UM ESTUDO SOBRE A INFLUÊNCIA DO USO DE MATERIAIS MANIPULATIVOS NA CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE COMPRIMENTO COMO GRANDEZA NO 2º CICLO DO ENSINO FUNDAMENTAL

ALEXSANDRA FELIX DE BRITO

UM ESTUDO SOBRE A INFLUÊNCIA DO USO DE MATERIAIS MANIPULATIVOS NA CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE COMPRIMENTO COMO GRANDEZA NO 2º CICLO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Educação.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Paula Moreira Baltar Bellemain

RECIFE

2003

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MESTRADO EM EDUCAÇÃO

UM ESTUDO SOBRE A INFLUÊNCIA DO USO DE MATERIAIS MANIPULATIVOS NA CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE COMPRIMENTO COMO GRANDEZA NO 2º CICLO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Comissão Examinadora:

____
Profª Drª Paula Moreira Baltar Bellemain
1º Examinador/Presidente

____
Prof. Dr. Franck Gilbert René Bellemain
2º Examinador

____
Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos
3º Examinador

RECIFE, de de 2003

DEDICATÓRIA

A **Jesus Cristo**,

o meu principal mestre

e incentivador.

A **minha família,**

grande sustentáculo

do meu viver.

Ao **grupo Matematicando**,

que nos faz sonhar com um

ensino da Matemática elementar mais prazeroso e significativo.

AGRADECIMENTOS

A Deus Todo-poderoso,

por ter me dado essa grande bênção para a minha vida profissional, ou seja, a oportunidade de me qualificar através do Curso de Mestrado em Educação.

"O louvor, e a glória, e a sabedoria, e as ações de graças, e a honra, e o poder, e a força sejam ao nosso Deus, pelos séculos dos séculos. Amém" (Apoc. 7:12).

Aos meus pais,

por todo apoio e incentivo de cada dia, permitindo me ausentar de Campina Grande-PB para vir estudar em Recife-PE.

Aos meus amados irmãos, Alexandre, Jacqueline e Pedrinho,

pelos momentos em que compartilhamos nossos sonhos, fortalecendo e ajudando uns aos outros, de formas diversas.

Ao meu primeiro orientador na minha vida profissional (meu paizão), Prof. Doutorando Pedro Ribeiro Barbosa,

por suas sábias orientações, as quais têm me ajudado a colher muitos frutos.

À minha orientadora no Mestrado em Educação, Profª Drª Paula Moreira Baltar Bellemain,

por sua competência profissional demonstrada nas proveitosas orientações desta dissertação, pelo apoio e conduta ética e amiga, pelos ensinamentos frutíferos que levarei adiante na minha vida profissional.

Aos professores Paulo Figueiredo Lima, Marcelo Câmara dos Santos e Abraão Juvêncio de Araújo,

pelas sugestões apresentadas nos estudos em equipe.

Ao Grupo Pró-Grandezas do Programa de Pós-Graduação em Educação (Núcleo de Didática de Conteúdos Específicos – Área de Matemática) da UFPE,

pelas socializações e descobertas de conhecimentos durante as ricas discussões realizadas nas reuniões do grupo.

Às minhas amadas amigas Maríthiça e Adriana,

pela disponibilidade, me ajudando em momentos os mais diversos.

Aos meus queridos primos e amigos, Ranilson e Lindete,

por suas grandes atitudes em permitirem minha hospedagem na sua casa, em Recife, durante todo o Curso do Mestrado, dando apoio e companhia que muito me ajudaram a resistir as saudades da minha família e da minha cidade.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação,

que proporcionaram agradáveis momentos de aprendizagem.

À todos os colegas da minha turma de mestrado, especialmente aos amigos Alexsandro, Cristiano, Eliane, Marcus, Marise, Nilma e Vera,

pelas ajudas e incentivos durante toda essa caminhada,

À toda equipe da Secretaria da Pós-graduação,

pela atenção dispensada.

À CAPES,

pela concessão da bolsa que permitiu uma maior dedicação aos estudos.

Aos professores e funcionários do Departamento de Educação e do Curso de Pedagogia da UFCG,

por todo apoio e incentivo que manifestaram para que eu realizasse o mestrado, sobretudo por toda a compreensão nessa fase de conclusão, em que precisei estar mais ainda ausente daquela Instituição.

À direção, aos funcionários, às professoras e aos alunos de escola pública em que realizei o processo de coleta de dados desta pesquisa.

À todos que contribuíram, de forma direta ou indireta, para a concretização deste trabalho.

SUMÁRIO

RESUMO

Esta pesquisa insere-se nas investigações desenvolvidas pelo Grupo Pró-Grandezas, do Programa de Pós-Graduação em Educação da UFPE, e tem como objetivo geral investigar os conhecimentos-em-ação, mobilizados por alunos do 2º Ciclo do Ensino Fundamental, na resolução de problemas envolvendo comprimento no ambiente papel e lápis e com uso de materiais manipulativos. Este trabalho se fundamentou no modelo didático para o conceito de área proposto por Douady e Perrin Glorian (1989), no qual identificam-se três quadros a diferenciar – o geométrico, o das grandezas e o numérico – adaptando-o ao estudo da construção do conceito de comprimento. A parte experimental deste trabalho principiou pela elaboração e realização da análise a priori de um teste diagnóstico, constando de situações-problema de comparação e produção, que foram resolvidas por alunos de uma turma de 4ª série, em dois momentos: no primeiro, a aplicação foi realizada no ambiente papel e lápis, enquanto que, no segundo, os alunos usaram materiais manipulativos. A análise a posteriori das atividades constituiu-se na parte final da pesquisa, que levou a conclusões e propostas de novas investigações visando a uma seqüência de ensino do conceito de comprimento como grandeza.

RÉSUMÉ

Cette recherche s'insère à celles développées par le Groupe « Pró-Grandezas » du Programme de Post-Graduation en Éducation de l'UFPE et a pour but général de rechercher les connaissances en action utilisés par des élèves du deuxième cycle de l'Enseignement Fondamental, pendant la résolution de problèmes sur le longueur dans l'espace, en employant papier et crayon, ainsi que d'autres matériaux de manipulation. Nous nous sommes basés sur le modèle didactique du concept de surface proposé par Douady e Perrin Glorian (1989) dans lequel on identifie trois cadres différents – le géométrique, celui de la grandeur et le numérique – en adaptant ce modèle à l'étude de la construction de longueur. La partie expérimentale de la recherche a commencé par l'élaboration et réalisation de l'analyse, a priori, d'un diagnostic constitué de situations-problèmes de comparaison et production, resoulues par un groupe d'élèves de la « 4ª série »,en deux moments distincts : au premier moment, les élèves ont utilisé papier et crayon et au second ils ont employé d'autres matériaux de manipulation pour résoudre les situations proposées. L' analyse a posteriori des activités est la dernière partie de la recherche qui nous a conduit à des conclusions et des propositions de nouvelles recherches en vue d'une séquence d'enseignement du concept de longueur en tant que grandeur.

INTRODUÇÃO

A pesquisa aqui apresentada insere-se nas investigações desenvolvidas pelo Grupo Pró-Grandezas do Programa de Pós-Graduação em Educação (Núcleo de Didática de Conteúdos Específicos – Área de Matemática) da UFPE, o qual reúne professores e alunos de pós-graduação, que têm realizado estudos relacionados ao ensino e à aprendizagem das grandezas geométricas. De acordo com Barbosa (2002), esse grupo foi criado no ano 2000

> em torno de um projeto de pesquisa para o ensino dos conceitos de comprimento e área, proposto pelo PRÓ-MATEMÁTICA – programa integrante da cooperação técnica da Embaixada da França com o Ministério da Educação e do Desporto do Brasil que, segundo Pires (1999), tinha como intuito a melhoria da formação inicial e continuada dos professores que trabalham com Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental (BARBOSA, 2002, p. 2).

Dentre as pesquisas desenvolvidas pelo grupo, esta apresenta três características básicas: o enfoque nos conceitos comprimento e perímetro; a construção desses conceitos a partir da exploração de situações de comparação e produção; e a verificação da influência do uso de materiais manipulativos na resolução de situações-problema.

Esta investigação apóia-se em pesquisas anteriores da Educação Matemática relativas ao ensino/aprendizagem das grandezas geométricas, destacando-se aquelas que investigam os conceitos de comprimento e área.

Nosso trabalho é composto de 3 capítulos, mas, inicialmente, tem esta parte introdutória, em que apresentamos o contexto em que a pesquisa está inserida e uma visão panorâmica da dissertação.

No capítulo 1 tratamos dos estudos preliminares que compõem a fundamentação teórica e a problemática da pesquisa, sendo abordados aspectos epistemológicos, didáticos e cognitivos, bem como um comentário relativo ao tratamento dado às grandezas geométricas nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Após os elementos teóricos discorridos no capítulo anterior, temos o capítulo 2 que descreve os procedimentos metodológicos da pesquisa: sua concepção, à luz das questões didáticas discutidas anteriormente; a escolha dos sujeitos, os instrumentos de pesquisa, condições de realização do experimento em sala de aula e os aspectos gerais das atividades elaboradas.

No capítulo 3, que também é o último, apresentamos as atividades propostas, acompanhadas das suas respectivas análises a priori e a posteriori.

Concluímos esta dissertação, fazendo breves considerações finais sobre o que foi possível detectar no desenvolvimento da pesquisa.

CAPÍTULO 1 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E PROBLEMÁTICA

1.1 – Considerações iniciais

O estudo das grandezas geométricas é de grande importância para a formação do pensamento e para a vida social e vem ganhando destaque nas pesquisas em Didática da Matemática. Comprimento, área e volume, como componentes do campo conceitual mais amplo das grandezas geométricas, têm fortes conexões com outras áreas do conhecimento matemático. Com efeito, trata-se de um campo privilegiado de articulações com a geometria, a aritmética e a álgebra, além das possíveis conexões com outras disciplinas abordadas na escola, tais, como a geografia e a física. Nesse sentido, podemos destacar a ênfase dada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o papel das articulações entre conteúdos, campos e disciplinas na construção de significado dos conteúdos matemáticos:

> A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos (BRASIL, 1997, pp. 19-20).

De acordo com Lima (1995), *“o ensino das grandezas geométricas faz parte de quase todo currículo escolar nos últimos cem anos”* (p. 49). No entanto, afirma esse pesquisador que, *“sob o ponto de vista da didática desses conceitos,* *muitos problemas persistem, assegurando atualidade e importância a uma discussão sobre eles”* (p. 49).

Pesquisas realizadas por Lima (1995) e Bellemain & Lima (2002) constatam, nas últimas décadas, um certo descaso com o estudo das grandezas geométricas em nossas escolas. Uma das possíveis razões para essa tendência reside no fato de que o estudo das grandezas geométricas, em muitas propostas curriculares e livros didáticos, faz parte do conteúdo de geometria, que, por sua vez, vinha sendo desprezado no ensino escolar. Encontramos, também, respaldo quanto a essa inclusão das grandezas geométricas no campo da geometria nos estudos de Perrot et al. (1998), quando afirma que *“dentro do ensino fundamental da Geometria, um assunto particularmente importante é o das grandezas geométricas, e mais especificamente o da medida dos comprimentos de linhas, e das áreas das figuras planas”* (p. 4).

Assim consideradas, as grandezas geométricas sofreram o abandono do qual foi alvo o campo da geometria no ensino da Matemática. Várias pesquisas realizadas por educadores matemáticos, como, por exemplo, Perez (1985), Pavanello (1993), Lorenzato (1995), Perrot et al (1998) e Câmara (1997), constataram a ausência, ou quase ausência, do ensino da geometria nas aulas de Matemática nas séries do Ensino Fundamental e Médio.

Justificando a necessidade de se ter a Geometria na escola, para a formação geral do indivíduo, Sérgio Lorenzato (1995) argumenta que

> sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das idéias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida (LORENZATO, 1995, p. 5).

No entanto, Lorenzato (1995) afirma que *"o ensino da Geometria, se comparado com o ensino de outras partes da Matemática, tem sido o mais desvairador"* (p. 3). Não é por acaso a afirmação desse pesquisador quando diz que o ensino de Geometria no Brasil está doente e que há uma *"omissão geométrica".*

O citado autor aponta que essa omissão geométrica apresenta-se sob múltiplos aspectos, destacando que dois deles estão atuando forte e diretamente em sala de aula. O primeiro diz respeito ao fato de que muitos professores não dominam os conhecimentos geométricos necessários para a realização de suas práticas pedagógicas. O segundo é a exagerada importância que, entre nós, desempenha o livro didático, quer devido à má formação de nossos professores, quer devido à grande jornada de trabalho a que estão submetidos.

Considera-se, ainda, que a geometria vem sendo trabalhada de forma fragmentada e desvinculada de possíveis contextos (matemático, social e multidisciplinar), como comenta Câmara (1997):

> a geometria somente encontra seu lugar, dentro do ensino da Matemática, na forma de uma espécie de apêndice curricular, apresentado de modo fortemente fragmentado e completamente desvinculado da aritmética e da álgebra e, muitas vezes relegado à condição de último capítulo do livro, aquele que, ô azar, não encontra tempo de ser visto durante o ano escolar (CÂMARA, 1997, p. 2).

Diante do quadro insatisfatório anteriormente referido, é pertinente ressaltar que nos anos recentes já constatamos mudanças que indicam avanços no processo de ensino das grandezas geométricas, o que se constata verifica, por exemplo, na proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (BRASIL, 1997), a qual apresenta preocupações relevantes para o ensino desse campo da matemática, em que podemos considerar os comentários de Bellemain & Lima (2002) quando enfatizam que

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais fazem críticas pertinentes e propõem avanços com relação ao ensino habitual das

> grandezas e medidas. Observa-se uma preocupação nítida na construção do significado das noções deste domínio de conhecimentos. O papel das grandezas e medidas no Ensino Fundamental é valorizado como meio de colocar em prática alguns dos princípios norteadores da proposta curricular, como por exemplo: articular os conhecimentos escolares com a vivência do aluno fora da escola; estabelecer conexões entre os conteúdos matemáticos e da Matemática com outras áreas disciplinares; resgatar a matemática como ciência historicamente construída e recebendo as influências das culturas no seio das quais vai sendo elaborada (BELLEMAIN & LIMA, 2002, p. 46).

Nos PCN, os conteúdos matemáticos aparecem agrupados em quatro grandes blocos: "Números e operações"; "Espaço e forma"; "Grandezas e medidas" e "Tratamento da informação". Nesse documento curricular, o bloco das grandezas e medidas é caracterizado por sua forte relevância social, além de proporcionar uma melhor compreensão de conceitos relativos ao espaço e às formas.

Podemos verificar outros avanços no tratamento dado aos conteúdos nas mudanças encontradas nos livros didáticos atuais. Principalmente depois dos PCN e PNLD (Programa Nacional do Livro Didático), houve uma evolução na maneira de abordar geometria e grandezas nos livros didáticos. Os estudos de Barbosa (2002) e Duarte (2002) mostram que esses assuntos, em algumas coleções de livros didáticos, deixaram de ser trabalhados apenas no final do livro, passando a serem tratados em capítulos anteriores. Uma outra mudança diz respeito ao favorecimento de conexões entre os diferentes temas da matemática, bem como a exploração de situações contextualizadas relacionadas ao cotidiano e atividades profissionais. No entanto, concordamos com Barbosa (2002) quando afirma que

> embora já tenha havido avanços nos livros didáticos, no tocante a se explorarem situações contextualizadas, é que isso ainda ocorre de forma acanhada. Mesmo com essa preocupação de trabalhar os conceitos numa perspectiva social, o que prevalece nas situações apresentadas é uma relação muito mais entre os elementos da geometria e das medidas (BARBOSA, 2002, p. 74).

Ainda segundo os resultados dessas pesquisas, um outro aspecto verificado nos livros didáticos atuais refere-se à não exploração dos conceitos de comprimento e área enquanto grandezas sem a ação do medir. No geral, as situações didáticas trabalhadas não permitem ao aluno compreender esses conceitos com perspectiva de grandezas, pois, ora são tratadas com uma idéia mais próxima ao quadro geométrico (destacando os conceitos de contorno e superfície), ora são tratados com uma ênfase mais próxima do quadro numérico (focalizando demasiadamente a medida). Assim, verifica-se uma carência nos livros didáticos no sentido de explorar situações de comparação (sem a ação do medir) que favoreçam a construção de comprimento e área como grandezas.

O processo de construção das grandezas geométricas, geralmente, é trabalhado nas escolas de forma extremamente insatisfatória, gerando ou reforçando nos alunos algumas dificuldades conceituais de aprendizagem. Segundo Perrot et al. (1998), algumas dessas dificuldades são:

> Muitas vezes, os alunos...
>
> - ...fazem confusão entre perímetro e área, e também entre contorno e superfície;
> - ...fazem confusão entre grandezas e medidas da grandeza;
> - ...sabem calcular medidas, usando fórmulas, sem saber o que eles calculam;
> - ...acham que somente os segmentos de reta têm um comprimento;
> - ...acham que somente os polígonos ‘particulares’, os que tem um nome e fórmulas, têm também um perímetro e uma área (PERROT et al., 1998, p. 4).

Ainda como dificuldade, podemos citar a confusão que o aluno faz entre contorno e perímetro, constatada por Barbosa (2002).

Baltar (1996), apud Bellemain e Lima (2002), ao realizar uma pesquisa na França, analisou avaliações do desempenho de alunos franceses e resultados de pesquisas em Educação Matemática, possibilitando a identificação de alguns dos erros mais freqüentes, assim, como, hipóteses explicativas das dificuldades conceituais que os alunos podem enfrentar na construção do conceito de área. Nesse estudo, o levantamento dos resultados de avaliações realizadas na França (no nível equivalente ao 2º e 3º ciclos do Ensino Fundamental brasileiro) apresenta que as questões sobre os conceitos de área e perímetro têm, em geral, aproveitamento inferior a 50%.

Essa pesquisadora também mostra como resultados, de acordo com a avaliação da Associação dos Professores de Matemática do Ensino Público – APMEP (no nível equivalente ao terceiro ciclo do Ensino Fundamental brasileiro), que dois dos três conteúdos que mostram maiores índices de fracasso no currículo francês atual são relacionados à aprendizagem das grandezas geométricas, ao cálculo sobre grandezas (entre outros, áreas e volumes) e à utilização das unidades. Ainda se tratando do relato da avaliação anterior, é mostrado que, entre os erros cometidos com mais freqüência pelos alunos avaliados, se destacam as confusões entre área e perímetro, a utilização de fórmulas errôneas (tais, como: área = perímetro $\times$ 2; ou, área = soma dos lados) e o uso inadequado de unidades (a expressão da medida da área de uma superfície cujo comprimento dos lados é dado em metros, por exemplo, é dada em metros, em metros cúbicos ou mesmo em centímetros, ao invés de metros quadrados).

Observamos que no meio dos educadores matemáticos já existe uma certa preocupação em realizar estudos sobre o processo de ensino-aprendizagem das grandezas e medidas. Porém, concordamos com a preocupação de Barbosa (2002) ao enfatizar que é *“indispensável que sejam desenvolvidos outros estudos para aprofundar as questões didáticas, presentes na abordagem das grandezas geométricas, ainda não devidamente elucidadas”*

(p. 16). Nesse contexto é que estamos propondo, como objeto de nosso estudo, investigar o processo de construção dos conceitos comprimento e perímetro.

Essa investigação apóia-se em pesquisas anteriores da Educação Matemática, relativas ao ensino/aprendizagem das grandezas geométricas, destacando-se aquelas que investigam os conceitos de comprimento e área.

Algumas correntes de pesquisas têm sido formadas, nas últimas décadas, no que se constitui hoje o campo da Educação Matemática. A nossa pesquisa recorreu, basicamente, a estudos da vertente francesa da Didática da Matemática, particularmente a trabalhos de Douady & Perrin-Glorian (1989) e de Vergnaud (1993), que estão relacionados com as grandezas geométricas.

Além desses estudos, nos apoiamos também em investigações que se baseiam no quadro teórico proposto pelos pesquisadores acima mencionados e dão continuidade às pesquisas supracitadas, tais, como, Lima (1995), Baltar (1996), Perrot et al (1998), Câmara dos Santos (1999), Bellemain & Lima (2002), Barbosa (2002), entre outros.

Este trabalho inspira-se no modelo didático para o conceito de área, proposto por Douady & Perrin-Glorian (1989), no qual identificam-se três quadros a diferenciar: o geométrico, o das grandezas e o numérico. Assim, nossa pesquisa tem suas raízes na abordagem proposta por essas pesquisadoras, considerando, portanto, o comprimento como uma grandeza.

Na nossa base teórica, consideraremos a noção de campo conceitual proposta por Gérard Vergnaud (1993), sobre a qual nos deteremos adiante. Nessa noção, um conceito está sempre articulado a um conjunto de outros conceitos com os quais partilha propriedades, situações e representações com variados graus de identidade ou de articulação, o qual não ocorre isoladamente no âmbito do conhecimento humano. Com base nos estudos desse pesquisador, Barbosa (2002) explica que o *“conceito de perímetro surge, na matemática* *escolar, associado a um campo conceitual amplo do qual, sem dúvida, participa o conceito de área de uma figura plana"* (p. 17).

Esta investigação tem estreita conexão com recente trabalho de Barbosa (2002), um dos integrantes do Grupo de pesquisa Pró-Grandezas do Programa de Pós-graduação em Educação da UFPE, mencionado na introdução desta dissertação. Esse pesquisador investigou, assim como em nosso estudo, as questões didáticas relativas à dissociação contorno/perímetro, comparação de figuras segundo seus comprimentos ou seus perímetros, sem o emprego de medidas. Os sujeitos em ambas as pesquisas foram alunos de 4ª série do 2º ciclo do Ensino Fundamental da rede pública municipal de ensino.

Contudo, nosso trabalho distingue-se do realizado por Barbosa (2002) em, pelo menos, três aspectos:

1. Na pesquisa de Barbosa foram elaboradas 17 atividades para serem aplicadas no ambiente papel e lápis, enquanto que na nossa foram elaboradas 6 atividades, sendo que cada uma delas foi descrita para ser aplicada em dois momentos**:** no primeiro**,** fazendo uso de papel e lápis e, no segundo, com o uso de materiais manipulativos, formando um conjunto de 12 atividades, apresentadas com o objetivo de verificar a influência de tais materiais;
2. A coleta de dados foi feita através dos protocolos dos alunos, como na pesquisa de Barbosa, mas, também, utilizamos as anotações feitas durante a observação na parte relativa à manipulação dos materiais**,** além da entrevista realizada no término dos testes;
3. Não só analisamos e interpretamos as respostas certas e/ou erradas, mas caracterizamos, também, as estratégias de resolução e os conhecimentos implícitos adotados pelos alunos, considerando a influência do uso de materiais manipulativos na ampliação de tais estratégias.

Antes de concluirmos, consideramos que seja relevante observarmos os fatores, evidenciados por Barbosa (2003), que podem dificultar o uso do material:

> - Excesso de conteúdos nos currículos de matemática, tendo como conseqüência, livros didáticos extremamente 'densos';
> - Falta de literatura que aborde sobre o uso de determinados materiais pedagógicos numa perspectiva teórica e metodológica;
> - Existência de livros teóricos/metodológicos que só se referem ao uso de materiais pedagógicos apenas como ilustração, mas não constam orientações de como podem ser trabalhados em sala de aula;
> - Professores que não conhecem como trabalhar com o material pedagógico ou quando conhecem preferem o mais cômodo que é optar por uma prática pedagógica tradicional;
> - Falta de visão pedagógica da direção e/ou da coordenação da escola, que continua resistindo a novas práticas pedagógicas;
> - Condições desfavoráveis para o trabalho, ora decorrente do número excessivo de alunos em sala de aula, ora decorrente da falta do material pedagógico em si;
> - Avaliações com questões que não se relacionam ao uso dos materiais pedagógicos trabalhos;
> - Escolas de formação de professores que não estão preparando adequadamente no que se refere ao uso do material, tanto em cursos de nível médio, como em cursos de graduação (BARBOSA, 2003, p. 27).

