno do eixo z . A matriz (2.68) nos indica como o transporte paralelo de vetores ao longo de uma órbita circular com tempo constante é realizado. Nota-se que também existe um raio crítico no qual a holonomia é nula, dado por

$$r_{cr}^2 = \frac{1}{\alpha^2} [8M \pm (m/n)^2]. \quad (2.69)$$

Este raio crítico é idêntico ao do buraco negro BTZ.

Um outro caminho que estamos interessados em estudar é obtido fixando-se o ângulo azimutal, neste caso, teremos a seguinte matriz de holonomia

$$\begin{aligned}
U(\gamma) &= \exp\left(-\oint \Gamma_t dt\right) \\
&= \exp(-T\Gamma_t) \\
&= 1 - T\Gamma_t + \frac{(T\Gamma_t)^2}{2!} - \frac{(T\Gamma_t)^3}{3!} + \frac{(T\Gamma_t)^4}{4!} + \dots, \quad (2.70)
\end{aligned}$$

que é equivalente a

$$U(\gamma) = 1 \frac{\Gamma_t}{\sqrt{(NN')^2 - (NN\phi)^2}} \sinh(\sqrt{(NN')^2 - (NN\phi)^2} T) + \frac{\Gamma_t^2}{(NN')^2 - (NN\phi)^2} \left[\cosh(\sqrt{(NN')^2 - (NN\phi)^2} T) - 1 \right]. \quad (2.71)$$

Ou ainda na sua forma matricial

$$U(\gamma) = \begin{pmatrix} \cosh(NN'T) & -\sinh(NN'T) & 0 & 0 \\ -\sinh(NN'T) & \cosh(NN'T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.72)$$

A holonomia é trivial apenas no caso em que $T = 0$. Sendo assim, o resultado final de um transporte paralelo de um vetor ao longo de órbitas com períodos não-nulos sempre difere do vetor inicial.

Corda Negra com Rotação

A base de 1-formas que deve ser escolhida para a métrica de uma corda negra na presença de rotação deve ser a seguinte

$$e^0 = N dt, \quad (2.73a)$$

$$e^1 = N^{-1} dr, \quad (2.73b)$$

$$e^2 = r(N^\phi dt + d\phi), \quad (2.73c)$$

$$e^3 = dz, \quad (2.73d)$$

com o seguinte conjunto de tetradas

$$e_0^0 = N, \quad (2.74a)$$

$$e_1^1 = N^{-1}, \quad (2.74b)$$

$$e_0^2 = rN^\phi \quad e_2^2 = r, \quad (2.74c)$$

$$e_3^3 = z. \quad (2.74d)$$

Tomando a derivada exterior de (2.73)

$$de^0 = \frac{\partial N}{\partial r} dr \wedge dt, \quad (2.75a)$$

$$de^1 = 0, \quad (2.75b)$$

$$de^2 = N^\phi dr \wedge dt + dr \wedge d\phi + r \frac{\partial N^\phi}{\partial r} dr \wedge dt, \quad (2.75c)$$

$$de^3 = 0. \quad (2.75d)$$

As 1-formas conexões são obtidas da primeira equação de estrutura de Cartan. Precisamos então resolver o seguinte sistema

$$de^0 + \omega_0^0 \wedge e^0 + \omega_1^0 \wedge e^1 + \omega_2^0 \wedge e^2 + \omega_3^0 \wedge e^3 = 0, \quad (2.76a)$$

$$de^1 + \omega_0^1 \wedge e^0 + \omega_1^1 \wedge e^1 + \omega_2^1 \wedge e^2 + \omega_3^1 \wedge e^3 = 0, \quad (2.76b)$$

$$de^2 + \omega_0^2 \wedge e^0 + \omega_1^2 \wedge e^1 + \omega_2^2 \wedge e^2 + \omega_3^2 \wedge e^3 = 0, \quad (2.76c)$$

$$de^3 + \omega_0^3 \wedge e^0 + \omega_1^3 \wedge e^1 + \omega_2^3 \wedge e^2 + \omega_3^3 \wedge e^3 = 0. \quad (2.76d)$$

As conexões não nulas são

$$\omega_1^0 = \omega_0^1 = NN' dt, \quad (2.77a)$$

$$\omega_2^1 = -\omega_1^2 = -N(N^\phi dt + d\phi). \quad (2.77b)$$

As conexões de *spin*, para a corda negra com rotação, são dadas respectivamente por

$$\Gamma_\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N & 0 \\ 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.78)$$

e

$$\Gamma_t = \begin{pmatrix} 0 & NN' & 0 & 0 \\ NN' & 0 & -NN^\phi & 0 \\ 0 & NN^\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.79)$$

Γ_ϕ independe da corda negra possuir ou não rotação, diferentemente de Γ_t que é modificado pela presença do termo de momento angular. Fazendo $N^\phi \rightarrow 0$, recuperamos o resultado obtido para o caso sem rotação. A conexão de *spin* Γ_ϕ corresponde a órbitas de tempo constante, enquanto Γ_t corresponde a órbitas com ângulo azimutal fixo.

Determinaremos a matriz de holonomia associada ao transporte paralelo de vetores ao longo de curvas fechadas. No primeiro caso, faremos o tempo constante. Como Γ_ϕ é independente de ϕ , a integral de holonomia é dada por

$$U(\gamma) = \exp(-2\pi\Gamma_\phi). \quad (2.80)$$

Expandindo em série de Taylor e reagrupando os termos de potências pares e ímpares, podemos reescrever a matriz de holonomia como

$$U(\gamma) = 1 - \frac{\Gamma_\phi}{N} \sin(2\pi N) + \frac{\Gamma_\phi^2}{N^2} [1 - \cos(2\pi N)]. \quad (2.81)$$

A integral de holonomia é a própria matriz identidade quando o transporte paralelo é realizado ao longo do raio crítico, dado por

$$r_{cr}^2 = \frac{1}{2\alpha^2} \left\{ 8M + (m/n)^2 \pm \sqrt{[8M + (m/n)^2]^2 - (8\alpha J)^2} \right\}. \quad (2.82)$$

Neste caso, a holonomia é trivial e o transporte paralelo de um vetor não adquire um ângulo de *deficit* nesse transporte. A holonomia, na forma matricial, pode ser escrita como

$$U(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi N) & \sin(2\pi N) & 0 \\ 0 & -\sin(2\pi N) & \cos(2\pi N) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Considerando órbitas com o ângulo azimutal fixo, a matriz de holonomia assume a

forma

$$\begin{aligned} U(\gamma) &= \exp\left(-\oint \Gamma_t dt\right) \\ &= \exp(-T\Gamma_t), \end{aligned} \quad (2.84)$$

a fase (2.84) é então, dada por

$$\begin{aligned} U(\gamma) = 1 - \frac{\Gamma_t}{\sqrt{(NN')^2 - (NN\phi)^2}} \sinh(\sqrt{(NN')^2 - (NN\phi)^2}T) + \\ \frac{\Gamma_t^2}{(NN')^2 - (NN\phi)^2} \left[\cosh(\sqrt{(NN')^2 - (NN\phi)^2}T) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (2.85)$$

A matriz carrega informação sobre a curvatura de espaço-tempo ao redor da corda negra, bem como informação sobre a rotação.

$$U(\gamma) = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{(NN')^2 - (NN\phi)^2}T) & -\sinh(\sqrt{(NN')^2 - (NN\phi)^2}T) & 0 & 0 \\ -\sinh(\sqrt{(NN')^2 - (NN\phi)^2}T) & \cosh(\sqrt{(NN')^2 - (NN\phi)^2}T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

O termo $((NN')^2 - (NN\phi)^2T)$ é identificado com o parâmetro de *boost* na transformação de Lorentz.

Variáveis de Contorno

As variáveis de Wilson tem atraído grande atenção em teorias de *gauge*. Elas podem agir como variáveis dinâmicas que eventualmente substituem os campos no lagrangeano pelas próprias equações de evolução[41, 14]. A variável de contorno (ou *loop* de Wilson) para órbitas com tempo constante é dada por

$$W = 2(1 + \cos 2\pi N), \quad (2.87)$$

e a variável de contorno associada a órbitas com ângulo azimutal constante é dada por

$$W = 2 \left\{ 1 + \cosh [((NN')^2 - (NN\phi)^2)T] \right\}. \quad (2.88)$$

Vamos usar as duas expressões das variáveis de contorno acima para verificar as relações de Mandelstam. Para isso, precisamos determinar a 2-forma curvatura R_b^a da métrica (2.58).

A curvatura é dada pela segunda equação de estrutura de Cartan:

$$R_b^a = d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c. \quad (2.89)$$

A curvatura 2-forma na sua forma matricial e é dada por

$$R_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -NN' & 0 \\ 0 & NN' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.90)$$

e

$$R_{10} = \begin{pmatrix} 0 & (N')^2 + NN'' & 0 & 0 \\ (N')^2 + NN'' & 0 & -N'N^\phi - N(N^\phi)' & 0 \\ 0 & -N'N^\phi - N(N^\phi)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.91)$$

Do tensor $R_{\rho\sigma}$, podemos encontrar as componentes do tensor de Riemann, $R_{\beta\rho\sigma}^\alpha$, onde α e β representam, respectivamente, a linha e a coluna do matriz: $R_{\rho\sigma}$. A relação de Mandelstam é dada por

$$\frac{\partial W}{\partial x_\nu} = \oint dS \text{Tr} [R_{\nu\mu} U(\gamma)] \frac{dy^\mu}{dS}. \quad (2.92)$$

Esta relação aparece em teorias de variáveis de contorno quânticas [24]. No caso da derivada radial, temos

$$\frac{\partial W}{\partial r} = -4\pi N' \sin(2\pi N), \quad (2.93)$$

o que leva à relação

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \int \text{Tr} [R_{21} U(\gamma)] d\phi. \quad (2.94)$$

2.3.2 Análise de Órbitas

Se transportarmos vetores paralelamente ao longo de órbitas circulares o vetor final apresentará ou não um ângulo de déficit em relação ao vetor original? A resposta dependerá da natureza do espaço-tempo no qual o transporte é realizado. Este transporte carregará informações sobre a curvatura da região englobada pelo contorno. Recentemente, Rothman, Ellis and Murugan [42] estudaram algumas das órbitas de um vetor quando transportado paralelamente ao longo de um caminho fechado no espaço de Reissner-Nordström. Eles mostraram que o vetor final é modificado quando volta ao ponto inicial, mesmo o espaço-tempo sendo esfericamente simétrico e estático. Outro resultado importante é que este ângulo de déficit anula-se depois de n voltas num circuito de raio r para valores apropriados de r e n . Observe-se com isso que existe uma banda de invariância de holonomia neste espaço-tempo. Em outro artigo, Martens, Mashhoon e Mataves [43] estenderam a análise para órbitas no espaço-tempo de Kerr [25]. O termo de rotação traz novos elementos para o comportamento das órbitas. Nesta secção fazemos análise de algumas órbitas no espaço-tempo de uma corda negra.

A equação de transporte paralelo livre de coordenadas é dada por

$$dA^\mu + \omega_\beta^\mu A^\beta = 0, \quad (2.95)$$

sendo $A = A^\mu \partial_\mu$ algum campo vetorial pertencente à variedade \mathcal{M} e ω_β^μ é a conexão de *spin*. Para a corda negra com rotação as componentes de A , satisfazem o seguinte conjunto de equações

$$dA^0 + N\partial_r N dt A^1 = 0, \quad (2.96a)$$

$$dA^1 + N\partial_r N dt A^0 - N(N^\phi dt + d\phi)A^2 = 0, \quad (2.96b)$$

$$dA^2 + N(N^\phi dt + d\phi)A^1 = 0, \quad (2.96c)$$

$$dA^3 = 0. \quad (2.96d)$$

A seguir, consideraremos alguns casos especiais de curvas no qual A é transportado paralelamente. Temos com isso que resolver o conjunto de equações diferenciais (2.96). O caso sem rotação é obtido, fazendo $J = 0$, além disso, nota-se claramente que a componente A^3 é constante, com isso, escolhendo essa constante igual a zero, obtemos o transporte paralelo de um vetor em torno do buraco negro BTZ.

Órbitas Circulares

O primeiro caso particular que analisaremos será o de órbitas circulares, isto é, $r = R$. O vetor tangente dessas órbitas é dado por $X^\mu = (X^t, 0, X^\phi, 0)$. Além disso, parametrizando as curvas por ϕ e assumindo que a velocidade $\beta \equiv dt/d\phi$ é constante, encontramos

$$\frac{dA^0}{d\phi} + \beta N \partial_r N A^1 = 0, \quad (2.97a)$$

$$\frac{dA^1}{d\phi} + \beta N \partial_r N A^0 - N(N^\phi \beta + 1)A^2 = 0, \quad (2.97b)$$

$$\frac{dA^2}{d\phi} + N(N^\phi \beta + 1)A^1 = 0, \quad (2.97c)$$

$$\frac{dA^3}{d\phi} = 0. \quad (2.97d)$$

O sistema (2.97) pode ser facilmente integrado dando

$$A^0(\phi) = \frac{\beta N(\partial_r N)c_1}{\omega} \cos(\omega\phi) - \frac{\beta N(\partial_r N)c_2}{\omega} \sin(\omega\phi) + c_3, \quad (2.98a)$$

$$A^1(\phi) = c_1 \sin(\omega\phi) + c_2 \cos(\omega\phi), \quad (2.98b)$$

$$A^2(\phi) = \frac{N(N^\phi \beta + 1)c_1}{\omega} \cos(\omega\phi) - \frac{N(N^\phi \beta + 1)c_2}{\omega} \sin(\omega\phi) + c_4, \quad (2.98c)$$

$$A^3(\phi) = c_5, \quad (2.98d)$$

onde a ‘velocidade angular’ ω é dada por

$$\omega^2 = N^2(N^\phi \beta + 1)^2 - \beta^2 N^2(\partial_r N)^2. \quad (2.99)$$

c_1, c_2, c_3, c_4 são constantes de integração. O comportamento das soluções depende do sinal do quadrado da frequência, ω^2 . O sinal desta função mudará em algum valor $r = r_*$. Se $r > r_*$, teremos soluções oscilatórias, caso contrário, $r < r_*$, as soluções trigonométricas (2.98) serão substituídas por funções hiperbólicas. As constantes c_3 and c_4 não são independentes, substituindo (2.98) de volta no sistema (2.97),

encontramos a seguinte relação entre elas

$$c_4 = \frac{\beta N \partial_r(N)}{N(N^\phi \beta + 1)} c_3. \quad (2.100)$$

Analisaremos órbitas de tempo constante $dt = 0$, neste caso, o sistema (2.97) reduz-se a

$$\frac{dA^1}{d\phi} - NA^2 = 0, \quad (2.101a)$$

$$\frac{dA^2}{d\phi} + NA^1 = 0. \quad (2.101b)$$

Assumimos que as órbitas começam em $\phi = 0$ e que depois de n voltas, temos $\phi = 2\pi n$. Deste modo, o sistema (2.101) é facilmente integrado para

$$A^1(2\pi n) = c_1 \sin(N2\pi n) + c_2 \cos(N2\pi n), \quad (2.102a)$$

$$A^2(2\pi n) = c_1 \cos(N2\pi n) - c_2 \sin(N2\pi n). \quad (2.102b)$$

Para valores finitos de r , existe um ângulo de *deficit* quando o vetor é transportado por um ângulo de 2π , exceto quando a quantidade $n\sqrt{-8M + \alpha^2 r^2 + \frac{16J^2}{r^2}}$ é um número inteiro. A condição de quantização das órbitas para a invariância da holonomia implica

$$R^2 = \frac{1}{2\alpha^2} \left(8M + (m/n)^2 \pm \sqrt{(8M + (m/n)^2)^2 - (8\alpha J)^2} \right), \quad (2.103)$$

sendo m um número inteiro não nulo.

Um outro tipo de curva bastante interessante são os círculos tipo tempo, cujo vetor tangente é dado por $X^a = (N\beta, 0, r(N^\phi \beta + 1), 0)$. Para círculos tipo tempo a condição $N^2 \beta^2 - r^2 (N^\phi \beta + 1)^2 < 0$ é requerida, já que o termo temporal deve ser maior que o espacial. Depois de n voltas, temos

$$\Delta A^0(2\pi n) = \frac{\beta N(\partial_r N)c_1}{\omega} [\cos(2\pi n\omega) - 1] - \frac{\beta N(\partial_r N)c_2}{\omega} \sin(2\pi n\omega), \quad (2.104a)$$

$$\Delta A^1(2\pi n) = c_1 \sin(2\pi n\omega) - c_2 [\cos(2\pi n\omega) - 1], \quad (2.104b)$$

$$\Delta A^2(2\pi n) = \frac{N(N^\phi \beta + 1)c_1}{\omega} [\cos(2\pi n\omega) - 1] - \frac{N(N^\phi \beta + 1)c_2}{\omega} \sin(2\pi n\omega). \quad (2.104c)$$

onde o símbolo Δ denota a diferença entre as componentes do vetor tangente antes e depois de serem transportados paralelamente.

Uma geodésica circular é obtida quando um vetor tangente é transportado paralelamente ao longo de sua curva integral. Neste caso para qualquer vetor a componente radial é nula e as outras componentes satisfazem a equação

$$\frac{A^0}{A^2} = \frac{N(N^\phi\beta + 1)}{\beta N(\partial_r N)}. \quad (2.105)$$

Aplicando esta condição ao vetor tangente, obtém-se

$$\frac{N\beta}{r(N^\phi\beta + 1)} = \frac{N(N^\phi\beta + 1)}{\beta N(\partial_r N)}, \quad (2.106)$$

o que leva à expressão

$$\beta = \frac{RN^\phi \pm \sqrt{RNN'}}{NN' - R(N^\phi)^2}. \quad (2.107)$$

Holonomia Radial

Outro tipo de caminho muito interessante são os caminhos radiais. Neste caso, podemos escolher o vetor tangente como sendo $X^\mu = [X^t, X^r, 0, 0]$, de modo que as componentes tetrádicas sejam escritas como

$$X^a = (NX^t, N^{-1}X^r, 0, 0). \quad (2.108)$$

Por simplicidade, escolheremos geodésicas radiais nulas. Esta condição é satisfeita se e somente se $N^2(X^t)^2 = N^{-2}(X^r)^2$. Fazendo o parâmetro da curva como r , o conjunto de equações diferenciais (2.96) se reduz a

$$\frac{dA^0}{dr} + (\partial_r N)N^{-1}A^1 = 0, \quad (2.109a)$$

$$\frac{dA^1}{dr} + (\partial_r N)N^{-1}A^0 = 0. \quad (2.109b)$$

A solução geral deste sistema é dada por

$$A^0 = c_1 N^{-1} + c_2 N, \quad (2.110a)$$

$$A^1 = c_1 N^{-1} - c_2 N, \quad (2.110b)$$

onde c_1 e c_2 são constantes de integração.

2.3.3 Transporte Paralelo de Spinors

Uma questão que surge quando estudamos o transporte paralelo de vetores é o que ocorre quando, ao invés de vetores, transportamos campos mais complexos. Sabemos que vetores, quando transportados paralelamente, podem ser alterados após completarem um circuito, se a região interna a esse circuito possuir curvatura não nula. Nesta secção, estudaremos o comportamento de espinors quando são submetidos ao transporte paralelo ao redor de uma corda negra. Se o *spinor* que é submetido ao transporte paralelo ao redor de uma curva fechada for alterado, será devido a efeitos globais da curvatura da região interna ao transporte paralelo.

A derivada covariante ∇_μ de um *spinor* é definida em termos da conexão spinorial Γ_μ , de modo que

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi - \Gamma_\mu(x) \psi. \quad (2.111)$$

Enquanto a conexão spinorial é dada em termos das matrizes de Dirac γ_α , na representação do grupo de Lorentz

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{4} \omega_{\nu\mu}^\alpha \gamma_\alpha \gamma^\nu. \quad (2.112)$$

Para órbitas de tempo constante encontramos a seguinte expressão para a conexão spinorial

$$\Gamma_\phi(x) d\phi = \frac{1}{4} N (\gamma_1 \gamma^2 - \gamma_2 \gamma^1) d\phi. \quad (2.113)$$

Escolhemos a seguinte representação para as matrizes de Dirac[44], $\gamma_0 = \sigma^3$, $\gamma^1 = i\sigma^2$ e $\gamma^2 = -i\sigma^1$. Dessa forma a conexão espinorial pode ser escrita em termos das matrizes de *spin* de Pauli

$$\Gamma_\phi(x) d\phi = \frac{1}{2} N i \sigma_3 d\phi. \quad (2.114)$$

A fase associada com a conexão *spinorial* acima é dada pela integral de holonomia

$$\begin{aligned} U(\gamma) &= \exp\left(-\oint \Gamma_\phi d\phi\right) \\ &= \exp(-2\pi\Gamma_\phi). \end{aligned} \quad (2.115)$$

Expandindo esse termo, encontramos a seguinte expressão para a transformação de holonomia

$$U(\gamma) = \cos(\pi N) - i\sigma_3 \sin(\pi N). \quad (2.116)$$

Depois de um *spinor* ser transportado paralelamente, $\psi(\phi = 2\pi)$ é dado em termos do *spinor* original $\psi(\phi = 0)$, pela relação

$$\begin{aligned} \psi(\phi = 2\pi) &= U(\gamma)\psi(\phi = 0) \\ &= \cos(\pi N)\psi(\phi = 0) - i\sigma_3 \sin(\pi N)\psi(\phi = 0). \end{aligned} \quad (2.117)$$

Este efeito sobre o *spinor* é um efeito da curvatura da região englobada pelo transporte paralelo. Diferente do transporte paralelo de vetores, no caso de espinores, a invariância de holonomia ocorre depois de um circuito de 4π , ao invés de 2π . Para órbitas de tempo constante, as componentes do *spinor*, satisfazem a seguinte equação

$$\nabla_\phi \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = \partial_\phi \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} + \Gamma_\phi(x) \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.118)$$

Esse sistema pode ser facilmente integrado, levando a seguinte solução

$$\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0(0) \exp(\frac{1}{2}Ni\phi) \\ \psi_1(0) \exp(-\frac{1}{2}Ni\phi) \end{pmatrix}. \quad (2.119)$$

Essa solução, corresponde ao transporte paralelo de um *spinor* ao redor de uma corda negra.