Nosso propósito é investigar os conhecimentos-em-ação mobilizados por alunos de 2º ciclo do Ensino Fundamental na resolução de problemas envolvendo comprimento no ambiente papel-lápis e com uso de materiais manipulativos. Pretende-se verificar se tais materiais favorecem a construção da grandeza comprimento e a transição entre os quadros geométrico e das grandezas, possibilitando a distinção e a articulação entre eles.

1.2 – Aspectos gerais sobre epistemologia e didática

Iniciaremos nossa abordagem fazendo algumas considerações sobre a epistemologia, bem como, as diferenças e contribuições da análise epistemológica à didática.

De acordo com Japiassu (1986), o termo *“Epistemologia”* surgiu a partir do século XIX e significa, etimologicamente, discurso (*logos*) sobre a ciência (*episteme*). No sentido mais amplo do termo, esse autor considera a epistemologia como *“o estudo metódico e reflexivo do saber, de sua organização, de sua formação, de seu desenvolvimento, de seu funcionamento e de seus produtos intelectuais”* (p. 16).

Uma outra explicação encontramos em Pais (2001) quando diz que:

> A epistemologia é o estudo da evolução das idéias essenciais de uma determinada ciência, considerando os grandes problemas concernentes à metodologia, aos valores e ao objeto desse saber, sem vincular necessariamente ao contexto histórico desse desenvolvimento (PAIS, 2001, p. 33).

O ponto de vista que nos interessa aqui são as principais contribuições da epistemologia para o estudo de fenômenos didáticos. Sobre esse aspecto, Bellemain & Lima (2002) argumentam que:

> Segundo Artigue (1990), uma das contribuições da análise epistemológica para os estudos da Didática da Matemática é a reflexão crítica acerca de certas *‘representações epistemológicas errôneas que a prática de ensino tende a induzir’* (p. 245). Com efeito, o ensino tende a apresentar os conceitos matemáticos como universais, no tempo e no espaço e a cultivar uma *‘ficção de rigor eterno e perfeito da Matemática’* (p. 243). O recurso à análise epistemológica ajuda a invalidar tais concepções, na medida em que recupera a historicidade tanto dos conceitos matemáticos quanto das noções metamatemáticas (como a noção de rigor, por exemplo) (BELLEMAIN & LIMA, 2002, pp. 13-14).

Esses pesquisadores ainda apresentam, com base nos estudos de Artigue (1990), que uma segunda função da análise epistemológica consiste em

> invalidar uma certa *'ilusão de transparência'* relativa aos objetos de saber que a Educação Matemática manipula. Esta função relaciona-se tanto com o processo *de 'vigilância epistemológica'* quanto com a problemática da transposição didática (Chevallard, 1985) (BELLEMAIN & LIMA, 2002, p. 14).

Quanto à noção de transposição didática, um dos conceitos centrais da educação matemática, Chevallard (1991, p. 13), apud Pais (2001), apresenta a seguinte definição:

> Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática. (CHEVALLARD, 1991, apud PAIS, 2001, p. 19).

Exemplificando, Pais (2001) explica que a transposição didática possibilita a interpretação das *"diferenças que ocorrem entre a origem de um conceito da matemática, como ele encontra-se proposto nos livros didáticos"*, bem como, *"a intenção de ensino do professor e, finalmente, os resultados obtidos em sala de aula"* (p. 12).

Segundo Bellemain & Lima (2002), a teoria da transposição didática, no nível da análise didática dos fenômenos relativos ao ensino/aprendizagem, permitiu evidenciar que

> não é pertinente considerar que os objetos de ensino são cópias fiéis simplificadas dos objetos da ciência. Se, por um lado, a vigilância epistemológica exige um vínculo claro entre os objetos de ensino e os objetos de saber acadêmico aos quais se associam, as relações entre eles não são tão simples quanto podem parecer à primeira vista. Argumenta-se, por exemplo, que muitos dos entraves e condições que pesam sobre o ensino não têm qualquer significado na evolução do saber acadêmico. É o caso da decomposição do saber matemático em camadas que podem ser ensinadas e aprendidas em níveis sucessivos por um determinado público (BELLEMAIN & LIMA, 2002, pp. 14-15).

Ainda com relação às funções da análise epistemológica, Artigue (1990), apud Bellemain & Lima (2002), apresenta mais dois objetivos centrais:

> 1- o ensino da Matemática tem por objetivo não apenas transmitir conhecimentos nesse campo do saber, mas levar os alunos a participar de uma cultura matemática. A análise epistemológica, que inclui a análise histórica, mas não se reduz à mesma, subsidia a reflexão acerca de questões sobre a natureza da cultura matemática dos processos que governam essa cultura (p. 16);
>
> 2- compreensão das raízes dos erros dos alunos e na construção de situações que contribuam para sua superação (p. 17).

Bellemain & Lima evidenciam que essa última função, apresentada por Artigue, *"na didática da matemática, é associada, entre outras, aos conceitos de obstáculos e de concepção"* (p. 17). Portanto, continuaremos agora fazendo a nossa abordagem sobre esses conceitos nas análises epistemológica e didática.

Primeiramente, faremos algumas reflexões sobre obstáculos epistemológicos, começando por considerar a origem e o objetivo dessa noção apresentados por Pais (2001) quando descreve que:

> A noção de obstáculo epistemológico foi descrita inicialmente pelo filósofo francês Gastão Bachelard, na obra A Formação do Espírito Científico, publicada em 1938. Essa, que é considerada uma de suas principais produções, tem exercido considerável influência na área educacional devido a sua originalidade, clareza literária e bom humor. Detentor de um acentuado senso crítico e pedagógico, Bachelard ilustra fatos relacionados à formação histórica dos conceitos científicos. Seu objetivo era interpretar as condições de evolução da ciência, delineando bases para realizar o que chamou de psicanálise do conhecimento objetivo. Para isso, descreveu, em detalhes, a essência da noção de obstáculo que é hoje amplamente mencionada em estudos de didática. Bachelard observou que a evolução de um conhecimento pré-científico para um nível de reconhecimento científico passa, quase sempre, pela rejeição de conhecimentos anteriores e se defronta com um certo número de obstáculos. Assim, esses obstáculos não se constituem na falta de conhecimento, mas, pelo contrário, são conhecimentos antigos, cristalizados pelo tempo, que resistem à instalação de novas concepções que ameaçam a estabilidade intelectual de que detém esse conhecimento (PAIS, 2001, p. 39).

Segundo Igliori (1999), *"a concepção de Bachelard* (1938), *de que o desenvolvimento do pensamento científico se processa na superação dos obstáculos, e a introdução da noção de obstáculo epistemológico",* vieram contribuir para aumentar as relações entre a Epistemologia e a Didática (IGLIORI, 1999, p. 96).

Para Igliori, *"é principalmente na noção de obstáculo que se pode perceber a interdependência entre Epistemologia e Didática"* (p. 97), sendo Brousseau o responsável pela introdução dessa noção na Didática da Matemática, em 1976, apoiada nas idéias de Bachelard.

Assim, foi em uma conferência sobre *"os obstáculos epistemológicos e os problemas em Matemática"* que a noção de obstáculo epistemológico foi introduzida por Brousseau, comparando-o *"à resistência de um saber mal-adaptado [...] e o vê como um meio de interpretar alguns dos erros recorrentes e não aleatórios, cometidos pelos estudantes, quando lhe são ensinados alguns tópicos da Matemática"* (IGLIORI, 1999, p. 99).

Essa noção de obstáculo, segundo Perrin-Glorian (1995), *"é também um meio de olhar de outro modo os erros dos alunos"*, pois Brousseau evidenciou que:

> O erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso (...), mas o efeito de um conhecimento anterior que tinha o seu interesse, seus sucessos, mas que agora se revela falso, ou simplesmente inadaptável. Os erros deste tipo não são erráticos e imprevisíveis, eles são constituídos em obstáculos. Tanto no funcionamento do mestre como naquele do aluno, o erro é constitutivo do sentido do conhecimento adquirido (Brousseau, p 171, apud PERRIN-GLORIAN, 1995, p. 81-82).

Outra observação apresentada por Perrin-Glorian, no estudo sobre *"Utilização da noção de obstáculos na Didática da Matemática"*, esclarece que *"um obstáculo não se manifesta só pelos erros, mas também pela impossibilidade de encarar certos problemas ou de resolvê-los eficazmente"* (p. 82).

Com relação às discussões no Campo da Educação Matemática sobre um dado fenômeno didático, Artigue (1990), apud Bellemain & Lima (2002), critica o fato de se identificar esses obstáculos epistemológicos limitando-se à origem e à resistência apenas na evolução histórica de um determinado campo do saber, destacando que essa classificação deve, necessariamente, passar pelo critério das concepções nos próprios alunos:

> Ora, esta condição me parece essencial: pelo fato de haver disparidade entre as condições que governam os dois sistemas [o do contexto histórico de produção do conhecimento e o do contexto de ensino atual], a análise histórica pode ajudar o pesquisador em didática na sua busca de nós de resistência da aprendizagem, ela não pode de forma alguma, trazer sozinha a prova da existência de tal ou qual obstáculo para os alunos atuais (ARTIGUE, 1990, p. 254 apud BELLEMAIN & LIMA, 2002, p. 18).

Ainda em relação a esse processo de identificação do obstáculo epistemológico, Perrin-Glorian (1995), citando Guy Brousseau, após observar que poderemos procurar esses obstáculos *“a partir de uma análise histórica ou a partir da análise de dificuldades resistentes junto aos alunos”*, apresenta as etapas descritas abaixo que devem ser contempladas nesse processo:

> Trata-se então em primeiro lugar para os pesquisadores de:
> a) achar erros recorrentes, mostrar que se agrupam em torno de concepções.
> b) encontrar obstáculos na história da matemática.
> c) confrontar os obstáculos históricos com os obstáculos de aprendizado para estabelecer o seu caráter epistemológico. (PERRIN-GLORIAN, 1995, p. 88).

Artigue (1990, p. 254), apud Perrin-Glorian (1995), indica que os nós de grande resistência no processo de aprendizagem *“correspondem muitas vezes aos pontos onde um obstáculo de origem epistemológica histórica intervém reforçado por um obstáculo de uma outra origem, em particular um obstáculo de origem didática”* (p. 95).

Estudando os obstáculos didáticos, Artigue identificou alguns mecanismos produtores de obstáculos, tais, como: *“a generalização abusiva; a regularização formal abusiva; a fixação em uma contextualização ou uma modelização* *familiares; o amálgama de noções sobre um suporte dado”* (BELLEMAIN & LIMA, 2002, p. 19).

Dos casos acima, Barbosa (2002) apresenta exemplos das duas primeiras situações porque estão relacionados a conhecimentos matemáticos que ele trabalha nas séries iniciais do Ensino Fundamental:

> Como exemplo de generalização abusiva, pode-se citar o fato de o aluno pensar que o produto será sempre maior que seus fatores. Como exemplo de regularização formal abusiva, a multiplicação dos comprimentos dos lados de um paralelogramo com o intuito de obter a sua área (BARBOSA, 2002, p. 28).

Duroux (1982), apud Igliori (1999), apresenta a seguinte explicação em relação ao obstáculo:

> Um obstáculo é um conhecimento, uma concepção, não uma dificuldade ou falta de conhecimentos. Este conhecimento produz respostas adaptadas num certo contexto freqüentemente reencontrado. Mas ele engendra respostas falsas fora deste contexto (IGLIORI, 1999, p. 101).

Para Henry (1991) *“um obstáculo se manifesta então por seus erros, mas estes erros não devido ao acaso. Passageiros, irregulares, eles são reproduzíveis, persistentes”* (p. 4). Nessa perspectiva, esse autor apresenta a seguinte interpretação do erro:

> o erro seria a expressão ou a manifestação explicita de um conjunto de concepções espontâneas ou pré-construídas, integradas em uma cadeia coerente de representações cognitivas, que se transformam em obstáculos na aquisição e na restrição de novos conceitos. A superação destes obstáculos se torna então o projeto do ato de ensino, e o erro sua passagem obrigatória (HENRY, 1991, p. 4).

Com relação à identificação e superação do obstáculo no processo de ensino-aprendizagem, Perrin-Glorian (1995) evidencia a importância da escolha das variáveis didáticas nas situações propostas ao observar que *“os nós de resistência que são os obstáculos vão necessitar da construção de situações didáticas adaptadas”*, em que *“os conhecimentos colocados em jogo ou* *elaborados numa situação vão depender da escolha das variáveis didáticas"* (p. 86). Essa autora também apresenta a seguinte resposta de Guy Brousseau (1976, p. 179) para a superação do obstáculo:

> Organizar a superação de um obstáculo consistirá em propor uma situação suscetível de evoluir e de fazer evoluir o aluno segundo uma dialética conveniente. Tratar-se-á não de comunicar as informações que se queira ensinar, mas de encontrar uma situação na qual elas são as únicas a serem satisfatórias ou ótimas – entre aquelas às quais se opõem – para obter um resultado no qual o aluno se investiu (BROUSSEAU, p. 179, apud PERRIN-GLORIAN, 1995, p. 87).

Com base na citação acima, Perrin-Glorian afirma que *"a construção de tais situações vai necessitar da identificação de variáveis didáticas pertinentes sobre as quais poderemos eventualmente organizar um salto informacional"*, bem como, evidencia que *"é efetivamente a escolha dessas variáveis que vai tornar o conhecimento considerado otimal"* (p. 87).

Segundo Bellemain & Lima (2002), Artigue indica que as principais funções da noção de concepção, em termos teóricos da didática, são *"evidenciar a pluralidade de pontos de vista possíveis sobre um mesmo objeto matemático e negar 'ilusão de transparência' da comunicação didática, defendida pelas teorias empiristas da aprendizagem"*. Neste sentido, essas funções mostram que distintas concepções *"são mais adaptadas a diferentes classes de problemas e que existe necessariamente uma diferença entre o saber que o ensino deseja transmitir e os conhecimentos que os alunos constróem efetivamente"* (BELLEMAIN & LIMA, 2002, p. 20).

Outro que retoma e aprofunda a noção de concepção é Ballachef (1995), apud Bellemain & Lima (2002). Para esse pesquisador, *"o conhecimento de um sujeito sobre um objeto matemático diz respeito a suas diferentes concepções, mobilizadas em diferentes momentos, na resolução de diferentes problemas"* (BELLEMAIN & LIMA, 2002, p. 21).

De acordo com Bellemain & Lima, as abordagens de Artigue e Ballachef tendem a confirmar e aprofundar uma interdependência entre concepção e situação, em que, para Artigue (1990, p. 270),

> a concepção é um objeto local, intimamente associado ao saber em jogo e aos diferentes problemas em cuja resolução ela intervém; ela vai se constituir em um instrumento tanto para a análise do saber e a elaboração de situações didáticas, quanto para a análise dos comportamentos do alunos (BELLEMAIN & LIMA, 2002, p. 21).

Bellemain & Lima (2002) evidenciam, ainda, a seguinte contribuição da análise histórica-epistemológica ao estudo das concepções:

> A análise histórica-epistemológica traz subsídios extremamente ricos ao estudo de concepções, uma vez que a gênese dos conceitos matemáticos faz intervir muitas dessas diferentes concepções, na tentativa de resolução de problemas de naturezas distintas, e dispondo de ferramentas conceituais diversas no curso da história (p. 23).

1.3 – As grandezas geométricas

Nesta etapa do nosso trabalho, faremos algumas reflexões sobre os aspectos epistemológicos e didáticos relativos às grandezas geométricas, tendo como base as pesquisas anteriores da Educação Matemática, relacionadas ao ensino/aprendizagem dessas grandezas, destacando-se aquelas que investigam os conceitos de comprimento e de área.

Inicialmente, é pertinente entender como os conceitos de comprimento e perímetro inserem-se no campo conceitual das grandezas. Para isso, consideramos os esclarecimentos apresentados por Barbosa (2002), quando explica que o conceito de perímetro é

> uma instância da grandeza comprimento, por sua vez, participante do campo conceitual da grandeza área. Essas duas grandezas, juntamente com o volume e o ângulo, formam o que chamamos de grandezas geométricas, inseridas dentro de um campo maior, denominado de grandezas (p. 30).

De acordo com Bellemain e Lima (2002) sobre essa relação dos conceitos comprimento e área, enquanto grandezas:

> O conceito de área de superfícies planas é considerado aqui como um componente do campo conceitual (Vergnaud, 1990) mais amplo das grandezas geométricas. Deste campo conceitual fazem parte outras grandezas geométricas, tais como: comprimento e volume; os conceitos de perímetro e de capacidade; os números; as figuras geométricas; as fórmulas de área e de volume; e assim por diante (BELLEMAIN & LIMA, 2002, p. 38).

Concordamos com esses pesquisadores quando afirmam que se trata de um campo conceitual complexo, necessitando de uma análise profunda, pois eles evidenciam que

> as grandezas geométricas revelam-se campos conceituais complexos, cuja análise aprofundada é necessária para que se possa compreender as dificuldades de aprendizagem dos alunos, intervir de maneira pertinente e favorecer o estabelecimento das articulações entre as múltiplas concepções possíveis dos conceitos relativos às grandezas (BELLEMAIN & LIMA, 2002, p. 23).

De acordo com Bellemain e Lima (2002), os estudos de Perrin-Glorian & Douady (1988) e Balacheff (1988) propuseram a classificação das concepções de área em dois pólos: as concepções geométricas e as concepções numéricas. Alguns alunos desenvolvem uma concepção forma (ligada ao quadro geométrico) ou uma concepção número (ligado ao quadro numérico) ou ambas, mas, de forma separada uma da outra. As concepções numéricas caracterizam-se como aquelas segundo as quais o aluno considera apenas os aspectos pertinentes para o cálculo, enquanto que as concepções geométricas são aquelas segundo as quais o aluno confunde área e superfície, perímetro e contorno. Os autores supracitados enfatizam que os problemas de área relacionam os quadros numérico e geométrico, sendo necessário estabelecer uma articulação pertinente entre esses dois quadros, na construção do conceito de área.

A partir dessas pesquisas, Douady & Perrin-Glorian (1989) propuseram um modelo didático para o conceito de área de uma superfície plana que leva em conta a noção de quadro. Para Douady (1989),

> um quadro é constituído de objetos de um ramo da matemática, das relações entre esses objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais que o sujeito associa, num dado momento, a esses objetos e relações. Admitimos que as imagens mentais representam um papel importante no funcionamento, como instrumento, dos objetos do quadro (DOUADY & PERRIN-GLORAN, 1989, p. 389)

De acordo com o ponto de vista adotado por Douady & Perrin-Glorian (1989) sobre o conceito de área, há três quadros a diferenciar: o geométrico, o das grandezas e o numérico.

Essas pesquisadoras estabelecem, testam e validam, por meio de uma engenharia didática, as seguintes hipóteses:

- O desenvolvimento, no ensino, do conceito de área como grandeza autônoma favorece o estabelecimento das relações necessárias entre os quadros geométrico e numérico;
- Uma associação precoce de superfície a um número favorece o amálgama entre as diferentes grandezas.

Baseando-se nessas hipóteses, Douady & Perrin-Glorian (1989), apud Lima (1998), apresentam que

> alguns procedimentos didáticos que explicitem tais distinções e, por outro lado, antecedam a construção da medida de área pela comparação de superfícies com procedimentos não numéricos, podem ser experimentados visando a superação das dificuldades de aprendizado do conceito de área (LIMA, 1998, p. 3).

Perrot et al (1998) apresentam os quadros propostos por Douady e Perrin-Glorian da seguinte maneira:

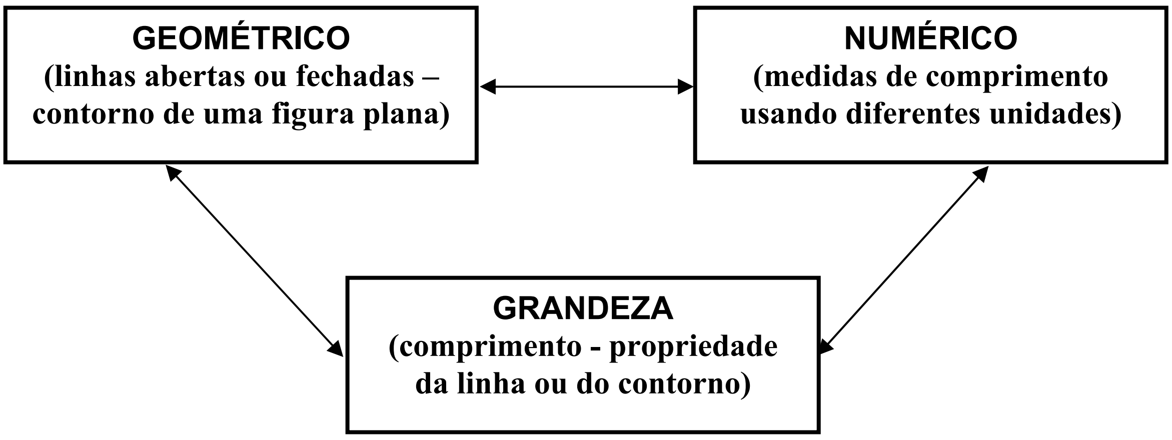
> O **quadro geométrico**, constituído pelas linhas, superfícies. O **quadro das grandezas**, comprimentos e áreas: com processos de comparação bem escolhidos, não sempre numéricos, se

> pode realizar classes de equivalência de linhas, de superfícies; com processos operatórios adequados sobre linhas, superfícies, se pode induzir uma lei interna sobre as grandezas. O **quadro numérico**, consistindo nas medidas do comprimento das linhas e da área das superfícies, que pertencem ao conjunto dos números reais não negativos: linhas ou superfícies pertencendo à mesma classe, tendo mesma grandeza, têm também a mesma medida, qualquer que seja a unidade escolhida (PERROT et al, 1998, p. 5).

Câmara dos Santos (1999) também adota a organização conceitual proposta por Douady e Perrin-Glorian, pois, segundo esse autor, essas pesquisadoras

> defendem o ponto de vista que o processo de ensino-aprendizagem de geometria deveria propiciar a construção dos conceitos de área e perímetro como grandezas, ao invés de se restringir ao simples cálculo de números (CÂMARA DOS SANTOS, 1999, p. 4).

Esse modelo didático para o conceito de área foi retomado para o estudo de outras grandezas geométricas, como, por exemplo, a grandeza comprimento (BARBOSA, 2002) e a grandeza volume (OLIVEIRA, 2002 e BARROS, 2002). Nossa pesquisa também tem suas raízes na abordagem proposta por Regine Douady & Marie Jeanne Perrin-Glorian (1989) considerando, portanto, o comprimento como uma grandeza, o que conduz ao esquema a seguir, inspirado no trabalho de Douady e Perrin-Glorian adaptado ao conceito de comprimento:



Nesta perspectiva, do quadro geométrico participam as linhas abertas ou fechadas – essa última constituindo-se o que chamamos de contorno de uma figura plana, sejam elas poligonais ou não. O comprimento faz parte do quadro das grandezas e caracteriza-se de forma distinta das linhas, pois, diferentes linhas podem possuir o mesmo comprimento (LIMA, 1995). De acordo com Barbosa (2002), *"perímetro é um caso particular da grandeza comprimento, diferenciando-se do objeto geométrico, em si, que é uma linha fechada"* (p. 32). Por último, o quadro numérico é composto das medidas de comprimento usando diferentes unidades.

No nosso trabalho, limitando-se aos conceitos de comprimento e perímetro, também adotamos as seguintes premissas básicas estabelecidas por Barbosa (2002):

> - As situações de aprendizagem devem voltar-se para situações de comparações que permitam a compreensão do conceito de perímetro, enquanto grandeza;
>
> - As situações iniciais de comparações devem ser entre linhas abertas, para evitar possíveis dificuldades nas sobreposições;
>
> - As situações devem permitir a distinção entre os conceitos de contorno e perímetro (BARBOSA, 2002, p. 33).

Na nossa pesquisa, pretendemos, ainda, investigar os tipos de situação que dão significado aos conceitos de comprimento e de perímetro. Os estudos desenvolvidos por Bellemain (2000), que foram realizados tendo como referência, simultaneamente, *"as considerações históricas e sociais,* *matemáticas, psicológicas e didáticas"* (p. 6), indicam três classes de situações problema que dão sentido ao conceito de área: situações de comparação, de medida e de produção de superfícies, caracterizadas abaixo:

> - As **situações de comparação** se situam essencialmente em torno do quadro das grandezas. Quando comparamos duas superfícies somos conduzidos a decidir se elas pertencem ou não a uma mesma classe de equivalência. É claro que, com freqüência, os quadros geométricos e numérico vão ser necessários à resolução dos problemas do comparação, mas sua intervenção em geral é secundária com relação à do quadro das grandezas.
>
> - Nas **situações de medida**, destacam-se o quadro numérico e a passagem da grandeza ao número por meio da escolha de uma unidade. O resultado esperado numa situação deste tipo é um número seguido de uma unidade.
>
> - As **situações de produção** são diferentes das anteriores do ponto de vista da tarefa cognitiva do aluno. Enquanto nas situações de comparação e medida em geral há apenas uma resposta correta para cada situação, as situações de produção, freqüentemente admitem várias respostas corretas. Além disso, apesar da resposta esperada para uma situação de produção ser uma superfície (objeto geométrico), a intervenção dos outros quadros pode ser tão importante quanto a do quadro geométrico (BELLEMAIN, 2000, pp. 7-8).

Nessa pesquisa, busca-se, também, verificar a hipótese didática de que o processo inicial de construção da grandeza comprimento nas séries iniciais é facilitado pela exploração de situações de comparação e de produção, que fortalecem a construção de relações pertinentes entre o quadro geométrico e o das grandezas.

Baseando-se em Bellemain (2000), Barbosa (2002) cita que *"quando comparamos linhas (ou caminhos) teremos que decidir se pertencem, ou não, a uma mesma classe de equivalência"* e, para essa situação, ele esclarece, ainda, que

> estabelecer a relação de equivalência é descobrir se possui, ou não, o mesmo comprimento, para situações com contorno de figuras planas, se possui, ou não, o mesmo perímetro, também permitindo a passagem do quadro geométrico para o quadro das grandezas (BARBOSA, 2002, pp. 33-34).

Outra observação importante é apresentada por Lima (2000), a qual também é válida para a construção do conceito de comprimento, quando argumenta que *"julga-se didaticamente pertinente anteceder a construção da medida de área pela comparação de superfícies com procedimentos não numéricos"* (p. 3).

No processo de escolha das situações de comparação, Bellemain (2000) aduz que se deve considerar algumas variáveis didáticas:

> Na classificação das situações de comparação, consideramos algumas variáveis didáticas, cujos valores diferentes possíveis no contexto do Ensino Fundamental conduzem a favorecer ou bloquear procedimentos de resolução, correspondendo a propriedades distintas do conceito e portanto a invariantes operatórios distintos (BELLEMAIN, 2000, p. 8).

Ela também evidencia a distinção entre problemas de seriação e de comparação:

> Nos problemas de seriação (ordenar mais de duas superfícies do ponto de vista de suas áreas), a transitividade da relação de ordem é necessária, o que não ocorre na comparação de duas superfícies. A tarefa de seriação é portanto mais complexa que a comparação das áreas de duas superfícies (BELLEMAIN, 2000, p. 8).

Concordamos com Barbosa (2002) quando ele afirma que *"podemos estender a questão acima para situações relacionadas com a ordenação de linhas (caminhos), quer sejam abertas ou fechadas, segundo seus comprimentos"* (p. 34).

Ademais, Bellemain indica duas outras variáveis importantes: a primeira, referente à natureza das superfícies a comparar (superfícies quaisquer, figuras geométricas usuais, retângulos, paralelogramos...); a segunda, é com relação ao tipo de papel ou malha, que são usados para desenhar as superfícies (papel branco, quadriculado, pontilhado...).

Para finalizarmos estas considerações sobre as grandezas geométricas, mencionaremos dificuldades/erros conceituais persistentes, descritos em trabalhos de pesquisas anteriores.

Câmara dos Santos (1999), apoiando-se nos estudos desenvolvidos por Gérard Perrot et al (1998), descreve alguns tipos de dificuldades identificadas no processo de ensino-aprendizagem das grandezas geométricas. O primeiro deles diz respeito à

> confusão entre perímetro e área e, da mesma forma, entre contorno e superfície. Além das dificuldades geradas pelo tipo de objeto geométrico apresentado aos alunos – na maioria dos casos figuras prototípicas em posições particulares – esses dois conceitos são apresentados, na classe de matemática, quase ao mesmo tempo (CÂMARA DOS SANTOS, 1999, p. 3).

Apoiando-se em diversas pesquisas (ROGALSKI, 1982; VINH BANG & LUNZER, 1965; HIRSTEIN & AL., 1978; HART, 1981; VERGNAUD & AL., 1983; BALACHEFF, 1988; DOUADY & PERRIN-GLORIAN, 1989 E BALTAR & COMITI, 1993), Baltar (1996), apud Bellemain & Lima (2002), evidenciou tipos de erros variados, etiquetados sob a expressão de que o aluno não dissocia área de perímetro e classificou a distinção entre esses conceitos sob, pelo menos, quatro pontos de vista distintos:

> - **topológico**, segundo o qual os conceitos de área e de perímetro correspondem a objetos geométricos distintos, a área sendo associada à superfície e o perímetro a seu contorno;
>
> - **dimensional**, evidenciando que uma superfície e seu contorno são objetos matemáticos de naturezas distintas no que diz respeito às dimensões, o que traz conseqüências imediatas sobre o uso das unidades adaptadas à expressão das medidas de área e perímetro;
>
> - **computacional**, que corresponde à aquisição das fórmulas de área e perímetro de figuras usuais;
>
> - **variacional**, que consiste na aceitação que área e perímetro não variam necessariamente no mesmo sentido, que superfícies de mesma área podem ter perímetros distintos e vice-versa (BELLEMAIN & LIMA, 2002, p. 4).

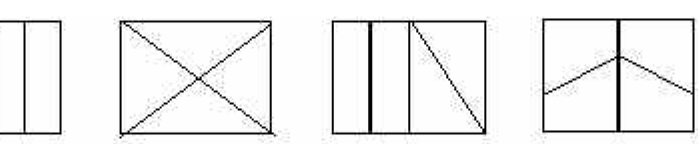
De acordo com Barbosa (2002),

> há de se acrescentar, ao lado da confusão área-superfície, o amálgama que o aluno faz entre o próprio contorno e o perímetro", pois para esse autor, "esses são dois casos típicos em que se requer a passagem do campo geométrico ao campo das grandezas (p. 35).

Uma outra dificuldade apresentada por Câmara dos Santos (1999) diz respeito à confusão entre a grandeza e a medida dessa grandeza:

> É comum encontrarmos alunos estabelecendo que, na ausência de números, não existem grandezas, o que leva à concepção de que o único jeito de comparar grandezas é comparando números. Como exemplo, podemos citar o fato dos alunos afirmarem freqüentemente que um retângulo de área 20 é maior que um outro retângulo de área 15, sem que a 'grandeza área' seja colocada em questão na comparação, limitando-se a uma comparação de números (CÂMARA DOS SANTOS, 1999, p. 3).

Quanto a essa última confusão, Perrot et al (1998) afirma que há *"um constrangimento implícito sobre o que se pode comparar"*. Ele apresenta, como exemplo, as divisões eqüitativas em termos de área de um bolo retangular, apresentadas abaixo, em que são menos aceitas pelos alunos as figuras que foram divididas em partes não-congruentes.



Nos estudos de Câmara dos Santos (1999), ele ainda indica outro tipo de dificuldade:

> A idéia de que somente os segmentos de reta possuem comprimento também está associada a um obstáculo do tipo didático. A utilização da régua como ferramenta privilegiada na medição de comprimentos faz com que os alunos, se não tiverem contato com outras experiências na sala de aula, construam a associação entre comprimento e linha reta, gerando a concepção que 'somente os polígonos têm perímetro, e a única maneira de determiná-lo é apoiando-se nos vértices para medir os lados'. Isso acaba por levar o aluno a identificar como úteis, em uma figura geométrica, apenas os vértices e os lados (CÂMARA DOS SANTOS, 1999, p. 3).

Ademais, Perrot et al (1998) observa que as situações em que *“somente os polígonos ‘particulares’, os que têm um nome e fórmulas, têm também um perímetro e uma área”*, conseqüentemente, reforça no processo de ensino a concepção errônea de que somente esses polígonos possuem perímetro e área (PERROT et AL, 1998, p. 11).

Douady & Perrin-Glorian (1989) identificaram os seguintes erros e dificuldades observados entre alunos do 2º ciclo do ensino fundamental:

> - A superfície unitária sendo uma superfície com certa forma faz com que a possibilidade de medida de uma superfície dependa de S ser efetivamente ladrilhável com elementos daquela forma. Assim, os alunos encontram dificuldade para exprimir a área de um triângulo em cm^2 (centímetros quadrados) dada a impossibilidade de cobri-lo com número finito de quadrados.
>
> - A área é ligada à superfície e não se dissocia de outras características dessa superfície:
>
> - Se o perímetro de uma superfície se altera; sua área também (e reciprocamente).
>
> - Se duas superfícies têm o mesmo perímetro, elas têm a mesma área.
>
> - Estende-se o uso de certas fórmulas a situações em que elas não são válidas: por exemplo, produto de duas “dimensões” para obter a área de um paralelogramo ou o produto das três “dimensões”, no caso de um triângulo (DOUADY & PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 393).

Bellemain & Lima (2002) destacam, ainda, a resistência das dificuldades de dissociação entre as grandezas geométricas, apoiando-se nos trabalhos de Schneider (1991) e Perrin-Glorian (1992), que evidenciam a hipótese de existência de obstáculos epistemológicos e didáticos relativos a esse domínio.

É pertinente, ainda, ressaltar que essas dificuldades de relações e dissociação entre os conceitos de área e perímetro estão presentes, também, nas concepções de professores do Ensino Fundamental. Com efeito, Tierney & al (1990), apud Bellemain e Lima (2002), e Duarte & Santos (1997), ao estudarem os conhecimentos de futuros professores, mostram que os mesmos utilizam *“teoremas em ação”* errôneos, segundo os quais área e perímetro variam no mesmo sentido.

1.4 – Sobre o conceito de comprimento

Antes de abordamos a evolução do conceito de comprimento, que faz parte do quadro das grandezas, faremos breves considerações acerca da gênese de alguns conceitos que fazem parte do quadro geométrico, mas que têm profundas relações com o quadro das grandezas.

Com relação à origem dos primeiros conhecimentos geométricos, Gerdes (1992), citando Eves (1969), afirma que: "*as primeiras considerações geométricas do Homem parecem ter tido a sua origem em observações simples que provêm da habilidade humana de reconhecer forma física e de comparar figuras e tamanhos"* (GERDES, 1992, p. 15).

Assim, a geometria surge da necessidade do homem como uma ciência experimental, pois, foi no confronto com o meio ambiente que o Homem Primitivo chegou aos primeiros conhecimentos geométricos.

Mais especificamente sobre comprimento e perímetro, um tipo de problema que teve influência importante na origem dessas noções foi a medida de terras em civilizações, tais, como as dos egípcios, dos babilônios ou, também, dos chineses, na Antigüidade. Ao longo de sua história, a humanidade teve de compreender o espaço e corpos que a cercavam, descobrindo meios de classificar e/ou calcular as medidas dessas grandezas para, com isso, melhorar as suas condições de vida e de trabalho.

Segundo Barbosa (2002), é "*pertinente considerar o conceito de perímetro num continuum de contexto, que vai das situações do mundo físico, essencialmente empírico, às elaborações abstratas, de características formais, no âmbito da Matemática*" (p. 38). Quanto ao mundo físico, esse autor esclarece que

> comparar o comprimento de caminhos ou de linhas, comparar distâncias entre dois locais são, sem dúvida, operações bastante primitivas, realizadas pelo homem nas várias culturas,

> desde épocas imemoráveis. A dimensão perceptiva nesses estágios elementares do conhecimento, sem dúvida, desempenhou um papel preponderante. A noção de perímetro, como comprimento da linha fechada que forma o contorno de uma região plana, decerto acompanha a evolução do conceito de comprimento de caminhos. Como exemplo de possíveis situações práticas, em sociedades primitivas que podem ter favorecido o surgimento da noção de perímetro, destacamos: confecção de cestos de palha; confecção de peneiras, confecção de redes de pesca e outros mais (BARBOSA, 2002, p. 38).

Prosseguindo em seu estudo, Barbosa afirma que *“uma operação muito primitiva no desenvolvimento do conhecimento humano sobre o mundo físico é a da medição de grandezas”*. Essa operação, segundo esse autor, reveste-se de significativa complexidade, pois inclui: a) a escolha da grandeza a medir; b) a seleção de uma unidade de medida; c) a escolha do instrumento ou meio de medição; d) a produção da medida da grandeza. Acrescenta, ainda, que *“essa medida (da grandeza) é um número, nos casos mais simples, significando ‘o número de vezes que a unidade cabe na grandeza a medir’”* e que, conseqüentemente, *“resulta desse fato a íntima relação existente, ao longo da evolução do pensamento, entre grandeza e número”*. Ainda de acordo com esses estudos, *“desde cedo a noção de perímetro – comprimento do contorno – vai ser acompanhada do conceito de medida desse mesmo comprimento”* (BARBOSA, 2002, p. 39).

No tocante à prática da mensuração na atividade humana, relacionada ao campo da geometria, Eves (1992) cita, como registros, *“algumas tábuas de argila cozida desenterradas na Mesopotâmia e que se acredita datarem, pelos menos em parte, do tempo dos sumérios, por volta do ano 3000 a. C”*. Esse autor acrescenta, ainda, que os babilônicos no período 2000-1600 a.C. tinham conhecimento das regras gerais para o cálculo de área, bem como, sabiam que o comprimento de uma circunferência era, aproximadamente, o triplo de seu diâmetro e a área do círculo era um doze avos da área do quadrado de lado igual ao comprimento da circunferência desse círculo, tomando um valor aproximado para $\pi = 3$ (EVES, 1992, p. 5).

Ainda segundo Eves (1992), *“os gregos transformaram a geometria empírica, ou científica, dos egípcios e babilônios antigos no que poderíamos chamar de geometria ‘sistemática’ ou ‘demonstrativa’”* (EVES, 1992, p. 7).

De acordo com Boyer (1974), Arquimedes preocupou-se em verificar as possíveis dimensões do universo e *“começou com certas avaliações que tinham sido feitas em seu tempo sobre os tamanhos da Terra, da Lua e do Sol, e as distâncias da Lua, Sol e estrelas”* (p. 104).

Arquimedes, segundo Boyer (1974), contribuiu para o avanço da geometria plana quando:

> Ao avaliar a razão da circunferência para o diâmetro de um círculo novamente Arquimedes provou sua habilidade em computação. Começando com o hexágono regular inscrito, ele calculou os perímetros de polígonos obtidos dobrando sucessivamente o número de lados até chegar a noventa e seis lados. Seu processo iterativo para esses polígonos relacionava-se com o que às vezes se chama algoritmo de Arquimedes. Escreve-se a seqüência P_n, p_n, P_{2n}, p_{2n}, P_{4n}, p_{4n},... onde P_n e p_n são os perímetros dos polígonos regulares, circunscrito e inscrito, de n lados. Começando do terceiro termo, calcula-se cada termo a partir dos dois precedentes tomando alternadamente a média harmônica e a média geométrica (BOYER, 1974, p. 93).

Ainda a respeito do cálculo do perímetro, Eves (1992) evidencia que *“Arquimedes inaugurou o clássico método dos perímetros para calcular π, e achou que π está situado 223/71 e 22/1, ou que, com duas casas decimais, π é dado por 3,14”*. A partir desse procedimento de Arquimedes, buscou-se, ao longo da história, chegar a valores cada vez mais aproximados de π (EVES, 1992, p. 10).

Nos estudos de Barbosa (2002) é enfatizado que, com o avanço *“da epistemologia da Matemática, foi possível ter maior compreensão da relação entre a geometria e o mundo físico”*. Esse autor esclarece que

> Houve a compreensão de que não há uma única geometria. Há, sim, geometrias, cada uma delas oferecendo um modelo abstrato – entes de razão estruturados por meio de regras lógicas –, que pode ser traduzido na linguagem de outros contextos, inclusive no mundo físico. Nesse sentido, o modelo da geometria euclidiana, um dos berços da própria Matemática, deixou de ser a única 'geometria do real'. A despeito disso, permaneceu a mais importante no que tange à formação matemática na escola e, em vista disso, continuaremos a empregar, no singular, o termo 'geometria', entendendo-se que nos referimos à geometria euclidiana. O advento da topologia, no Século XIX, por outro lado, enriqueceu a Matemática com um conjunto de novos conceitos e estruturas abstratos, intimamente relacionados com a geometria (BARBOSA, 2002, p. 42).

Nesse momento, após fazermos algumas considerações sobre a evolução histórica dos conceitos de comprimento e de perímetro, apresentaremos uma abordagem desses conceitos, no âmbito da Matemática, tendo como base teórica a formulação apresentada no trabalho de Barbosa (2002).

Iniciaremos por definir os conceitos de curva plana aberta e curva plana fechada. De acordo com Barbosa *"Uma curva plana fechada e sem auto-interseções é dita uma curva simples"* e que *"as curvas simples aparecem como o contorno de uma região plana"*. Sobre o conceito de contorno, esse autor assim explica:

> iniciaremos com a noção de **ponto interior** de uma região no plano euclidiano. Um ponto P é interior à região Ω, se pudermos definir um círculo de centro em P, e raio tão pequeno que tal círculo fique contido em Ω. Se, agora, reunirmos todos os pontos interiores de Ω teremos o **interior do Ω**. Por outro lado, diremos que Q é um **ponto exterior a Ω**, se pudermos definir um círculo de centro, em Q, e raio tão pequeno que tal círculo não tenha nenhum ponto em comum com Ω. Reunindo os pontos exteriores a Ω, formamos o **exterior de Ω**. Dada um região Ω, um ponto do plano é um **ponto fronteira de Ω**, se não é interior nem exterior a Ω. Dito de outra forma, um ponto T é fronteira de Ω se qualquer círculo que definamos com centro em T, por pequeno que seja, possui pontos em Ω e pontos que não estão em Ω. A fronteira de Ω é a reunião dos pontos fronteira de Ω. Costumamos chamar, também, de **contorno** Ω à fronteira de Ω (BARBOSA, 2002, p. 43).

Ele refere-se a comprimento como outro conceito importante, apresentando a seguinte definição:

> uma função comprimento, definida num conjunto Λ, de curvas planas, amplo o suficiente para incluir as curvas tratadas na matemática elementar, função essa assumindo valores no conjunto dos números reais positivos e com as propriedades de aditividade e invariância por isometrias. Sendo assim, dada uma curva λ pertencente a Λ, fica definido o comprimento de λ (BARBOSA, 2002, pp. 43-44).

Por fim, esse autor define que o *"perímetro de uma curva fechada é o seu comprimento"*, além disso, *"no caso de uma curva fechada, que é o contorno de uma região plana, diremos que o perímetro desse contorno é o perímetro da região, ou seja, o comprimento do contorno da região"*; quando temos a expressão *"'perímetro de uma figura geométrica plana', pode ser tomada como o comprimento da linha ou como o comprimento do contorno da região plana definida pela linha"* (BARBOSA, 2002, p. 44).

1.5 – Contribuições da teoria dos Campos Conceituais.

Nesta etapa do nosso trabalho abordaremos alguns aspectos didático-cognitivos sobre a aprendizagem de conceitos matemáticos apresentando alguns elementos da teoria dos campos conceituais, proposta por Gérard Vergnaud (1993). De acordo com Pais (2001), essa teoria *"foi desenvolvida para estudar as condições de compreensão do significado do saber pelo aluno"* sendo que *"uma de suas propostas é repensar as condições da aprendizagem conceitual, de forma que essa se torne mais acessível à compreensão do aluno"* (PAIS, 2001, p. 51).

É importante ressaltar que essa teoria não foi criada especificamente para o campo da Matemática, embora os estudos iniciais tenham sido relacionados às estruturas aritméticas elementares. Ela tem oferecido subsídios importantes para muitas pesquisas relativas ao processo de aquisição do conhecimento e competências em vários campos das ciências e tecnologia, e vem sendo considerada um dos pilares da corrente francesa da Didática da Matemática.

Segundo Vergnaud (1993), a teoria dos campos conceituais é uma teoria cognitivista e seu objetivo é

> propiciar uma estrutura às pesquisas sobre atividades cognitivas complexas, em especial com referência às aprendizagens científicas e técnicas. Trata-se de uma teoria psicológica do conceito, ou melhor, da conceitualização do real, que permite situar e estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos, do ponto de vista de seu conteúdo conceitual. Ela também possibilita analisar a relação entre os conceitos enquanto conhecimentos explícitos e as invariantes operatórias implícitas nos comportamentos dos sujeitos em determinada situação, bem como aprofundar a análise das relações entre significados e significantes. Os exemplos foram colhidos em diversos campos conceiturais: as estruturas aditivas, as estruturas multiplicativas, a lógica das classes, ou a álgebra (VERGNAUD, 1993, p. 1).

Franchi (1999) evidencia que essa proposta de Vergnaud caracteriza *"uma teoria pragmática, ou seja, que faz apelo à noção de situação e das ações dos sujeitos nestas situações"* (p. 163).

A referida teoria faz uso da noção de situação e da ação dos indivíduos diante delas, visando à construção de princípios que nos levem a relacionar competências e concepções, constituídas nessas situações. Segundo Magina et al (2001),

> A competência é traçada pela ação do aluno diante das situações (no caso, resolução de problemas), e as concepções dos alunos podem ser traçadas por suas expressões verbais ou outras representações simbólicas (tais como a escrita ou o gesto) (MAGINA et AL., 2001, p. 13).

Vergnaud (1993) observa que um conceito não pode se restringir à sua definição, principalmente se o interesse está no ensino e na aprendizagem. *"É também através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança"* (p. 1).

Ao considerar a ação do sujeito, Vergnaud (1993) distingue duas classes de situações: a primeira, na qual *"o sujeito dispõe, no seu repertório, em dado momento de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, das* *competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação"*; uma segunda classe, *"em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas frustradas, levando-o eventualmente ao sucesso ou ao fracasso"* (VERGNAUD, 1993, p. 2).

Na primeira classe de situações são observados *"comportamentos amplamente automatizados, organizados por um só esquema"*, enquanto que, na segunda classe são utilizados, sucessivamente, *"vários esquemas, que podem entrar em competição e que, para atingir a solução desejada, devem ser acomodados, descombinados e recombinados"*. Assim, o conceito de *"esquema"* se apresenta como importante às duas classes de situações, mas funciona de modo distinto nos dois casos. Vergnaud (1993) chama de *"esquema **a organização invariante do comportamento para uma classe de situações dada**"* (p. 2) e afirma que é através desses esquemas que os conhecimentos-em-ação do sujeito devem ser investigados, pois são os elementos cognitivos que fazem com que a ação do sujeito seja operatória.

Esse autor ainda acrescenta que *"[...] Os conhecimentos contidos nos esquemas, os teoremas-em-ação e os conceitos-em-ação são designados pelo termo invariantes operatórios"* (VERGNAUD, 1993, p. 3).

De acordo com Maia (2000), *"o esquema precisa integrar a dimensão implícita do conhecimento e que a noção de invariante operatório vem cumprir este objetivo"*. Essa autora apresenta a seguinte distinção entre *"teoremas-em-ação"* e *"conceitos-em-ação"*, os dois tipos de invariantes operatórios:

> 'Teorema em ação' é uma proposição tida, pelo sujeito, como verdadeira. De maneira geral, são 'teoremas circunscritos' a situações específicas que guiam a atividade. Como tal, nem sempre eles são generalizáveis. Por sua vez, o 'conceito em ação' corresponde à identificação da informação pertinente ao tratamento da situação. Os 'conceitos em ação' não são passíveis de veracidade ou falsidade por não serem proposições, e sim, atribuições de propriedades de objetos ou

> de situações. Enquanto o 'conceito em ação' permite a identificação dos elementos à resolução do problema, a solução propriamente dita, depende da ativação de 'teoremas em ação' (MAIA, 2000, p. 8-9).