Para órbitas com ângulo azimutal constante, temos

$$\begin{aligned} \Gamma_t dt &= \frac{1}{4}NN^\phi (\gamma_2\gamma^1 - \gamma_1\gamma^2) - \frac{1}{4}(\gamma_0\gamma^1 - \gamma_1\gamma^0) \\ &= \frac{1}{2}NN'\sigma^1 - \frac{1}{2}NN^\phi i\sigma^3. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Para uma corda negra não girante, temos a seguinte matriz de holonomia

$$U(\gamma) = 1 + \frac{\Gamma_t}{r\alpha^2/2} \sinh(r\alpha^2 T/2) + \frac{\Gamma_t^2}{r^2\alpha^4/4} [\cosh(r\alpha^2 T/2) - 1] \quad (2.121)$$

o que leva a

$$U(\gamma) = \begin{pmatrix} \cosh r\alpha^2 T/2 & \sinh r\alpha^2 T/2 \\ \sinh r\alpha^2 T/2 & \cosh r\alpha^2 T/2 \end{pmatrix}. \quad (2.122)$$

O contorno de Wilson é dado por

$$W(\gamma) = 2 \cosh(r\alpha^2 T/2). \quad (2.123)$$

2.4 Conclusões

Neste capítulo calculamos as variáveis de contorno, tanto no caso do buraco negro BTZ quanto da corda negra. Utilizamos as variáveis de contorno num contexto gravitacional e a holonomia para caracterizar ambos os espaços-tempo. Mostramos que, para a métrica da corda negra girante as variáveis de holonomia são uma combinação de rotações e de *boosts* nesse espaço-tempo. As transformações de holonomia são elementos do grupo $\mathbb{R} \times SO(2, 2)$. A partir desses resultados encontramos um efeito similar ao efeito Aharonov-Bohm gravitacional no caso de uma corda cósmica quando é feito o transporte paralelo de vetores e spinores em torno de uma corda negra. Entretanto, existe uma diferença marcante entre esses dois espaços-tempo. No caso da corda cósmica o espaço fora do defeito é plano, enquanto no caso estudado da corda negra, este possui curvatura constante na região exterior ao defeito. Esses efeitos são equivalentes aos efeitos oriundos do transporte paralelo de vetores e spinores no espaço de fundo de uma corda cósmica com estrutura interna.

É importante ressaltar a existência na literatura de estudos sobre variáveis de contorno de Wilson para buracos negros BTZ[39, 45]. Mas esses estudos são apresentados num contexto diferente do nosso. Eles usam as variáveis de contorno de Wilson na formulação gravitacional de (2+1)dimensões de Chern-Simons, como meio de obter a métrica BTZ. Na nossa abordagem já partimos com o conhecimento da métrica e aplicamos as variáveis de contorno como meio de caracterizar o buraco

negro BTZ, bem como a corda negra. Outra observação importante é que para obter a métrica da corda negra faz-se necessária apenas adicionar uma dimensão linear extra na métrica BTZ. Por isso, os resultados da corda negra e do BTZ são equivalentes, a menos de uma redução de dimensionalidade das matrizes que descrevem as transformações de holonomia.

Devido a curvatura sobre todo o espaço-tempo da corda negra, espera-se que a holonomia seja não nula em todo o espaço. Mas existem regiões específicas especiais que apresentam holonomia nula. Isso é a estrutura de banda da invariância de holonomia[42]. Para as variáveis de contorno isso implica na quantização da holonomia. Demonstramos esse efeito para um espaço-tempo assintoticamente anti-de-Sitter. Por fim analisamos as variáveis de contorno para o caso spinorial e mostramos a mesma banda de holonomia apresentada por Rothman, Ellis e Murugan[42]. Demonstramos para o caso vetorial que as variáveis de contorno satisfazem as relações de Mandelstam.

Capítulo 3

Transformações de Holonomia em d-Branas

3.1 Introdução

A unificação da gravidade com as outras interações fundamentais no contexto da teoria de cordas sugere fortemente que o nosso universo possui dimensões extras. Essas dimensões espaciais extras são consideradas compactas e consequentemente não observadas em baixas energias. Avanços recentes têm mostrado que se os campos de matéria forem localizados numa 3-brana e se a escala fundamental considerada for a escala eletrofraca, então a restrição de que essas dimensões extras sejam compactas, não é mais necessária[46]. Esse tipo de construção abre um caminho para possibilidades de novas fenomenologias, envolvendo efeitos gravitacionais quânticos de baixas energias. Esses efeitos podem vir a ser verificados experimentalmente por meio das próximas gerações de aceleradores de partículas.

A idéia de que nosso universo é uma membrana envolvida num espaço de dimensão superior tem atraído, recentemente, um grande interesse. Foi mostrado que este problema pode ser solucionado se a dimensão da escala de Planck for baixa e o espaço possuir dimensão alta[46]. Uma proposta alternativa, apresentada por L. Randall e R. Sundrum[47], assume que o nosso universo é uma parede de domínio de tensão negativa separada por outra parede de tensão positiva dentro do espaço tempo anti-de-Sitter. Nessa abordagem não é preciso que a dimensão extra seja grande. Em outro artigo, L. Randall e R. Sundrum[48], sugerem que é possível

uma dimensão extra infinita. De acordo com esse modelo, vivemos numa parede de domínio embebida em um espaço anti-de-Sitter¹.

Em outro trabalho interessante, Chamblin, Hawking e Reall [49] construíram um buraco negro de Schwarzschild sobre um volume quadridimensional de uma 3-brana a partir de um cenário de Randall-Sundrum pentadimensional. A métrica da brana encontrada é solução da métrica de Schwarzschild. Entretanto a escolha de uma solução AdS-Schwarzschild em cinco dimensões falha na tentativa de satisfazer a condição de junção de Israel[50, 51] na região da brana que deve ser simétrica por uma reflexão Z_2 . Uma configuração alternativa é a considerada por Chamblin, Hawking e Reall [49], de uma corda negra pentadimensional que intercepta uma 3-brana na métrica quadridimensional de Schwarzschild. Essa solução possui a singularidade usual de Schwarzschild sobre a brana e é estendida ao longo da direção transversa. Modgil, Panda e Sengupta[46] estenderam essa abordagem para um buraco negro de Kerr numa 3-brana num cenário pentadimensional de Randall-Sundrum.

3.2 Métrica de uma Corda Negra numa Parede de Domínio

Nos modelos considerados por Randall e Sundrum, a métrica pentadimensional anti-de Sitter é dada por

$$ds^2 = e^{-2y/l} \eta_{ij} dx^i dx^j + dy^2, \quad (3.1)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica pentadimensional de Minkowski e l é o raio AdS. Introduzindo-se a coordenada $z = le^{y/l}$ e substituindo em (3.1), obtemos

$$ds^2 = \frac{l^2}{z^2} (dz^2 + \eta_{ij} dx^i dx^j). \quad (3.2)$$

Os valores correspondentes a $z = 0$ e $z = \infty$, são chamados respectivamente de infinito conforme e de horizonte AdS. E y é a coordenada espacial extra. A métrica

¹Neste caso, viveríamos num mundo brana, isto é, uma superfície quadridimensional em um espaço-tempo multidimensional.

(3.2) é conforme e plana. A escolha da métrica que descreve um buraco negro numa parede de domínio para um valor fixo da coordenada z pode ser feita considerando uma métrica tipo a solução de Schwarzschild, isto é

$$ds^2 = \frac{l^2}{z^2} \left(-U(r)dt^2 + U(r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + dz^2 \right), \quad (3.3)$$

onde a função, $U(r)$ é dada por

$$U(r) = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (3.4)$$

A métrica(3.3) descreve uma corda negra no espaço-tempo AdS.

3.3 Transformações de Holonomia

Nesta secção, vamos determinar as transformações de holonomia para a geometria quadridimensional de Schwarzschild, bem como para um buraco negro de Schwarzschild embebido num espaço-tempo pentadimensional [49]. Embora o primeiro caso já tenha sido discutido na literatura por Rothman, Ellis e Murugan [42], esses resultados nos servirão de subsídios para quando analisarmos o segundo caso. Os novos resultados, nos limites apropriados, devem reproduzir os resultados encontrados por Rothman, Ellis e Murugan [42]. Além é claro de trazer informações sobre a geometria da corda negra [49].

3.3.1 Transformações de Holonomia na Geometria de Schwarzschild

Vamos verificar um caso mais simples, que corresponde ao buraco negro de Schwarzschild [42] para que os nossos resultados para uma corda negra numa parede de domínio nos limites adequados possam ser comparados com o do buraco negro de Schwarzschild. A métrica correspondente é dada por

$$ds^2 = -U(r)dt^2 + U(r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.5)$$

obtida tomando os limites $z = l$ e $z = \infty$ na métrica (3.3). A base de 1-formas

adequada para essa métrica é dada por

$$e^0 = U(r)^{1/2} dt, \quad (3.6a)$$

$$e^1 = U(r)^{-1/2} dr, \quad (3.6b)$$

$$e^2 = r d\theta, \quad (3.6c)$$

$$e^3 = r \sin \theta d\phi. \quad (3.6d)$$

$$(3.6e)$$

Resolvendo a equação de Estrutura de Cartan, podemos encontrar as 1-formas conexões não nulas

$$\omega_1^0 = \omega_0^1 = \frac{U'}{2} dt, \quad (3.7a)$$

$$\omega_1^2 = -\omega_2^1 = \sqrt{U} d\theta, \quad (3.7b)$$

$$\omega_1^3 = -\omega_3^1 = \sqrt{U} \sin \theta d\phi, \quad (3.7c)$$

$$\omega_2^3 = -\omega_3^2 = \cos \theta d\phi. \quad (3.7d)$$

As conexões de *spin* correspondentes são apresentadas como matrizes 4×4 , dadas respectivamente por

$$\Gamma_\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{U} \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \theta \\ 0 & \sqrt{U} \sin \theta & \cos \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

$$\Gamma_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{U} & 0 \\ 0 & \sqrt{U} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

$$\Gamma_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

e

$$\Gamma_t = \begin{pmatrix} 0 & U'/2 & 0 & 0 \\ U'/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Vamos discutir o caso em que (t, θ) são constantes, a matriz de holonomia possui apenas a contribuição azimutal da conexão de *spin* e é escrita como

$$U(\gamma_\phi) = \exp \left(- \oint \Gamma_\phi d\phi \right). \quad (3.12)$$

Expandindo e reorganizando os termos de potências pares e ímpares, podemos escrever a integral de holonomia como sendo

$$U(\gamma_\phi) = 1 - \frac{\Gamma_\phi}{g_1(r, \theta)} \sin [2\pi g_1(r, \theta)] + \frac{(\Gamma_\phi)^2}{(g_1(r, \theta))^2} \{1 - \cos [2\pi g_1(r, \theta)]\}, \quad (3.13)$$

com a função $g_1(r, \theta)$, definida por

$$g_1(r, \theta) = \sqrt{U \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}. \quad (3.14)$$

Vamos considerar órbitas que pertençam ao plano equatorial, ou seja, $\theta = \pi/2$. Neste caso, podemos escrever $U(\gamma_\phi)$, na sua forma matricial como sendo

$$U(\gamma_\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\pi\sqrt{U} & 0 & \sin 2\pi\sqrt{U} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin 2\pi\sqrt{U} & 0 & \cos 2\pi\sqrt{U} \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

com isso, quando transportamos paralelamente um vetor ao longo de um caminho

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$m = 1$		2.67	2.25	6.40
$m = 2$			3.60	2.67
$m = 3$				4.57
$m = 4$				

Tabela 3.1: A tabela apresenta valores do raio crítico no qual ocorre a invariância de holonomia para órbitas com tempo constante no plano equatorial.

no plano equatorial, o ângulo de déficit é dado por $2\pi\sqrt{U}$. As regiões nas quais a holonomia é nula determinam as bandas de invariância de holonomia para determinados valores dos raios. Depois de n voltas, temos

$$2\pi n g_1(r, \theta = \pi/2) = 2m\pi, \quad (3.16)$$

onde m é um inteiro. O raio crítico no qual ocorre a invariância de holonomia depois de n voltas é dado por

$$r_{cr} = \frac{2M}{1 - (m/n)^2}. \quad (3.17)$$

O raio crítico deve satisfazer a desigualdade $r > 2M$, de modo a excluir o horizonte de eventos, conseqüentemente: $0 < (m/n)^2 < 1$. A tabela (3.1) mostra alguns valores para os inteiros m e n , no qual ocorre a invariância de holonomia.

Uma outra trajetória que pode ser analisada é a região que corresponde a (t, ϕ) constantes, assim a integral de holonomia torna-se

$$U(\gamma_\theta) = \exp\left(-\oint \Gamma_\theta d\theta\right). \quad (3.18)$$

Podendo a integral de holonomia ser colocada na forma

$$U(\gamma_\theta) = 1 - \frac{\Gamma_\theta}{g_2(r)} \sin[\pi g_2(r)] + \frac{(\Gamma_\theta)^2}{(g_2(r))^2} \{1 - \cos[\pi g_2(r)]\}, \quad (3.19)$$

com

$$g_2(r) = \sqrt{U(r)}. \quad (3.20)$$

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$m = 1$			3.60	2.67
$m = 2$				
$m = 3$				
$m = 4$				

Tabela 3.2: A tabela apresenta valores para o raio crítico no qual ocorre a invariância de holonomia para órbitas com tempo e a ângulo azimutal constantes.

A matriz de holonomia nesse caso é dada por

$$U(\gamma_\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \pi \sqrt{U} & \sin \pi \sqrt{U} & 0 \\ 0 & -\sin \pi \sqrt{U} & \cos \pi \sqrt{U} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

O ângulo de déficit corresponde a $\pi\sqrt{U}$. As bandas de holonomia para as órbitas com (t, ϕ) constantes são dadas por

$$n\pi g_2(r) = 2m\pi. \quad (3.22)$$

O que leva à seguinte expressão para o raio crítico

$$r_{cr} = \frac{2M}{1 - (2m/n)^2}. \quad (3.23)$$

Alguns valores do raio crítico são mostrados na tabela (3.2)

Considerando apenas a contribuição da conexão de *spin* temporal à integral de holonomia, isto é, levando em conta apenas órbitas com (θ, ϕ) constantes, temos

$$U(\gamma_t) = \exp\left(-\oint \Gamma_t dt\right). \quad (3.24)$$

$$U(\gamma_t) = 1 - \frac{\Gamma_t}{g_4(r)} \sinh[Tg_4(r)] + \frac{(\Gamma_t)^2}{(g_4(r))^2} \{\cosh[Tg_4(r)] - 1\}, \quad (3.25)$$

com

$$g_4(r) = \frac{U'}{2}. \quad (3.26)$$

A matriz de holonomia correspondente é dada por

$$U(\gamma_t) = \begin{pmatrix} \cosh TU'/2 & -\sinh TU'/2 & 0 & 0 \\ -\sinh TU'/2 & \cosh TU'/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

o termo $TU'/2$, pode ser interpretado como o parâmetro de *boost* numa transformação de Lorentz. A região de holonomia nula é dada pela raiz da equação abaixo

$$g_4(r) = 0. \quad (3.28)$$

Essa condição é satisfeita quando o raio for infinito.

3.3.2 Transformações de Holonomia na Parede de Domínio

Vamos escolher a seguinte base de 1-formas para descrever a métrica (3.3)

$$e^0 = \frac{l}{z} U(r)^{1/2} dt, \quad (3.29a)$$

$$e^1 = \frac{l}{z} U(r)^{-1/2} dr, \quad (3.29b)$$

$$e^2 = \frac{l}{z} r d\theta, \quad (3.29c)$$

$$e^3 = \frac{l}{z} r \sin \theta d\phi, \quad (3.29d)$$

$$e^4 = \frac{l}{z} dz, \quad (3.29e)$$

quando tomamos os limites $z = l$ e $z = \infty$ na base (3.29), reproduzimos a base de

1-formas (3.6). A matriz das pentadas para a base (3.29) pode ser escrita com sendo

$$e_\mu = \begin{pmatrix} \frac{l}{z}U(r)^{1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{z}U(r)^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{z}r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l}{z}r \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{z} \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Os únicos elementos não nulos da matriz são os elementos da diagonal principal, indicando que o espaço-tempo em questão não possui torção. Além disso, a matriz obedece a relação $e_\mu E^\nu = \delta_\mu^\nu$.

Mais uma vez, vamos resolver a equação de Estrutura de Cartan para obter as conexões da corda negra numa parede de domínio. Para isso, vamos calcular a derivada exterior das 1-formas(3.6) e depois substituí-las no sistema de equações de Cartan. As derivadas exteriores são dadas por

$$de^0 = -\frac{l}{z^2}\sqrt{U(r)}dz \wedge dt + \frac{l}{2z}\frac{U'}{\sqrt{U}}dr \wedge dt, \quad (3.31a)$$

$$de^1 = -\frac{l}{2z^2}\frac{1}{\sqrt{U}}dz \wedge dr, \quad (3.31b)$$

$$de^2 = -\frac{l}{z^2}r dz \wedge d\theta + \frac{l}{z}dr \wedge d\theta, \quad (3.31c)$$

$$de^3 = -\frac{l}{z^2}r \sin \theta dz \wedge d\phi + \frac{l}{z} \sin \theta dr \wedge d\phi + \frac{l}{z}r \cos \theta d\theta \wedge d\phi, \quad (3.31d)$$

$$de^4 = 0. \quad (3.31e)$$

É mais conviniente escrever as derivadas (3.31) em termos da própria base de 1-

formas, $(e^0, e^1, e^2, e^3, e^4)$, sendo assim, obtemos

$$de^0 = -\frac{1}{l}e^4 \wedge e^0 + \frac{z}{2l} \frac{U'}{\sqrt{U}} e^1 \wedge e^0, \quad (3.32a)$$

$$de^1 = -\frac{1}{l}e^4 \wedge e^1, \quad (3.32b)$$

$$de^2 = -\frac{1}{l}e^4 \wedge e^2 + \frac{z}{l} \frac{\sqrt{U}}{r} e^1 \wedge e^2, \quad (3.32c)$$

$$de^3 = -\frac{1}{l}e^4 \wedge e^3 + \frac{z}{l} \frac{\sqrt{U}}{r} e^1 \wedge e^3 + \frac{z}{l} \frac{1}{r} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} e^2 \wedge e^3, \quad (3.32d)$$

$$de^4 = 0. \quad (3.32e)$$

Precisamos resolver as equações de Estrutura de Cartan abaixo (3.33) e encontrar as conexões não nulas.

$$de^0 + \omega_0^0 \wedge e^0 + \omega_1^0 \wedge e^1 + \omega_2^0 \wedge e^2 + \omega_3^0 \wedge e^3 + \omega_4^0 \wedge e^4 = 0, \quad (3.33a)$$

$$de^1 + \omega_0^1 \wedge e^0 + \omega_1^1 \wedge e^1 + \omega_2^1 \wedge e^2 + \omega_3^1 \wedge e^3 + \omega_4^1 \wedge e^4 = 0, \quad (3.33b)$$

$$de^2 + \omega_0^2 \wedge e^0 + \omega_1^2 \wedge e^1 + \omega_2^2 \wedge e^2 + \omega_3^2 \wedge e^3 + \omega_4^2 \wedge e^4 = 0, \quad (3.33c)$$

$$de^3 + \omega_0^3 \wedge e^0 + \omega_1^3 \wedge e^1 + \omega_2^3 \wedge e^2 + \omega_3^3 \wedge e^3 + \omega_4^3 \wedge e^4 = 0, \quad (3.33d)$$

$$de^4 + \omega_0^4 \wedge e^0 + \omega_1^4 \wedge e^1 + \omega_2^4 \wedge e^2 + \omega_3^4 \wedge e^3 + \omega_4^4 \wedge e^4 = 0. \quad (3.33e)$$

Resolvendo o sistema as 1-formas conexões não nulas encontradas são as seguintes

$$\omega_4^2 = -\omega_2^4 = -\frac{r}{z} d\theta, \quad (3.34a)$$

$$\omega_1^2 = -\omega_2^1 = \sqrt{U} d\theta, \quad (3.34b)$$

$$\omega_4^3 = -\omega_3^4 = -\frac{r}{z} \sin \theta d\phi, \quad (3.34c)$$

$$\omega_1^3 = -\omega_3^1 = \sqrt{U} \sin \theta d\phi, \quad (3.34d)$$

$$\omega_2^3 = -\omega_3^2 = \cos \theta d\phi, \quad (3.34e)$$

$$\omega_4^1 = -\omega_1^4 = -\frac{1}{z\sqrt{U}} dr, \quad (3.34f)$$

$$\omega_4^0 = \omega_0^4 = -\frac{\sqrt{U}}{z} dt, \quad (3.34g)$$

$$\omega_1^0 = \omega_0^1 = \frac{U'}{2} dt. \quad (3.34h)$$

Os demais termos da conexão são nulos. Esse resultado nos permite construir as quatro conexões de *spin*, Γ_ϕ , Γ_θ , Γ_r e Γ_t , dadas respectivamente por

$$\Gamma_\phi = \omega_\beta^\alpha d\phi, \quad (3.35a)$$

$$\Gamma_\theta = \omega_\beta^\alpha d\theta, \quad (3.35b)$$

$$\Gamma_r = \omega_\beta^\alpha dr, \quad (3.35c)$$

$$\Gamma_t = \omega_\beta^\alpha dt. \quad (3.35d)$$

Ou ainda, podemos apresentá-las nas suas respectivas formas matriciais

$$\Gamma_\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{U} \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \theta & 0 \\ 0 & \sqrt{U} \sin \theta & \cos \theta & 0 & -(r/z) \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & (r/z) \sin \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

$$\Gamma_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{U} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{U} & 0 & 0 & r/z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r/z & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

$$\Gamma_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\sqrt{U}z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{U}z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

e

$$\Gamma_t = \begin{pmatrix} 0 & U'/2 & 0 & 0 & -\sqrt{U}/z \\ U'/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{U}/z & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

A conexão de *spin* Γ_ϕ é a única que não depende da variável z , possuindo portanto, simetria ao longo do eixo- z , mas por outro lado, é a única que não possui simetria em relação ao ângulo θ . As demais conexões de *spin* dependem das variáveis r e z . Além disso, pelo fato da métrica (3.3) ser estacionária, todas as conexões de *spin* independem do tempo. Quando fazemos $z = l$, as conexões de *spin* (3.36)-(3.39) correspondem as conexões de *spin* de Schwarzschild-AdS. Para recuperarmos as matrizes (3.8)-(3.11), devemos tomar o limite $z \rightarrow \infty$, assim, as conexões corresponderam as da geometria usual de Schwarzschild.

Vamos a analisar o transporte paralelo de vetores ao longo de alguns caminhos fechados particulares, o primeiro a ser discutido é o caso em que as coordenadas (t, r, θ) são consideradas constantes, dessa forma a matriz de holonomia é dada, simplesmente, em termos da conexão de *spin* azimutal

$$U(\gamma_\phi) = \exp \left(- \oint \Gamma_\phi d\phi \right). \quad (3.40)$$

Expandindo e reorganizando os termos de potência pares e ímpares, podemos escrever a integral de holonomia como sendo

$$U(\gamma_\phi) = 1 - \frac{\Gamma_\phi}{f_1(r, \theta, z)} \sin [2\pi f_1(r, \theta, z)] + \frac{(\Gamma_\phi)^2}{(f_1(r, \theta, z))^2} \{1 - \cos [2\pi f_1(r, \theta, z)]\} \quad (3.41)$$

com a função $f_1(r, \theta, z)$, definida por

$$f_1(r, \theta, z) = \sqrt{\left(U + \frac{r^2}{z^2} \right) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}. \quad (3.42)$$

A natureza das raízes da função $f_1(r, \theta, z)$, diz se as trajetórias fechadas ao longo do

espaço-tempo da d-brana é oscilatório ou não. Além disso, podemos determinar as regiões nas quais a holonomia é nula e assim caracterizar as bandas de invariância de holonomia para determinados valores dos raios. Isso ocorre quando o argumento das funções trigonométricas que aparecem na integral de holonomia (3.41), satisfazem a equação

$$2\pi f_1(r, \theta, z) = 2m\pi, \quad (3.43)$$

onde m é um inteiro. O raio crítico é obtido encontrando-se as raízes da equação abaixo

$$\frac{r_{cr}^3}{z^2} + r_{cr}\xi(m, n) - 2M = 0, \quad (3.44)$$

com $\xi(m, n) = 1 - (m/n)^2$ e satisfazendo a relação $\xi(m, n) > 0$. A solução real da equação (3.44) é dada por

$$r_{cr} = -1/3 \frac{-\left(27 M z^2 + 3\sqrt{3}\sqrt{z^4(z^2\xi^3 + 27 M^2)}\right)^{2/3} + 3\xi z^2}{\sqrt[3]{27 M z^2 + 3\sqrt{3}\sqrt{z^4(z^2\xi^3 + 27 M^2)}}} \quad (3.45)$$

Vamos analisar alguns casos particulares de $\xi(m, n)$ quando $z = l$, nesse caso os resultados são os mesmos dos obtidos para Schwarzschild-AdS, e comparar com os resultados obtidos para geometria de Schwarzschild. O primeiro caso é $\xi(1, 2) = 3/4$, assim a raiza obtida é

$$r_{cr} = -1/2 \frac{-\left(8 M l^2 + \sqrt{l^4(l^2 + 64 M^2)}\right)^{2/3} + l^2}{\sqrt[3]{8 M l^2 + \sqrt{l^4(l^2 + 64 M^2)}}}, \quad (3.46)$$

no limite $l \rightarrow \infty$ o raio crítico se reduz a: $r_{cr} = 8/3M$. Outro caso é $\xi(2, 3) = 5/9$, cuja raiz é dada por

$$r_{cr} = -1/9 \frac{-\left(729 M l^2 + 3\sqrt{3}\sqrt{l^4(125 l^2 + 19683 M^2)}\right)^{2/3} + 15 l^2}{\sqrt[3]{729 M l^2 + 3\sqrt{3}\sqrt{l^4(125 l^2 + 19683 M^2)}}}, \quad (3.47)$$

no limite $l \rightarrow \infty$ o raio crítico se reduz a $r_{cr} = 18M/5$. E por fim, fazemos $\xi(3, 4) =$

7/16, que tem como solução

$$r_{cr} = -1/12 \frac{- \left(1728 M l^2 + 3 \sqrt{3} \sqrt{l^4 (343 l^2 + 110592 M^2)} \right)^{2/3} + 21 l^2}{\sqrt[3]{1728 M l^2 + 3 \sqrt{3} \sqrt{l^4 (343 l^2 + 110592 M^2)}}, \quad (3.48)$$

e mais uma vez, tomando o limite $l \rightarrow \infty$ o raio crítico se reduz a $r_{cr} = 32M/7$. Notamos que em todos os casos analisados, quando tomamos o limite $l \rightarrow \infty$, os raios críticos no espaço-tempo pentadimensional são reduzidos aos valores do caso da geometria de Schwarzschild, como apresentados na tabela (3.1).

Uma outra trajetória que pode ser analisada é o caso em que (t, r, ϕ) são constantes, assim a integral de holonomia torna-se

$$U(\gamma) = \exp \left(- \oint \Gamma_\theta d\theta \right), \quad (3.49)$$

podendo ser colocada na forma

$$U(\gamma) = 1 - \frac{\Gamma_\theta}{f_2(r, z)} \sin [\pi f_2(r, z)] + \frac{(\Gamma_\theta)^2}{(f_2(r, z))^2} \{1 - \cos [\pi f_2(r, z)]\}, \quad (3.50)$$

com

$$f_2(r, z) = \sqrt{\left(U + \frac{r^2}{z^2} \right)}. \quad (3.51)$$

No caso equatorial as bandas de holonomia para as órbitas com (t, r, θ) constantes correspondem às mesmas bandas de invariância de holonomia no caso (t, r, ϕ) , a menos de uma constante

$$\pi f_2(r, z) = 2m\pi. \quad (3.52)$$

O raio crítico é obtido a partir da equação

$$\frac{r_{cr}^3}{z^2} + r_{cr} \xi(m, n) - 2M = 0, \quad (3.53)$$

com $\xi(m, n) = 1 - (2m/n)^2$. A função $\xi(m, n)$, satisfaz a relação $\xi(m, n) > 0$.

Levando a condição: $n > 2m$. A solução real é dada por

$$r_{cr} = -1/3 \frac{-\left(27 M z^2 + 3 \sqrt{3} \sqrt{z^4 (z^2 \chi^3 + 27 M^2)}\right)^{2/3} + 3 \chi z^2}{\sqrt[3]{27 M z^2 + 3 \sqrt{3} \sqrt{z^4 (z^2 \chi^3 + 27 M^2)}}}. \quad (3.54)$$

Vamos determinar alguns valores do raio crítico para determinados valores de $\xi(m, n)$ e em seguida, vamos analisar os limites $z = l$ e $l \rightarrow \infty$ e comparar com os valores obtidos para a geometria de Schwarzschild. Para $\xi(1, 3) = 5/9$, temos

$$r_{cr} = -1/9 \frac{-\left(729 M z^2 + 3 \sqrt{3} \sqrt{z^4 (125 z^2 + 19683 M^2)}\right)^{2/3} + 15 z^2}{\sqrt[3]{729 M z^2 + 3 \sqrt{3} \sqrt{z^4 (125 z^2 + 19683 M^2)}}}. \quad (3.55)$$

No limite $z = l \rightarrow \infty$, o raio crítico se reduz à

$$r_{cr} = 18M/5. \quad (3.56)$$

o valor obtido acima coincide com o da tabela (3.2). Para $\xi(1, 4) = 3/4$, temos

$$r_{cr} = -1/2 \frac{-\left(8 M z^2 + \sqrt{z^4 (z^2 + 64 M^2)}\right)^{2/3} + z^2}{\sqrt[3]{8 M z^2 + \sqrt{z^4 (z^2 + 64 M^2)}}}. \quad (3.57)$$

tomando o limite $l \rightarrow \infty$, obtemos

$$r_{cr} = 8M/3. \quad (3.58)$$

Uma outra situação corresponde aos parâmetros (t, θ, ϕ) constantes, assim temos apenas a contribuição da conexão radial

$$\begin{aligned} U(\gamma) &= \exp\left(-\oint \Gamma_r dr\right), \\ &= \exp\left(-\int_0^R \Gamma_r dr\right), \\ &= \exp\left(-\tilde{\Gamma}_r\right), \end{aligned} \quad (3.59)$$

com

$$\tilde{\Gamma}_r = \int_0^R \Gamma_r dr. \quad (3.60)$$

A conexão de *spin* depende da variável de integração, não podendo ser considerada constante durante a integração como fizemos até agora nos demais casos. A integral de holonomia é dada por

$$U(\gamma) = 1 - \frac{\tilde{\Gamma}_r}{f_3(r, z)} \sin [f_3(r, z)] + \frac{(\tilde{\Gamma}_r)^2}{(f_3(r, z))^2} \{1 - \cos [f_3(r, z)]\}, \quad (3.61)$$

com

$$f_3(r, z) = \frac{1}{z^2 U}. \quad (3.62)$$

Possuindo a estrutura de banda de invariância de holonomia governada pela equação

$$f_3(r, z) = 2m\pi. \quad (3.63)$$

O raio crítico é dado por

$$r = \frac{2M}{1 - \left(\frac{n}{2\pi m z^2}\right)^2} \quad (3.64)$$

Considerando apenas a contribuição da conexão de *spin* temporal para a integral de holonomia, isto é, levando em conta apenas órbitas com (r, θ, ϕ) constantes, temos

$$U(\gamma) = \exp\left(-\oint \Gamma_t dt\right). \quad (3.65)$$

$$U(\gamma) = 1 - \frac{\Gamma_t}{f_4(r, z)} \sinh [T f_4(r, z)] + \frac{(\Gamma_t)^2}{(f_4(r, z))^2} \{\cosh [T f_4(r, z)] - 1\}, \quad (3.66)$$

com

$$f_4(r, z) = \sqrt{\left(\frac{U'^2}{4} + \frac{U}{z^2}\right)}. \quad (3.67)$$

A região de holonomia nula é dada por

$$T f_4(r, z) = 0, \quad (3.68)$$

μ	ν	f_μ
ϕ	2π	$f_1(r, \theta, z) = \sqrt{(U + \frac{r^2}{z^2}) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}$
θ	π	$f_2(r, z) = \sqrt{(U + \frac{r^2}{z^2})}$
r	1	$f_3(r, z) = \frac{1}{z^2 U}$

Tabela 3.3: a tabela mostra os valores do parâmetro ν e da função f_μ , para três órbitas distintas.

neste caso, o raio crítico é dado por

$$r_{cr} = M \pm \sqrt{M^2 - z^2 M/2}. \quad (3.69)$$

3.4 Conclusões

Mostramos que a transformações de holonomia para um corda negra embebida num espaço-tempo pentadimensional podem ser sintetizadas na forma

$$U(\gamma) = 1 - \frac{\Gamma_\mu}{f_\mu} \sin(\nu f_\mu) + \frac{(\Gamma_\mu)^2}{(f_\mu)^2} [1 - \cos(\nu f_\mu)], \quad (3.70)$$

onde o parâmetro ν e a função f_μ dependem do tipo de órbita. Estudamos as órbitas equivalentes a tomar cada conjunto de variáveis, (t, r, θ) , (t, r, ϕ) e (t, ϕ, θ) , como constantes separadamente. Levando a diferentes contribuições a matriz de holonomia. Os resultados obtidos para o parâmetro ν e a função f_μ estão dispostos na Tabela(3.3) Esse resultado mostra que os transporte paralelo de vetores ao redor da corda negra embebida num espaço de dimensão superior resulta na deficiência angular entre os estados inicial e final do vetor. Isso implica na existência do análogo gravitacional do efeito Aharonov-Bohm. Além disso, verificamos a existência de regiões nas quais a holonomia é nula, com isso, esse sistema também apresenta uma estrutura de banda de invariância de holonomia para certos valores de raio crítico. Mostramos também que os resultados obtidos para uma corda negra tipo Schwarzschild numa parede de domínio pode ser reduzido ao resultados de um buraco negro de Schwarzschild usual.

Capítulo 4

Modelos Análogos

4.1 Introdução

A dificuldade de testar muitos dos modelos cosmológicos têm sido uma tarefa difícil para os físicos. De modo a superar este problema, muitos sistemas de matéria condensada têm sido extensivamente empregados como laboratório para sistemas cosmológicos e gravitacionais[52, 53]. Tais sistemas são conhecidos na literatura como **sistemas análogos**. Existem evidências que o universo primordial surgiu a partir de uma sequência de transições de fase induzidas por quebras de simetria[53]. Embora a natureza dessas transições não seja bem conhecida, a formação de galáxias e outras estruturas cosmológicas observadas estão intimamente ligadas a essas transições. O processo de formação de defeitos topológicos, depende do tipo da quebra de simetria que ocorre durante a transição¹. Os defeitos topológicos também estão presentes em sistemas de matéria condensada[54]. Em matéria condensada eles também são formados durante transições de fase envolvendo quebra contínua de simetria. E possuem diferentes nomes, dependendo da natureza da quebra de simetria e do sistema em particular. Em hélio superfluido, ou no modelo xy , eles são chamados de **vórtices**, em cristais periódicos, de **deslocações**, e em cristais líquidos, de **desclinações**. Os defeitos são muito importantes na determinação de muitas das propriedades dos materiais reais. Recentemente, uma grande gama de sistemas em matéria condensada têm sido utilizadas como sistemas análogos: condensados de Bose-Einstein, fluidos clássicos[55, 56] e quânticos[57], meios dielétricos

¹Translacional, rotacional, etc...

móveis, materiais com propriedades eletrodinâmicas não-lineares, etc....

O modelo análogo primordial foi o análogo sônico concebido por Unruh[55]. Ele partiu das equações da continuidade e de Euler para um fluido clássico e obteve uma descrição geométrica para o fluido equivalente a uma solução tipo buraco negro. Este sistema possui várias das propriedades de um buraco negro e além disso, tem a vantagem de que seus fundamentos físicos serem inteiramente conhecidos. A propriedade mais surpreendente obtida por Unruh é que um fluido newtoniano não relativístico propagando-se num espaço plano mais o tempo é governado pela geometria pseudo-riemanniana(lorentziana) de $(3 + 1)$ dimensões. De fato, ele mapeou a física de buracos negros em um fluido acústico.

Este formalismo foi obtido, independentemente, em trabalhos posteriores por G.E. Volovik[57] e M. Stone[58]. Ambos descreveram fônons propagando-se na presença de vórtices. G.E. Volovik usou a teoria de Landau para superfluidos, na qual a energia de uma quase-partícula movendo-se num superfluido com campo de velocidades \vec{v}_s é dada por: $E(\vec{p}) = \epsilon(\vec{p}) + \vec{p} \cdot \vec{v}_s$. No caso de fônons, o espectro é dado por $\epsilon(\vec{p}) = cp$, onde c é a velocidade do som. A relação energia-momento é dada por

$$(E - \vec{p} \cdot \vec{v}_s)^2 = c^2 p^2. \quad (4.1)$$

A equação acima pode ser escrita numa forma lorentziana com $p_\mu = (E, \vec{p})$:

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = 0, \quad g^{00} = 1, \quad g^{0i} = -v_s^i, \quad g^{ik} = -c^2 \delta^{ik} + v_s^i v_s^k. \quad (4.2)$$

Os fônons representam os quanta de energia dos modos coletivos do superfluido[59]. Nota-se, também que a dinâmica de fônons na presença de um campo de velocidades é a mesma dinâmica apresentada por fótons na presença de um campo gravitacional. Ambos são descritos por “cones de luz” com $ds = 0$. No seu trabalho, M. Stone investiga o espalhamento de fônons por um vórtice movendo-se com respeito a um condensado superfluido. Ele também estuda a analogia entre a força de Iordanskii²[60, 61] e o efeito Aharonov-Bohm[20].

Neste capítulo, mostraremos que a aproximação de longa distância para o vórtice usada em superfluidos por Volovik leva a um caso particular da nossa métrica obtida por uma transformação local de coordenadas similar à transformação de

²A força de Iordanskii é uma das três contribuições topológicas distintas à força que age sobre o vórtice quantizado.

Lorentz. Usamos a abordagem geométrica para estudar as fases de Berry relacionadas a este problema. Também calculamos a holonomia associada a esse problema.

4.2 Dinâmica de Fluidos

O objetivo dessa seção é derivar uma relação entre espaços curvos e a acústica de fluidos. Seguiremos o formalismo apresentado por M. Visser[56], bem como o próprio artigo de W.G. Unruh[55]. É bem estabelecido que a propagação de ondas de som num fluido homogêneo estático e não viscoso é governado pela equação

$$\partial_t^2 \psi = c^2 \nabla^2 \psi. \quad (4.3)$$

Um aspecto importante que queremos mostrar é que a propagação do som é governada pela “métrica acústica” $g_{\mu\nu}(\vec{x}, t)$ e que a forma mais geral da equação de onda para o potencial velocidade é dada por

$$\nabla \psi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu [(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) \partial_\nu \psi] = 0, \quad (4.4)$$

com

$$g_{\mu\nu}(\vec{x}, t) \equiv \frac{\rho}{c} \begin{pmatrix} -(c^2 - v^2) & \vdots & -\vec{v} \\ \dots\dots\dots & & \\ -\vec{v} & \vdots & I \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

sendo a métrica acústica.

As equações fundamentais da dinâmica de um fluido são as de Euler e da Continuidade³, dadas respectivamente por

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho [\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}] = \vec{F}, \quad (4.6a)$$

$$\partial_t \rho = -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}). \quad (4.6b)$$

³As equações de Euler e da continuidade podem ser derivadas a partir de um princípio de ação, com a ação sendo dada por: $S = \int d^4x [\rho \dot{\phi} + \frac{1}{2} \rho + |\nabla \phi|^2 u(\rho)]$.

Assumindo que o fluido seja não viscoso e que estão somente presentes forças devido à pressão, gravidade e a um gradiente arbitrário, isto é

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}p - \rho\vec{\nabla}\phi. \quad (4.7)$$

Substituindo (4.7) na equação de Euler (4.6a) e depois de algumas manipulações, ela assume a seguinte forma

$$\partial_t \vec{v} = \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} v^2 + \phi + \Phi \right). \quad (4.8)$$

Vamos agora, assumir que o fluido é livre de torção, isto é, ele é irrotacional, com isso $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$. Introduzindo o potencial velocidade, $\vec{v} = -\vec{\nabla}\psi$ e assumindo que o fluido é bariotrópico, $\rho = \rho(p)$, encontramos uma nova forma da equação de Euler

$$-\partial_t \psi + h + \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 + \phi + \Phi = 0, \quad (4.9)$$

onde a função h é definida por $h(p) = \int_0^p \frac{dp'}{\rho}$, de modo que o gradiente de h , seja dado por $\vec{\nabla}h = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}p$. A equação de Euler na forma (4.9), é conhecida como equação de Bernoulli na presença de forças externas amortecedoras.

Queremos linearizar as equações de movimento (4.6b) e (4.9) em torno do *background* (ρ_0, p_0, ψ_0) . Para isso, escreveremos as flutuações como sendo

$$\rho = \rho_0 + \epsilon \rho_1 + \mathcal{O}(\epsilon)^2, \quad (4.10a)$$

$$p = p_0 + \epsilon p_1 + \mathcal{O}(\epsilon)^2, \quad (4.10b)$$

$$\psi = \psi_0 + \epsilon \psi_1 + \mathcal{O}(\epsilon)^2. \quad (4.10c)$$

O som pode ser definido como sendo uma flutuação na linearização das quantidades dinâmicas. Em princípio, é de interesse resolver o conjunto completo de equações de movimento para as variáveis (ρ, p, ψ) . Na prática é mais útil separar o movimento em dois: um termo associado ao movimento médio do fluido, (ρ_0, p_0, ψ_0) , e outro que descreve a amplitude das perturbações, $(\epsilon \rho_1, \epsilon p_1, \epsilon \psi_1)$. O processo de linearização

da equação da continuidade leva ao seguinte conjunto de equações

$$\partial_t \rho_0 + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}_0) = 0, \quad (4.11a)$$

$$\partial_t \rho_1 + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}_1 + \rho_1 \vec{v}_0) = 0. \quad (4.11b)$$

E o processo de linearização da equação de Euler leva a outras duas equações

$$-\partial_t \psi_0 + h_0 + \frac{1}{2} |\vec{\nabla}|^2 + \phi + \Phi = 0, \quad (4.12a)$$

$$-\partial_t \psi_1 + \frac{p_1}{\rho_0} - \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \psi_1 = 0. \quad (4.12b)$$

Substituindo a condição: $\rho_1 = (\partial \rho / \partial p) p_1$ na equação da continuidade linearizada obtém-se a seguinte equação

$$-\partial_t \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \rho_0 (\partial_t \psi_1 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \psi_1) \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho_0 \vec{\nabla} \psi_1 - \frac{\partial \rho}{\partial p} \rho_0 \vec{v}_0 (\partial_t \psi_1 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \psi_1) \right) = 0 \quad (4.13)$$

Esta equação de onda descreve a propagação de um potencial escalar linearizado ψ_1 e determina por completo as perturbações do meio acústico. A velocidade do som é definida por

$$c^{-2} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial p}, \quad (4.14)$$

e introduzindo a matriz simétrica 4×4

$$f^{\mu\nu}(t, \vec{x}) \equiv \frac{\rho}{c^2} \begin{pmatrix} -1 & \vdots & -v_0^j \\ \dots\dots\dots & & \\ -v_0^i & \vdots & (c^2 \delta^{ij} - v_0^i v_0^j) \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

podemos reescrever a equação de onda (4.13) como sendo

$$\partial_\mu (f^{\mu\nu} \partial_\nu \psi_1) = 0. \quad (4.16)$$

A coordenada do espaço-tempo é dada por $x^\mu \equiv (t; x^i)$ e o índice grego varia de 0 a 3.

Em qualquer variedade lorentziana, ou pseudo-riemanniana, o d'Alembertiano

em espaços curvos[25] é dado em termos da métrica $g_{\mu\nu}(t, \vec{x})$, por meio da expressão

$$\Delta\psi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_t\psi), \quad (4.17)$$

onde $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$. M. Visser[56] mostrou que a matriz $f^{\mu\nu}$ está relacionada com a métrica de acordo com

$$\det(f^{\mu\nu}) = (\sqrt{-g})^4 g^{-1} = g. \quad (4.18)$$

O que permite escrever a métrica acústica como

$$g^{\mu\nu}(t, \vec{x}) \equiv \frac{1}{\rho c} \begin{pmatrix} -1 & \vdots & -v_0^j \\ \dots\dots\dots & & \\ -v_0^i & \vdots & (c^2\delta^{ij} - v_0^i v_0^j) \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

A propagação do som é governada pela métrica acústica que é descrita pela geometria pseudo-riemanniana de $(3+1)$ dimensões e depende da densidade, da velocidade do fluido e da velocidade local do som. A métrica (4.19) é chamada por M. Stone[62] de métrica de Unruh. M. Stone também mostrou que a métrica (4.19) pode ser derivada a partir de um princípio de ação. Vários sistemas “acústicos” podem ser estudados fazendo uso da maquinaria da geometria diferencial. Por exemplo, Visser estudou a propagação acústica em um vórtice irrotacional. A curvatura do “espaço-tempo” acústico de um vórtice de circulação hidrodinâmico leva à deflexão de fônons a grandes distâncias do vórtice[63].