Continuando a questão do conceito na educação escolar, Pais (2001) ressalta que *"há uma tendência tradicional na prática de ensino da matemática que valoriza, em excesso, a função da memorização de fórmulas, regras, definições, teoremas e demonstrações"*. Afirma também a urgente necessidade da *"superação e a abertura de espaços para uma educação mais significativa"*, que venha atender as exigências da sociedade atual, em que justifica a importância de estudar a formação dos conceitos. Esse autor ainda evidencia

> a diferença entre o sentido essencial do conceito e sua formalização através de uma definição. Aprender o significado de um conceito não é permanecer na exterioridade de uma definição, pois a sua complexidade não pode ser reduzida ao estrito espaço de uma mensagem lingüística. [...] Por exemplo, a definição de uma figura geométrica, por si só, não pode traduzir a essência do conceito correspondente (PAIS, 2001, p. 56).

De acordo com Pais (2001), *"no plano didático, não podemos ter a ilusão de que os conceitos matemáticos possam ter de início, para o aluno, o significado abstrato, geral e universal que lhe remete ao saber científico"* (pp. 56-57).

Outro fato importante observado por Vergnaud (1993) é que *"a operacionalidade de um conceito deve ser provada através de situações variadas"*, sendo função do pesquisador fazer a análise de *"uma grande variedade de comportamentos e esquemas para compreender em que consiste, do ponto de vista cognitivo, este ou aquele conceito"*.

Sobre esse processo de compreensão de um conceito, Magina et al (2001) assim se pronunciou:

> Em geral, pesquisadores e professores têm dificuldade em entender que a compreensão de um conceito, por mais simples que seja, não emerge apenas de um tipo de situação, assim como uma simples situação sempre envolve mais que um único

> conceito. [...]. Os conceitos matemáticos traçam seus sentidos a partir de uma variedade de situações, e cada situação normalmente não pode ser analisada com a ajuda de apenas um conceito. Em outras palavras, nem um só conceito nem uma situação isolada dá conta do processo de aquisição de um conhecimento. É por este motivo que nós, em sintonia com Vergnaud, propomos estudar os conceitos matemáticos não como conceitos isolados, mas como conjuntos de conceitos Inter-relacionados com conjuntos de situações (MAGINA et AL, 2001, p. 8-9).

Vergnaud caracteriza um conceito como uma tríade (S, IO e E), ou seja, três conjuntos interconectados:

> **S**: conjunto de situações em que o sentido é constituído (a referência);
>
> **IO**: conjunto de invariantes operatórios (mecanismos utilizados pelo sujeito na resolução do problema) que intervêm nos esquemas de tratamento dessas situações (o significado);
>
> **L**: conjunto de representações lingüísticas ou não lingüísticas, usadas para representar, simbolicamente, o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento do conceito (o significante).

Relacionando a tríade proposta por Vergnaud, Pais (2001) afirma que *"tanto na dimensão prática como na teórica, é preciso considerar o uso da linguagem e, em particular, dos símbolos que representam os conceitos estudados" (p. 57)*.

Segundo esse autor, *"o objetivo dessa interpretação é que o tratamento didático possa contribuir para que o aluno se aproxime da dimensão conceitual, característica do saber escolar e científico"*, com a finalidade de atingir níveis aceitáveis de generalidade e abstração, constituindo-se como tarefa didática, *"partir do conhecimento do aluno e favorecer as condições de acesso ao saber escolar e científico"* (PAIS, 2001, p. 57).

Com relação à formação do conceito, Pais (2001) afirma que é possível perceber, através da teoria dos campos conceituais, *"a complexidade pertinente à cadeia de formação de conceitos"* (p. 47). Complementando, esse autor apresenta a seguinte síntese do criar e recriar o conceito:

> Os conceitos são criados e recriados, tanto pelos seus criadores originais, no território da ciência, como por outros que se dispõem a apreendê-los e transformá-los. Desta forma, a aprendizagem de um conceito representa a compreensão, tanto quanto for possível, da totalidade contida nessa síntese e esta apreensão envolve a relação entre o todo e suas partes (PAIS, 2001, p. 61).

Vergnaud (1990), apud Duarte (2002, p. 47), define um campo conceitual como *"... o espaço de problemas ou situações problema cujo tratamento envolve os conceitos e processos de vários tipos de estreita conexão"*.

Outra definição de campo conceitual é apresentada por Magina et al (2001), quando afirma que

> um campo conceitual é definido como um conjunto de situações cuja apropriação requer o domínio de vários conceitos de naturezas diferentes. Essas situações (S) referem-se às realidades, que são trabalhadas pela criança a partir do reconhecimento de seus invariantes (I) que, por sua vez, são expressos por um conjunto de representações simbólicas (R) (MAGINA ET AL, 2001, p. 20).

Por fim, na nossa pesquisa estamos também nos baseando na noção de campo conceitual proposta por Gérard Vergnaud (1993), considerando que o conceito de comprimento está articulado a um conjunto de outros conceitos, do qual fazem parte os conceitos de área, de volume e de ângulo, que formam as grandezas geométricas inseridas dentro de um campo conceitual mais amplo, denominado grandezas. Entre esses conceitos se partilham propriedades, situações e representações com variados graus de identidade ou de articulação,

1.6 – O uso de material manipulativo como instrumento didático.

1.6.1 – Considerações iniciais sobre material manipulativo.

Neste momento, faremos algumas reflexões sobre o significado do termo *“manipulativo”,* também denominado por outros autores como *“concreto”*, procurando delimitar, mais especificamente, o que, nesta pesquisa, estamos chamando de material manipulativo.

Identificamos que alguns autores se referem ao termo *“concreto”,* numa dimensão material, quando se trata de algo manipulável e palpável, denominando-o de *“material concreto”* ou *“material manipulativo”*. No entanto, outros autores se referem ao termo *“concreto”* numa dimensão mais ampla, que pode ser algo material ou não desde que tenha seu conteúdo de significações.

Na dimensão material, Barbosa (2003) chama de material concreto

> a um ente* qualquer que possa ser manipulado, podendo ser de ordem natural ou artificial. O natural é aquele que existe espontaneamente, sendo gerado pela ação na natureza. É o caso de uma pedra, uma flor, uma fruta, etc. O artificial é aquele que é gerado pela produção do homem. É o caso de um lápis, uma folha de papel, um pedaço de fio, um cordão, etc. (BARBOSA, 2003, p. 7).

De acordo com esse autor, é a situação em que o material está inserido que vai definir se assume ou não o caráter de material pedagógico. Nesse caso, *“um material concreto pode ser considerado como um instrumento pedagógico, desde que ele esteja sendo usado com propósito didático”*. Embora, ele também afirme que *“há o material que foi construído com fim específico de favorecer o processo ensino-aprendizagem, logo cabendo ser denominado de material pedagógico, independente do contexto que o envolva”* (p. 8). Sendo que para esse último caso, são citados os seguintes exemplos de materiais pedagógicos: o dourado, o multi-base, o ábaco, o contador e peças retangulares criativas.

Para melhor explicar a diferença de um ente que ora é um material concreto de uma situação cotidiana ora é um material pedagógico, Barbosa (2003) ilustra essa diferença relatando as seguintes situações:

> Numa situação cotidiana, quando um indivíduo conta bananas ou laranjas na feira, essas frutas são representantes de material concreto, mas não sendo pertinente considerá-las como materiais pedagógicos, mesmo que contar seja uma ferramenta do saber escolar, não devem ser consideradas como 'entes pedagógicos'. Por outro lado, se essas frutas são contadas com fins didáticos, seja em um ambiente pedagógico como a escola, ou até mesmo fora da escola, mas que se caracterize como uma atividade que tenha um fim pedagógico, é apropriado que sejam consideradas como 'entes pedagógicos'. É nessa situação cotidiana que se manifesta à situação que podemos chamar de situação concreta natural. [...], canudos plásticos numa lanchonete estão associados a sua utilidade para que foi concebido originalmente, isto é, servir para que alguém beba um líquido qualquer. Em um ambiente em sala de aula, muitas vezes são usados como instrumentos didáticos, portanto assumem esse caráter de material pedagógico. Seguindo o mesmo sentido poderia ser citado o palito de picolé (BARBOSA, 2003, p. 9).

Enfim, segundo esse autor, *"há os materiais pedagógicos convencionais que são aqueles que foram concebidos com fins didáticos, como é o caso do material dourado"*, mas, além desses, existem, também, *"os não convencionais que participariam todos os entes que passam a ser usados com fins pedagógicos, desde pedrinhas até frutas e outros elementos quaisquer"* (BARBOSA, 2003, p. 9).

Agora, ao considerar o termo *"concreto"* numa dimensão mais ampla, alguns autores (FIORENTINI & MIORIM, 1990; MACHADO, 1995; SMOLE, 1996; FARIAS, 1997) observam que o concreto não é necessariamente um material em si, podendo ser também uma situação que seja significativa para a criança. Fiorentini & Miorim (1990), ao analisarem o uso de materiais concretos no ensino da matemática, afirmam que *"o concreto para a criança não significa necessariamente os materiais manipulativos, mas as situações que a criança tem que enfrentar socialmente"* (p. 2).

Nessa dimensão do termo *"concreto"*, podemos também considerar o que Machado (1995), apud Smole (1996), evidencia:

> Em seu uso mais freqüente, ele se refere a algo material manipulável, visível ou palpável. Quando, por exemplo, recomenda-se a utilização do material concreto nas aulas de matemática, é quase sempre este o sentido atribuído ao termo concreto. Sem dúvida, a dimensão material é uma importante componente na noção de concreto, embora não esgote o seu sentido. Há uma outra dimensão do concreto igualmente importante, apesar de bem menos ressaltada: trata-se de seu conteúdo de significações (MACHADO apud SMOLE, 1996, p. 171).

Para exemplificar essa segunda dimensão, Farias (1997) apresenta que uma situação-problema ou uma história, apesar de não se constituir um material concreto, pode *"contribuir para a compreensão de conceitos matemáticos, revestindo de significações um determinado conteúdo, revelando sua concretude"* (p. 48).

Smole (1996), fazendo referência à citação, de Machado (1995), destacada acima, afirma que *"o concreto, para poder ser assim designado, deve contemplar também um conteúdo de significações"* (p. 171).

A respeito do conteúdo de significações, Schlieman (1992), apud Farias (1997), nos alerta que *"não é o uso específico do material concreto mas, sim, o significado da situação, as ações da criança e sua reflexão sobre essas ações que são importantes na construção do conhecimento matemático"* (p. 48). Barbosa (2003), procurando estabelecer uma relação entre aquilo que é significativo e o material concreto, ele admite que nem sempre é o material que torna a situação didática mais significativa, apontando que a própria fala pode ter um teor de significado superior ao material em si. Nessa perspectiva, o material é muito mais o provocador da situação, mas, a fala (a explicação) é que torna a situação didática significativa.

Concluindo essas reflexões iniciais, é importante ressaltar que em nossa pesquisa usamos o termo “material manipulativo” considerando a dimensão material do termo “concreto”. No nosso caso, não se trata do uso de materiais pedagógicos convencionais, mas de materiais não convencionais, pois, utilizamos entes como palito, fio, cordão e arame para representar linhas e contornos, assumindo um caráter pedagógico por terem sido explorados com fins didáticos a partir de situações-problema, possibilitando que os alunos refletissem sobre suas ações, gerando, assim, a construção de significados.

1.6.2 – Reflexões sobre alguns estudos relativos ao uso de material manipulativo.

No nosso levantamento bibliográfico verificamos que a idéia de utilizar materiais manipulativos nas aulas de matemática não é recente e que muitas pesquisas já foram realizadas no sentido de investigar a influência de tais materiais no processo de ensino-aprendizagem.

Segundo Fiorentini & Miorim (1990), até o século XVI *“a aprendizagem do aluno era considerada passiva, consistindo basicamente em memorização de regras, fórmulas, procedimentos ou verdades localmente organizadas”* (p. 2) e o papel do professor era o de expositor e transmissor de um conhecimento pronto e acabado, em que o uso de materiais nas aulas era considerado como

> pura perda de tempo, uma atividade que perturbava o silêncio ou a disciplina da classe. Os poucos que os aceitavam e utilizavam o faziam de maneira puramente demonstrativa, servindo apenas de auxiliar a exposição, a visualização e memorização do aluno. Exemplos disso são: o flanelógrafo, as réplicas grandes em madeira de figuras geométricas, desenhos ou cartazes fixados nas paredes... Em síntese, estas constituem as bases do chamado ‘Ensino Tradicional’ que existe até hoje em muitas de nossas escolas (FIORENTINI & MIORIM, 1990, p. 2).

Esses autores destacam que, já no século XVII, esse tipo de ensino da matemática era questionado, pois, Comenius (1592-1671), em sua *obra "Didática Magna"* dizia que *"...ao invés de livros mortos, por que não podemos abrir o livro vivo da natureza? Devemos apresentar a juventude as próprias coisas, ao invés das suas sombras"*. Nessa obra ele já recomendava que, nas aulas, fossem aplicados recursos, os mais diversos, para *"desenvolver uma melhor e maior aprendizagem"* (p. 2).

Com relação ao século XVIII, Fiorentini & Miorim (1990) afirmam que Rousseau (1727-1778), por

> considerar a Educação como um processo natural do desenvolvimento da criança, ao valorizar o jogo, o trabalho manual, a experiência direta das coisas, seria o precursor de uma nova concepção de escola. Uma escola que passa a valorizar os aspectos biológicos e psicológicos do aluno em desenvolvimento: o sentimento, o interesse, a espontaneidade, a criatividade e o processo de aprendizagem, às vezes priorizando estes aspectos em detrimento da aprendizagem dos conteúdos (FIORENTINI & MIORIM, 1990, p. 3).

Segundo Smole (1996), nos séculos XVIII e XIX, com a nova concepção de educação e de homem, surgem, primeiramente, as propostas de Pestalozzi (1746-1827) e de seu seguidor Froëbel (1782-1852), os pioneiros na configuração da *"escola ativa"*. Eles *"acreditavam que uma ampla atividade por parte dos jovens seria o principal passo para uma educação ativa"*. Na concepção desses dois pesquisadores *"as descrições deveriam preceder as definições e os conceitos nasceriam da experiência direta e das operações que o aprendiz realizava sobre as coisas que observasse ou manipulasse"* (SMOLE, 1996, p. 170).

Ainda de acordo com Smole, mesmo que esses dois pensadores citados acima preconizem o método ativo, só *"a partir do movimento da 'Escola Nova', trazido por John Dewey (1859-1952), que as preocupações com um 'método* *ativo' de aprendizagem ganharam força"* e que *"pesquisadores como Maria Montessori (1870-1952) e Decroly (1871-1932), inspirados nos trabalhos de Dewey, Pestalozzi e Froëbel, criaram inúmeros jogos e materiais que tinham como objetivo melhorar o ensino da matemática"* (SMOLE, 1996, p. 170).

Esse autor também ressalta que é importante lembrar que os resultados da Escola de Genebra – que nasceu das pesquisas de Jean Piaget – *"ganharam o mundo com suas teorias sobre a aprendizagem da criança"* e, ainda, que muitos de seus seguidores, como Dienes, por exemplo, tentaram transferir os resultados dos estudos piagetianos para a escola, através de materiais que são amplamente divulgados até os dias atuais, como os Blocos Lógicos. Entretanto, essa autora ressalta que:

> os materiais didáticos há muito vêm despertando o interesse dos professores e, atualmente, é quase impossível que se discuta o ensino da matemática sem fazer referência a esse recurso. No entanto, a despeito da sua função para o trabalho em sala de aula, seu uso não pode ser irrefletido. Uma das justificativas comumente usadas para o trabalho com materiais didáticos nas aulas de matemática é a de que tal recurso torna o processo de aprendizagem significativo (SMOLE, 1996, 170).

Na avaliação dos trabalhos desenvolvidos por Decroly, Montessori e Piaget, feita por Castelnuvo (1970), apud Fiorentini & Miorim (1990), encontramos as seguintes comparações:

> Castelnuvo (1970) denomina o método Decroly de 'ativo – analítico' enquanto que o de Montessori de 'ativo – sintético' (sintético porque construtivo). Em ambos os métodos faltam, segundo Castelnuvo, uma 'certa coisa' que conduz a criança à indução própria do matemático. É com base na teoria piageteana que aponta para outra direção: A idéia fundamental da ação é que ela seja reflexiva... 'que o interesse da criança não seja atraído pelo objeto material em si ou pelo ente matemático, senão pelas operações sobre o objeto e seus entes. Operações que, naturalmente, serão primeiro de caráter manipulativo para depois interiorizar-se e posteriormente passar do concreto ao abstrato. Recorrer a ação, diz Piaget, não conduz de todo a um simples empirismo, ao contrário, prepara a dedução formal ulterior, desde que tenha presente que a ação, bem conduzida, pode ser operatória, e que a formalização mais adiantada o é também' (FIORENTINI & MIORIM ,1990, p. 3).

De acordo com Santos (2000) em seus estudos sobre o uso de material concreto, várias pesquisas na área cognitiva têm-se preocupado com as etapas de construção do conhecimento matemático pelas quais a criança passa, como as estratégias por ela utilizadas para entender determinados conceitos e com a forma como esses são discutidos em sala de aula. A Educação Matemática também está incluída nessa tendência quando mobiliza inúmeros recursos visando a ajudar tanto o professor como, também, o aluno no processo de ensino-aprendizagem dos conceitos matemáticos.

No entanto, segundo Fiorentini e Miorim, observa-se que *"o professor nem sempre tem clareza das razões fundamentais pelas quais os materiais ou jogos são importantes para o ensino-aprendizagem da matemática e, normalmente são necessários, e em que momento devem ser usados"* (p. 1). Essa preocupação também é evidenciada por Fossa et al (1998), quando afirma que *"o professor freqüentemente usa o material concreto de forma inadequada como uma peça motivadora ocasional, ou – pior – como uma demonstração feita por ele em que o aluno é um mero espectador"* (p. 13).

Carvalho (1994) considera que *"na manipulação do material didático a ênfase não está sobre objetos e sim sobre as operações que com eles se realizam"* (p. 107). Ao discordar das propostas pedagógicas que propõem o uso de material didático com a mera função ilustrativa, esse autor descreve o exemplo abaixo:

> o professor pede aos alunos que determinem a área de um triângulo, fornecendo-lhes a medida dos lados e depois os manda conferir o resultado, desenhando o retângulo e quadriculando-o. A esta situação contrapõe-se a do professor que fornece (ou os próprios alunos recortam) quadrados de cartolina, propondo que encontrem a relação entre o número de quadrados utilizados nas montagens e as dimensões de algumas figuras construídas com esses mesmos quadrados (CARVALHO, 1994, p. 108).

Quanto aos cuidados que se deve ter no uso de materiais manipulativos em sala de aula, Selva (2003), em sua tese de doutorado, esclarece que

> o uso de manipulativos tem sido proposto em sala de aula como se fosse um fim em si mesmo, sem uma preocupação maior sobre como trabalhar com o material, que princípios se pode trabalhar com ele, quais não se pode, que situações ele abarca, que situações ele não abarca. Ou seja, é necessário uma análise maior sobre a transparência do material (SELVA, 2003, p. 16).

Nos estudos realizados por Hart (1987) e Hart & Sinkinson (1988), apud Selva (2003), com crianças inglesas entre oito e treze anos, sobre a resolução de algoritmo da subtração, esses pesquisadores constataram que *"os alunos não percebiam qualquer relação entre as atividades concretas e a formalização matemática"*, pois os professores também *"não davam uma atenção explícita para que as relações entre os procedimentos no material concreto e a formalização matemática fossem estabelecidas"* (SELVA, 2003, p. 36).

Ao analisar os resultados das pesquisas desenvolvidas por Resnick e Omanson (1987), que avaliaram *"os dois tipos de metodologia para trabalhar os princípios da subtração e evitar os erros já conhecidos relacionados ao algoritmo escrito dessa operação"* (p. 36), Selva apresenta a seguinte conclusão:

> Em nossa análise, talvez um importante papel dos blocos tenha sido, justamente, de suporte auxiliar para a compreensão das quantidades envolvidas e de suas relações, como observado pelos autores. Assim, não é a simples manipulação de objetos que pode garantir aprendizagem, mas a representação concreta pode facilitar a reflexão e compreensão das crianças sobre alguns aspectos importantes para o conhecimento que se quer trabalhar (SELVA, 2003, p. 37).

Para analisar a *"transparência dos materiais"*, Meira (1998), apud Selva (2003), comparou duas formas diferentes: *"a partir da fidelidade epistêmica e a partir de uma visão sócio-histórica, baseada na noção de Vygotsky de 'ferramenta de mediação'"* (p. 37). De acordo com ela,

> Do ponto de vista da fidelidade epistêmica, o conceito de transparência é algo objetivo, inerente ao material, que é

> medido a partir da qualidade das relações entre o material e o domínio do conhecimento que se deseja ensinar. Numa visão sócio-histórica, a transparência de um material é algo construído no processo de uso, mediada por seus participantes, dentro de práticas sócio-culturais específicas. Assim, mais importante do que a análise da fidelidade epistêmica dos materiais seria o estudo sobre como os artefatos são transformados por estudantes no contexto das práticas ao darem sentido às idéias matemáticas (SELVA, 2003, p. 37).

Essa autora comenta o conceito de transparência, citado acima, apresentando, primeiramente, os seguintes argumentos de Moyer (2001), ao afirmar que

> Moyer (2001) argumenta que a manipulação ativa dos materiais permite que crianças desenvolvam um repertório de imagens que podem ser utilizadas na manipulação mental dos conceitos abstratos. Ainda reconhecendo que manipulativos não podem carregar significados neles próprios, esta autora chama atenção para a importância de considerar os manipulativos como potenciais ferramentas e os seus significados como função da tarefa para o qual o professor concebeu seu uso. Tomando o conceito de transparência de Meira (1998), essa autora afirma que 'é a mediação pelos alunos e professores inseridas em práticas significativas que determina a utilidade dos manipulativos' (p. 176). Dessa forma, manipulativos não são necessariamente transparentes, devendo-se analisar o seu uso pelos alunos para se poder julgar se a transparência emerge ou não. Alunos devem refletir sobre suas ações com manipulativos para construir significados (SELVA, 2003, p. 38).

Segundo os estudos realizados por Stacey, Helme, Archer & Condon (2001), apud Selva (2003), ao compararem e analisarem o uso de dois materiais manipulativos para ensinar números decimais, esses pesquisadores *"sugeriram que deve ser considerada também a acessibilidade do material, que inclui como tal material já foi utilizado em sala de aula e com que conceitos matemáticos interagiu antes"* (p. 38).

Ao analisar a literatura (CARPENTER e MOSER, 1982; RILEY, GREENO & HELLER, 1983; HUGHES, 1986; NUNES & BRYANT, 1991; SELVA, 1998) que inclui o uso de manipulativos em sala de aula, Selva (2003) observou *"pesquisas que mostram que crianças se saem melhor com uso de manipulativos do que sem esse uso"* (p. 38). Além disso, sobre os desempenhos com uso de papel e lápis comparando ao uso de manipulativos, verificou-se também diferenças nas estratégias de resolução apresentadas pelos alunos, como podemos observar nos resultados da pesquisa de Selva (1998), descritos abaixo:

> Selva (1998), analisando a resolução de problemas de divisão por crianças de alfabetização, primeira e segunda séries (6 a 8 anos de idade), observou melhores desempenhos no grupo com objetos concretos do que nos grupos com papel e lápis ou sem qualquer material como apoio aos cálculos. Entretanto, a autora também observou que crianças do grupo com manipulativos em todas as séries apresentavam estratégias mais simples de representação direta dos dados e ações problema. Enquanto que crianças dos outros grupos (com papel e lápis ou sem qualquer objeto) apresentavam estratégias mais flexíveis, tal como adição repetida e fatos memorizados (SELVA, 2003, p. 39).

Ainda com relação a esse mesmo grupo de estudos que tem verificado melhores desempenhos com o uso de manipulativos, Selva observa que *"algumas pesquisas tem constatado que o desempenho dos alunos está relacionado à experiência do professor com os manipulativos (Sowell, 1989; Raphael and Wahlstrom, 1989)"* e que, em outros estudos (MEIRA, 1998, entre outros) *"enfatizam que a mera presença de manipulativos não garante a aquisição da compreensão conceitual"* (SELVA, 2003, p. 40).

No tocante à influência da experiência do professor, o estudo desenvolvido por Moyer (2001), apud Selva (2003), ao analisar *"a concepção dos professores sobre como e porque manipulativos são usados na sala de aula"*, os resultados indicaram que *"professores usam manipulativos como um recurso para tornar a aula divertida, sem contudo conectá-los ao conteúdo explorado no ensino regular"*.

Por fim, Selva (2003) observa que permanecem controvérsias sobre o uso de manipulativos, pois, alguns estudos indicam a efetividade desses materiais, outros indicam efeitos benéficos apenas com crianças menores sendo desnecessário para crianças maiores e outros não encontram diferenças do uso desses materiais com o ensino por outros meios significativos. Essa autora ainda justifica seus argumentos com os seguintes resultados de pesquisas:

> Sowell (1989) realizou uma revisão de 60 estudos que incluem crianças da pré-escola ao ensino médio. A autora procedeu uma meta-análise para determinar a efetividade do uso de manipulativos no ensino de matemática, considerando o desempenho, a retenção e transferência do conhecimento e a atitude dos alunos em relação à matemática. Os resultados mostraram-se significativos apenas no que se refere à efetividade do uso de manipulativos ao se comparar estudos envolvendo material concreto e instrução simbólica por períodos de intervenção longos (um ou dois anos). Não foram encontradas diferenças significativas ao se comparar instrução simbólica com pictórica ou pictórica com material concreto. Estes resultados também confirmaram a revisão realizada por Suydam e Higgins (1977, citado por Sowell, 1989), que ao analisarem estudos que comparavam o uso de diferentes tipos de representação no ensino da matemática, encontraram que o uso de manipulativos produzia melhores resultados durante todas as séries da escola elementar (SELVA, 2003, pp. 41-42).

De acordo com os estudos realizados por Kamii et al (2001) ao examinar a utilidade de materiais manipulativos, baseando-se na teoria de Piaget sobre como as crianças adquirem conhecimento lógico-matemático, questionou-se o fato de muitos professores simplesmente pensarem que as crianças aprendem conceitos abstratos apenas tocando ou movendo objetos, pois, segundo as conclusões dessa pesquisa, os materiais manipulativos só são úteis quando eles possibilitam e estimulam as crianças a pensarem, fazendo relações abstratas ao responderem determinados problemas, mas, para isso, dependerá da escolha de quais materiais usar, como usar e em que momento do desenvolvimento da criança eles devem ser explorados. Assim, o conhecimento matemático não se origina do material manipulativo em si, mas, das relações mentais estabelecidas pela criança.

Para Kamii et al (2001), para compreender porque o pensamento da criança é importante na construção do conhecimento lógico-matemático é necessário revisar a distinção que Piaget (1971) faz entre conhecimento físico e conhecimento lógico-matemático e entre abstração empírica e construtiva. Neste caso, o conhecimento físico é conhecimento de objetos do mundo externo, tendo sua fonte em objetos da realidade externa, em que as pessoas adquirem esse conhecimento físico empiricamente através de observações. Enquanto que o conhecimento lógico-matemático tem uma fonte muito diferente, consistindo nas relações mentais que cada pessoa estabelece e se originam na mente de cada indivíduo. Porém, na realidade psicológica da criança, esses dois tipos de conhecimentos existem quase inseparadamente e o conhecimento lógico-matemático vai ficando independente progressivamente.

Com relação à distinção que Piaget (1971) faz entre os dois tipos de abstração – abstração empírica (ou simples) e abstração construtiva (ou reflexiva) –, a abstração de cor ou peso (conhecimento físico) de objetos é exemplo de uma abstração empírica. Já na abstração construtiva são criadas relações mentais como *"dois"*, *"diferente"* e *"o mesmo"*, em que, segundo esse pesquisador, os conhecimentos lógico-matemáticos são construídos através das relações construtivas. Assim, Kamii et al afirmam que o importante na construção do conhecimento matemático é que as crianças pensem (abstração construtiva), sendo recomendado o uso de materiais manipulativos que estimulam as crianças a pensarem e fazerem relações (KAMII et al, 2001, p. 22-23).

Maia (2001) também se baseia na teoria de Piaget (1995), em sua pesquisa sobre a dimensão concreta do ensino da matemática, para apresentar o seguinte questionamento:

> Será que se pode falar em uma matemática concreta quando, na sua essência, a ciência matemática é um construto mental no sentido dado por Piaget à ação do homem sobre o mundo? Sabemos que para este autor, o conhecimento tem sua origem na atividade do sujeito sobre o meio e, não apenas, nas propriedades objetivas da realidade. Nesse sentido, para ele, a origem do conhecimento humano pode ser explicada a partir da interação entre o indivíduo e a realidade através da atividade humana. Em sua origem, a ação do sujeito sobre as pessoas e os objetos é de ordem apenas perceptivo-gestual. Tal atividade evolui para operações mentais, cada vez mais complexas, que

> culminam com a possibilidade do indivíduo agir sobre uma situação puramente imaginária inteiramente independente de um suporte real. No que diz respeito ao conhecimento matemático, de maneira específica, Piaget acredita que o mesmo não procede de abstração das propriedades do objeto, mas sim, das propriedades que a ação do sujeito introduz nos objetos, ou seja, da abstração reflexionante (MAIA, 2001, p. 78).

Em suas conclusões, Maia afirma que *"O que há de concreto não é a matemática, mas as situações nas quais o homem pode e deve atuar tendo por domínio este instrumento de mediação cultural que é a matemática"* (p. 97).

A respeito da reflexão, ou seja, da ação reflexiva como um dos componentes mais importantes para a construção do conhecimento lógico-matemático, Smole (1996) apresenta a seguinte utilidade para o uso de materiais:

> acreditamos que os materiais didáticos podem ser úteis se provocarem a reflexão por parte das crianças, de modo que elas possam criar significados para ações que realizam com eles. Como afirma Carraher (1998), não é o uso específico do material com os alunos o mais importante para a construção do conhecimento matemático, mas a conjunção entre o significado que a situação na qual ele aparece tem para a criança, as suas ações sobre o material e as reflexões que faz sobre tais ações (SMOLE, 1996, p. 172).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino da Matemática também encontramos orientações referentes ao papel do uso de materiais para o processo de ensino aprendizagem, quando se destaca que:

> Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base para a formalização matemática (BRASIL, 1997, p. 7).

Segundo Cramer e Karnowski (1993), apud Smole (1996), pode-se definir a compreensão matemática *"como a habilidade para representar uma idéia matemática de múltiplas maneiras e fazer conexões entre as diferentes representações dessa idéia"*. Nesse caso, esses autores consideram que ao usar materiais didáticos explorando mais do que a manipulação pura e simples pode-se gerar *“um estímulo para desenvolver uma multiplicidade de significados para cada noção matemática”* (SMOLE, 1996, p. 172-173).

Considerando as reflexões discutidas anteriormente, o nosso interesse específico em relação ao uso de material manipulativo no processo de construção da grandeza comprimento, enquanto representação na resolução de situações-problema, se justifica a partir dos seguintes aspectos básicos:

- Permitir a ampliação das estratégias de resolução de uma determinada situação-problema, possibilitando a realização de estratégias que não são possíveis com o uso de papel e lápis;
- Estimular a reflexão por parte dos alunos, de modo que eles possam desenvolver uma multiplicidade de significados para cada noção matemática nas ações que realizam fazendo uso de materiais;
- Superar determinados efeitos de “projeções” que ocorrem no ambiente papel e lápis, provocados pelo desenho fixo no plano e pelas posições prototípicas ou não prototípicas;
- Investigar se parte das dificuldades dos alunos na dissociação entre perímetro e área é provocada pelo tratamento das situações-problema no ambiente papel e lápis;
- Facilitar para o pesquisador a identificação de conhecimentos implícitos nas respostas certas e/ou erradas dos alunos.

1.7 – O tratamento dado às grandezas geométricas nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Com o propósito de contribuir para o enriquecimento do processo de ensino e aprendizagem da matemática, os Parâmetros Curriculares Nacionais –

PCN – apresentam orientações quanto aos conteúdos, procedimentos e atitudes, evidenciando que *"a seleção de conteúdos a serem trabalhados pode se dar numa perspectiva mais ampla, ao procurar identificar não só os conceitos mas também os procedimentos e as atitudes a serem trabalhadas em classe"* (BRASIL, 1997, p. 54).

Considerando, inicialmente, o aspecto da seleção dos conteúdos, os PCN propõem a organização em blocos na seguinte classificação: números e operações; espaço e forma; grandezas e medidas e tratamento da informação. De acordo com a interpretação feita por Bellemain & Lima (2002)

> a indicação das Grandezas e Medidas como um bloco de conteúdos aponta para a consideração de que as grandezas – físicas, geométricas, etc. deveriam ocupar, no plano conceitual, uma posição mais clara do que a que lhe tem sido atribuída no ensino da matemática (p. 1).

Nessa classificação são apresentadas as grandezas e medidas como um dos blocos de conteúdos que, ao ser trabalhado, permite ricas interligações com outros campos da Matemática. Segundo essas orientações,

> Há um razoável consenso no sentido de que os currículos de Matemática para o ensino fundamental devam contemplar o estudo dos números e das operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), o estudo do espaço e das formas (no campo da Geometria) e o estudo das grandezas e das medidas (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria) (BRASIL, 1997, p. 53).

A realização dessa interligação é ainda mais defendida pelos PCN ao enfatizar que

> Os conhecimentos das crianças não estão classificadas em campos (numéricos, geométricos, métricos, etc.), mas sim interligados. Essa forma articulada deve ser preservada no trabalho do professor, pois as crianças terão melhores condições de apreender o significado dos diferentes conteúdos se conseguirem perceber diferentes relações deles entre si (BRASIL, 1997, p. 66).

De acordo com as considerações dos PCN, o bloco das grandezas e medidas é privilegiado pela sua forte relevância social, facilitando para a criança o reconhecimento do conhecimento matemático no meio social, como indica a citação abaixo:

> Na vida em sociedade, as grandezas e as medidas estão presentes em quase todas as atividades realizadas. Desse modo, desempenham papel importante no currículo, pois mostram claramente ao aluno a utilidade do conhecimento matemático no cotidiano (BRASIL, 1997, p. 56).

Nesse trabalho com grandezas e medidas também é importante que o professor considere as noções informais trazidas pelas crianças ao ingressarem na escola, de acordo com o seu contexto social. Quanto a essas experiências, assim é apresentado nos PCN:

> As crianças que ingressam no primeiro ciclo, tendo passado ou não pela pré-escola, trazem consigo uma bagagem de noções informais sobre numeração, medida, espaço e forma, construída em sua vivência cotidiana. Essas noções matemáticas funcionarão como elemento de referência para o professor na organização das formas de aprendizagem (BRASIL, 1997, p. 63).

Além dos aspectos apresentados para o ensino das grandezas e medidas, os PCN também orientam que esse trabalho deve ser desenvolvido considerando a perspectiva histórica. Trata-se de um campo rico para essa abordagem (BRASIL, 1997, p. 56), favorecendo ao professor a organização de situações didáticas que permitam à criança vivenciar conflitos de reconstrução do conhecimento, assim como a humanidade experimentou, conforme a citação abaixo:

> O trabalho com medidas dá oportunidade para abordar aspectos históricos da construção desse conhecimento, uma vez que, desde a Antiguidade, praticamente em todas as civilizações, a atividade matemática se dedicou à comparação de grandezas. Assim, por exemplo, a utilização do uso de partes do próprio corpo para medir (palmos, pés) é uma forma interessante a ser utilizada com os alunos, porque permite a reconstrução histórica de um processo em que a medição tinha como referência as dimensões do corpo humano, além de destacar aspectos curiosos como o fato de que em determinadas civilizações as

> medidas do corpo do rei eram tomadas como padrão (BRASIL, 1997, p. 129).

Enfim, essas recomendações, se levadas em consideração, despertarão na criança a *“curiosidade em conhecer a evolução histórica dos números, de seus registros, de sistemas de medida utilizados por diferentes grupos culturais”* (p. 92).

Em relação aos conteúdos conceituais e procedimentais a serem trabalhados no primeiro ciclo, os PCN sugerem a exploração de grandezas de diversas naturezas a partir de situações-problema que valorizem as experiências pessoais dos alunos. Dentre os conteúdos, aqueles que estão diretamente relacionados com grandezas geométricas são:

- ✓ Comparação de grandezas de mesma natureza, por meio de estratégias pessoais e uso de instrumentos de medida conhecidos – fita métrica, balança, recipientes de um litro, etc.
- ✓ Identificação dos elementos necessários para comunicar o resultado de uma medição e produção de escritas que representem essa medição.

Buscando estimular na criança a compreensão do processo de medir, a orientação é no sentido de desenvolver atividades de comparação de grandezas, possibilitando a identificação, no objeto, de atributos passíveis de mensuração. Além disso, devem usar procedimentos de medida, permitindo a construção de um conceito aproximativo de medida, sem investir na formalização de sistemas de medida (BRASIL, 1997).

Uma outra orientação apresentada pelos PCN é que, no 1.º ciclo, seja feita a exploração de unidades não-convencionais, pois,

> espera-se que o aluno saiba medir fazendo uso de unidades de medida não-convencionais, que sejam adequadas ao atributo que se quer medir. O conhecimento e uso de unidades e

> instrumentos convencionais não são essenciais até o final do primeiro ciclo e dependem da familiaridade que os alunos possam ter com esses elementos em situações do cotidiano. Outro aspecto a ser observado é a capacidade do aluno de realizar algumas estimativas de resultados de medições (BRASIL, 1997, p. 77).

Para o segundo ciclo, dando continuidade aos estudos das grandezas geométricas, os PCN propõem os seguintes conteúdos conceituais e procedimentais:

- ✓ Comparação de grandezas de mesma natureza, com escolha de uma unidade de medida da mesma espécie do atributo a ser mensurado.
- ✓ Identificação de grandezas mensuráveis no contexto diário: comprimento, massa, capacidade, área[1], etc.
- ✓ Reconhecimento e utilização de unidades usuais de medida, como metro, centímetro, quilômetro, grama, miligrama, quilograma, litro, mililitro, metro quadrado, alqueire, etc.
- ✓ Estabelecimento das relações entre unidades usuais de medida de uma mesma grandeza.
- ✓ Reconhecimento dos sistemas de medida que são decimais e conversões usuais, utilizando-as nas regras desse sistema.
- ✓ Reconhecimento e utilização das medidas de tempo e realização de conversões simples.
- ✓ Utilização de procedimentos e instrumentos de medida, em função do problema e da precisão do resultado.

---

[1] Trocamos o termo “superfície”, utilizado nos PCN, por “área”, que é o termo apropriado e correto para ser usado no universo das grandezas.

- ✓ Cálculo de perímetro e de área de figuras desenhadas em malhas quadriculadas e comparação de perímetros e áreas de duas figuras sem uso de fórmulas.

Considerando os conteúdos apresentados acima, percebemos que nas atividades a serem desenvolvidas neste ciclo há um investimento em se explorar os sistemas convencionais, visando a facilitar a comunicação.

De acordo com os PCN, *"o trabalho com medidas evidencia as relações entre sistemas decimais de medida, sistema monetário e sistema de numeração decimal"* (p. 84) e, ao término do 2.º ciclo, deve-se avaliar se o aluno sabe

> escolher a unidade de medida e o instrumento mais adequado a cada situação, fazer previsões razoáveis (estimativas) sobre resultados de situações que envolvam grandezas de comprimento, capacidade e massa, e saiba ler, interpretar e produzir registros utilizando a notação convencional das medidas (BRASIL, 1997, p. 94).

Considerações sobre o trabalho com a grandeza comprimento.

Em relação ao primeiro ciclo, sugere-se nos PCN que o trabalho com grandezas e medidas contemple: comparação de grandezas de mesma espécie; medição fazendo uso de unidades não-convencionais e utilização de alguns instrumentos, como régua, fita métrica, etc. Observamos que se faz referência às grandezas, mas os encaminhamentos são em função de práticas de medidas, iniciando a partir da exploração de unidades não-convencionais.

Quanto ao segundo ciclo, identificamos o uso do termo comprimento, sendo dada ênfase ao conhecimento dos sistemas convencionais de medida. Os PCN apresentam as seguintes sugestões: comparação de grandezas de mesma natureza, com escolha de uma unidade de medida; identificação de grandezas mensuráveis, dentre as quais comprimento e área, etc.; utilização de instrumentos de medida e reconhecimento dos sistemas de medida que são decimais e conversões usuais, utilizando-as nas regras desse sistema. Neste ciclo, é possível identificar, como observa Barbosa (2002), que o perímetro, como caso particular da grandeza comprimento, surge pela primeira vez de forma explícita, com a orientação de que seja explorado juntamente com área, fazendo uso de malhas quadriculadas, sem o uso de fórmulas.

Entretanto, concordamos com Bellemain & Lima (2002), ao observamos nessas orientações a ausência de uma explicação mais clara em relação à construção das grandezas através de situações de comparação, pois quando se afirma nos PCN que "*nas situações cotidianamente vivenciadas pelos alunos, a existência de grandezas de naturezas diversas e a freqüente necessidade de estabelecer comparação entre elas, ou seja, de medi-las*" (p. 129), deixa entender que não está valorizando a importância de se fazer um trabalho inicial comparando-se grandezas sem o uso da medição. E considerando que, para a construção significativa desses conceitos, pesquisas que vêm sendo realizadas nos últimos anos no campo da Educação Matemática, como, por exemplo, as de Douady e Perrin-Glorian, evidenciam a necessidade de iniciar o trabalho de comparação de grandezas para, através dele, desenvolver uma construção mais sólida dessas noções, não correndo o risco de gerar nos alunos a associação, por exemplo, de que para se comparar perímetro e área tenha obrigatoriamente que comparar números.

Finalizando, concordamos com Barbosa (2002) quando diz que o documento dos PCN salienta *"o trabalho específico sobre grandezas e medidas, tradicionalmente inserido na unidade de geometria e merecendo uma atenção relativamente pequena em comparação com a dedicada a outros temas curriculares*" e que, ao considerarmos

> a importância que os PCN estão tendo, no atual momento no Ensino Fundamental, com significativa influência na produção dos livros didáticos, há de se reconhecer que esses tópicos começam a adquirir um novo status no ensino da Matemática (p.

91).

1.8 – Os Objetivos da pesquisa

1.8.1 – Objetivo Geral

Investigar os conhecimentos-em-ação mobilizados por alunos de 2.º ciclo do Ensino Fundamental (4ª série) na resolução de situações-problema, envolvendo comprimento, no ambiente papel e lápis e com uso de materiais manipulativos.

1.8.2 – Objetivos Específicos

- Analisar os procedimentos de resolução utilizados por alunos de 4ª série em problemas de comparação e produção relativos ao conceito de comprimento no ambiente papel e lápis e com uso de materiais manipulativos.
- Investigar as concepções de comprimento mobilizadas pelos sujeitos na resolução de problemas relativos à grandeza comprimento.
- Analisar a influência do uso de materiais manipulativos na resolução de problemas envolvendo comprimento, por alunos de 4.ª série.

CAPÍTULO 2 – PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

2.1 – Preliminares.

O primeiro capítulo desta dissertação tratou dos elementos teóricos de nossa pesquisa. Com base nestes estudos preliminares desenvolvidos anteriormente, delimitamos, neste segundo capítulo, o escopo da parte experimental de nosso trabalho. Descreveremos, também, as características principais do dispositivo experimental escolhido.

No nosso experimento, adotamos o modelo didático proposto por Douady & Perrin-Glorian (1989), no qual identificam-se, no ensino-aprendizagem do conceito de área, três quadros a diferenciar: o geométrico, o das grandezas e o numérico. Seguindo Bellemain & Lima (2002), estamos estendendo para as grandezas geométricas em geral a abordagem dessas pesquisadoras que, em nosso caso, trataremos da grandeza comprimento, inclusive o conceito de perímetro.

Nessa perspectiva, são retomadas, na presente pesquisa, as duas hipóteses feitas por Douady & Perrin-Glorian (1989). Assim, a primeira hipótese de que a distinção e a articulação entre os três quadros citados favorecem a construção do conceito de área tem sua análoga na suposição de que o mesmo ocorra com respeito à grandeza comprimento ou ao perímetro, em particular. Quanto à segunda hipótese, originando-se também da generalização do trabalho das pesquisadoras francesas, sugere-se que se deve iniciar a construção do conceito de comprimento (ou de perímetro) distinguindo e articulando o quadro geométrico e o quadro das grandezas. Isso significa, especialmente, comparar comprimentos sem medir, sem a intervenção do quadro numérico das medidas, isto é, sem fazer uso de numerização. Nesse caso, a única comparação possível advém da relação de ordem estabelecida no domínio das grandezas em jogo. Em outras palavras, no caso do comprimento só podemos perguntar se tal comprimento é maior, menor ou igual a um outro.

Na abordagem do conceito de comprimento como grandeza, escolhida nesta pesquisa, fazemos a transição entre o quadro geométrico e o das grandezas, considerando o comprimento de um contorno como uma propriedade dele próprio, que não se confunde com ele e que é invariante para algumas transformações nele operadas.

Considerando as três classes de situações-problema que dão sentido ao conceito de área, propostas por Bellemain (2000) – situação de comparação, de medida e de produção – busca-se verificar, também, nesta pesquisa, a hipótese didática de que o processo inicial de construção da grandeza comprimento nas séries iniciais, na transição entre o quadro geométrico e o das grandezas, é facilitado pela exploração de situações de comparação e produção, possibilitando a distinção e a articulação entre esses dois quadros.

Outro aspecto importante do experimento elaborado reside na hipótese de que o uso de materiais manipulativos na resolução de situações-problema favorece a construção da grandeza comprimento, permitindo a superação de dificuldades verificadas no ambiente papel e lápis, quando esses materiais estimulam os alunos a desenvolverem uma maior reflexão, diante das situações apresentadas, para terem mais possibilidades de validarem suas respostas.

2.2 – Método.

O método experimental adotado foi o estudo exploratório, baseado na aplicação de um teste diagnóstico, em uma turma de 35 alunos de 4ª série do Ensino Fundamental, constando de situações-problema que os alunos resolveram e responderam, por escrito, em dois momentos: no primeiro, a aplicação foi realizada no ambiente papel e lápis, enquanto que no segundo momento os alunos usaram materiais manipulativos para resolução das situações propostas.

Os dados obtidos através da aplicação de uma seqüência de situações, cuja elaboração e análise a priori tiveram como suporte os estudos preliminares descritos no capítulo anterior, foram examinados através de uma análise a posteriori, em que foi feito o tratamento dos dados coletados na experimentação, bem como a confrontação com a análise a priori, a fim de validar ou refutar as hipóteses levantadas na pesquisa.

É importante mencionar que ao término da aplicação do dispositivo experimental nos dois momentos – no ambiente papel/lápis e com uso de materiais manipulativos – foi realizada uma entrevista individual com os alunos para que eles explicassem como fizeram para resolver cada situação.

2.3 – Características da amostra.

Os sujeitos da pesquisa são 35 alunos, de ambos os sexos, da 4ª série do 2º ciclo do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública de ensino da Prefeitura Municipal de Recife, situada num bairro da periferia da cidade. As instalações físicas da escola são razoáveis, mas há um excesso de alunos nas salas de aula. A escola funciona em três turnos diários, atendendo o Ensino Fundamental (1ª a 8ª série). O alunado é proveniente, em sua maioria, da vizinhança, que é formada por uma população de baixa renda. A faixa etária varia de 8 a 14 anos, sendo que tem apenas um aluno com 8 anos e um outro com 14 anos.