4.3 Elemento de Linha para um Vórtice

Como dito anteriormente, a dinâmica de fônons na presença de um campo de velocidades é equivalente à dinâmica de fótons na presença de um campo gravitacional. Estamos interessados no campo de velocidades ao redor de um vórtice quantizado, $\vec{v}_s = N\kappa\hat{e}_\phi/2\pi r$, onde κ é o quantum de circulação e N , o número quântico de circulação. Este fluxo induz o espaço, no qual o fônon se propaga, portanto o campo de velocidade obedece uma equação de movimento escalar na métrica

[57]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{v_s^2}{c^2}\right) \left(dt + \frac{Nkd\phi}{2\pi(c^2 - v_s^2)}\right)^2 - \frac{dr^2}{c^2} - \frac{r^2}{c^2}d\phi^2 - \frac{dz^2}{c^2}. \quad (4.20)$$

Este elemento de linha descreve a dinâmica de fônons propagando-se no campo de velocidades de um vórtice quantizado. G.E. Volovik [57], mostrou que no limite longe do vórtice, no qual $v_s^2/c^2 \ll 1$, o elemento de linha (4.20), se reduz a

$$ds^2 = \left(dt + \frac{d\phi}{\omega}\right)^2 - \frac{1}{c} (dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2), \quad (4.21)$$

onde $\omega = 2\pi c^2/N\kappa$. Para o vórtice superfluido, temos $\kappa = 2\pi\hbar/m_4$ e m_4 é a massa do átomo do ${}^4\text{He}$. Neste caso, a frequência característica $\omega = m_4 c^2/N\hbar$. Esta métrica é equivalente à métrica da corda cósmica girante no espaço tempo de 3 + 1 dimensões. A correspondência entre a circulação κ ao redor do vórtice e o momento angular da corda girante é dada pela relação

$$\kappa N = 8\pi JG, \quad (4.22)$$

onde J é o momento angular da corda e G é a constante gravitacional. Davis e Shellard[64] estabeleceram que os vórtices em qualquer superfluido têm as propriedades de uma corda cósmica girante. Pode-se dizer também que os vórtices em superfluidos simulam as cordas cósmicas girantes[59, 65]

A consideração feita por G.E. Volovik, que é tomar o limite longe do vórtice na métrica (4.20) para o obter a métrica (4.24) é desnecessária. Ele pode ser obtido através de uma transformação de coordenadas. Aplicando a transformação de coordenadas locais

$$d\phi' = d\phi, \quad (4.23a)$$

$$z' = \frac{z}{c}, \quad (4.23b)$$

$$r' = \frac{r}{c}, \quad (4.23c)$$

$$dt' = \sqrt{1 - \frac{v_s^2}{c^2}} dt, \quad (4.23d)$$

obtem-se uma métrica análoga à corda cósmica espessa girante, dada por

$$ds^2 = [dt' + \beta(r')d\phi']^2 - dr'^2 - \alpha(r')^2 r'^2 d\phi'^2 - dz'^2, \quad (4.24)$$

onde as funções $\alpha(r')$ e $\beta(r')$, são dadas, respectivamente, por

$$\alpha(r') = \sqrt{1 - \frac{v_s^2}{c^2}}, \quad (4.25a)$$

$$\beta(r') = \frac{Nk}{2\pi} (1 - v_s^2/c^2)^{-1/2}. \quad (4.25b)$$

As transformações (4.23) são similares as transformações de Lorentz da relatividade especial. Fazendo a analogia com o caso gravitacional, notamos que a função β está associada com o termo de momento angular por $\beta = -4\pi GJ$.

4.4 Holonomia na Métrica de um Vórtice

Nesta seção, determinaremos a holonomia associada ao transporte de vetores ao longo de curvas fechadas ao redor dos vórtices. A holonomia pode ser usada como um meio de classificação global de diferentes espaços. A holonomia carrega a informação topológica sobre o espalhamento de fônons por vórtices. A informação trazida pelo cálculo de holonomia possibilita a investigação do efeito Aharonov-Bohm no espalhamento de fônons. Assumimos que $\beta = 0$ e que α seja considerado uma constante. Deste modo a métrica (4.24) se reduz à métrica[65]

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 d\phi^2 - dz^2. \quad (4.26)$$

A métrica(4.26) pode ser descrita em termos de uma base de 1-formas, dada por

$$e^0 = dt, \quad (4.27a)$$

$$e^1 = \cos \phi dr - \alpha r \sin \phi d\phi, \quad (4.27b)$$

$$e^2 = \sin \phi dr + \alpha r \cos \phi d\phi, \quad (4.27c)$$

$$e^3 = dz, \quad (4.27d)$$

possuindo o seguinte conjunto de tetradas

$$e_0^0 = 1; \quad (4.28a)$$

$$e_1^1 = \cos \phi, \quad e_2^1 = -\alpha r \sin \phi; \quad (4.28b)$$

$$e_1^2 = \sin \phi, \quad e_2^2 = \alpha r \sin \phi; \quad (4.28c)$$

$$e_3^3 = 1; \quad (4.28d)$$

com $e^a = e_\mu^b E_a^\mu = \delta_a^b$. Calculando a derivada exterior do conjunto de 1-formas (4.27)

$$de^0 = 0, \quad (4.29a)$$

$$de^1 = (1 - \alpha) \sin \phi dr \wedge d\phi, \quad (4.29b)$$

$$de^2 = (\alpha - 1) \cos \phi dr \wedge d\phi, \quad (4.29c)$$

$$de^3 = 0. \quad (4.29d)$$

As conexões são mais uma vez obtidas a partir das equações de estrutura de Cartan: $de^a + \omega_b^a \wedge e_b = 0$. As conexões ω_b^a são relacionadas com as conexões de *spin* através da expressão $\Gamma_b = \omega_b^a dx^b$. Usando a base de 1-formas (4.27), as conexões não nulas são

$$\Gamma_\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \alpha - \frac{1}{\alpha} \frac{v_s^2}{c^2}) & 0 \\ 0 & -(1 - \alpha - \frac{1}{\alpha} \frac{v_s^2}{c^2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

A holonomia associada ao transporte paralelo de vetores ao redor de uma curva fechada γ , é dada por

$$U(\gamma) = \mathcal{P} \exp \left(- \oint_\gamma \Gamma_\mu dx^\mu \right). \quad (4.31)$$

A curva γ é tomada como um círculo de raio r , centrado na origem. Assim a integral de holonomia para uma corda cósmica pode ser escrita como

$$U(\gamma) = \exp \left[-2\pi i \left(1 - \alpha - \frac{1}{\alpha} \frac{v_s^2}{c^2} \right) J_{12} \right]. \quad (4.32)$$

Ou na sua forma matricial como

$$U(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos[2\pi(1 - \alpha - \frac{1}{\alpha} \frac{v_z^2}{c^2})] & \sin[2\pi(1 - \alpha - \frac{1}{\alpha} \frac{v_z^2}{c^2})] & 0 \\ 0 & -\sin[2\pi(1 - \alpha - \frac{1}{\alpha} \frac{v_z^2}{c^2})] & \cos[2\pi(1 - \alpha - \frac{1}{\alpha} \frac{v_z^2}{c^2})] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

A matriz J_{12} é o gerador de rotações ao redor do eixo z em \mathbb{R}^3 . Esse resultado significa que para um vetor transportado paralelamente ao longo de uma região com curvatura nula o resultado final do vetor difere do original. Isso é devido à existência de curvatura no centro do vórtice, esse efeito é similar ao efeito Aharonov-Bohm. O ângulo $2\pi(1 - \alpha - \frac{1}{\alpha} \frac{v_z^2}{c^2})$ é chamado de ângulo déficit associado ao espaço-tempo de uma corda cósmica. Quando o vetor é transportado paralelamente ao redor da corda, a posição final do vetor é modificada por um ângulo de $2\pi(1 - \alpha - \frac{1}{\alpha} \frac{v_z^2}{c^2})$. Isso ocorre mesmo na região na qual fazemos o transporte paralelo tendo curvatura nula. A curvatura está concentrada no núcleo da corda. Esse efeito é chamado de efeito Aharonov-Bohm gravitacional.

Para incluir efeitos devido à torção, precisamos fazer β diferente de zero. Para isso, vamos reescrever a base de 1-formas incluindo β e a partir dela calcular as holonomias.

$$e^0 = dt + \beta d\phi, \quad (4.34a)$$

$$e^1 = \cos \phi dr - \alpha r \sin \phi d\phi, \quad (4.34b)$$

$$e^2 = \sin \phi dr + \alpha r \cos \phi d\phi, \quad (4.34c)$$

$$e^3 = dz, \quad (4.34d)$$

com o seguinte conjunto de tetradas

$$e_0^0 = 1 \quad e_2^0 = \beta; \quad (4.35a)$$

$$e_1^1 = \cos \phi, \quad e_2^1 = -\alpha r \sin \phi; \quad (4.35b)$$

$$e_1^2 = \sin \phi, \quad e_2^2 = \alpha r \sin \phi; \quad (4.35c)$$

$$e_3^3 = 1; \quad (4.35d)$$

onde, por simplicidade, assumimos que α e β são constantes. Mas quando isso é

feito, nenhuma efeito devido à curvatura surge, contrariando as expectativas. Isto ocorre porque a holonomia que estamos usando não é a apropriada. Precisamos usar, a chamada holonomia translacional[66], que é mais geral do que a usual(rotacional). A holonomia usual pertence ao grupo de Lorentz, enquanto a translacional pertence ao grupo de Poincaré. Vamos expressar a métrica (4.24) como uma métrica tipo Minkowski, através da seguinte mudança de variáveis

$$t = T - \beta\phi, \quad (4.36a)$$

$$\phi = \theta/\alpha, \quad (4.36b)$$

$$z = Z, \quad (4.36c)$$

$$r = R. \quad (4.36d)$$

Deste modo, o elemento de linha torna-se[67]

$$ds^2 = dT^2 - dR^2 - R^2 d\theta^2 - dZ^2, \quad (4.37)$$

que é uma métrica local. O conjunto de transformações (4.36) pode ser escrito como o produto de matrizes homogêneas. Assim vamos reexpressar a métrica

Os pontos (t', \vec{x}') e (t, \vec{x}) são conectados através da expressão

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \exp(2\pi i\beta)T_0 \exp(-2\pi iJ_{12}) \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

A matriz de holonomia translacional é dada por

$$U(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos[2\pi(1 - \alpha - \frac{1}{\alpha}\frac{v_s^2}{c^2})] & \sin[2\pi(1 - \alpha - \frac{1}{\alpha}\frac{v_s^2}{c^2})] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin[2\pi(1 - \alpha - \frac{1}{\alpha}\frac{v_s^2}{c^2})] & \cos[2\pi(1 - \alpha - \frac{1}{\alpha}\frac{v_s^2}{c^2})] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\pi\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

Essa matriz descreve o comportamento, tanto de um vetor, tensor ou *spinor*, quando

é transportado paralelamente ao redor de um defeito topológico. No caso de modelos análogos, os fônons “enxergam” o vórtice como sendo uma métrica não-euclidiana.

A holonomia determina a função de onda quando esta é transportada ao redor do vórtice. A fase adquirida pela função de onda dos fônons é dada pela holonomia no “background” do vórtice. Esse é um dos efeitos mais interessantes da corda cósmica girante que pode ser modelado em matéria condensada, é o efeito Aharonov-Bohm gravitacional. O espaço-tempo ao redor da corda cósmica girante é plano. Porém existe uma diferença no intervalo de tempo gasto para as partículas percorrerem a corda em direções opostas. A assimetria entre as partículas movendo-se em diferentes lados do vórtice origina a força de Iordanskii na presença de quase-partículas[59]. Existem três contribuições topológicas distintas à força não dissipativa que age sobre um vórtice quantizado num superfluido ou num supercondutor[68]. A mais familiar é a força de *magnus* que surge quando o vórtice move-se com respeito ao vácuo do superfluido. O análogo na corda cósmica girante aparece quando a corda move-se no *background* de uma densidade de carga uniforme. As duas outras contribuições análogas são a anomalia axial no núcleo da corda e a outra é a própria força de Iordanskii. Esta é uma manifestação do efeito Aharonov-Bohm para a dinâmica de fônons na presença de um vórtice em um superfluido.

4.5 Propriedades Geométricas da Métrica de um Vórtice

Considerando a base de 1-formas (4.27) e o conjunto de transformações (4.36), podemos determinar o fluxo quântico de torção através de uma seção Σ em um superfluido como uma integral de holonomia[69]

$$\int_{\Sigma} T^0 = \int_{\Sigma} de^0 + \omega_b^a \wedge e^b. \quad (4.40)$$

Usando o teorema de Stokes para formas diferenciais[70], podemos transformar essa

integral de “superfície” em uma integral de “linha”, sendo assim temos

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma} T^0 &= \oint_{\gamma} e^0, \\
 &= \oint \beta d\phi', \\
 &= 4G \oint J d\phi', \\
 &= \frac{8\pi}{\sqrt{1-v^2/c^2}} Nk.
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

No caso de um vórtice no superfluido ${}^4\text{He}$, temos, $k = \pi h/m_4$, onde m_4 é a massa do átomo ${}^4\text{He}$. A expressão acima, (4.41) pode ser reescrita na forma

$$\oint_{\Sigma} Q^0 = \frac{Nh}{2m_4 c^2 \sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{4.42}$$

Esse resultado independe da geometria interna ao vórtice. O termo $4G \oint J d\phi'$ que aparece em (4.41) é a regra de quantização de Bohr-Sommerfeld, sendo assim o fluxo de torção é naturalmente quantizado. Fazendo uma analogia com Anandam[69], podemos escrever o teorema de Gauss-Bonet para o fluxo de curvatura de um vórtice supercondutor

$$\int_{\Sigma} R_{r\phi_2}^1 dr \wedge d\phi = d\omega_2^1 + \omega_c^1 \wedge e^2. \tag{4.43}$$

Usando mais uma vez o teorema de Stokes

$$\begin{aligned}
 \oint_{\Sigma} R_{r\phi_2}^1 dr \wedge d\phi &= \oint_{\gamma} \omega_{\phi_2}^1 d\phi, \\
 &= 2\pi(1 - \alpha), \\
 &= 2\pi c^2 (1 - v_s^2/c^2).
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Esse resultado representa a quantização da curvatura para a região ao redor de um vórtice.

4.6 Conclusões

Neste capítulo usamos um modelo análogo para descrever um vórtice num superfluido e usamos a transformação de holonomia para mostrar que esse sistema apresenta efeito Aharonov-Bohm. Esse efeito é similar ao efeito de partículas na presença de uma corda cósmica com estrutura interna. O efeito Aharonov-Bohm tem contribuições, tanto da holonomia rotacional quanto da translacional. No limite longe do vórtice, apenas a holonomia translacional contribui para o análogo gravitacional do efeito Aharonov-Bohm e os fônons, na presença de uma linha de vórtice, tem um comportamento semelhante a partículas na presença de uma corda cósmica girante.

Capítulo 5

Estruturas Curvas de Grafite

5.1 Introdução

O interesse no estudo dos mecanismos de formação [71] e das propriedades físicas das nano-estruturas de carbono deve-se, principalmente, a impressionante gama de aplicações tecnológicas reais e potenciais [72]. Entre os vários métodos que são empregados para se produzir nano-estruturas de materiais formados de carbono, tais como fulerenos, nanotubos e nanocones, destaca-se o método de vaporização-condensação a baixa pressão [73]. A correlação entre as estruturas de nano-escalas, formadas por camadas curvas de carbono e seus respectivos estados eletrônicos tem sido verificada de forma direta, através de medidas com microscópio de varredura por tunelamento - STM, bem como, por meio de microscópio eletrônico de alta resolução [74, 75].

Uma monocamada de grafite pode ser vista como o ladrilhamento perfeito do espaço bidimensional por hexágonos. Estruturas curvas, além de hexágonos, contêm pentágonos ou heptágonos. Exemplos típicos dessas estruturas são encontradas em fulerenos, nanotubos grafíticos, formas esféricas de multicamadas e molas tubulares helicoidais.

Moléculas de fulerenos são estruturas fechadas de carbono que surgem da vaporização do grafite. Este tipo de estrutura pode ser facilmente sintetizado e manipulado. Uma das principais propriedades dessas moléculas é seu caráter geométrico e a possibilidade de produzi-las nas mais diferentes formas geométricas [76]. Entre as várias propriedades dessas moléculas, destaca-se a natureza supercondutora de

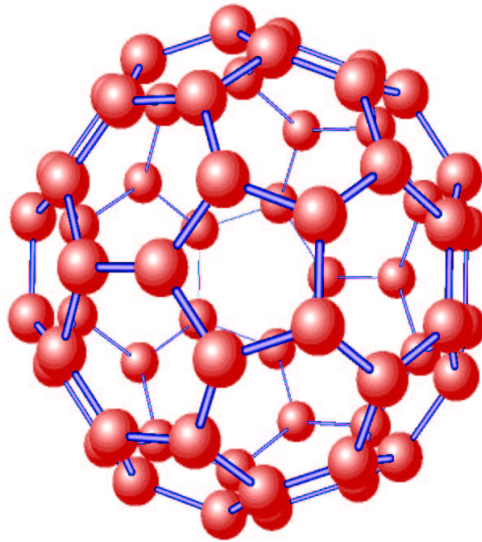


Figura 5.1: Molécula de fulereno C_{60}

seus compostos alcalinos. A forma mais abundante na qual o fulereno se apresenta é a molécula C_{60} [77]. Os 60 átomos de carbonos estão situados nos vértices de um poliedro, obtido após se trocar cada vértice de um icosaedro por um pentágono. A forma da molécula C_{60} é como uma bola de futebol, feita por 12 pentágonos e 20 hexágonos[77], como ilustrado na fig.5.1. No processo de vaporização do grafite surge uma família de membros da molécula C_{60} , mas com diferentes números de átomos, como mostra a fig.5.2.

Nanotubos de carbono de uma única parede são formados quando uma camada de grafeno é encurvada até formar um cilindro e os átomos de carbono são juntados sem emenda. Eles são caracterizados por seu comprimento, diâmetro e por sua helicidade. Existe um número infinito de possíveis estruturas atômicas dos nanotubos de grafite. Essas estruturas são determinadas por um par de inteiros (l, m) que determinam o diâmetro e a helicidade dos arranjos de carbono[78]. Eles foram descobertos em 1991, por Iijima¹[79]. E desde então, as suas propriedades eletrônicas peculiares e únicas devido à dimensão e orientação da rede, tem atraído

¹Embora esse fato não seja aceito por unanimidade.

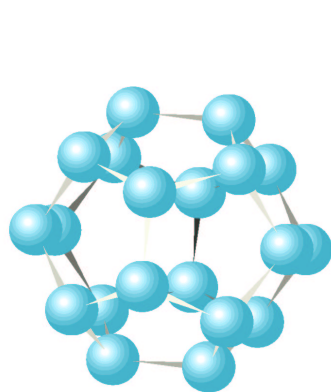
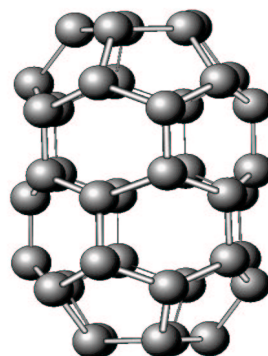
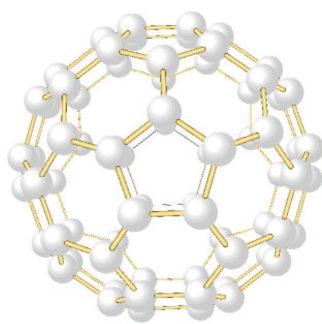
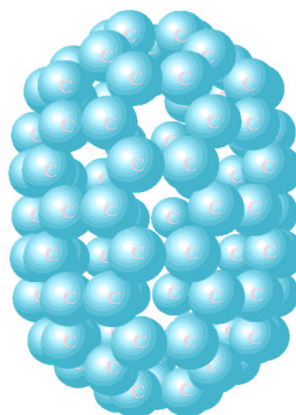
(a) Molécula C_{20} (b) Molécula C_{40} (c) Molécula C_{70} (d) Molécula C_{90}

Figura 5.2: Moléculas de fulereno.

bastante atenção.

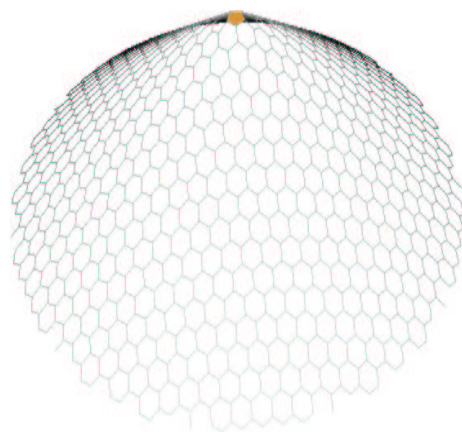
As propriedades de condutividade dependem fortemente do diâmetro do tubo e de sua helicidade. Pequenas variações nesses parâmetros causam uma mudança do estado metálico para o semicondutor[80]. Os defeitos nos nanotubos de uma única parede podem ser classificados como vacâncias ou defeitos topológicos. Esses defeitos topológicos podem ser formados durante o processo de crescimento do material, induzidos por fótons, bombardeamento por íons ou por tensão de *stress*[81]. Os defeitos topológicos introduzem uma curvatura gaussiana não nula na rede hexagonal. O que produz suaves interfaces entre diferentes nanotubos. Os defeitos topológicos são essenciais na formação de estruturas de nanotubos tridimensionais. As quais podem ser verificadas experimentalmente.

As camadas de grafite que formam a estrutura fechada (também chamada de gaiola) incluem defeitos de anéis de n -membros ($n \neq 6$), esses anéis são chamados de **defeitos poligonais**. Quando um pentágono é introduzido numa folha de grafite é formada uma estrutura cônica, chamada de cones de grafite. A configuração dos anéis de 5-membros determinam a estrutura topológica das ligações que formam as camadas de grafite do fulereno. Os defeitos poligonais e suas posições relativas influenciam de modo marcante os estados eletrônicos das nano-estruturas de grafite. Os defeitos pentagonais podem ser considerados como uma desclinação no ápice do cone e o ângulo de abertura está conectado com o índice de Frank da desclinação[82]. A morfologia cônica tem sido observada não apenas em grafite, mas também em nitrato de boro e alumino-silicatos, como mostra a fig.5.4.

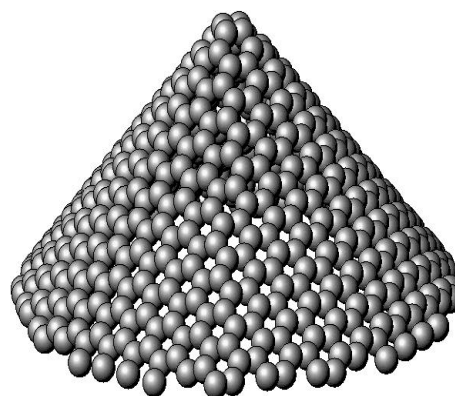
Para compreender as características gerais das propriedades eletrônicas das camadas curvas de grafite é necessário saber o efeito individual dos defeitos poligonais nas ligações dos estados eletrônicos[83]. Eles mostraram que essa abordagem é válida para uma rede bidimensional tipo *honey-comb*.

5.2 Modelo Contínuo

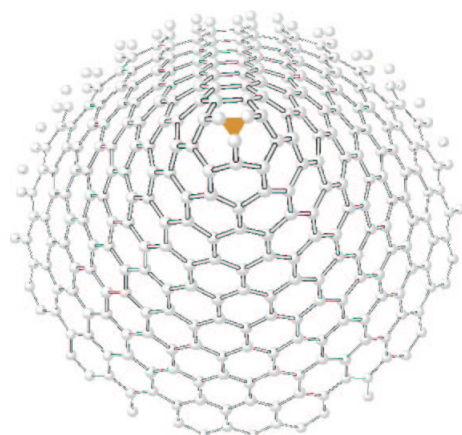
Na nossa abordagem é necessária a utilização de uma formulação teórica contínua para o grafeno. Nessa formulação, o cone é considerado como uma estrutura perfeita tipo-grafeno. González, Guinea e Vozmediano[76] mostraram que a aproximação *tight-binding* aplicada ao cálculo do espectro eletrônico em potenciais periódicos é levado a um problema equivalente ao do espectro de uma teoria de



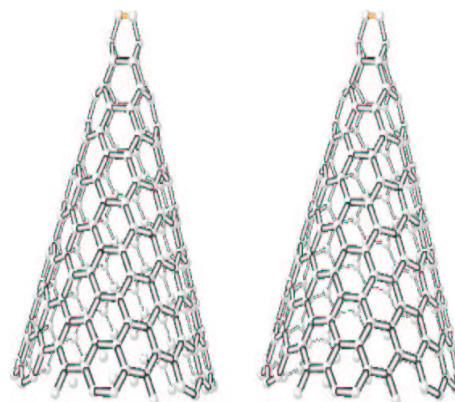
(a) setor removido de 60



(b) setor removido de 120



(c) setor removido de 180



(d) setor removido de 240

Figura 5.3: A figura mostra nanocones de carbono formados com diversos ângulos de desclinação.