Escolhemos a escola acima por ser da rede pública, por já termos referências dela e, também, pelo bom acolhimento~~,~~ que tivemos em nossas primeiras visitações a essa escola e, também, pelo fácil acesso à direção, às professoras e aos próprios alunos. Quanto à série escolhida, levamos em conta a fase escolar em que se explora, geralmente, o tópico perímetro. Nessa escola, os alunos dessa série ainda não haviam vivenciado atividades com grandezas e medidas.

2.4 – Materiais usados pelos alunos.

Nos dois momentos de resolução das questões contidas na seqüência de atividades – no ambiente papel/lápis e com uso de materiais manipulativos – os alunos tiveram à sua disposição uma “caixa de ferramentas”, contendo os seguintes instrumentos: uma “régua” feita de cartolina branca, não-graduada; uma régua plástica transparente, não-graduada; um fio fino e flexível e dois cordões de cores diferentes. Além desses instrumentos que poderiam servir de “medianeiros[12]” na realização das comparações, ainda constavam os seguintes materiais acessórios: borracha branca, canetas hidrográficas de cores diferentes, lápis grafite e tesoura escolar.

Ademais, no segundo momento de aplicação das atividades, quando falamos que os alunos usaram materiais manipulativos, referimo-nos às próprias linhas e contornos a serem comparados, os quais foram construídos com palitos, fios ou arames, diferenciando-se do primeiro momento de aplicação fazendo uso

[2] Nas análises das atividades, chamamos de “medianeiros” os instrumentos da caixa de ferramentas (régua não-graduada, fio, cordão) que podem servir de intermediários, facilitando a comparação de grandezas, ou seja, servem para mediar as comparações que não podem ser feitas diretamente

de papel e lápis, em que essas linhas e contornos eram apresentados fixos, desenhados no plano do papel.

2.5 – Realização do experimento em sala de aula.

Como já foi mencionada anteriormente, a aplicação das atividades foi realizada em dois momentos, com a mesma turma: no primeiro, o teste foi realizado no ambiente papel e lápis com toda a turma em sala; enquanto que o segundo teste foi aplicado individualmente, com cada aluno fazendo o uso de materiais manipulativos na resolução das situações-problema.

A aplicação das atividades nos dois testes foi feita pelo pesquisador. Previmos que a realização do teste no ambiente papel e lápis durasse em torno de uma hora e trinta minutos. Já no segundo teste, com o uso de materiais manipulativos, o tempo previsto foi em torno de, apenas, uma hora, pois supomos que tais materiais iriam facilitar a resolução dos problemas pelos alunos. Em ambas as previsões estão incluídos o tempo para a distribuição do material, as orientações cabíveis, a execução e o recolhimento do material.

Dos 35 alunos que participaram do primeiro teste, 24 foram selecionados para fazerem o segundo, em função da análise das respostas dadas no 1º teste. Os sujeitos que realizaram o 2º teste foram aqueles alunos que apresentaram em suas respostas uma maior diversidade de estratégias focalizadas na análise a priori. Além disso, é importante ressaltar que outros dois fatores também influenciaram para essa redução do número de alunos: o primeiro diz respeito ao fato de que dois sujeitos tiveram que ser transferidos da escola antes da aplicação do segundo teste; o segundo motivo refere-se à paralisação das atividades da escola em decorrência da greve dos professores da rede municipal de Recife, durante o período da realização do segundo teste, implicando, assim, a redução do espaço temporal desse experimento, considerando que o teste foi feito individualmente não não havendo tempo de aplicá-lo com todos os alunos. Assim, na análise dos resultados, optamos por considerar, apenas, os resultados dos 24 alunos que participaram dos dois testes para melhor garantir a qualidade da análise.

Ainda é importante informar que foram feitas entrevistas com os alunos no término do segundo teste, com o propósito que eles explicassem como fizeram para resolver cada problema proposto nos dois testes. A transcrição dessas entrevistas encontra-se em anexo deste trabalho.

2.6 – Aspectos gerais das atividades.

Com base nos elementos teóricos tratados no capítulo anterior e considerando os objetivos visados nesta pesquisa, bem como as hipóteses formuladas, elaboramos atividades abordando objetos dos quadros geométrico e das grandezas, sem numeração, através de situações de comparação e produção. O quadro abaixo esquematiza o conjunto de atividades propostas, que serão analisadas individualmente no Capítulo 3, desta dissertação.

Atividade	Categoria	N.º de Itens
1	Comparação entre comprimentos (‘mais comprido’ e ‘mais curto’) de quatro segmentos de reta com comprimentos distintos e posições prototípicas e não-prototípicas.	2
2	Comparação entre comprimentos (‘mais comprido’ e ‘mais curto’) de cinco caminhos, sendo um segmento de reta, uma linha curva e três linhas poligonais abertas.	2
3	Produção de um caminho ‘mais comprido’, um ‘mais curto’ e um com o ‘comprimento igual’, tendo como referência uma linha poligonal aberta.	3
4	Comparação entre contornos de um grupo de sete figuras/objetos (2 triângulos, 2 quadrados e 3 retângulos), bem como dentre um grupo de quatro triângulos isósceles.	2
5	Comparação entre perímetros (‘maior perímetro’, ‘menor perímetro’ e ‘perímetros iguais’) de um grupo com 4 linhas fechadas, poligonais e não-poligonais.	3
6	Comparação diferenciando os conceitos de contorno e perímetro diante de uma situação que apresenta 4 linhas fechadas, poligonais e não-poligonais.	3

Assim, foram produzidas 6 atividades, sendo que cada uma delas foi descrita para ser aplicada em dois momentos: no primeiro, fazendo uso de papel e lápis e no segundo, com o uso de materiais manipulativos, formando um conjunto de 12 atividades apresentadas.

Na elaboração dessas atividades, fizemos uma cuidadosa seleção de valores das variáveis didáticas na escolha dos tipos dos caminhos e dos seus comprimentos, possibilitando, através das diferentes respostas e estratégias que os alunos apresentassem, a identificação de conhecimentos-em-ação utilizados na resolução das situações-problema, considerando que a esse respeito Perrin-Glorian (1995) evidencia que *“os conhecimentos colocados em jogo ou elaborados numa situação vão depender da escolha das variáveis didáticas”* (p. 86).

No próximo capítulo, trataremos das atividades com suas respectivas análises a priori e a posteriori.

CAPÍTULO 3 – APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

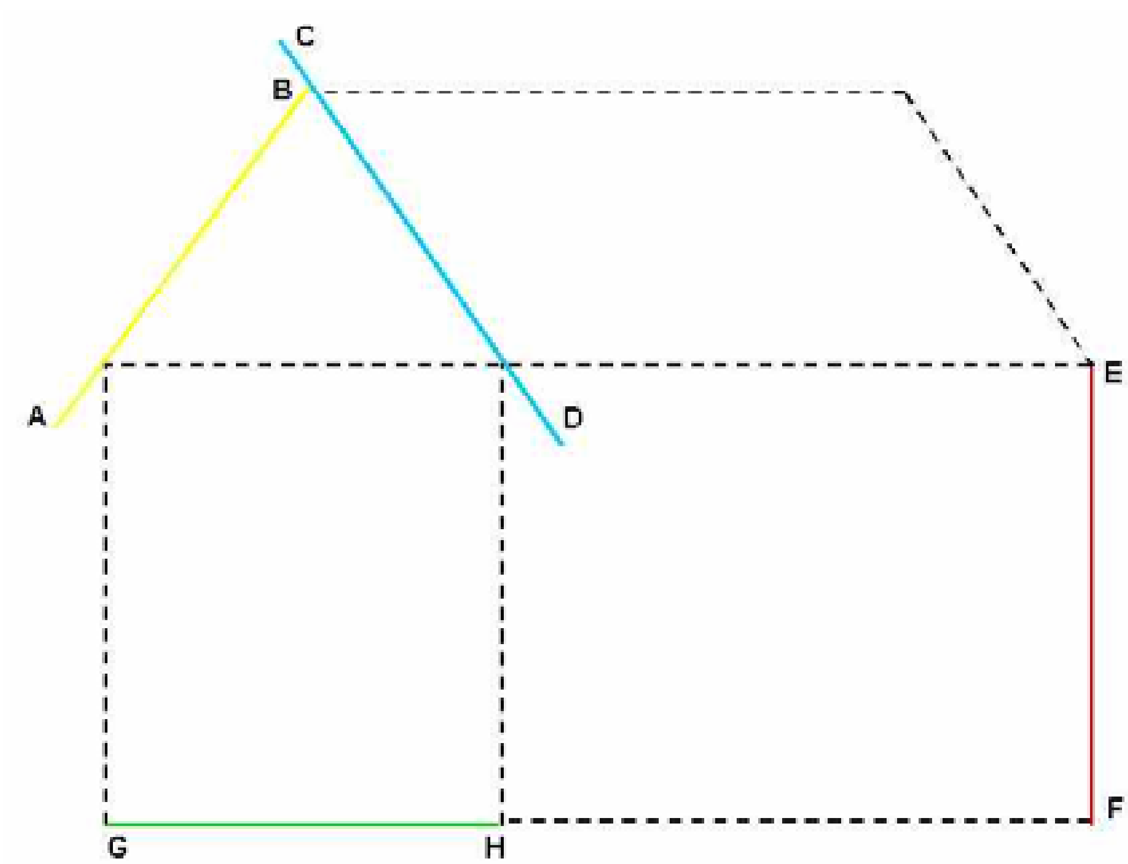
3.1 – Primeira Atividade

3.1.1 – Apresentação

ATIVIDADE 1

(1º TESTE – AMBIENTE PAPEL E LÁPIS)

Observe os caminhos coloridos representados na casa abaixo:



Marque com um X .

a) O caminho mais comprido é:

AB-amarelo ( ) CD-azul ( ) EF-vermelho ( ) GH-verde ( )

b) O caminho mais curto é:

AB-amarelo ( ) CD-azul ( ) EF-vermelho ( ) GH-verde ( )

Explique como você resolveu:

____

____

____

ATIVIDADE 1

(2º TESTE – COM MATERIAIS MANIPULATIVOS)

Entre os quatro palitos coloridos (amarelo, azul, vermelho, verde), da casa construída, descubra:

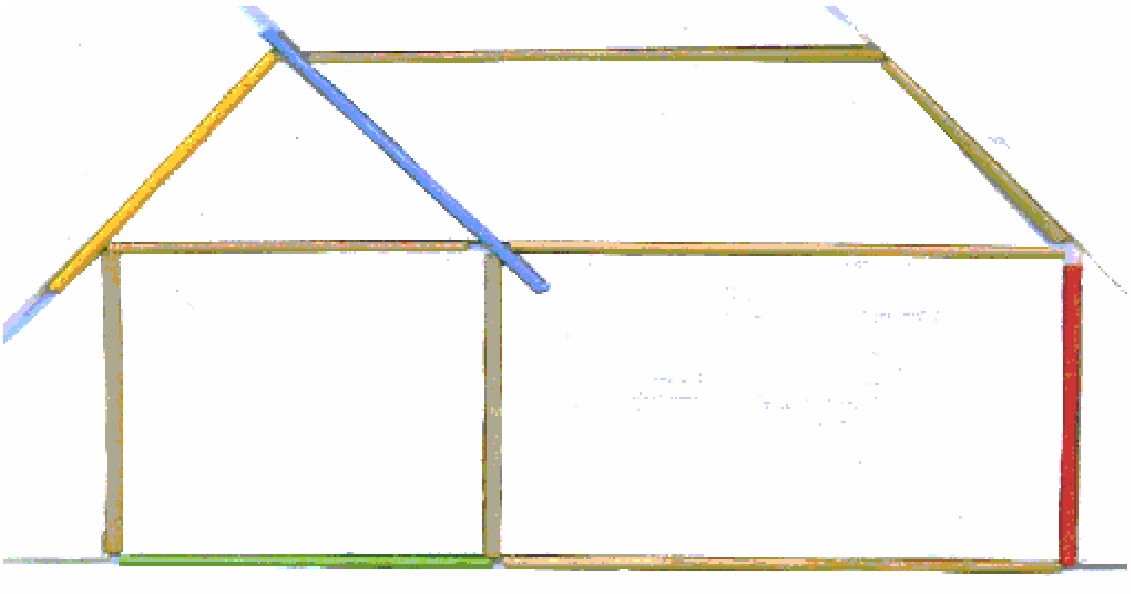
a) Qual dos quatro palitos coloridos é o mais comprido? Marque com um X a resposta correta:

Amarelo ☐ Azul ☐ Vermelho ☐ Verde ☐

b) Qual dos quatro palitos coloridos é o mais curto? Marque com um X a resposta correta:

Amarelo ☐ Azul ☐ Vermelho ☐ Verde ☐

Material que o aluno irá manipular



3.1.2 - Análise a priori

Objetivo: Verificar se o aluno identifica o mais curto e o mais comprido, dentre quatro segmentos de reta (caminhos), sendo dois dispostos em posição prototípica (horizontal e vertical) e dois dispostos em posição não prototípica (inclinados).

Justificativa e Cenário:

Esta atividade foi inspirada em uma questão proposta na seqüência elaborada, no ambiente papel e lápis, por Barbosa (2002), sobre os conceitos de comprimento e perímetro. Para nossa pesquisa, fizemos as seguintes mudanças: aumentamos os comprimentos de todos os caminhos (segmentos), com a finalidade de permitir um melhor manuseio do material que será comparado no momento em que a atividade estiver sendo aplicada em situações concretas; deixamos todos os caminhos com medidas diferentes para que o item “a” ficasse apenas com uma opção de resposta, pois, na referida questão original os caminhos CD e EF tinham as mesmas dimensões, existindo, assim, dois caminhos mais compridos; representamos a ilustração dos caminhos destacando-os em cores diferentes (amarelo, azul, verde e vermelho) sobre um desenho pontilhado/tracejado de uma casa; por fim, alteramos o enunciado dessa atividade, facilitando sua interpretação e o momento de resposta pelo aluno, deixando de ser aberto para ser de múltipla escolha, bem como, os caminhos passaram a ser indicados por suas respectivas cores, além das letras.

Na atividade proposta por Barbosa (2002), os comprimentos dos caminhos são: 3,5 cm (AB); 4,5 cm (GH); 5,0 cm (CD) e 5,0 cm (EF). Optamos por alterar esses caminhos para os seguintes comprimentos: 6,0 cm (GH-verde); 6,5 cm (AB-amarelo); 7,0 cm (EF-vermelho) e 7,5 cm (CD-azul), tendo entre eles, uma diferença de 0,5 cm na ordem crescente, pois acreditamos que essa seja a diferença máxima que deve existir uma vez que se trata da comparação de caminhos (segmentos) retos, diferentemente de caminhos quebrados ou curvos que apresentam mais dificuldades para a precisão na sobreposição de medianeiros. Para essas outras naturezas de caminhos sugerimos uma diferença igual ou maior que 1 cm.

Segundo Barbosa, *“a opção por essa atividade é para possibilitar ao aluno diferenciar o caminho reto curto do comprido em posição prototípica ou não, numa questão livre de qualquer outra influência“* (p. 128), como será o caso de atividades posteriores que vêm com nuanças de leitura interpretativa, outras diferenças entre os tipos de caminhos ou, ainda, de relação de ordem, etc.

Conforme já explicitamos no capítulo anterior, cada atividade foi elaborada em dois modelos: no primeiro, a situação foi descrita para ser resolvida no ambiente papel e lápis, podendo fazer o uso apenas dos materiais da “caixa de ferramentas”; no segundo, a situação foi descrita para ser toda resolvida através de materiais manipulativos, sendo importante ressaltar que aqui os caminhos a serem comparados não são apresentados fixos, mas, feito sobre borrachudo, encaixados (podendo ser removidos) no baixo relevo, de uma casa construída com palitos, os quais são pintados nas mesmas cores do papel e lápis, ou seja: amarelo (AB); azul (CD); vermelho (EF) e verde (GH).

Interpretação de respostas possíveis:

Na resolução desta atividade era previsto que os alunos pudessem mobilizar conhecimentos-em-ação, que seriam identificados através de suas respostas e possíveis estratégias utilizadas, dependendo do modelo da atividade (ambiente papel/lápis e com uso de material manipulativo). A tabela abaixo resume esses conhecimentos-em-ação, com suas respectivas respostas e estratégias de resolução, destacando-se, também, os modelos nos quais essas estratégias são possíveis.

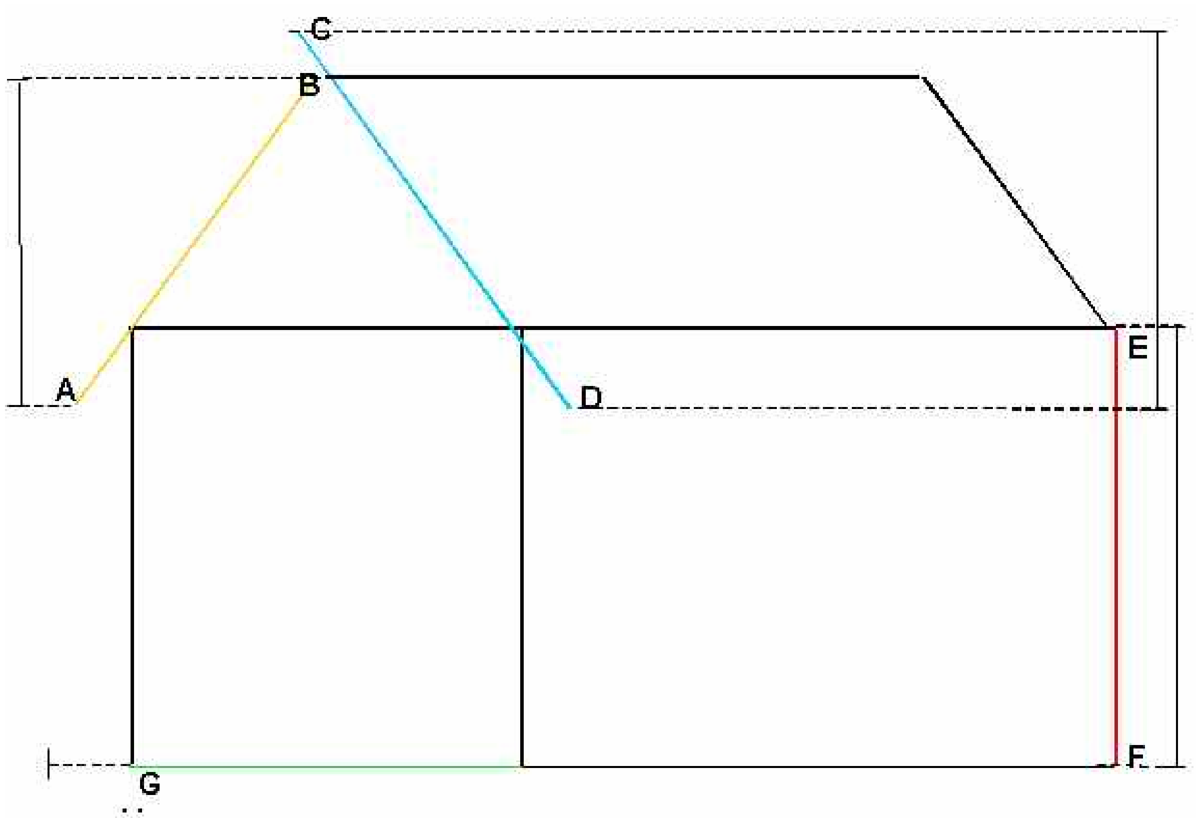
<table>
<tr><th>Conhecimentos-em-ação</th><th>Respostas</th><th>Estratégias de resolução</th><th>Modelos de atividade</th></tr>
<tr><td rowspan="2">- comparação de comprimento dos segmentos</td><td rowspan="2">a) CD-azul
b) GH-verde</td><td>- Observação visual
- Sobreposição de medianeiros</td><td>- Papel e lápis
- Manipulativos</td></tr>
<tr><td>- junção dos próprios palitos</td><td>- Manipulativos</td></tr>
<tr><td>- efeito da projeção horizontal</td><td>a) GH-verde
b) EF-vermelho</td><td rowspan="3">- Observação visual

- Sobreposição de medianeiros</td><td rowspan="3">- Papel e lápis
- Manipulativos</td></tr>
<tr><td>- efeito da projeção vertical</td><td>a) EF-vermelho
b) GH-verde</td></tr>
<tr><td>- efeito da projeção vertical e horizontal, simultaneamente.</td><td>a) EF-vermelho
b) AB-amarelo</td></tr>
</table>

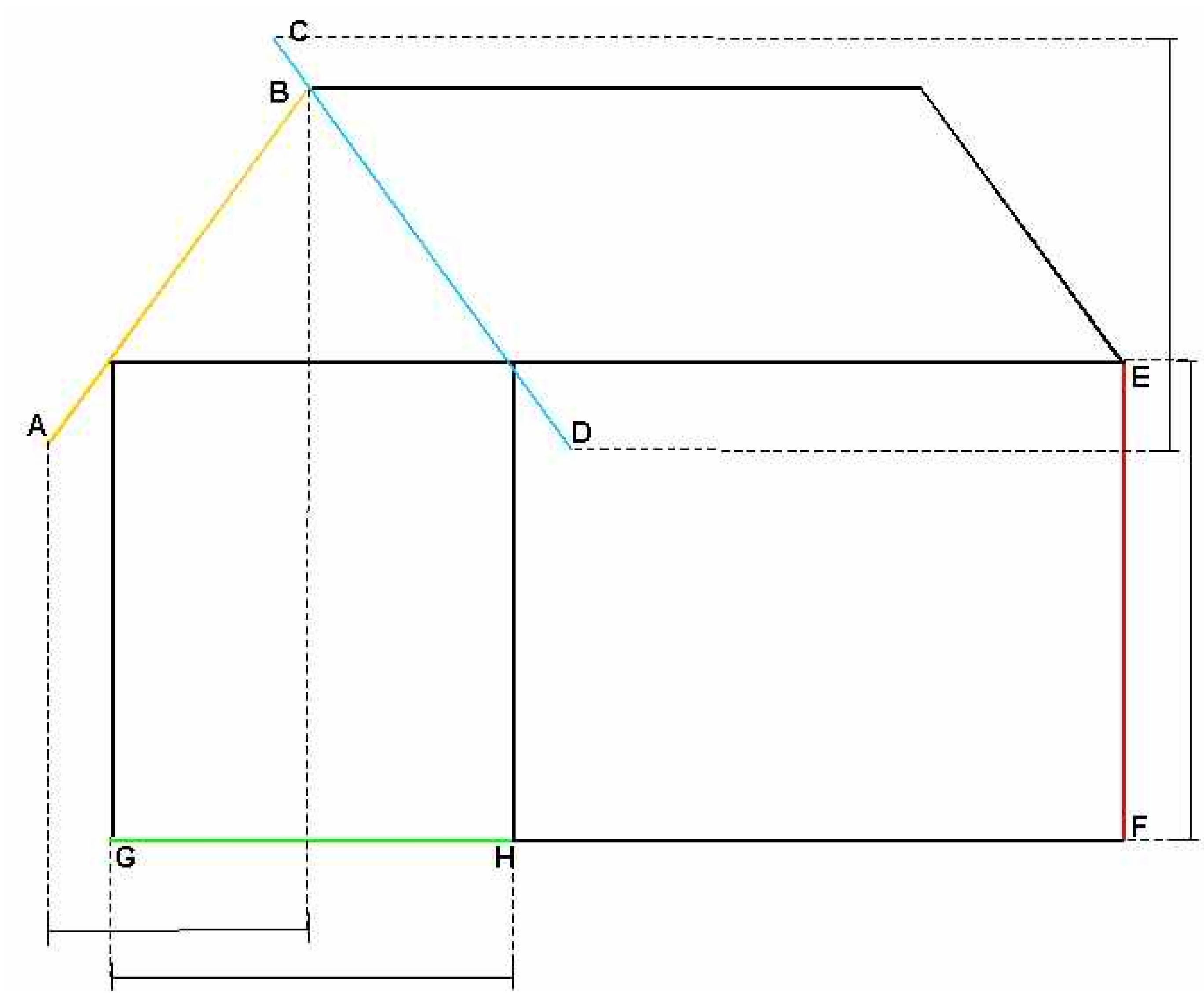
As respostas corretas para esse problema são: o caminho mais comprido é o segmento CD-azul e o caminho mais curto, o segmento GH-verde. O aluno que compara efetivamente os comprimentos dos segmentos, a despeito de estarem em posições diferentes (prototípicas ou não), pode utilizar três estratégias de resolução: - observação visual; - sobreposição de medianeiros; - junção dos próprios palitos (comparação direta). No entanto, a comparação direta só é possível no modelo da atividade que faz uso de materiais manipulativos.