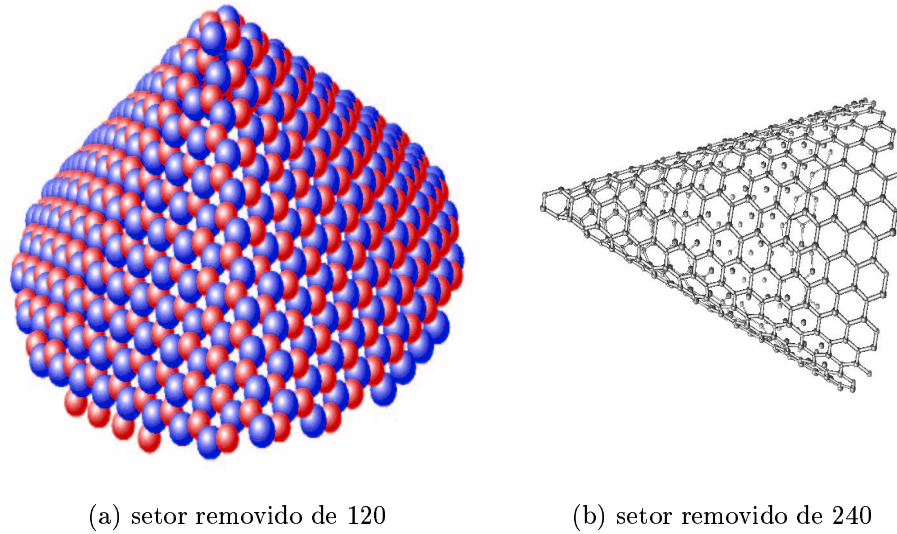


Figura 5.4: A figura mostra nanocones de nitrato de boro formados com diversos ângulos de desclinação.

campo livre sobre a rede. E que através do cálculo variacional e da aproximação *tight-binding* o problema de encontrar os autovalores de moléculas com essa estrutura, equivale ao de estudar um hamiltoniano eletrônico que descreva as excitações de baixas-energias. A questão fundamental passa a ser diagonalizar o hamiltoniano

$$\mathcal{H} = J \sum_{\langle ij \rangle} a_i^\dagger a_j, \quad (5.1)$$

onde J é o parâmetro de *hopping* e a soma é feita sobre os pares de primeiros vizinhos. a_i^\dagger e a_j são os operadores criação e destruição de férmions². González,

²Eles satisfazem as relações de anti-comutação

$$\{a_i, a_j\} = \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0 \quad \text{e} \quad \{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij}. \quad (5.2)$$

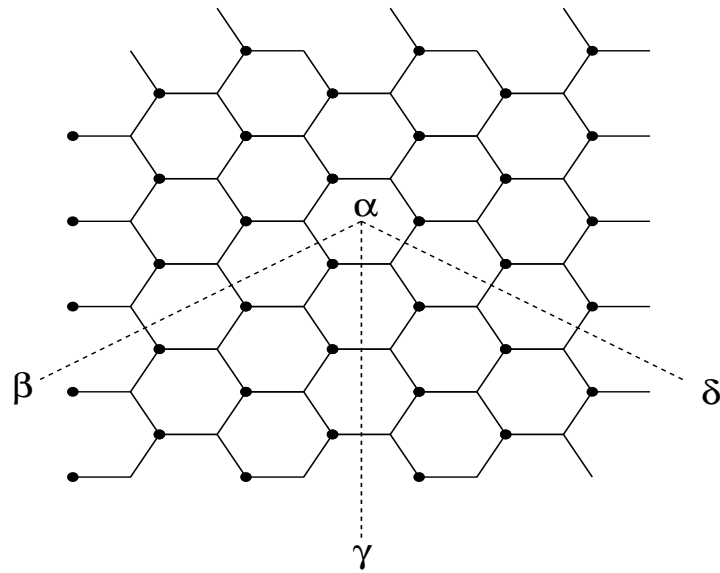


Figura 5.5: A figura mostra a construção de um cone a partir de uma camada de grafite. Retire o setor $\alpha\beta\gamma$ e junte $\alpha\beta$ a $\alpha\gamma$ produzindo um cone($n_{\Omega} = 1$) cujo ápice é um pentágono. Retirando um segundo setor e juntando as linhas $\alpha\beta$ a $\alpha\delta$ produz-se um cone($n_{\Omega} = 2$) com um ângulo de abertura menor. Forma-se uma estrutura pouco estável com anéis 4-membros.

Guinea e Vozmediano[76] mostraram que o hamiltoniano pode ser diagonalizado³ e que no limite contínuo, ele pode ser mapeado no operador de Dirac.

5.3 Abordagem Geométrica

Os defeitos topológicos, tanto na matéria condensada, quanto na cosmologia, são formados durante quebras de simetria. Esta correlação, permite utilizar como laboratório para, “experimentos cosmológicos”, cristais líquidos, supercondutores, superfluidos e outros materiais[52]. Os defeitos em sólidos podem ser vistos, pictoricamente, através de um processo de “cortar e colar”, conhecido na literatura como processo de Volterra. Tome um cilindro oco feito de material elástico e corte-o em dois semi-planos, por exemplo em $\phi = 0$, dessa forma a múltipla conexidade do objeto é quebrada. Então tome as duas superfícies que foram cortadas aplique uma rotação e uma translação nelas uma contra a outra. Finalmente depois de remover ou adicionar material, quando necessário, cole os dois planos juntos novamente⁴ (ver fig. 5.6). Este processo de cortar e colar é chamado de **Processo de Volterra**. O processo de Volterra leva a seis diferentes tipos de objetos [82]. Os quais pertencem aos seis diferentes graus de liberdade do grupo próprio de movimento em \mathbb{R}^3 , o grupo euclideo $SO(3) \otimes T(3)$. Volterra chamou as configurações resultantes de distorções. As distorções que pertencem ao subgrupo translacional $T(3)$ são chamadas de *deslocações* e as que pertencem ao subgrupo $SO(3)$ são chamadas de *desclinações*. Este processo apresenta uma visão unificada dos defeitos topológicos lineares.

Em um sistema físico real, se um ou mais setores de uma monocamada de grafite for retirado e as superfícies resultantes forem coladas e obedecendo as propriedades químicas do material, obteremos um nanocone de grafite. A presença deste defeito topológico modifica a estrutura eletrônica a baixas energias, com consequência para as propriedades de transporte não-locais desta nova classe de materiais carbônicos. Os cones de grafite so classificados pelo seu ângulo de abertura, ou

³Na sua forma diagonal o hamiltoniano é dado por

$$\mathcal{H} \equiv \begin{pmatrix} 0 & J \sum_j \exp(ia\vec{k} \cdot \vec{u}_j) \\ J \sum_j \exp(ia\vec{k} \cdot \vec{v}_j) & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

⁴A cola empregada nesse processo é perfeita. As superfícies cortadas e depois coladas não podem ser identificadas.

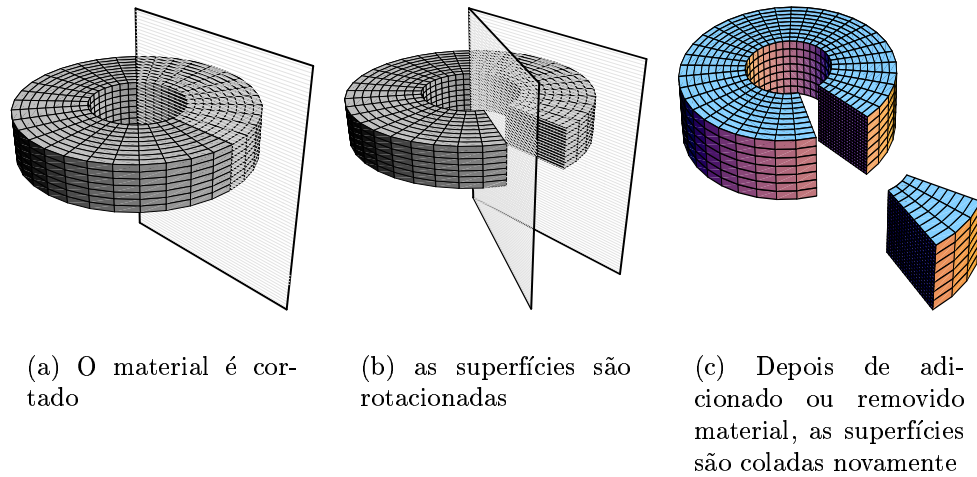


Figura 5.6: O Processo de Volterra para a formação de uma desclinação.

equivalentemente pelo número, n_Ω , de setores removidos.

Utilizaremos a abordagem geométrica desenvolvida por Katanaev e Volovich [84] a fim de descrever as desclinações presentes no grafeno ou nos nanocones de grafite. A abordagem de Katanaev e Volovich mostra a equivalência formal entre a teoria gravitacional tridimensional com torção e a teoria de defeitos em sólidos. Nesta teoria, as modificações introduzidas no meio elástico contínuo pelo defeito, são descritas por meio de uma métrica que contém todas as informações sobre as propriedades do meio elástico. Neste caso, os defeitos agem como a fonte de um campo de distorção “gravitacional”, e a métrica que descreve a região ao redor do defeito é solução da equação de Einstein.

Mostraremos, através dessa abordagem, que o efeito Aharonov-Bohm surge naturalmente no meio elástico que possui uma desclinação, devido às propriedades topológicas e geométricas desse meio. As estruturas cônicas formadas de folhas de grafeno, em uma aproximação de contínuo são descritas por uma métrica bidimensional [84]

$$ds^2 = d\rho^2 + \alpha^2 \rho^2 d\phi^2, \quad (5.4)$$

onde α é uma medida do déficit angular. O plano é coberto por inteiro pelo intervalo:

$0 \leq \phi \leq 2\pi\alpha$, onde α está relacionado com o setor angular λ , que retiramos ou inserimos para formar o defeito, por $\alpha = 1 \pm \frac{\lambda}{2\pi}$. O caso $\alpha = 1$, corresponde a ausência de desclinação. Também, podemos relacionar α com o número de setores removidos da monocamada de grafite da seguinte forma:

$$\alpha = 1 - \frac{n_\Omega}{6}. \quad (5.5)$$

Valores de α entre $0 < \alpha < 1$, significa que retiramos um setor da folha para formar o defeito, e $1 < \alpha < \infty$, significa que inserimos um setor de material, no caso do grafeno, estamos criando anéis de mais de seis átomos. Os cones de grafite além de serem classificados por meio do seu ângulo de abertura, são também pelo número de setores removidos, denominados por n_Ω .

5.4 Holonomias

Para estudarmos o efeito Aharonov-Bohm neste sistema utilizaremos o cálculo de holonomias. A holonomia é a matriz responsável pelo transporte paralelo de vetores, tensores ou spinores em uma dada variedade. A holonomia é definida pela seguinte expressão

$$U(\gamma) = \mathcal{P} \exp \left(- \oint \Gamma_\mu dx^\mu \right), \quad (5.6)$$

onde Γ_μ são as conexões tetrádicas ou spinoriais do sistema. Analisando o modelo de Lammert e Crespi [85] observamos que a função de onda do sistema é descrita por um *spinor*, logo investigaremos o transporte paralelo de spinores no espaço cônico para tratar o efeito Aharonov-Bohm neste modelo.

Uma base de 1-formas conveniente para descrever a métrica (5.4) que representa uma desclinação e portanto o espaço ao redor do ápice de um cone de grafite pode ser a seguinte[86]:

$$e^1 = \cos \phi d\rho - \alpha \rho \sin \phi d\phi, \quad (5.7a)$$

$$e^2 = \sin \phi d\rho + \alpha \rho \cos \phi d\phi, \quad (5.7b)$$

calculando agora, a derivada exterior, obtemos

$$de^1 = (\alpha - 1) \sin \phi \, d\phi \wedge d\rho, \quad (5.8a)$$

$$de^2 = (1 - \alpha) \cos \phi \, d\phi \wedge d\rho. \quad (5.8b)$$

As derivadas acima podem ser reescritas em termos da base (5.7), como sendo

$$de^1 = (1 - \alpha) e^2 \wedge d\phi, \quad (5.9a)$$

$$de^2 = (\alpha - 1) e^1 \wedge d\phi. \quad (5.9b)$$

Temos que resolver as equações de estrutura de Cartan

$$de^1 + \omega_2^1 \wedge e^2 = 0, \quad (5.10a)$$

$$de^2 + \omega_1^2 \wedge e^1 = 0. \quad (5.10b)$$

Obtemos o seguinte resultado para os elementos não nulos da conexão de *spin*:

$$\omega_2^1 = (\alpha - 1) = -\omega_1^2. \quad (5.11)$$

A matriz da conexão de *spin* é dada por

$$\Gamma_\phi = \begin{pmatrix} 0 & (\alpha - 1) \\ -(\alpha - 1) & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

A matriz de holonomia que descreve o transporte paralelo de um vetor ao redor do cone de grafite é dada por

$$\begin{aligned} U(\gamma) &= \exp \left(- \oint \Gamma_\phi d\phi \right) \\ &= \exp (-2\pi \Gamma_\phi). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Depois de expandir a exponencial acima, a matriz de holonomia pode ser reescrita como

$$U(\gamma) = 1 - \frac{\Gamma_\phi}{(\alpha - 1)} \sin[2\pi(\alpha - 1)] + \frac{\Gamma_\phi^2}{(\alpha - 1)^2} (1 - \cos[2\pi(\alpha - 1)]). \quad (5.14)$$

Com a escolha da base de 1-formas (5.7), a matriz de holonomia é a própria matriz identidade quando o espaço é plano, isto é, quando $\alpha = 1$. Escrevendo a matriz de holonomia de modo explícito

$$U(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos[2\pi(\alpha - 1)] & -\sin[2\pi(\alpha - 1)] \\ \sin[2\pi(\alpha - 1)] & \cos[2\pi(\alpha - 1)] \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

A matriz acima pode ser interpretada como o gerador de rotações no plano⁵. O ângulo $2\pi(1 - \alpha)$ corresponde ao ângulo de déficit da desclinação. Além disso, verificamos a existência de certos valores de ângulo de déficit, no qual ocorre uma invariância de holonomia, isto é a holonomia é igual a identidade. Esse valor corresponde a

$$\alpha = 1 \pm \frac{m}{2}, \quad (5.16)$$

onde m é um inteiro. Quando α assume um desses valores, não ocorre o efeito Aharonov-Bohm no cone de grafite.

5.5 Equação de Dirac em Espaços Curvos

O formalismo envolvendo referenciais móveis torna-se inevitável quando pretende-se estudar a equação de Dirac em espaços curvos. Embora a geometria de Riemann seja a abordagem natural para a Relatividade Geral [25], existem vantagens para a utilização da geometria de Riemann-Cartan [87]. Essa nova abordagem: (i) permite a utilização de uma conexão métrica compatível não simétrica, (ii) trata o *spin* no mesmo pé de igualdade da massa, (iii) surge de uma teoria de *gauge*. A equação de Dirac pode ser formulada de modo mais simples e direto por meio de um espaço-tempo descrito pelos referenciais de Cartan do que em qualquer outra descrição[88]. Embora o formalismo de Newman-Penrose seja largamente utilizado [89]. Em particular encontra-se a equação de Dirac na geometria de Kerr-Newman [90, 91].

A formulação de Cartan para a geometria diferencial torna possível descrever dois aspectos dos campos tensoriais, os quais aparecem de modo inseparável no cálculo tensorial usual:

1. um sistema de coordenadas x^μ para os pontos do espaço-tempo;

⁵A holonomia nesse caso, é muitas vezes chamada de holonomia rotacional

2. as componentes de vetores e tensores em cada ponto são expressas num sistema ortonormal de referência e^μ , os quais podem mudar de orientação ponto a ponto.

Essas bases de 1-formas, como visto anteriormente, podem ser expandidas em termos de dx^μ , como sendo: $e^a = e_\nu^a dx^\nu$. Como e^a forma uma base ortonormal, a métrica não-holonômica têm a forma

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \quad (5.17)$$

ou, simplesmente

$$ds^2 = -(e^0)^2 + \sum_i (e^i)^2. \quad (5.18)$$

A base de 1-formas deve ser escolhida de maneira tal que o elemento de linha deve ter a forma (5.18). A mudança das componentes pode ser devido a dois fatores: (a) a própria mudança dos tensores; (b) a rotação diferencial do referencial. Essa rotação pode ser descrita através da 2-forma:

$$de^\mu = \frac{1}{2} (e_{\nu,\kappa}^\mu - e_{\kappa,\nu}^\mu) dx^\kappa \wedge dx^\nu = -\omega_\nu^\mu \wedge e^\kappa. \quad (5.19)$$

As 1-formas ω_κ^μ são as 1-formas conexões. ω_κ^μ podem ser escritas em termos de suas componentes $\gamma_{\mu\kappa\lambda}$, de acordo com a relação

$$\omega_{\mu\kappa} = \gamma_{\mu\kappa\lambda} e^\lambda, \quad (5.20)$$

as componentes $\gamma_{\mu\kappa\lambda}$ são chamadas de coeficientes de rotação de Ricci. A ortonormalidade da base, implica na condição de anti-simetria das conexões, isto é: $\omega_{\mu\kappa} = -\omega_{\kappa\mu}$.

A derivada covariante de um vetor, representado por $V^a = e_\mu^a V^\mu(x)$, é definida em termos das conexões, por

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda V^a &= \partial_\lambda V^a + \omega_{\lambda b}^a V^b \\ &= (\partial_\lambda e_\mu^a) + e_\mu^a \partial_\lambda V^\mu + \omega_{\lambda b}^a e_\mu^b V^\mu. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Usando a condição, $\nabla_\mu e_\nu^a = 0$, muitas vezes conhecida como “postulados das tetradas”,

que pode ser escrita de modo mais explícito como

$$\nabla_\lambda e_\mu^a(x) = \partial_\lambda e_\mu^a - \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha e_\alpha^a + \omega_{\lambda b}^a V^a + \omega_{\lambda b}^a e_\mu^b = 0. \quad (5.22)$$

Substituindo o “postulado das tetradas” (5.22) na eq.(5.21), obtemos a derivada covariante de um vetor

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda V^a &= \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha e_\alpha^a V^\mu - \omega_{\lambda b}^a e_\mu^b V^\mu + e_\mu^a \partial_\lambda V^\mu + \omega_{\lambda b}^a e_\mu^b V^\mu \\ &= e_\mu^a (\partial_\lambda V^\mu + \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu V^\alpha). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Podemos ainda escrever

$$\nabla_\lambda V^a = e_\mu^a \nabla_\lambda V^\mu. \quad (5.24)$$

Usando o “postulado das tetradas” (5.22), podemos encontrar uma relação entre a conexão de *spin* e os símbolos de Christoffel da seguinte forma

$$\omega_{\lambda b}^a = \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha e_\alpha^a e_b^\mu - e_b^\mu \partial_\lambda e_\mu^a. \quad (5.25)$$

Essa relação nos permite utilizar tanto o formalismo tensorial, quanto o de formas diferenciais para encontrar, por exemplo, a curvatura de um determinado espaço-tempo a partir das conexões afim ou de *spin*.

A generalização da equação de Dirac para o espaço-tempo curvo é obtida a partir do princípio da covariância, o que nos permite trocar as matrizes de Dirac usuais γ^a pelas matrizes de Dirac generalizadas $\gamma^\mu(x)$ e todas as derivadas ordinárias ∂_a pelas derivadas covariantes $\partial_\mu - \Gamma_\mu$. Precisamos determinar como é feita a derivada covariante de um *spinor*. Para isso precisamos introduzir a conexão spinorial $\Gamma_\mu^{(x)}$, de modo que a derivada covariante $\nabla_\mu \psi$ de um *spinor* tenha a forma[92]

$$\nabla_\mu \psi = (\partial_\mu + \Gamma_\mu^{(x)}) \psi, \quad (5.26)$$

ou ainda

$$\nabla_a \psi \equiv e_a^\mu \nabla_\mu \psi. \quad (5.27)$$

As matrizes de Dirac generalizadas são definidas ponto a ponto através das tetradas, de acordo com a relação

$$\gamma^\mu(x) = e_a^\mu \gamma^a, \quad (5.28)$$

onde γ^a são as matrizes usuais de Dirac no espaço plano.

Podemos determinar uma expressão para a conexão spinorial a partir das propriedades de transformação do *spinor*, em conjunto com o requerimento que $\Gamma_\mu^{(x)}$ seja covariante de Lorentz [93]. Essa transformação é similar a transformação de *gauge* do potencial vetor A_μ do grupo $SU(3)$. A transformação local de Lorentz, $x' = \Lambda x$, leva o *spinor* $\psi(x)$ em $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$, onde $S(\Lambda)$ é uma matriz unitária 4×4 , sendo assim temos

$$\Gamma_\mu(x) \rightarrow S(\Lambda)\Gamma_\mu S^{-1}(\Lambda) + [\partial_\mu S(\Lambda)]S^{-1}(\Lambda). \quad (5.29)$$

No caso de rotações infinitesimais ou *boosts* a matriz $S(\Lambda)$ é dada por

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{i}{4}\epsilon_{ab}\Sigma^{a,b}, \quad (5.30)$$

onde ϵ_{ab} são parâmetros infinitesimais A equação de Dirac em espaços curvos é dada por [44]

$$(i\gamma^\mu\nabla_\mu - m)\psi(x) = 0. \quad (5.31)$$

As matrizes de Dirac obedecem às seguintes relações de comutação

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\eta_{ab}, \quad (5.32)$$

$$\{\gamma_\mu(x), \gamma_\nu(x)\} = 2g_{\mu\nu}(x). \quad (5.33)$$

A conexão spinorial é dada por

$$\Gamma_\mu(x) = -\frac{i}{2}\omega_\mu^{ab}(x)\frac{\Sigma_{ab}}{2}, \quad (5.34)$$

onde Σ_{ab} é o comutador das matrizes de Dirac

$$i[\gamma_a, \gamma_b] = 2\Sigma_{ab}. \quad (5.35)$$

A conexão spinorial e as matrizes de Dirac satisfazem às seguintes relações de comutação

$$[\Gamma_\mu(x), \gamma_\alpha(x)] = \omega_{\mu b}^a e_\alpha^b(x)\gamma_a, \quad (5.36)$$

e

$$[\Gamma_\mu(x), \gamma^\alpha(x)] = -\omega_{\mu a}^b e_b^\alpha(x) \gamma_a. \quad (5.37)$$

A conexão spinorial também pode ser escrita em termos das matrizes de Dirac [88, 94]:

$$\Gamma_{\mu\text{geral}} = -\frac{1}{4} \gamma_{\nu\mu}^\alpha \tilde{\gamma}_\alpha \tilde{\gamma}^\nu + a_\mu 1, \quad (5.38)$$

a_μ é um vetor arbitrário. Para partículas carregadas, o vetor a_μ é identificado como o potencial vetor. E no caso dos neutrinos[95], temos $a_\mu = 0$, já que os neutrinos não respondem diretamente a campos elétricos ou magnéticos.

5.5.1 Conexão Spinorial

Vamos determinar a conexão spinorial para a métrica do espaço-tempo cônico (5.50), levando em conta a parte temporal da métrica. A escolha da base (5.51), leva as seguintes equações de estrutura de Cartan

$$de^0 + \omega_1^0 \wedge e^1 + \omega_2^0 \wedge e^2 = 0, \quad (5.39a)$$

$$de^1 + \omega_0^1 \wedge e^0 + \omega_2^1 \wedge e^2 = 0, \quad (5.39b)$$

$$de^2 + \omega_0^2 \wedge e^0 + \omega_1^2 \wedge e^1 = 0. \quad (5.39c)$$

Os elementos não-nulos da conexão de *spin* encontrados independem do acréscimo, ou não, da parte temporal da métrica, sendo dados por

$$\omega_2^1 = (\alpha - 1) = -\omega_1^2. \quad (5.40)$$

A matriz da conexão de *spin*, agora é uma matriz 3×3 , dada por

$$\Gamma_\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha - 1) \\ 0 & -(\alpha - 1) & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

As conexões spinoriais para o cone de grafite são obtidas a partir da equação

(5.38) e das conexões de *spin* não nulas (5.11). Sendo assim, temos

$$\begin{aligned}\Gamma_\phi(x) &= -\frac{1}{4}\gamma_\nu^\alpha\gamma_\alpha\gamma^\nu \\ &= \frac{1}{4}(\alpha - 1)(-\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2 + \tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^1).\end{aligned}\quad (5.42)$$

Escolheremos a mesma representação utilizadas por Gerbert e Jackiw[44] para as matrizes $\tilde{\gamma}$. Eles usaram: $\tilde{\gamma}^1 = i\sigma^2$ e $\tilde{\gamma}^2 = -i\sigma^1$. Com isso, a conexão spinorial obtida é a seguinte

$$\Gamma_\phi(x) = -\frac{i}{2}(\alpha - 1)\sigma^3. \quad (5.43)$$

Esse resultado mostra a relação entre a fase topológica e o ângulo de déficit, responsável pela formação do cone de grafite. De que modo a existência dessa fase altera as propriedades físicas desses materiais. Em particular, estudaremos as modificações na estrutura eletrônica de baixas energias [85] e o surgimento do efeito Aharonov-Bohm [20].

A matriz de holonomia para um spinor transportado paralelamente ao redor de um cone é dada por

$$U(\gamma) = \exp[-i(\alpha - 1)\sigma^3 2\pi]. \quad (5.44)$$

Podemos reescrever esse resultado em termos do número de setores removidos, n_Ω

$$U(\gamma) = \exp[-2\pi i \frac{n_\Omega}{6} \sigma^3], \quad (5.45)$$

esse resultado, difere do obtido por Lammert e Crespi[85], no qual a holonomia depende matriz σ^2 de Pauli. Eles introduziram de modo arbitrário essa matriz. Expandindo a expressão (5.44), podemos reescrever as holonomias para um circuito fechado em torno do cone como sendo

$$U(\gamma) = \cos[(\alpha - 1)\pi] + i\sigma^3 \sin[(\alpha - 1)\pi], \quad (5.46)$$

assim, quando transportarmos uma função de onda Ψ em torno do defeito, o resultado obtido é

$$\Psi' = U(\gamma)\Psi, \quad (5.47)$$

$U(\gamma)$, fornece a fase obtida pela função de onda quando transportada em volta do

defeito. Podemos ver este resultado como o efeito Aharonov-Bohm que pode ser investigado experimentalmente nestes materiais. Esse resultado pode ser expresso em termos do número n_Ω de setores removidos

$$U(\gamma) = \cos\left[\frac{n_\Omega\pi}{6}\right] - i\sigma^3 \sin\left[\frac{n_\Omega\pi}{6}\right]. \quad (5.48)$$

Esta é a expressão para a fase quântica adquirida por uma função de onda quando transportada em torno do nanocone.

5.6 Solução da Equação de Dirac em Espaços Curvos

Estamos interessados em encontrar uma solução para a equação de Dirac sem massa, escrita da seguinte forma [44]

$$i\gamma^a E_a^\mu \nabla_\mu \psi = 0. \quad (5.49)$$

O espaço cônico em $2 + 1$ dimensões é descrito pela métrica

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - \alpha^2 \rho^2 d\phi^2. \quad (5.50)$$

Neste caso, a base de 1-formas escolhida da mesma forma que a base (5.7), acrescentando apenas a parte temporal

$$e^0 = dt \quad (5.51a)$$

$$e^1 = \cos\phi d\rho - \alpha\rho \sin\phi d\phi, \quad (5.51b)$$

$$e^2 = \sin\phi d\rho + \alpha\rho \cos\phi d\phi. \quad (5.51c)$$

Sabemos que a base de 1-formas pode ser escrita na forma: $e^a = e_\mu^a dx^\mu$. O conjunto de tetradas e_μ^a , é dado por

$$\begin{aligned} e_0^0 &= 1, \\ e_1^1 &= \cos\phi, & e_2^1 &= -\alpha\rho \sin\phi, \\ e_1^2 &= \sin\phi, & e_2^2 &= \alpha\rho \cos\phi. \end{aligned} \quad (5.52)$$

A matriz e_{μ}^a , satisfaz a seguinte relação

$$E_a^{\mu} e_{\nu}^a = \delta_{\nu}^{\mu}, \quad (5.53)$$

onde E_a^{μ} é a matriz inversa das tetradas. Podemos escrever E_a^{μ} na sua forma matricial como sendo

$$E_a^{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\frac{1}{\alpha\rho} \sin \phi & \frac{1}{\alpha\rho} \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (5.54)$$

As matrizes de Dirac em espaços curvos são dadas por $\tilde{\gamma}^{\mu} = \gamma^a E_a^{\mu}$. Além disso, escolhe-se a seguinte representação para as matrizes de Dirac no espaço plano

$$\gamma^0 = \sigma^3, \quad (5.55a)$$

$$\gamma^1 = i\sigma^2, \quad (5.55b)$$

$$\gamma^2 = -i\sigma^1. \quad (5.55c)$$

Isso nos permite determinar as matrizes $\tilde{\gamma}^{\mu}$, em termo das inversas das tetradas. Obtemos

$$\tilde{\gamma}^0 = \gamma^0 E_0^0, \quad (5.56a)$$

$$\tilde{\gamma}^1 = \gamma^1 E_1^1 + \gamma^2 E_2^1, \quad (5.56b)$$

$$\tilde{\gamma}^2 = \gamma^1 E_1^2 + \gamma^2 E_2^2, \quad (5.56c)$$

que leva a

$$\tilde{\gamma}^0 = \gamma^0, \quad (5.57a)$$

$$\tilde{\gamma}^1 = \cos \phi \gamma^1 + \sin \phi \gamma^2, \quad (5.57b)$$

$$\tilde{\gamma}^2 = -\frac{\sin \phi}{\alpha\rho} \gamma^1 + \frac{\cos \phi}{\alpha\rho} \gamma^2. \quad (5.57c)$$

Define-se ainda

$$\tilde{\gamma}^0 \equiv \gamma^t, \quad (5.58a)$$

$$\tilde{\gamma}^1 \equiv \frac{\gamma^\rho}{\alpha\rho}, \quad (5.58b)$$

$$\tilde{\gamma}^2 \equiv \frac{\gamma^\phi}{\alpha\rho}. \quad (5.58c)$$

Podemos agora escrever a equação de Dirac em termos das inversas das tetradas. As componentes não-nulas levam à seguinte equação

$$i \{ \gamma^0 E_0^0 \nabla_0 + \gamma^1 E_1^1 \nabla_1 + \gamma^1 E_1^2 \nabla_2 + \gamma^2 E_2^1 \nabla_1 + \gamma^2 E_2^2 \nabla_2 \} \psi = 0. \quad (5.59)$$

Depois de alguma manipulação, encontramos a seguinte forma para a equação de Dirac

$$i \left\{ \gamma^t \partial_t + \gamma^\rho \left[\partial_\rho - \frac{1-\alpha}{2\rho\alpha} \right] + \frac{\gamma^\phi}{\alpha\rho} \partial_\phi \right\} \psi = 0. \quad (5.60)$$

Escolhemos o seguinte *anzats* como solução da equação de Dirac

$$\psi = \exp(-iEt + i\ell\phi) \begin{pmatrix} \sqrt{E} u_1(\rho) \\ \sqrt{E} u_2(\rho) \exp(i\phi) \end{pmatrix}. \quad (5.61)$$

Essa pode ser considerada como a solução de uma partícula livre num referencial em repouso[96]. Usamos a seguinte transformação de similaridade $S(\phi)$ que reduz as matrizes γ^ρ e γ^ϕ a γ^1 e γ^2 , respectivamente. Essa transformação tem a seguinte forma[97]

$$\begin{aligned} S(\phi) &= \cos \phi - \gamma^1 \gamma^2 \sin \phi, \\ &= \exp \left(-\frac{i}{2} \sigma^3 \right). \end{aligned} \quad (5.62)$$

com as seguintes propriedades

$$S^{-1}(\phi) \gamma^\rho S(\phi) = \gamma^1, \quad (5.63a)$$

$$S^{-1}(\phi) \gamma^\phi S(\phi) = \gamma^2. \quad (5.63b)$$

Dessa forma a equação de Dirac pode ser reescrita como sendo

$$i \left[\gamma^0 \partial_t + \gamma^1 \left(\partial_\rho - \frac{1-\alpha}{2\rho\alpha} \right) + \frac{\gamma^2}{\alpha\rho} \left(\partial_\phi + \frac{\sigma^3}{2} \right) \right] \psi = 0. \quad (5.64)$$

Aplicando o operador rotação $S(\phi)^6$, no *ansatz*(5.61), podemos escrever a equação na base fixa como um sistema de equações de segunda ordem

$$\begin{pmatrix} E & i \left[\left(\partial_\rho + \frac{1}{2\rho} \right) + \frac{l+1/2}{\alpha\rho} \right] \\ i \left[- \left(\partial_\rho + \frac{1}{2\rho} \right) + \frac{l+1/2}{\alpha\rho} \right] & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{E} u_1(\rho) \\ \sqrt{E} u_2(\rho) \end{pmatrix} = 0. \quad (5.65)$$

As equações de movimento podem ser escritas como o conjunto de equações de segunda ordem

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{l+1/2}{\alpha} - \frac{1}{2} \right)^2 + E^2 \right] u_1(\rho) = 0 \quad (5.66a)$$

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{l+1/2}{\alpha} + \frac{1}{2} \right)^2 + E^2 \right] u_2(\rho) = 0 \quad (5.66b)$$

A solução geral para a parte radial da equação de Dirac em espaços cônicos é obtida em termos das funções de Bessel⁷[44]

$$u_1(\rho) = J_{(\nu/\alpha)}(\kappa\rho), \quad (5.68a)$$

$$u_2(\rho) = J_{(\nu/\alpha+1)}(\kappa\rho), \quad (5.68b)$$

com $\nu = \frac{l+1/2}{\alpha} - \frac{1}{2}$ e $\kappa = E/\alpha$. Os parâmetros ν e κ dependem da natureza do cone em questão, isto é, dependem tanto do ângulo de desclinação quanto do número de setores removidos. Quando $\alpha = 1$, o que corresponde a fazer o número de setores

⁶Essa transformação relaciona o espinor num referencial cartesiano fixo a um referencial arbitrário em movimento.

⁷A função de Bessel do primeiro tipo pode ser representada pela série[98]

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2s}. \quad (5.67)$$

removidos $n_\Omega = 0$, obtemos resultado equivalente ao espaço plano.

5.7 Transformação de Holonomias em Múltiplos Cones

Vamos considerar uma estrutura de grafite formada não apenas por um único cone, mas por vários e determinar as transformações de holonomia para esses múltiplos cones. Por simplicidade, vamos considerar, inicialmente, a presença de apenas dois cones no sistema, localizados respectivamente nos pontos ρ_1 e ρ_2 . Primeiro, o transporte paralelo é feito numa caixa que contenha a partícula ao longo de um caminho C_1 ao redor do ponto ρ_1 . Neste caso a holonomia (Fator de Fase de Dirac) é dada por

$$\psi^{(1)}(\rho, \phi) = \exp \left[-\frac{i}{2}(\alpha_1 - 1)\sigma^3 \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi \right] \psi_0(\rho, \phi). \quad (5.69)$$

E em seguida é realizado o transporte ao redor do segundo cone ao longo do contorno C_2 , resultando

$$\begin{aligned} \psi^{(2)}(\rho, \phi) &= \exp \left[-\frac{i}{2}(\alpha_2 - 1)\sigma^3 \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi \right] \psi^1(\rho, \phi) \\ &= \exp \left[-\frac{i}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - 2)\sigma^3 \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi \right] \psi_0(\rho, \phi). \end{aligned} \quad (5.70)$$

Queremos agora, obter o resultado para a transformação de holonomia para múltiplos cones, localizados respectivamente nos pontos $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$. Podemos a partir da expressão acima, induzir que o transporte paralelo realizado nos n cones é dado por

$$\psi^{(1,2,\dots,n)}(\rho, \phi) = \exp \left[-\frac{i}{2} \sum_{j=1}^n (\alpha_j - 1)\sigma^3 \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi \right] \psi_0(\rho, \phi). \quad (5.71)$$

Cada ângulo de desclinação, α_j está relacionado com o número de setores retirados, n_Ω^j por meio da expressão

$$\alpha_j = 1 - \frac{n_\Omega^j}{6}. \quad (5.72)$$

Defeito	n_Ω	$n_\Omega^{\text{efetivo}}$	$U_n(C)$	ϕ^{total}
$\lambda_1 = \frac{\pi}{3}$	1	1	$\exp(-\frac{\pi\sigma^3}{3})$	$2\pi - \frac{\pi}{6}$
$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\pi}{3}$	1	2	$\exp(-\frac{\pi\sigma^3}{3})$	$2\pi - \frac{2\pi}{3}$
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{\pi}{3}$	1	3	$\exp(-\frac{\pi\sigma^3}{2})$	$2\pi - \pi$
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = \frac{\pi}{3}$	1	4	$\exp(-\frac{4\pi\sigma^3}{3})$	$2\pi - \frac{4\pi}{3}$
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_5 = \frac{\pi}{3}$	1	5	$\exp(-\frac{5\pi\sigma^3}{6})$	$2\pi - \frac{5\pi}{3}$
$\lambda_1 = \frac{2\pi}{3}, \lambda_2 = \frac{2\pi}{3}$	1	4	$\exp(-\frac{2\pi\sigma^3}{3})$	$2\pi - \frac{4\pi}{3}$

Tabela 5.1: A tabela mostra vários valores para as transformações de holonomia quando retiramos um setor de $\pi/3$.

Podemos então escrever a expressão para a transformação de holonomia para n cones como sendo

$$U_n(C) = \exp\left(\frac{i}{2} \sum_{j=1}^n \frac{n_\Omega}{6} \sigma^3 \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi'\right) \quad (5.73)$$

Considerando o intervalo de integração, $0 < \phi < 2\pi$, podemos escrever

$$U_n(C) = \cos\left(\sum_{j=1}^n \frac{n_\Omega \pi}{6}\right) - i\sigma^3 \sin\left(\sum_{j=1}^n \frac{n_\Omega \pi}{6}\right). \quad (5.74)$$

Observando a expressão (5.74), notamos que os n cones podem ser substituídos por um defeito cônico efetivo, dado por

$$n_\Omega^{\text{efetivo}} = \sum_{j=1}^n n_\Omega^i. \quad (5.75)$$

O valor máximo para o número de setores retirados é $n_\Omega^{\text{efetivo}} = 5$, que corresponde a condição topológica para existência de nanocones de grafite.

5.8 Conclusões

Utilizamos uma abordagem puramente geométrica para descrever para descrever as propriedades de um cone de grafite. A geometria do cone induz uma

fase topológica associada ao ângulo de déficit. Esse ângulo de déficit é responsável pelas propriedades de formação, por modificações na estrutura eletrônica, bem como pelo surgimento do efeito Aharonov-Bohm. Utilizamos a equivalência entre a aproximação tight-binding e a equação de Dirac em espaços curvos e determinamos as funções de onda para o elétron no cone de grafite. Também discutimos o transporte paralelo ao redor de vários cones.

Conclusões

Nesta tese, aplicamos as transformações de holonomia, com o propósito de caracterizar as propriedades geométricas de alguns sistemas físicos relevantes.

No segundo capítulo, discutimos a geometria de dois tipos de buracos negros, o primeiro foi um buraco negro de (2+1) dimensões, conhecido como buraco negro BTZ e o segundo foi um buraco negro cilíndrico de (3+1) dimensões, conhecido como corda negra. Analisamos separadamente os casos nos quais esses buracos negros possuem ou não rotação. Para cada um desses casos, estudamos o transporte paralelo de vetores e spinores ao longo de caminhos fechados, em particular, estudamos duas órbitas, uma com tempo constante e outra com ângulo azimutal constante. Verificamos que em ambos os casos, a holonomia é não trivial, isto é, a posição final de um vetor depois de transportado paralelamente ao longo de um desses caminhos, apresenta um ângulo de déficit em relação a posição original do vetor. A existência desse ângulo de déficit pode ser interpretada como sendo o análogo gravitacional do efeito Aharonov-Bohm. Entretanto, no caso das órbitas com tempo constante, existe uma região na qual a holonomia é trivial. Essa região é chamada de banda de invariância de holonomia. Em seguida, estendemos nossas análises para a corda negra, que pode ser pensada como a translação de um buraco negro BTZ ao longo do eixo-z. Os resultados da corda negra são equivalentes ao do buraco negro BTZ, a menos do acréscimo de uma dimensão nas matrizes que representam as transformações de holonomia.

No segundo capítulo continuamos a aplicação de transformações de holonomia para buracos negros. Agora discutimos o problema da extensão de um buraco negro de Schwarzschild como uma corda negra embebida num espaço-tempo pentadimensional. Consideramos separadamente algumas órbitas particulares, tais como órbitas com tempo, ângulo azimutal, ângulo θ e a coordenada radial constantes. Mostramos

para essas órbitas a existência de bandas de invariância de holonomia. Também mostramos, que nos limites adequados, os nossos resultados se reduzem aos mesmos obtidos para a métrica de Schwarzschild.

No quarto capítulo, continuamos discutindo as transformações de holonomia, só que agora, aplicada a sistemas de matéria condensada. Utilizamos uma abordagem contínua para descrever cones de grafite. Nessa abordagem as estruturas cônicas formadas por folhas de grafeno são descritas por meio de uma métrica. Esta métrica contém as informações sobre as propriedades do meio elástico. Estudamos as transformações de holonomia tanto no caso do transporte paralelo de vetores e spinores e mostramos a relação entre a fase topológica e o ângulo de déficit. Determinamos a estrutura eletrônica dos cones de grafite, a partir da equivalência entre a aproximação “tight-binding” e a equação de Dirac em espaços curvos.

E por fim, no quinto capítulo, discutimos a dinâmica de fônons propagando-se num campo de velocidades de um vórtice. O espaço no qual o fônon se propaga ao longo do vórtice é descrito via uma métrica. Este mapeamento entre sistemas cosmológicos e gravitacionais é conhecido como sistemas análogos. Neste caso, também determinamos as transformações de holonomia. A informação trazida pelo cálculo de holonomias possibilitou a investigação do efeito Aharonov-Bohm. Mostramos que os efeitos associados a curvatura estão relacionados com a holonomia rotacional e os efeitos associados a torção estão relacionados com a holonomia translacional.

Apêndice A

Noções Elementares de Geometria Diferencial

O intuito principal deste apêndice é o de introduzir de maneira sucinta, noções de geometria diferencial. Essas noções são muito importantes para a compreensão do texto da tese. A referencia principal que seguiremos é o livro de Jonh Baez e Javier P. Muniain, *Gauge Fields, knots and Gravity* [17].

A.1 Variedades Diferenciáveis

Na física contemporânea é imperativa a necessidade de se discutir espaços mais gerais e até mesmo, mais abstratos de que o \mathbb{R}^n . O estudo desses espaços leva ao conceito de variedades diferenciais. Intuitivamente, pode-se pensar uma variedade como um espaço, que pelo menos localmente se parece com o \mathbb{R}^n , mas não necessariamente, de forma global. Um bom exemplo disto, é o próprio planeta Terra, que embora seja esférico, localmente podemos vê-lo como um plano.

De modo mais formal, uma variedade n -dimensional é um espaço topológico

¹ \mathcal{M} , equipado com cartas $\phi : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$, sendo U_α conjuntos abertos que cobrem a variedade, tal que a função transição, $\phi_\alpha \cdot \phi_\beta^{-1}$, é suave onde for definida. Esta definição se refere ao fato de que o aberto U_α se parece localmente com o \mathbb{R}^n . Vale lembrar que uma carta é uma função contínua, $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, com a inversa também contínua.

Para fugir um pouco desta definição abstrata, vamos voltar ao exemplo da esfera. Considere a carta

$$\phi(\varphi, \theta) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi), \quad (\text{A.1})$$

a superfície representada por esta carta é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. A carta não pode, necessariamente, representar toda a esfera. Embora seja localmente euclidiana(plana). Observando as coordenadas da carta, notamos que no pólo norte ($\varphi = 0, z = 1$) as coordenadas torna-se singulares. O ponto $\varphi = 0$ implica $x = y = 0$, independentemente do valor de θ . Assim existem infinitas maneiras de representar o pólo norte.

A.2 Campos Vetoriais

Um campo vetorial sobre uma variedade pode ser visualizado como um “campo de flechas”, como ilustrado na figura[abaixo]. Precisamos de uma definição algébrica de campo vetorial para que possamos realizar operações neste objeto. Uma maneira de se fazer isto é calculando a derivada direcional de uma função ao longo de um vetor. Seja f uma função, v um campo vetorial em \mathbb{R}^n e (x^1, \dots, x^n) as coordenadas do \mathbb{R}^n . A derivada direcional de f ao longo de v é dada por

$$vf = \sum_{\mu=1}^n v^\mu \partial_\mu f, \quad (\text{A.2})$$

¹Um espaço topológico é um conjunto X junto com uma família de subconjuntos de X , chamados de conjuntos abertos. E satisfazem as seguintes condições(Hausdorff):

1. o conjunto vazio e X são abertos;
2. se $U, V \subseteq X$ são abertos então $U \cup V$ é um aberto;
3. se U_α são abertos então $\bigcup U_\alpha$ é um aberto.