Quanto aos conhecimentos-em-ação que influenciariam as possíveis respostas erradas dos alunos, consideramos os efeitos da “projeção horizontal” e da “projeção vertical”, que foram observados na pesquisa realizada por Barbosa (2002):

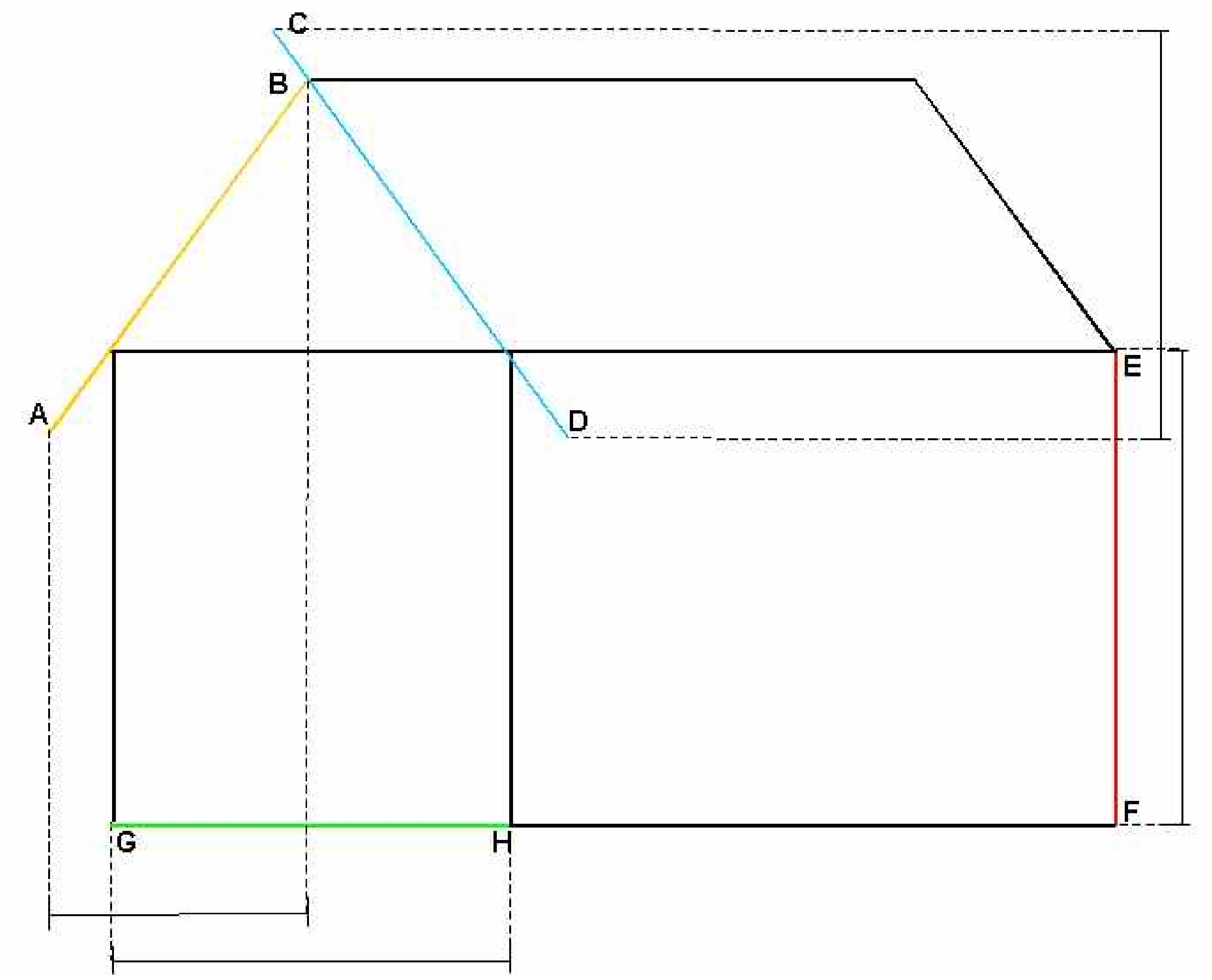
- Comparando as projeções verticais, o aluno poderia concluir que o caminho/palito EF-vermelho tem maior comprimento e o caminho/palito GH-verde tem menor comprimento, como ilustra a figura seguinte:



- Da mesma forma, comparando as projeções horizontais, o aluno poderia concluir que o caminho/palito GH-verde tem maior comprimento e o caminho/palito EF-vermelho tem menor comprimento, como mostra a figura seguinte:



- Pode acontecer, ainda, a possibilidade de o aluno considerar, ao mesmo tempo, a projeção horizontal e a projeção vertical, na comparação entre os dois caminhos/palitos mais compridos e os dois mais curtos. Neste caso, o aluno poderia se basear na projeção horizontal ao concluir que, entre os caminhos/palitos AB-amarelo e GH-verde, o primeiro tem menor comprimento. Enquanto que a projeção vertical seria verificada na comparação entre os palitos CD-azul e EF-vermelho, concluindo que o segundo tem maior comprimento, como ilustra a figura seguinte:



Como evidenciado na tabela anterior, usando como conhecimentos-em-ação os efeitos da “projeção horizontal” e da “projeção vertical”, os alunos poderiam utilizar as estratégias de “observação visual” e da “sobreposição de medianeiros”, tanto no ambiente papel e lápis como com o uso de material manipulativo.

Julgamos que este último estimularia mais o aluno na sua reflexão diante da situação-problema e também facilitaria a realização de estratégias, além de permitir a comparação direta dos palitos, o que não é possível no ambiente papel e lápis.

Com relação ao uso da estratégia de observação visual, o aluno poderia encontrar a resposta certa, mas, também, era possível conduzir a respostas erradas através da influência dos dois tipos de posições – prototípicas ou não prototípicas. No entanto, acreditávamos que teria uma maior superação dessa influência quando a atividade fosse aplicada em situações com o uso de material manipulativo, em que o aluno teria a oportunidade de visualizar melhor os comprimentos dos caminhos representados por palitos, mesmo que ele não venha a mover os palitos encaixados no borrachudo.

Quanto à estratégia da sobreposição de medianeiros, o aluno, ao fazer a comparação usando medianeiros poderia encontrar as respostas certas (CD e GH) realizando uma boa sobreposição, mas, ele pode, também, errar nas respostas por não ter habilidade na estratégia de sobreposição, apresentando dificuldade em perceber as diferenças entre os comprimentos comparados; entretanto, acreditávamos que ela seria melhor realizada com o uso de manipulativos por facilitar o apoio dos medianeiros sobre as extremidades dos palitos. Nessa estratégia, os comprimentos dos caminhos poderiam ser registrados nos medianeiros, sem recortá-los, ao serem riscados com lápis, podendo utilizar-se da relação de ordem durante a comparação. Também seria possível o recorte desses medianeiros com a finalidade de reproduzir cópias móveis dos caminhos comparados.

Ainda é importante acrescentar que o aluno poderá, através de “medianeiros”, reproduzir apenas um dos caminhos. Este, então, passará a ser o único medianeiro usado para realizar as comparações entre os demais caminhos por meio da transitividade de relação de ordem. Exemplificando: caso o aluno reproduza apenas uma cópia móvel do caminho vermelho (EF), ele poderá verificar que este caminho é menor que o azul e também que o vermelho é maior que o amarelo e o verde e, assim, realizar a relação de ordem, concluindo que os caminhos amarelo e verde são menores do que o azul, sem precisar compará-los.

Por fim, no tocante à estratégia referente à junção dos próprios palitos a serem comparados, ou seja, na comparação direta, ao ser possível mover os palitos encaixados na casa feita sobre uma superfície de borrachudo, o aluno não precisará de medianeiros e, por estar comparando realmente os comprimentos dos segmentos, não será influenciado pelos efeitos das projeções horizontal e vertical.

3.1.3 – Análise a posteriori

No anexo 1, nas tabelas 1, 2, 3, 4, 5 e 6, podemos encontrar as respostas dos alunos a essa atividade, as quais são resumidas no quadro a seguir, classificadas por erros e acertos e com a indicação dos caminhos apontados como resposta.

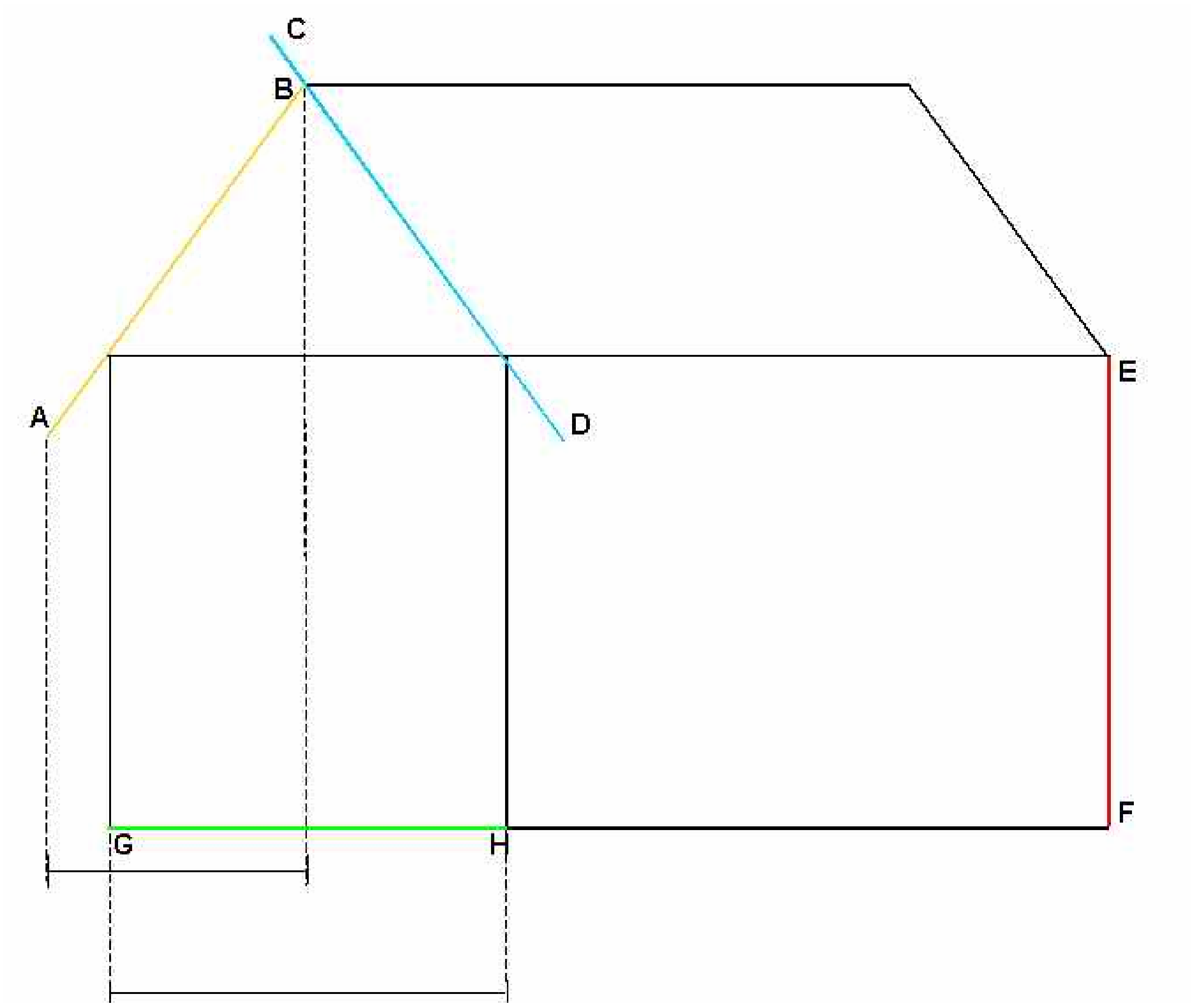
ATIVIDADE 1 – ITENS (a) (b)						
Item	**Resposta**		**Papel e lápis**		**Manipulativos**	
			#	**%**	**#**	**%**
a	Certa	CD-azul	23	95,8	21	87,5
	Errada	AB-amarelo	1	4,2	1	4,2
		EF-vermelho	-	-	2	8,3
b	Certa	GH-verde	15	62,5	21	87,5
	Errada	AB-amarelo	5	20,8	2	8,3
		EF-vermelho	1	4,2	1	4,2
		AB-amarelo CD-azul	1	4,2	-	-
	Nenhuma	-	2	8,3	-	-

Em primeiro lugar, verifica-se uma considerável diferença, principalmente no item (b), entre os índices de acertos e erros nos dois testes realizados, pois, no primeiro teste desta atividade – ambiente papel e lápis – 95,8 % dos alunos acertaram o item (a) e 62,5% o item (b), enquanto que no segundo teste – usando materiais manipulativos, 87,5% dos alunos acertaram os dois itens.

Para melhor analisamos os dados obtidos na aplicação desta atividade, categorizamos, no quadro abaixo, os alunos que acertaram ou erraram nos dois ambientes e os alunos que acertaram apenas em um dos ambientes, considerando os itens (a) e/ou (b):

Desempenho dos alunos nos dois ambientes, papel/lápis e com o uso de manipulativos		
Ambientes	**Item (a)**	**Item (b)**
Alunos que acertaram nos 2 ambientes	1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 22, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 34	5, 6, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 21, 25, 27, 28, 31
Alunos que erraram nos 2 ambientes	12	12
Alunos que só acertaram no ambiente papel e lápis	15, 21	22
Alunos que só acertaram no ambiente com o uso de materiais manipulativos	-	1, 3, 7, 8, 30, 34
OBS: No ambiente papel e lápis o aluno 23 (item "a") e os alunos 2 e 29 (item "b") não responderam as questões.		

No tocante a possíveis interpretações dos erros cometidos nos dois testes, a indicação do caminho AB, por parte de cinco sujeitos (1, 7, 8, 30, 34) no item (b) do primeiro teste, leva-nos a supor que tais alunos, ao realizarem essa escolha entre os dois caminhos mais curtos, AB e GH, consideraram o efeito da "projeção horizontal" dos caminhos, o que foi previsto na análise a priori, ou seja, o comprimento da projeção do segmento sobre uma reta horizontal, como mostra a ilustração a seguir, onde a projeção horizontal do caminho AB-amarelo é mais curta do que a do caminho GH-verde.



Verificamos, ainda, que esses 5 alunos acertaram o item (b) no segundo teste, não cometendo o mesmo erro, enquanto que os dois alunos (2 e 22) que erraram essa situação no segundo teste, indicando o palito amarelo como o mais curto, tinham acertado no primeiro teste. No entanto, consideramos que no modelo da atividade com uso de materiais manipulativos os alunos superaram mais a influência do efeito da "projeção horizontal".

Com relação aos tipos de estratégias utilizadas, no primeiro teste não foi possível identificar as estratégias que foram usadas por todos os alunos especificamente, pois, de um lado, alguns deles não responderam, em seus protocolos, a questão *"Explique como você resolveu",* também, constante da atividade. Por outro lado, alguns outros alunos apresentaram explicações contraditórias ao escreverem, por exemplo, que apenas observaram, usando a mente, quando, na verdade, verificamos marcações e recortes nos medianeiros, ou vice-versa. Assim, com base nas explicações registradas pelos alunos em seus protocolos e naquilo que observamos durante a aplicação em sala de aula, podemos afirmar que os alunos usaram os dois tipos de estratégias previstas na análise a priori: a “observação visual” e a “sobreposição de medianeiros”.

Quanto ao segundo teste, usando material manipulativo, verificamos a utilização de todas as estratégias antecipadas na análise a priori, inclusive a realização da “junção dos próprios palitos a serem comparados”. Entretanto, a maioria dos alunos baseou-se apenas na “observação visual”. As estratégias usadas pelos alunos nesta atividade estão resumidas na tabela abaixo, onde constam as anotações das observações tanto durante a realização desta atividade como, também, através da gravação das entrevistas feitas quando os alunos concluíam a resolução do teste.

Atividade 1 – usando materiais manipulativos			
Estratégias de resolução	**Aluno**	**#**	**%**
- Observação visual.	2, 3, 5, 7, 8, 12, 14, 15, 17, 21, 29, 30, 34	13	50,0
-Sobreposição de medianeiros.	1, 6, 11, 16, 19, 27, 31	7	33,3
- Junção dos próprios palitos a serem comparados.	22 – apenas no item “a”, pois no item “b” usou a observação. 13, 25	3	12,5
- Não identificamos.	28	1	4,2

Analisando as estratégias dos alunos que erraram esta atividade com o uso de manipulativos, verificamos que todos eles apresentaram respostas erradas nos itens “a” e/ou “b” utilizando-se da “observação visual”, inclusive o aluno 22 ao usar esta estratégia somente para responder o item “b”.

Dentre esses alunos que cometeram erros no 2º teste utilizando-se da “observação visual” como estratégia de resolução, supomos que os alunos 15 e

21, ao indicarem o palito vermelho no item “a” e o palito verde no item “b”, consideraram o efeito da “projeção vertical” dos palitos, previsto na análise a priori, ou seja, o comprimento da “projeção vertical” sobre uma reta horizontal. Enquanto isso, os alunos 2 e 22, ao indicarem o palito amarelo no item “b”, consideraram o efeito da “projeção horizontal” dos palitos, também previsto na análise a priori, indicando o palito amarelo como mais curto que o verde ao comparar os comprimentos da projeção do segmento de reta sobre uma reta horizontal.

Outro fato importante a observar é que, dentre os alunos que utilizaram a estratégia de sobreposição de medianeiros, se verifica, com base nas anotações realizadas na tabela 17 do anexo 1, que 4 alunos não usaram os medianeiros disponíveis na caixa de ferramentas, mas, outros tipos, tais, como os dedos das mãos e lápis, recursos não previstos na análise a priori.

Também observamos durante a entrevista que o aluno 29 escolheu, pela “observação visual”, o palito azul pelo fato de o seu comprimento passar os “limites da casa”, pois ele apresentou a seguinte explicação durante a entrevista: *“esse daqui eu achava o maior porque esse daqui passava daqui pra qui; de todo jeito ele passava aqui e passava embaixo também”*.

Ainda com relação às estratégias de resolução utilizadas pelos alunos, verificamos as seguintes situações:

- o aluno 12 usou a estratégia da “observação visual” ao errar toda a questão nos dois itens;
- os alunos 3, 7, 8, 30 e 34 utilizaram a “observação visual” nos dois testes, mas, erraram o item (b) no ambiente papel e lápis;

- os alunos 15 e 21 acertaram o item (a) do 1º teste, usando a “sobreposição de medianeiros”, e erraram esse item no 2º teste, através da “observação visual;
- todos os alunos (22 – apenas no item “a”; 13; 25) que usaram, no 2º teste, a “junção dos palitos” acertaram as questões.

Finalizando, percebemos que o uso de material manipulativo permitiu a ampliação das possibilidades de estratégias, além de melhorar o uso dos procedimentos de “observação visual” e “sobreposição de medianeiros”, sendo possível fazer movimentos alterando posições prototípicas e não-prototípicas. No entanto, a nossa expectativa era a de que os alunos apresentassem um maior índice de acertos no 2º teste, principalmente no item (a), pois, considerávamos que houvesse a utilização, pela maior parte dos alunos, da estratégia da “junção dos próprios palitos a serem comparados”.

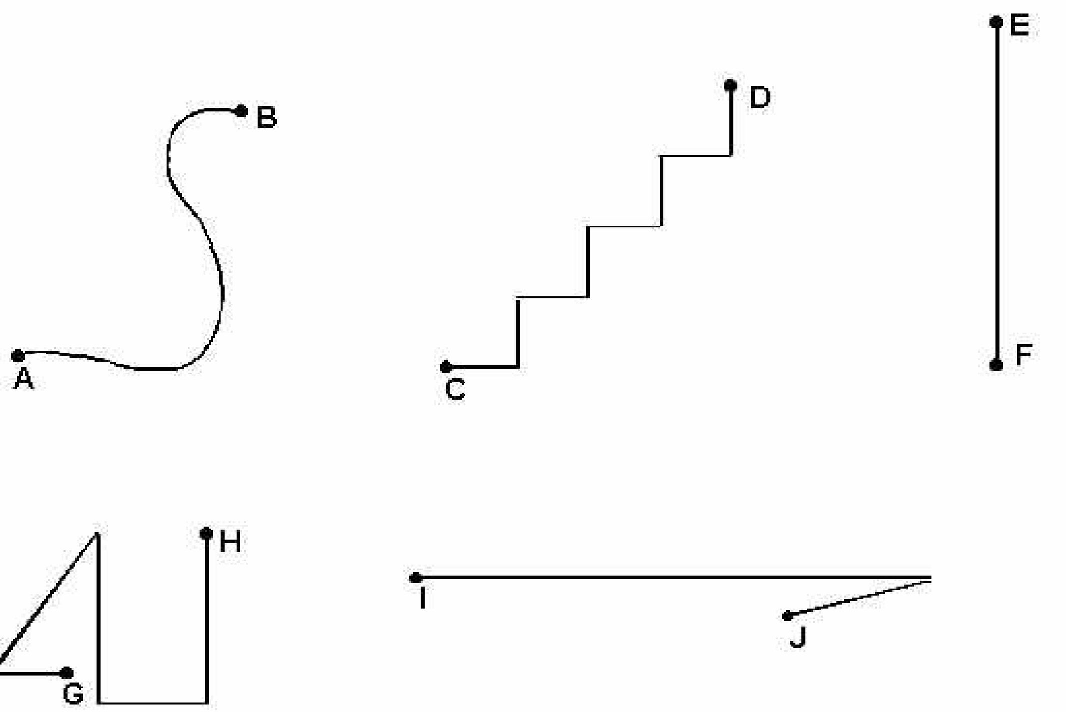
3.2 - Segunda Atividade

3.2.1 – Apresentação

ATIVIDADE 2

(1º TESTE – AMBIENTE PAPEL/LÁPIS)

Observe os caminhos abaixo:



Marque com um X .

a) O caminho mais comprido é:

AB ( )   CD ( )   EF ( )   GH ( )   IJ ( )

b) O caminho mais curto é:

AB ( )   CD ( )   EF ( )   GH ( )   IJ ( )

Explique como você resolveu:

____

____

____

ATIVIDADE 2

(2º TESTE - COM MATERIAIS MANIPULATIVOS)

Entre os caminhos (amarelo, azul, verde, vermelho, preto) apresentados, descubra:

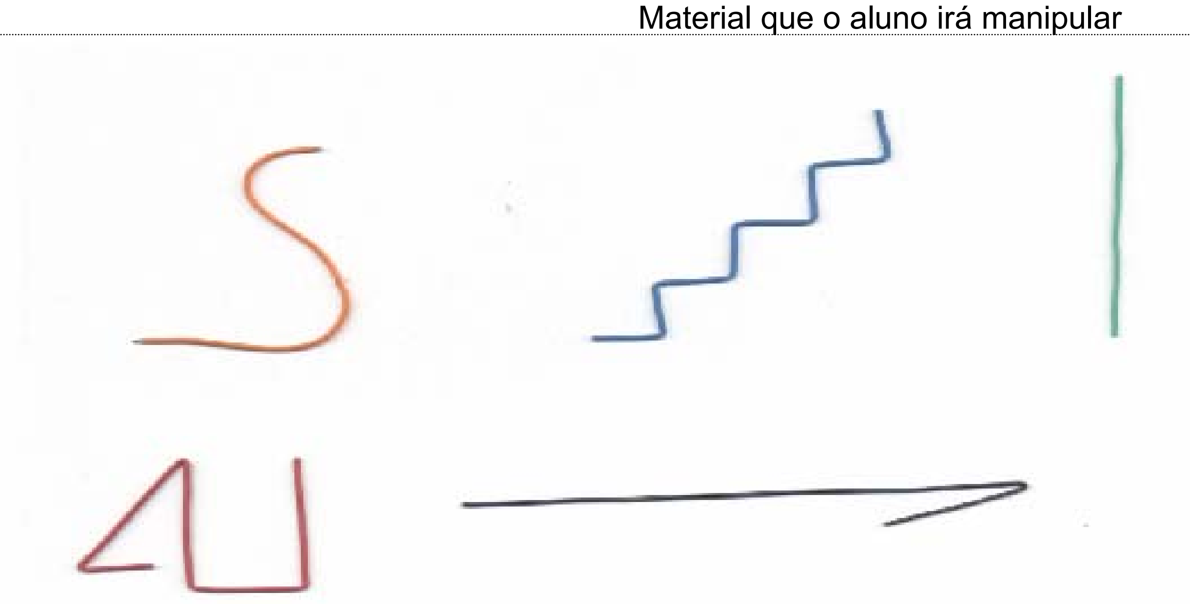
a) Qual é o caminho mais comprido? Marque com um X a resposta correta:

Amarelo ☐ Azul ☐ Verde ☐ Vermelho ☐ Preto ☐

b) Qual é o caminho mais curto? Marque com um X a resposta correta:

Amarelo ☐ Azul ☐ Verde ☐ Vermelho ☐ Preto ☐

Material que o aluno irá manipular



3.2.2 - Análise a priori

Objetivo: Identificar se o aluno diferencia o mais comprido e o mais curto, dentre cinco caminhos, sendo um segmento de reta, uma linha curva e três linhas poligonais abertas.