$\{v^1, \dots, v^n\}$, são as componentes do vetor.

Um campo vetorial v sobre \mathcal{M} é definido como sendo uma função $C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$, satisfazendo as seguintes propriedades

$$v(f + g) = v(f) + v(g), \quad (\text{A.3a})$$

$$v(\alpha f) = \alpha v(f), \quad (\text{A.3b})$$

$$v(fg) = v(f)g + fv(g), \quad (\text{A.3c})$$

$f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Essas são as propriedades usuais dos campos vetoriais.

A expressão (A.2) nos permite escrever o vetor como sendo

$$v = v^\mu \partial_\mu, \quad (\text{A.4})$$

agora, estamos usando a notação de Einstein para suprimir o símbolo do somatório, sempre que existir índices repetidos. Além disso, nota-se que v é escrito como uma combinação linear da quantidade $\{\partial_\mu\}$, com isso, $\{\partial_\mu\}$, pode ser entendido como uma base² para $Vect(\mathbb{R}^n)$. Que é o conjunto de todos os campos vetoriais sobre a variedade.

A.2.1 Vetores Tangentes

A principal diferença entre espaços planos e curvos consiste na natureza dos vetores. No espaço plano, tem-se a idéia de vetores como setas ligando dois pontos. Entretanto esta idéia falha quando lidamos com espaços curvos. Daí, faz-se necessário a introdução de novos conceitos. Os quais serão introduzidos ao longo do texto.

A fim de se apresentar uma definição mais precisa de um vetor tangente no ponto $p \in \mathcal{M}$, toma-se a derivada direcional $v(f)$ no ponto p . Define-se

$$v_p : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.5})$$

por

$$v_p(f) = v(f)(p), \quad (\text{A.6})$$

²Esta base muitas vezes é chamada de base coordenada. Isto é devido ao fato de ser derivada de um sistema de coordenadas

v_p possui as propriedades padrões de um campo vetorial. Dadas por

$$v_p(f + g) = v_p(f) + v_p(g), \quad (\text{A.7a})$$

$$v_p(\alpha f) = \alpha v_p(f), \quad (\text{A.7b})$$

$$v_p(fg) = v_p(f)g + f v_p(g). \quad (\text{A.7c})$$

Define-se um vetor tangente no ponto $p \in \mathcal{M}$ como sendo uma função $C^\infty \rightarrow \mathcal{M}$, satisfazendo as propriedades (A.7). O conjunto de todos os vetores tangentes ao ponto $p \in \mathcal{M}$ é chamado de espaço tangente em p e é denotado por $T_p\mathcal{M}$.

A.3 Formas Diferenciáveis

Antes de definirmos o que são 1-formas, vamos generalizar o conceito de gradiente para funções numa variedade arbitária. Vamos introduzir um operador df que possua as mesmas propriedades do gradiente ∇f . O gradiente contém a derivada direcional de uma função $f \in \mathbb{R}^n$ ao longo de um vetor v . E é dada por $vf = \nabla f \cdot v$. O gradiente de uma função sobre \mathbb{R}^n é um campo vetorial. Da mesma forma esperamos que df também o seja. Porém, existe um problema, a forma de se determinar o produto interno depende da variedade. O produto interno depende da métrica associada a variedade, este por sua vez, depende das coordenadas escolhidas. Pa continuarmos livres das coordenadas, vamos pensar o operador df , não mais como um campo vetorial, mas sim, com uma entidade chamada de 1-forma.

De forma mais rigorosa, pode-se definir definir 1-formas sobre uma variedade \mathcal{M} como sendo um mapa $Vect(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ que é linear sobre $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. As 1-formas agem sobre veores de acordo com as seguintes propriedades fundamentais

$$\omega(v + w) = \omega(v) + \omega(w). \quad (\text{A.8a})$$

$$\omega(gv) = g\omega(v). \quad (\text{A.8b})$$

O espaço de todas as 1-formas sobre a variedade \mathcal{M} é denotado por: $\Omega^1(\mathcal{M})$.

Seja f uma função suave sobre a variedade \mathcal{M} , existe uma 1-forma df definida por: $df(v) = vf$. Esta 1-forma é chamada de diferencial de f ou derivada exterior de f . De maneira mais precisa diz-se que d é uma mapa linear: $d : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^1(\mathcal{M})$, que envia cada função f a seu diferencial df . Este operador possui as seguintes

propriedades

$$d(f + g) = df + dg, \quad (\text{A.9a})$$

$$d(\alpha f) = \alpha df, \quad (\text{A.9b})$$

$$(f + g)dh = f dh + g dh, \quad (\text{A.9c})$$

$$d(fg) = f dg + g df. \quad (\text{A.9d})$$

$\forall f, g, h \in C^\infty(\mathcal{M})$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$. A definição de diferenciais como funcionais lineares é bem mais rigorosa do que a noção de infinitesimais, já que é faz uso de toda maquinaria da álgebra linear.

Seja f uma função suave sobre o \mathbb{R}^n e $\{x^1, \dots, x^n\}$ funções coordenadas da vizinhança U de um dado ponto. O diferencial df é dado localmente pela expressão

$$df = \partial_\mu f dx^\mu. \quad (\text{A.10})$$

Esta expressão nos mostra que $\{dx^\mu\}$ constitui uma base para as 1-formas sobre o \mathbb{R}^n . Se aplicarmos o diferencial das funções coordenadas x^μ a base de um campo vetorial, obtemos

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \partial_\nu x^\mu = \delta_\nu^\mu. \quad (\text{A.11})$$

Suponha que temos uma 1-forma ω sobre o \mathbb{R}^n . Pode-se definir funções do tipo $\omega_\mu = \omega(\partial_\mu)$, de forma que seja possível escrever uma 1-forma arbitrária como expansão da base $\{dx^\mu\}$, como sendo

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu. \quad (\text{A.12})$$

Uma 1-forma também é chamada de covetor e os coeficientes $\{\omega_\mu\}$, são chamados de componentes covariantes do covetor. Se existir uma função f , tal que $\omega = df$, então a 1-forma ω é chamada de exata.

Apêndice A

Equação de Dirac

Na mecânica quântica não relativística a interação do momento magnético do *spin* com o campo magnético é descrita, adicionando-se um termo extra no hamiltoniano

$$\mathcal{H} = -\frac{e\hbar}{2mc}\sigma \cdot \mathbf{B}. \quad (\text{A.1})$$

Como proposto por W. Pauli. Este procedimento pode ser considerado um pouco artificial, já que leva em conta, apenas interações eletromagnéticas geradas por uma transformação de *gauge* da forma

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu. \quad (\text{A.2})$$

P. A. M. Dirac foi bem sucedido na construção de uma teoria relativística que descreve as propriedades de elétrons e outras partículas de *spin* 1/2. Na elaboração da teoria relativística, a primeira exigência de Dirac foi que a equação de movimento deve levar a uma equação da continuidade com probabilidade positiva-definida.

Sem perda de generalidade, podemos escrever

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi_\nu}{\partial t} + \sum_{\mu k} \alpha_{\mu k}^{(k)} \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x_k} + \frac{imc}{\hbar} \sum_{\mu} \beta_{\nu\mu} \psi_\mu = 0, \quad (\text{A.3})$$

sendo m , a massa da partícula, c , a velocidade da luz e $\alpha_{\mu k}^{(k)}$ e $\beta_{\nu\mu}$ são coeficientes complexos. A função de onda ψ é uma matriz coluna de n componentes. Os coeficientes são determinados a partir das condições abaixo:

- as equações devem levar a uma equação de continuidade para a densidade de carga elétrica, ρ
- cada uma das funções ψ , devem satisfazer separadamente a equação de Klein-Gordon

A fim de simplificar a notação, definiremos novos coeficientes $\alpha_k = \alpha_{\mu k}^{(k)}$ e $\beta = \beta_{\nu\mu}$. Verificando-se estas duas condições, Dirac mostrou que as matrizes α_k e β são matrizes 4×4 e obedecem a seguinte álgebra:

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}, \quad (\text{A.4a})$$

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0, \quad (\text{A.4b})$$

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1. \quad (\text{A.4c})$$

Uma possível representação para estas matrizes é:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3; \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

σ_i , são as matrizes de *spin* de Pauli.

o *spin* do elétron pode ser incorporado rescrevendo a energia relativística: $(E/c)^2 - p^2 = (mc)^2$, na forma

$$\left(\frac{E}{c} - \sigma \cdot p \right) \left(\frac{E}{c} + \sigma \cdot p \right) = (mc)^2. \quad (\text{A.6})$$

Os operadores energia e momento são escritos como sendo

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (\text{A.7a})$$

$$p = i\hbar \nabla, \quad (\text{A.7b})$$

isto nos permite escrever que

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar \sigma \cdot \nabla \right) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - i\hbar \sigma \cdot \nabla \right) \phi = (mc)^2 \phi. \quad (\text{A.8})$$

Agora, vamos introduzir duas funções de onda de duas-componentes, $\phi^{(R)}$ e $\phi^{(L)}$ que descrevem respectivamente *spins* paralelos à direcção do momento e *spins* antiparalelos à direcção do momento, definidos por

$$\phi^{(R)} = \frac{1}{mc} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - i\hbar \sigma \cdot \nabla \right) \phi, \quad (\text{A.9a})$$

$$\phi^{(L)} = \phi. \quad (\text{A.9b})$$

A equação de segunda ordem pode ser decomposta como duas equações equivalentes de primeira ordem

$$\left[i\hbar \sigma \cdot \nabla - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right] \phi^{(L)} = -mc\phi^{(R)}, \quad (\text{A.10a})$$

$$\left[-i\hbar \sigma \cdot \nabla - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right] \phi^{(R)} = -mc\phi^{(L)}. \quad (\text{A.10b})$$

Somando e subtraindo as equações acima e introduzindo uma função de onda de quatro-componentes, ψ , como

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{(R)} + \phi^{(L)} \\ \phi^{(R)} - \phi^{(L)} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

obtemos

$$\begin{pmatrix} -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} & -i\hbar \sigma \cdot \nabla \\ i\hbar \sigma \cdot \nabla & -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = -mc \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

A equação acima, pode ser rescrita numa forma mais concisa

$$\left(\gamma \cdot \nabla + \gamma_4 \frac{\partial}{\partial(ix_0)} \right) \psi + \frac{mc}{\hbar} \psi = 0 \quad (\text{A.13})$$

ou

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi = 0 \quad (\text{A.14})$$

A equação (A.14) é a equação relativística de Dirac

Apêndice B

Teoria de Defeitos em Sólidos

B.1 Teoria Geométrica de Defeitos

A descrição geométrica para uma distribuição contínua de defeitos em sólidos tem mostrado grande eficiência e versatilidade para o estudo de tais sistemas. Desde o início dos anos 50, a geometria diferencial tem sido usada em física da matéria condensada para descrever uma distribuição contínua de defeitos em sólidos. Katanaev & Volovich [84] propuseram uma ação tridimensional para descrever defeitos em sólidos e mostraram que a descrição de uma distribuição arbitrária de deslocamentos e desclinações advém de forma natural de um princípio de ação. Eles mostraram também que a geometria tridimensional do meio é caracterizada pela torção e a curvatura não-triviais, as quais são identificadas com as densidades superficiais dos vetores de Burgers e de Frank. A principal vantagem da abordagem geométrica de defeitos em sólidos é que ela permite a utilização de uma maquinaria matemática poderosa - a geometria diferencial - que torna os cálculos envolvidos mais simples e claros. Dessa forma, podemos dizer que, em contraste à teoria elástica ordinária, essa abordagem fornece uma linguagem mais adequada para o tratamento de uma distribuição de defeitos em sólidos.

As deformações elásticas de um meio podem ser descritas em termos da geometria riemanniana [17, 70]. A deformação do meio é descrita pelo difeomorfismo $x^i \rightarrow y^i(x)$ na variedade \mathbb{R}^3 . Este difeomorfismo transforma a métrica euclidiana

¹Um difeomorfismo é um mapeamento injetivo de classe C^∞ (infinitamente diferenciáveis) entre duas variedades sendo sua inversa também de classe C^∞ .

inicial na métrica

$$\begin{aligned}
 g_{ij} &= \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \delta_{kl} \\
 &\cong \delta_{ij} - \partial_i u_j - \partial_j u_i \\
 &\cong \delta_{ij} - 2\epsilon_{ij},
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

a qual é escrita em um sistema de referência cartesiano (observador externo).

Na geometria riemanniana, a métrica define univocamente a conexão métrica de torção zero (símbolos de Christoffel).

$$\tilde{\Gamma}_{ijk}(x) = \tilde{\Gamma}_{ij}^l g_{lk} \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) \tag{B.2}$$

e o correspondente tensor de curvatura

$$\tilde{R}_{ijk}^l(x) = \partial_i \tilde{\Gamma}_{jk}^l + \tilde{\Gamma}_{im}^l \tilde{\Gamma}_{jk}^m - (i \leftrightarrow j), \tag{B.3}$$

onde o símbolo $\tilde{}$ se refere a quantidades na geometria riemanniana, na qual o tensor torção é identicamente nulo.

B.1.1 Equações de Equilíbrio

Katanaev & Volovich propuseram um lagrangeano geométrico que leva a equações de equilíbrio para um meio com deslocamentos e desclinações. A forma mais geral para o lagrangeano contém oito parâmetros, quadráticos na curvatura e na torção. Em três dimensões existem três invariantes independentes que são quadráticos na torção e três na curvatura. Podemos acrescentar ao lagrangeano o escalar de curvatura e a constante cosmológica Λ . Dessa forma obtemos o lagrangeano de oito parâmetros mais geral possível.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{e} L &= \kappa R - \frac{1}{4} T_{ijk} (\beta_1 T^{ijk} + \beta_2 T^{kij} + \beta_3 T^j \delta^{ik}) \\
 &\quad - \frac{1}{4} R_{ijkl} (\gamma_1 R^{ijkl} + \gamma_2 R^{klij} + \gamma_3 R^{ik} \delta^{jl}) + \Lambda,
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

onde $e = \det e_m^i$ (os e_m^i são chamados de tríades), $T_j = T_{ij}^i$ é o traço do tensor

torção, $R_{ik} = R_{ijk}^j$, é o tensor de Ricci, e $R = R_i^i$, é o escalar de curvatura. O conjunto $\{\kappa, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \Lambda\}$ são chamados de parâmetros de acoplamento e são determinados de acordo com o sistema físico em questão.

O lagrangeano de Einstein-Hilbert, $\tilde{R}(e)$, pode ser construído a partir das tríades, assumindo apenas que a torção é nula. Dessa forma obtém-se as equações de equilíbrio. O lagrangeano de Einstein-Hilbert é dado por

$$\begin{aligned} \tilde{R}(e) = & R(e, \omega) + \frac{1}{4}T_{ijk}T^{ijk} - \frac{1}{2}T_{ijk}T^{kij} \\ & - T_i T^i - \frac{2}{e}\partial_m(eT^m). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Existe uma questão de fundamental importância: qual a escolha de parâmetros descreve um meio real com defeitos? Katanaev & Volovich responderam essa questão em seu artigo [84]. Eles assumiram três condições físicas relevantes sobre as soluções das equações de equilíbrio:

- Existem soluções que descrevem o meio apenas com deslocamentos, tal que, $R_{mn}^{ij} = 0, T_{mn}^i \neq 0$;
- Existem soluções descrevendo o meio somente com desclinações, tal que, $R_{mn}^{ij} \neq 0, T_{mn}^i = 0$;
- Existem soluções descrevendo um meio sem deslocamentos e desclinações, de forma que, $R_{mn}^{ij} = 0, T_{mn}^i = 0$.

Estas condições reduzem o número de parâmetros a dois². K. & V. encontraram o seguinte lagrangeano

$$\frac{1}{e}L = \kappa\tilde{R} - 2\gamma R_{ij}^A R^{Aij}, \quad (\text{B.6})$$

que é a soma do lagrangeano de Einstein-Hilbert para as tríades e o termo quadrático da curvatura, que é obtido da decomposição do tensor de Ricci em componentes irreduzíveis,

$$R_{ij} = R_{ij}^S + R_{ij}^A + \frac{1}{3}R\delta_{ij}, \quad (\text{B.7})$$

²As justificativas dessa redução podem ser encontradas em detalhes no artigo de K&V [?].

com $R_{ij}^S = R_{ji}^S$, $R_i^S = 0$, $R_{ij}^A = -R_{ji}^A$. O caso, $R_{ij}^A = 0$, indica que a torção é nula. Além disso as constantes de acoplamento são dadas por

$$\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma, \quad \gamma_3 = 0 \quad (\text{B.8})$$

$$\beta_1 = -\kappa, \quad \beta_2 = 2\kappa, \quad \beta_3 = 4\kappa. \quad (\text{B.9})$$

B.1.2 Desclinações e Deslocações Laterais

Tendo em mãos o lagrangeano de dois parâmetros, calcularemos as equações de equilíbrio a partir das variações nos campos das tríades e nas conexões de $SO(3)$

$$\frac{1}{e} \frac{\delta L}{\delta e_m^i} = \kappa \left(\tilde{R}e_i^m - 2\tilde{R}_i^m \right) + \gamma \left(-R_{jk}^A R^{Aj k} e_i^m + R_{mk}^S R^{Aik} + \frac{1}{6} R R_i^{Am} \right) = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{1}{e} \frac{\delta L}{\delta \omega_m^{ij}} = 2\gamma \nabla_n \left(R_i^{An} e_j^m - R_i^{Am} e_j^n - R_j^{An} e_i^m + R_j^{Am} e_i^n \right) = 0. \quad (\text{B.11})$$

Se desclinações estiverem ausentes em um certo meio, então o tensor de curvatura é nulo, isto é, $R_{mnij} = 0$, as equações (B.11) são satisfeitas e as equações (B.10) se reduzem à equação de Einstein. Na equação de Einstein em três dimensões, a ausência de fontes leva à curvatura nula, $\tilde{R}_{mnij} = 0$. Neste caso sempre existe o grupo de rotação local $SO(3)$, o sistema de coordenadas onde a conexão- $SO(3)$ é nula, $\omega_{ij} = 0$ e a tríade é igual ao símbolo de Kronecker, $e_m^i = \delta_m^i$. Dessa forma não apenas a curvatura é nula mas a torção também o é. Concluimos com isso que na ausência de desclinações e fontes de deslocações não há deslocações como consequência da equação (B.10).

Para obter soluções apenas com deslocações e/ou desclinações devemos adicionar as fontes correspondentes na equação de equilíbrio (B.10).

$$L_j = -\kappa \int d^3x g_{mn} (T_{desl}^{mn} + T_{desc}^{mn}), \quad (\text{B.12})$$

onde T_{desl}^{mn} e T_{desc}^{mn} são as fontes de deslocações e desclinações³. Assumimos que o meio em discussão possui simetria translacional ao longo do eixo- z e além disso que

³Na teoria da relatividade geral essas fontes são chamadas de tensor energia-momento.

as fontes de deslocação e desclinação têm a forma:

$$T_{desloc}^{zz} = \sum_{n=1}^M m_n \delta^{(2)}(\vec{r} - \vec{r}_n), \quad (\text{B.13})$$

$$T_{desc}^{z\alpha} = T_{desc}^{\alpha\beta} = 0, \quad (\text{B.14})$$

onde m_n linhas singulares interceptam o plano $x^\alpha = (x, y) = (x^1, x^2)$, com $\alpha = 1, 2$, nos pontos $\vec{r}_n = (x_n, y_n)$. Esse caso corresponde a solução estacionária de m partículas em gravitação tridimensional. O m_n coincide com o ângulo de desclinação⁴ e tem o seguinte intervalo, $-2\pi < m_n < \infty$.

No caso de simetria translacional sempre podemos escolher um sistema de coordenadas onde a métrica é dada por

$$dS^2 = N^2 dz^2 + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (\text{B.15})$$

onde $g_{\alpha\beta}$ é uma métrica bidimensional correspondente ao plano perpendicular ao eixo- z . O tensor de curvatura correspondente possui duas componentes não nulas

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}^\delta &= R_{\alpha\beta\gamma}^\delta, \\ \tilde{R}_{\alpha z\gamma}^z &= \frac{1}{N} \nabla_\alpha \nabla_\beta N, \end{aligned}$$

sendo ∇ a derivada covariante. Dessa forma a equação de Einstein

$$c \left(\tilde{R}_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} \tilde{R} \right) = T_{mn},$$

se reduz a quatro equações

$$\sqrt{g} (\nabla_\alpha \nabla_\beta N - g_{\alpha\beta} \nabla_\gamma \nabla_\gamma N) = 0 \quad (\text{B.16})$$

$$-\frac{1}{2} \sqrt{g} N^3 R = \sum_n m_n \delta^{(2)}(\vec{r} - \vec{r}_n), \quad (\text{B.17})$$

onde R é o escalar de curvatura bidimensional e $g = \det g_{\alpha\beta}$. Para condições de contorno constantes, a equação (B.16) possui apenas uma solução, $N = cte$. Podemos

⁴No caso da gravitação, $M_n > 0$, é a massa de uma partícula pontual.

escolher essa constante como $N = 1$, sem perda de generalidade.

A métrica definida pela equação (B.15) não está completamente determinada, para determiná-la podemos escolher coordenadas no plano e fixar um *gauge* conforme

$$g_{\alpha\beta} = \exp(2\varphi)\delta_{\alpha\beta},$$

onde 2φ é o fator conforme. Com isso a equação (B.17) fica reduzida à equação de Poisson

$$\nabla^2\varphi = -\sum_n m_n\delta^{(2)}(\vec{r} - \vec{r}_n), \quad (\text{B.18})$$

A equação de Poisson bidimensional tem como solução geral

$$\varphi = \sum_n \left(\frac{m_n}{2\pi}\right) \ln|\vec{r} - \vec{r}_n| + \frac{1}{2} \ln C. \quad (\text{B.19})$$

Assim a métrica é dada por

$$ds^2 = dz^2 + dl^2 \quad (\text{B.20})$$

$$= dz^2 + c \prod_n |\vec{r} - \vec{r}_n|^{m_n/\pi} (dx^2 + dy^2). \quad (\text{B.21})$$

Esse elemento de linha define uma tríade na qual seu contorno define a torção do meio, $R_{mnij} = 0$.

No caso de uma desclinação (ver figura B.1), assumimos que está localizada ao longo do eixo- z e m escolhido de forma a satisfazer a inequação $\alpha \equiv 1 + m/2\pi > 0$. Reescrevemos o elemento de linha (B.21) em coordenadas polares

$$dl^2 = Cr^{m/\pi}(dr^2 + r^2d\theta^2), \quad (\text{B.22})$$

sendo $0 \leq r < \infty$ e $0 \leq \theta < 2\pi$. Fazendo a mudança de variáveis (reescalando as coordenadas)

$$\begin{aligned} r' &= \frac{1}{\alpha}r^\alpha, \\ \theta' &= \alpha\theta, \end{aligned}$$

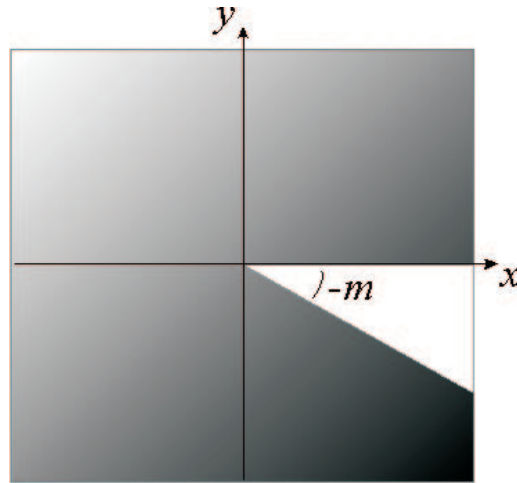


Figura B.1: Uma desclinação de um ângulo m . Se $-2\pi < m < 0$ um setordo meio é retirado e se $0 < m < \infty$ um setor é adicionado ao meio.

obtemos

$$dr' = r^{\alpha-1} dr, \quad (\text{B.23})$$

$$d\theta' = \alpha d\theta, \quad (\text{B.24})$$

substituindo (B.23) e (B.24) em (B.22), temos

$$dl^2 = dr'^2 + r'^2 d\theta'^2, \quad (\text{B.25})$$

o domínio agora é dado por $0 \leq r' < \infty$ e $0 \leq \theta' < 2\pi\alpha$.

A criação do defeito está associada à transição $r \rightarrow r'$ e $\theta \rightarrow \theta'$. A função transição, a qual atua de forma importante na conexão do sistema de coordenadas inicial e o sistema no qual o elemento de linha é euclidiano, pode ser escrita em termos de coordenadas complexas

$$u = x + iy = \rho \exp i\theta,$$

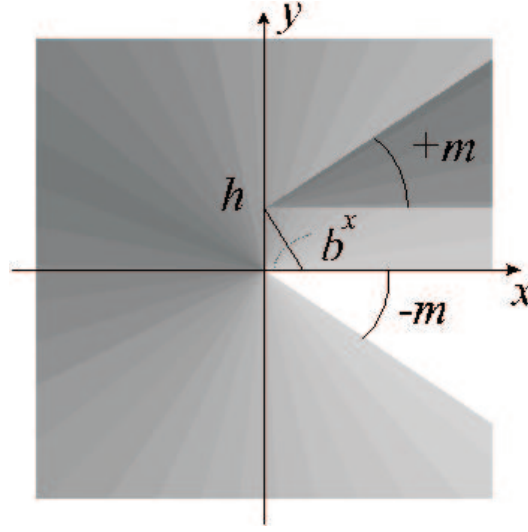


Figura B.2: Uma deslocação lateral corresponde a um dipolo,consistindo de duas desclinações de um ângulos m e $-m$.

de forma que

$$\begin{aligned}
 dl^2 &= (dx^2 + dy^2) \prod_n |\vec{r} - \vec{r}_n|^{(m/\pi)} \\
 &= dudu^* \prod_n [(u - u_n)(u^* - u_n^*)]^{(m/2\pi)} \quad (B.26)
 \end{aligned}$$

A deslocação lateral (ver figura B.2) corresponde a duas desclinações de ângulos m e $-m$, que estão localizadas nos pontos $u_1 = 0$ e $u_2 = h \exp i\pi/2$.

$$\begin{aligned}
 \prod_{n=1}^2 [(u - u_n)(u^* - u_n^*)]^{(m_n/2\pi)} &= [(u - u_1)(u^* - u_1^*)]^{(m_1/2\pi)} [(u - u_2)(u^* - u_2^*)]^{(m_2/2\pi)} \\
 &= (uu^*)^{m/2\pi} [(u - h \exp(i\pi/2))(u^* - h \exp(-i\pi/2))]^{-m/2\pi},
 \end{aligned}$$

escrevendo $\exp(i\pi/2) = i$ e $\exp(-i\pi/2) = -i$, obtemos

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^2 [(u - u_n)(u^* - u_n^*)]^{(m_n/2\pi)} &= \rho^{m/\pi} [\rho^2 + i\rho h (e^{i\phi} - e^{-i\phi}) + h^2]^{-m/\pi} \\ &= \rho^{m/\pi} [\rho^2 + \rho h \operatorname{sen}\phi + h^2]^{-m/\pi} \\ &= \rho^{m/\pi} \left\{ \rho^{-m/\pi} \left[1 + \frac{h}{\rho} \operatorname{sen}\phi + \left(\frac{h}{\rho}\right)^2 \right] \right\}^{-m/\pi} \end{aligned}$$

a grandes distâncias do defeito, $h/\rho \ll 1$, podemos expandir a expressão acima como

$$\prod_n [(u - u_n)(u^* - u_n^*)]^{(m/2\pi)} = 1 - \frac{b \operatorname{sen}\phi}{\pi \rho} + \mathcal{O}\left(\frac{h}{\rho}\right)^2, \quad (\text{B.27})$$

com $b \equiv hm$. Substituindo (B.27) em (B.26) e introduzindo as coordenadas polares, $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \operatorname{sen}\phi$, obtemos

$$dl^2 = \left(1 - \frac{b \operatorname{sen}\phi}{\pi \rho}\right) (d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2).$$

Sendo assim o elemento de linha da deslocação lateral a grandes distâncias é dado por

$$ds^2 = dz^2 + \left(1 - \frac{b \operatorname{sen}\phi}{\pi \rho}\right) (d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2). \quad (\text{B.28})$$

Dessa forma descrevemos deslocações por meio da geometria de Riemann-Cartan. Mostramos que dois defeitos, um associado a cristais líquidos e outro a sólidos, desclinação e deslocação lateral, respectivamente, podem ser descritos através de métricas, de acordo com os elementos de linha dados pelas expressões (B.25) e (B.28). Esse formalismo nos permite estudar a interação de partículas carregadas com defeitos. Interpretamos o potencial de interação, chamado de potencial de deformação, como sendo a auto-energia de uma partícula no espaço deformado pelo defeito.

F. Moraes e colaboradores estudaram diversos efeitos físicos associados a defeitos topológicos, aplicando o método geométrico desenvolvido por Katanaev e Volovich [84] em particular a deslocações e desclinações. Eles estudaram o problema da localização de elétron e buracos por um núcleo de desclinação [99], o espal-

hamento [100] e a localização [101] de cargas em monocamadas de grafite contendo desclinações. Bem como, o problema da autoforça de fontes pontuais e lineares na presença de deslocamentos laterais [102] e parafuso [103]. Eles também estudaram o problema do espalhamento quântico por um fluxo magnético na presença de uma deslocação parafuso. E o problema dos níveis de Landau na presença de defeitos topológicos [104, 105, 106]. Outro efeito estudado, foi o efeito Casimir, tanto na presença de deslocamentos [107] quanto na presença de desclinações [108].

Referências Bibliográficas

- [1] R.L. Mills. Gauge fields. *American Journal of Physics*, 57(6):493, 1989.
- [2] Chan Hong-Mo. *Some Elementary Gauge Theory Concepts*, volume 47 of *Lecture Notes in Physics*. World Scientific, 1993.
- [3] L.K. Norris e W.R. Davis. Gauge formulation of gravitation and their fundamental relationship to Riemannian holonomy structure. *Lettere al Nuovo Cimento*, 27(4):122, 1980.
- [4] N.P. Konopleva e V.N. Popov. *Gauge Fields*. Harwood Academic, Amsterdam, 1 edition, 1981.
- [5] S. Mandelstam. Quantum electrodynamics without potentials. *Annals of Physics*, 19:1, 1962.
- [6] Tai Tsun Wue e Chen Ning Yang. Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields. *Physical Review D*, 12(12):3845, 1975.
- [7] S. Mandelstam. Feynman rules for electromagnetic and Yang-Mills fields from the gauge-independent field-theoretic formalism. *Physical Review*, 175:1580, 1968.
- [8] Gu Chao hao. On classical Yang-Mills fields. *Physics Reports*, 80(4):251, 1981.
- [9] C.N. Yang e R.L. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Physical Review*, 96(1), 1954.
- [10] Ryoyo Utiyama. Invariant theoretical interpretation of interaction. *Physical Review*, 101(5):1597, 1956.

-
- [11] Assa Auerbach. *Interacting Electrons and Quantum Magnetism*. Graduate Texts in Contemporary Physics. Springer, New York, 1st edition, 1994.
- [12] Yu. M. Makeenko e A. A. Migdal. Quantum chromodynamics as a dynamics of loops. *Soviet Journal of Nuclear Physics*, 32(3):431, 1980.
- [13] Yu. M. Makeenko e A. A. Migdal. Quantum chromodynamics as a dynamics of loops. *Nuclear Physics B*, 188:269, 1981.
- [14] N. A. Voronov e Yu. M. Makeenko. Loop equations in the theory of gravity. *Soviet Journal of Nuclear Physics*, 36(3):444, 1982.
- [15] A. A. Migdal. Loop equations and $1/n$ expansion. *Physics Reports*, 102(4):199, 1983.
- [16] Roger Penrose. *The Geometry of the Universe in Mathematics Today: Twelve Informal Essays*, page 83. Springer, 1978.
- [17] John Baez e Javier P. Munian. *Gauge Fields, Knots and Gravity*, volume 4 of *Series on Knots and Everything*. World Scientific, 1994.
- [18] Klaus Janich. *Topology*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, primeira edition, 1984.
- [19] J. D. Jackson e L. B. Okun. Historical roots of gauge invariance. *Review of Modern Physics*, 73:663, 2001.
- [20] Y. Aharonov e D. Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the theory of quantum mechanics. *The Physical Review*, 115(3):485, 1959.
- [21] Renate Loll. *The Loop Formulation of Gauge Theory and Gravity in Knots and Quantum Gravity*, page 1. Oxford University Press, 1994.
- [22] K. Wilson. Confinement of quarks. *Physical Review D*, 10:2445, 1974.
- [23] G.S. Hall e D.P. Lonie. Holonomy groups and spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 17:1369, 2000.
- [24] Giovanni Modanese. Wilson loops in four-dimensional quantum gravity. *Physical Review D*, 49(12):6534, 1994.
-

-
- [25] Charles C. Misner, Kip S. Thorne e John Archibald Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.
- [26] Friedrich W. Hehl, Paul von der Heyde e G. David Kerlick. General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects. *Review of Modern Physics*, 48(3):393, 1976.
- [27] Tohru Eguchi, Peter B. Gilkey e Andrew L. Hanson. Gravitation, gauge theories and differential geometry. *Physics Report*, 66(6):213, 1980.
- [28] Lochlainn O’Raifeartaigh e Norbert Straumann. Gauge theory: Historical origins and some modern developments. *Review of Modern Physics*, 72:1, 2000.
- [29] M.V. Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proceedings of the Royal Society London A*, 392:45, 1983.
- [30] M.V. Berry. Classical adiabatic angles and quantum adiabatic phase. *Journal Physics A*, 18:1985, 1985.
- [31] Barry Simon. Holonomy, the quantum adiabatic theorem, and Berry’s phase. *Physical Review Letters*, 51(24):2167, 1983.
- [32] Y. Aharonov e J. Anandan. Phase changing during a cyclic quantum evolution. *Physical Review Letters*, 58(16):1593, 1987.
- [33] John P. Ralston. Electric curvature and the time component of the adiabatic connection. *Physical Review A*, 40(9):5400, 1989.
- [34] Zheng-Chuan Wang e Bo-Zang Li. Geometric phase in relativistic quantum theory. *Physical Review A*, 60(6):4313, 1999.
- [35] A. M de M. Carvalho, Claudio Furtado e Fernando Moraes. Loop variables in the geometry of a rotating black string. *Classical and Quantum Gravity*, 2003. aceito para publicação.
- [36] Máximo Bañados, Claudio Teitelboim, Jorge Zanelli. Black holes in three-dimensional spacetime. *Physical Review Letters*, 69(13):1849, 1992.

-
- [37] Máximo Bañados, Marc Henneaux, Claudio Teitelboim e Jorge Zanelli. Geometry of the 2+1 black hole. *Physical Review D*, 48(4):1506, 1993.
- [38] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Relativity*. Jonh Willey & Sons, 1 edition, 1972.
- [39] Cenalo Vaz e Louis Witten. Wilson loops and black holes in 2 + 1 dimensions. *Physics Letters B*, 327:29, 1994.
- [40] José P. S. Lemos e Vilson T. Zanchin. Three-dimensional BTZ black holes as a cylindrical system in four-dimensional general relativity. *Physical Review D*, 53(8):4684, 1996.
- [41] C. G. Bollini e J. J. Giambiagi. Wilson loops and related strings for instanton and their variational derivatives. *Il Nuovo Cimento*, 59(4):412, 1980.
- [42] Tony Rothman, George F. R. Ellis e Jeff Murugan. Holonomy in the Schwarzschild-Droste geometry. *Classical and Quantum Gravity*, 18:1217, 2001.
- [43] Roy Maartens, Bahram Mashhoon e David R. Matravers. Holonomy and gravitomagnetism. *Classical and Quantum Gravity*, 19(2):213, 2002.
- [44] P. de Sousa Gerbert e R. Jackiw. Classical end quantum scattering on a spinning cone. *Communications in Mathematical Physics*, (124):229, 1989.
- [45] R. B. Mann D. Cangemi, M. Leblanc. Gauge formulation of the spinning black holes in (2+1)-dimensional anti-de Sitter space. *Physical Review D*, 48(8):3606, 1993.
- [46] Moninder Singh Modgil, Sukanta Panda e Gautam Sengupta. Rotating brane world black holes. *Modern Physics Letters A*, 17(23):1479, 200.
- [47] Lisa Randall e Raman Sundrum. Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Physical Review Letters*, 83(17):3370, 2000.
- [48] Lisa Randall e Raman Sundrum. An alternative to compactification. *Physical Review Letters*, 83(23):4690, 2000.

-
- [49] A. Chamblin, S.W. Hawking e H.S. Reall. Brane-world black holes. *Physical Review Letters*, 61:065007, 2000.
- [50] V. Delacruz e W. Israel. Gravitational bounce. *Nuovo Cimento A*, 52(3):744, 1967.
- [51] S. C. Davis. Generalized Israel junction conditions for a Gauss-Bonnet brane world. *Physical Review D*, 2003.
- [52] Fernando Moraes. Condensed matter physics as a laboratory for gravitation and cosmology. *Brazilian Journal Physics*, 30(2):304, 2000.
- [53] W.H. Zurek. Cosmological experiments in condensed matter systems. *Physics Reports*, 276:177, 1996.
- [54] P.M. Chaikin e T.C. Lubenski. *Principles of Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press, 1st edition, 1995.
- [55] W. G. Unruh. Sonic analog of black-holes and the effects of high-frequencies on black-hole evaporation. *Physical Review D*, 51(6):2827, 1995.
- [56] Matt Visser. Acoustic black holes: horizons, ergospheres and Hawking radiation. *Classical and Quantum Gravity*, 15(6):1767, 1988.
- [57] G. E. Volovik. Vortex versus spinning string: Iordanskii force and gravitational Aharonov-Bohm effect. *Jept Letter*, 67(11):881, 1988.
- [58] Michael Stone. Iordanskii force and the gravitational Aharonov-Bohm effect for a moving vortex. *Physical Review B*, 67(17):11780, 2000.
- [59] G.E. Volovik. Superfluid analogies of cosmological phenomena. *Physics Reports*, 351(4):195, 2001.
- [60] E.B. Sonin. Friction between the normal component and vortices in rotating superfluid helium. *Soviet Physics - JETP*, 42(3):469, 1976.
- [61] E.B. Sonin. Magnus force in superfluids and superconductors. *Physical Review B*, 55(1):485, 1997.

-
- [62] Michael Stone. Acoustic energy and momentum in a moving medium. *Physical Review E*, 62(1):1341, 2000.
- [63] Uwe R. Fischer e Matt Visser. Riemannian geometry of irrotational vortex acoustics. *Physical Review Letters*, 88(11):110201, 2002.
- [64] R.L. Davis e E.P.S. Shellard. Global strings and superfluid vortices. *Physical Review Letters*, 63(19):2021, 1989.
- [65] D. V. Gal'tsov e P. S. Letelier. Spinning strings and cosmic dislocations. *Physical Review D*, 47:4273, 1993.
- [66] K.P. Tod. Conical singularities and torsion. *Classical and Quantum Gravity*, 11(5):1331, 1994.
- [67] V.B. Bezerra. Some remarks on loop variables, holonomy transformation, and gravitational Aharonov-Bohm effect. *Annals of Physics*, 203:392, 1990.
- [68] G.E. Volovik. 3 nondissipative forces on a moving vortex line in superfluids and superconductors. *JEPT Letters*, 62(1):65, 1995.
- [69] J. Anandan. Topological and geometrical phases due to gravitational field with curvature and torsion. *Physics Letters*, 195(5-6):284, 1994.
- [70] Bernard Schutz. *Geometrical Methods of Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 1 edition, 1980.
- [71] Yu E. Lozovik e A.M. Popov. Formation and growth of Carbon nanostructures: fullerenes, nanoparticles, nanotubes and cones. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, 167(7):751, 1997.
- [72] Deepak Srivastava, Madhu Menon e Kyeongjae Cho. Computational nanotechnology with carbon nanotubes and fullerenes. *Computing in Science and Engineering*, 3(4):42, 2001.
- [73] D. Laplaze, L. Alvarez, T. Guillard, *et al.* Carbon nanotubes: Dynamics of synthesis process. *Carbon*, 40:1621, 2002.

- [74] Klaus Sattler. Scanning tunneling microscopy of Carbon nanotubes and nanocones. *Carbon*, 33(7):915, 1995.
- [75] Katsuyoshi Kobayashi. Superstructure induced by a topological defect in graphitic cones. *Physical Review B*, 61(12):8496, 2000.
- [76] J. González, F. Guinea e M.A.H. Vozmediano. The electronic spectrum of fullerenes from the Dirac equation. *Nuclear Physics B*, 406:771, 1993.
- [77] A.J. Stone e D.J. Wales. Theoretical studies of icosahedral C_{60} and some related topics. *Chemical Physics Letters*, 128(5,6):501, 1986.
- [78] Noriaki Hamada, Shin-ichi Sawada e Atusuchi Oshiyama. New one-dimensional conductors: graphitic microtubules. *Physical Review Letters*, 68(10):1579, 1992.
- [79] S. Iijima. Helical microtubules of graphitic Carbon. *Nature*, 354(6348):56, 1991.
- [80] Jeoren W.G. Wildoer, Liesbeth C. Venema, Andrew G. Rinzler, et al. Electronic structure of atomically resolved Carbon nanotubes. *Nature*, 391(6662):59, 1998.
- [81] V. Meunier, M. Buongiorno Nardelli, C. Roland e J. Bernhole. Structural and electronic properties of Carbon nanotube tapers. *Physical Review B*, 64(195419), 2001.
- [82] R. A. Puntigam e H. H. Soleng. Volterra distortions, spinning strings, and cosmic defects. *Classical and Quantum Gravity*, 14(5):1129, 1997.
- [83] Ryo Tamura, Kazuto Akagi, Masaru Tsukada *et al.* Electronic properties of polygonal defects in graphitic Carbon sheets. *Physical Review B*, 56(3):1404, 1997.
- [84] M. O. Katanaev and I. V. Volovich. Theory of defects in solids and three-dimensional gravity. *Annals of Physics*, 216(1):1, 1992.
- [85] Paul E. Lammert e Vincent H. Crespi. Topological phases in graphitic cones. *Physical Review Letters*, 85(24):5190, 2000.

-
- [86] C. J. C. Burges. Gravitational Aharonov-Bohm effect in three dimensions. *Physical Review D*, 32(2):504, 1985.
- [87] C. Lammerzahl. Constraints on space-time torsion from Hughes-Drever experiments. *Physics Letters*, 228(4-5):223, 1997.
- [88] Dieter R. Brill e Jeffrey M. Cohen. Cartan frames and the general relativistic dirac equation. *Journal of Mathematical Physics*, 7(2):238, 1966.
- [89] S. Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford Classic Text in The Physical Science. Oxford University Press, 1992.
- [90] S.K. Chakrabarti e B. Mukhopadhyay. Dirac equation in Kerr geometry and its solution. *Nuovo Cimento B*, 115(7-9):885, 2000.
- [91] B. Mukhopadhyay e S.K. Chakrabarti. Semi-analytical solution of Dirac equation in Schwarzschild geometry. *Classical and Quantum Gravitation*, 16(10):3165, 1999.
- [92] Richard T. Hammond. Torsion gravity. *Reports Progress in Physics*, 65:599, 2002.
- [93] Pierre Ramond. *Field Theory: A Modern Primer*. Frontiers in Physics. Addison Wesley, 2nd edition, 1990.
- [94] J. G. Fletcher. Dirac matrices in Riemannian space. *Il Nuovo Cimento*, 8(3):451, 1958.
- [95] Dieter R. Brill e John A. Wheeler. Interaction of neutrinos and gravitational fields. *Review of Modern Physics*, 29(3):465, 1957.
- [96] James D. Bjorken e Sidney D. Drell. *Relativistic Quantum Mechanics*. International Series in Pure and Applied Physics. McGraw Hill Book Company, 1964.
- [97] V.M. Villalba e A. Rincon Maggiolo. Energy spectrum of a 2d dirac electron in the presence of a constant magnetic field. *The European Physical Journal B*, 22:31, 2001.

- [98] George Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, 3^a edition, 1985.
- [99] C.A. de Lima Ribeiro, C. Furtado e F. Moraes. On the localization of electrons and holes by a disclination core. *Physics Letters A*, 288(5-6):329, 2001.
- [100] S. Azevedo e F. Moraes. Two-dimensional scattering by disclinations in monolayer graphite. *Journal Physics: Condensed Matter Physics*, 12(33):7421, 2000.
- [101] S. Azevedo, C. Furtado e F. Moraes. Charge localization around disclinations in monolayer graphite. *Physica Status Solid B: Basic Research*, 207(2):387, 1998.
- [102] A.M. de Moraes Carvalho, C. Furtado e F. Moraes. Self-forces on electric and magnetic linear sources in the presence of a torsional defect. *Physical Review D*, 62(6):067504, 2000.
- [103] S. Azevedo e F. Moraes. Self-force an a point charge and linear source in the space of a screw dislocation. *Physics Letters A*, 267(2-3):208, 2000.
- [104] G. D. Marques, C. Furtado, V.B. Bezerra e F. Moraes. Landau levels in the presence of topological defects. *Journal Physics A: Mathematical and General*, 34(30):5945, 2001.
- [105] C. Furtado e F. Moraes. Landau levels in the presence of a screw dislocation. *Europhysics Letters*, 45(3):279, 1999.
- [106] C. Furtado, B.G.C. da Cunha, F. Moraes *et. al.* Landau levels in the presence of disclinations. *Physics Letters A*, 195(1):90, 1994.
- [107] Ivan Pontual e F. Moraes. Casimir effect around a screw dislocation. *Philosophical Magazine A: Physics of Condensed Matter, Structure Defects and Mechanical Properties*, 78(5):1073, 1998.
- [108] F. Moraes. Casimir effects around disclinations. *Physics Letters A*, 204(5-6):399, 1995.