Justificativa e Cenário:

Esta atividade foi inspirada em questões – propostas na seqüência elaborada, no ambiente papel e lápis, por Barbosa (2002) – que exploravam a comparação de comprimentos entre vários tipos de curvas planas, na qual fizemos alterações aproveitando apenas dois exemplos de caminhos (AB e CD) utilizados por esse pesquisador e acrescentamos três caminhos: um segmento de reta na vertical (EF) e duas linhas poligonais abertas (GH e IJ). Por fim, escolhemos esses cinco caminhos por permitirem apresentar respostas diferentes para o caminho mais comprido e para o mais curto, em todas as possibilidades de erros, sendo possível identificar diferentes conhecimentos-em-ação, como, por exemplo, as influências dos “efeitos”, os quais serão descritos posteriormente.

É importante salientar que nessa atividade, elaborada no ambiente com uso de materiais manipulativos, os caminhos apresentados foram construídos com arames flexíveis e em cores distintas (amarelo-AB, azul-CD, verde-EF, vermelho-GH e preto-IJ).

Por envolver três linhas poligonais abertas, uma delas assemelhando-se ao perfil de uma escada, Barbosa (2002) considerou esse tipo de situação como uma *“preparação para o trabalho com o perímetro de regiões poligonais”* (p. 127). Os comprimentos dos cinco caminhos são: 5 cm (EF-verde); 7 cm (AB-amarelo); 8 cm (CD-azul); 9 cm (IJ-preto) e 10 cm (GH-vermelho). Optamos por deixar uma diferença (na ordem crescente) igual ou maior do que 1,0 cm entre os caminhos, considerando que essa situação se diferencia da atividade 1 por não se tratar mais de segmentos, tornando-se mais difícil o trabalho de sobreposição.

Interpretação das respostas possíveis:

Na elaboração desta atividade, fizemos uma cuidadosa seleção de valores das variáveis didáticas na escolha dos tipos dos caminhos e dos seus comprimentos, possibilitando, através das diferentes respostas e estratégias que os alunos apresentassem, a identificação de conhecimentos-em-ação, utilizados na resolução do problema, o que se encontra resumido na tabela abaixo:

Conhecimentos-em-ação	Respostas	Estratégias de resolução	Modelos de atividade
- comparação de comprimento dos caminhos sem precisar conservar a forma	a) GH b) EF	- Esticar os arames	- Manipulativos
- comparação de comprimento dos caminhos	a) GH b) EF	- Observação visual; - Sobreposição de medianeiros; - Efetuar uma operação com grandezas, tomando um múltiplo do comprimento de um dos "degraus".	- Papel e lápis - Manipulativos
- efeito da projeção horizontal	a) IJ b) EF	- Sobreposição de medianeiros; - Observação visual	- Papel e lápis - Manipulativos
- efeito da projeção vertical	a) EF b) IJ / GH		
- efeito da linha imaginária	a) CD b) GH		
- efeito do espaço ocupado	a) AB / CD b) GH / EF		
- efeito dos pontos mais extremos	c) IJ d) GH		

As respostas corretas para essa situação-problema são: o caminho mais comprido é a linha poligonal aberta GH (vermelho) e o mais curto, o segmento de reta EF (verde), baseadas na comparação dos comprimentos das linhas.

Estas respostas podem ser apoiadas em três estratégias de resolução: - esticar os arames; - sobrepor medianeiros; - observar visualmente. A estratégia referente a “esticar os arames” só poderá ser feita no modelo da atividade usando materiais manipulativos. Nesse caso, julgamos que um importante conhecimento-em-ação correto está implícito: a mudança da forma da linha não altera seu comprimento. O uso de arame permite afirmar tal conservação do comprimento, considerando que esse material não tem elasticidade. É importante destacar que uma estratégia como essa mostra ruptura com uma concepção geométrica de comprimento segundo a qual a linha e seu comprimento são confundidos.

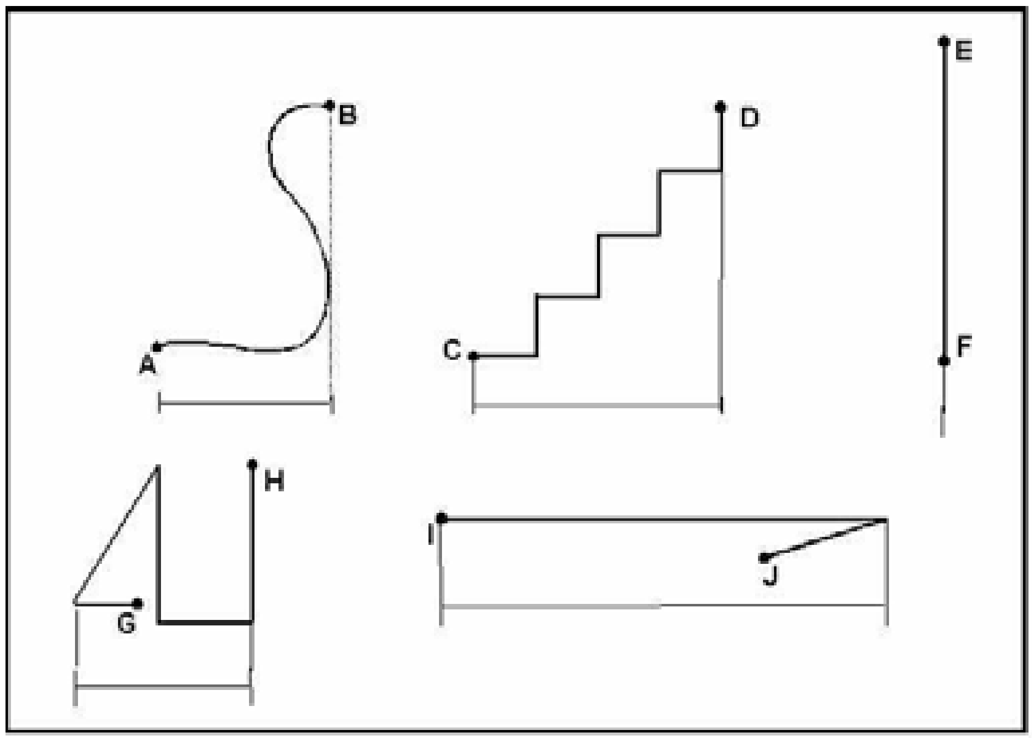
Consideraremos, também, as observações feitas na análise a priori desta atividade (no ambiente papel e lápis) apresentadas por Barbosa (2002), em que era esperada “*a estratégia de transportar o comprimento dos caminhos para um mesmo segmento de reta para, então, compará-los*” (p. 127). Ainda de acordo com esse pesquisador, o aluno poderia obter o comprimento das linhas poligonais efetuando *“uma operação com grandezas, a saber, tomar um múltiplo do comprimento de um dos ‘degraus’”* (p. 127).

Além disso, respostas incorretas poderiam aparecer nas resoluções dos alunos em decorrência de eles ainda não compreenderem, com clareza, que devem comparar o comprimento do caminho e não se basearem em outros efeitos de projeção, os quais interpretamos como conhecimentos-em-ação.

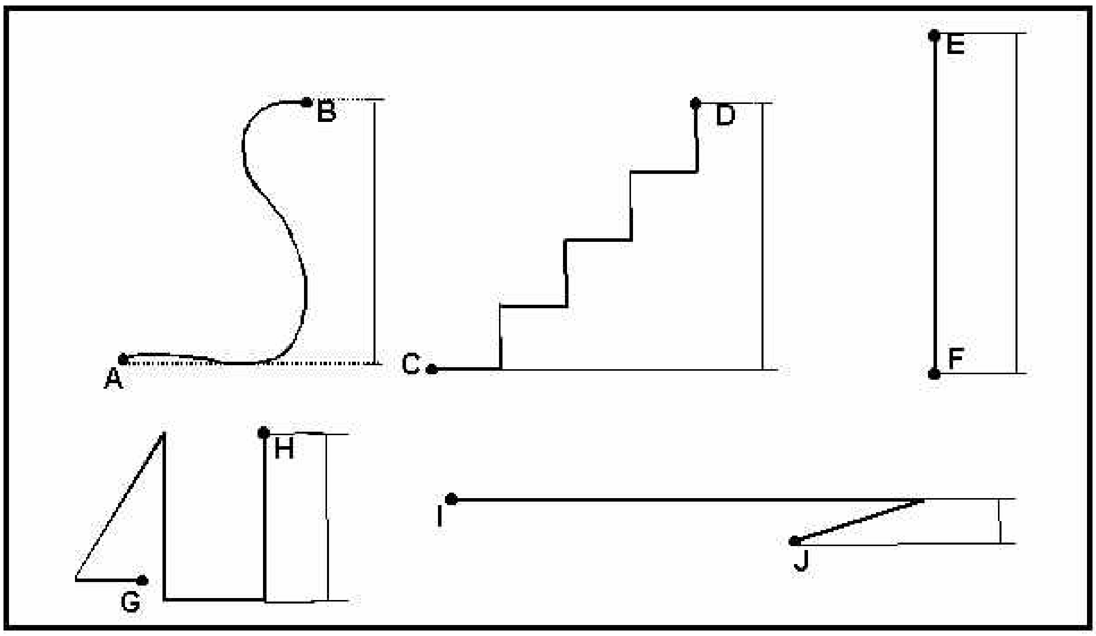
Para esse último caso apresentado, acreditamos em possíveis erros que os alunos poderão cometer tendo a influência dos 4 “efeitos” identificados na pesquisa realizada por Barbosa (2002), que os classificou como:

1. Efeito da projeção horizontal: *“a grande maioria dos alunos teria feito uma pré-escolha, separando as curvas pelo critério do comprimento de sua projeção sobre uma horizontal”* (p. 129). De acordo com esse

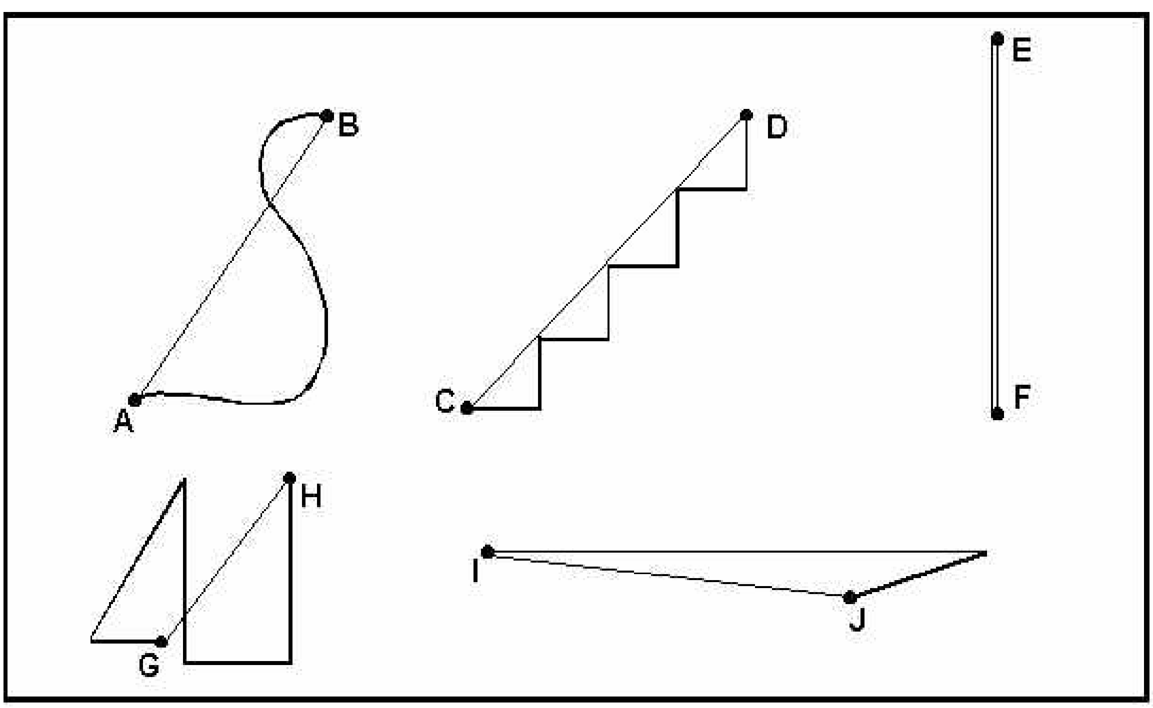
efeito, a ordem crescente dos comprimentos seria: 0,0 cm (EF-verde); 2,7 cm (AB-amalero); 3,0 cm (GH-vermelho); 4,0 cm (CD-azul) e 7,0 cm (IJ-preto). Ou seja, o caminho EF-verde é aquele cuja projeção horizontal é mais curta e IJ-preto é o de projeção horizontal mais comprida, como mostra a figura a seguir:



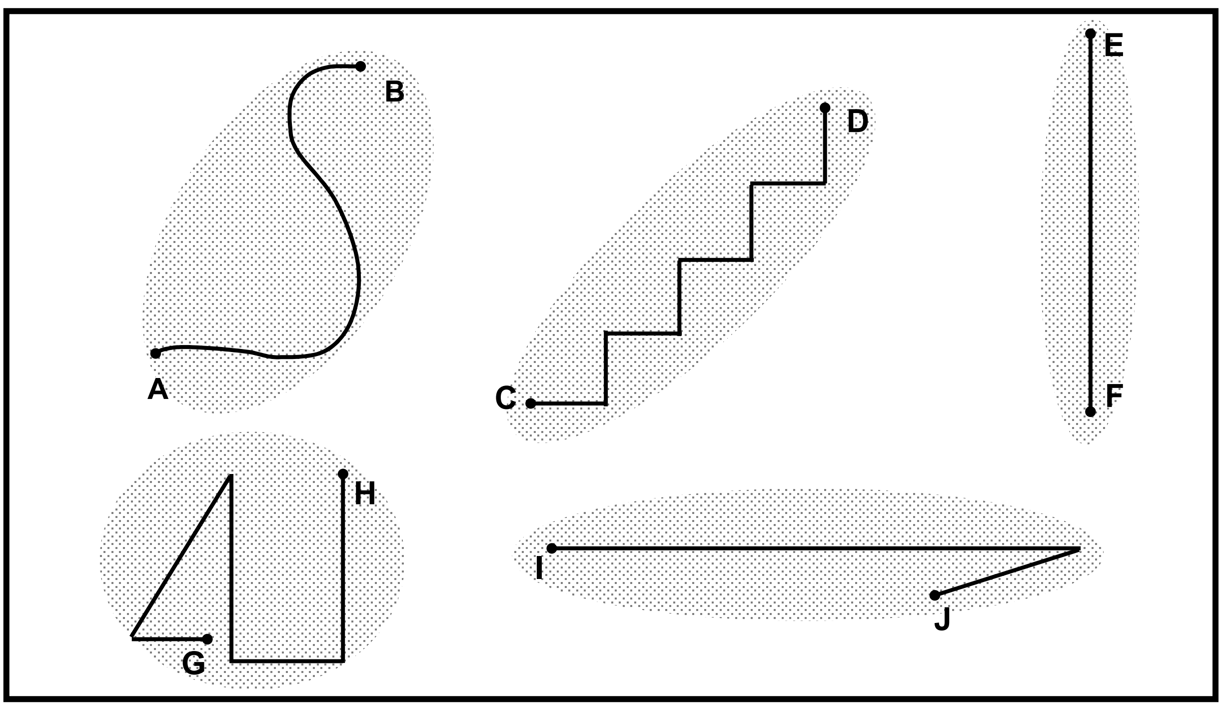
2. Efeito da projeção vertical: ao ser influenciado por esse efeito, o aluno poderá separar as curvas pelo critério do comprimento de sua projeção sobre uma vertical. Nesse caso, a ordem crescente dos comprimentos seria: 0,6 cm (IJ-preto); 2,5 cm (GH-vermelho); 4,0 cm (AB-amarelo); 4,0 cm (CD-azul) e 5,0 cm (EF-verde). Ou seja, o caminho IJ-preto é aquele cuja projeção vertical é mais curta e EF-verde é o de projeção vertical mais comprida, como mostra a figura a seguir:



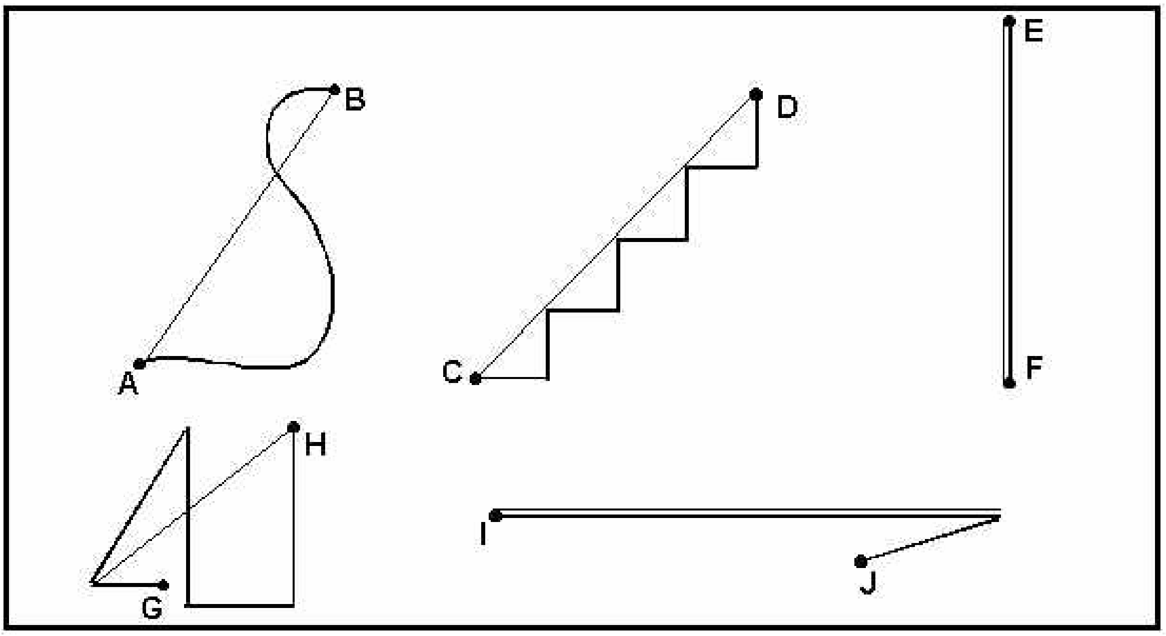
3. Efeito da linha imaginária: *"poderia ter ocorrido, em alguns casos, a estratégia que considera o comprimento do caminho tomado entre os seus pontos extremos"* (p. 130). Nesse caso, a ordem crescente dos comprimentos seria: 2,8 cm (GH-vermelho); 4,8 cm (AB-amarelo); 5,0 cm (EF-verde); 5,1 cm (IJ-preto) e 5,7 cm (CD-azul). Ou seja, o caminho GH-vermelho é aquele cujo efeito da linha imaginária é mais curto e CD-azul é o mais comprido, como mostra a figura seguinte:



4. Efeito do espaço ocupado: *"Uma outra estratégia poderia resultar do emprego da visualização do 'espaço ocupado' pela curva para fazer uma triagem [...]. Adotando essa estratégia, o aluno estaria associando o comprimento da curva à área de uma certa 'região' ocupada pela curva"* (p. 130-131). De acordo com esse efeito, a ordem crescente dos comprimentos seria: GH-vermelho; EF-verde; IJ-preto; CD-azul e AB-amarelo. Ou seja, o caminho GH-vermelho é aquele cujo efeito do espaço ocupado é mais curto e o AB-amarelo é o mais comprido, como mostra a figura seguinte:



Além desses quatro efeitos identificados na pesquisa de Barbosa, consideramos a possibilidade de surgir um quinto efeito que seria o "efeito dos pontos mais extremos", o qual conduz a ordenar as linhas da seguinte forma: 3,5 cm (GH-vermelho); 4,8 cm (AB-amarelo); 5,0 cm (EF-verde); 5,7 cm (CD-azul) e 7,0 cm (IJ-preto). Ou seja, de acordo com o "efeito pontos mais extremos" GH-vermelho é o caminho mais curto e IJ-preto é o mais comprido, como mostra a figura abaixo:



Qualquer um dos 5 conhecimentos-em-ação, descritos anteriormente, pode se apoiar na “observação visual” e na “sobreposição de medianeiros” como estratégias de resolução, tanto no ambiente papel e lápis como com o uso de material manipulativo.

No entanto, acreditamos que uma maior superação das influências dos referidos efeitos é possível na realização da atividade com uso de manipulativos, pois, nesse modelo, além do aluno poder desenvolver melhor todas as estratégias de resolução utilizadas na situação papel e lápis, considerando a quebra das posições, ele teria uma estratégia a mais relacionada à possibilidade de esticar os arames, o que implica comparar, realmente, os comprimentos das linhas e, ao mesmo tempo, superar a idéia de ter que conservar a forma do objeto.

3.2.3 – Análise a posteriori

Após a observação dos protocolos referentes à atividade 2, cujas respostas estão listadas nas tabelas 1, 2, 3, 4, 7 e 8 do anexo 1, resumimos o total de acertos e erros, em cada item e, fizemos uma classificação dos tipos de erros observados. Com isso, pudemos construir a tabela a seguir:

ATIVIDADE 1 – ITENS (a) (b)						
Item	**Resposta**		**Papel e lápis**		**Manipulativos**	
			#	**%**	**#**	**%**
a	Certa	GH-vermelho	6	25,0	9	37,5
	Errada	EF-verde	1	4,2	1	4,2
		CD-azul	5	20,8	1	4,2
		IJ-preto	11	45,8	13	54,1
	Nenhuma	-	1	4,2	-	-
b	Certa	EF-verde	14	58,4	19	79,1
	Errada	AB-amarelo	2	8,3	1	4,2
		GH-vermelho	5	20,8	4	16,7
		IJ-preto	1	4,2	-	-
	Nenhuma	-	2	8,3	-	-

Observamos que os percentuais, 25,0% e 37,5% no item “a” e 58,4% e 79,1% no item “b”, de alunos que cometeram acertos nesta atividade, é bem menos elevado do que os percentuais (95,8%/87,5% - item “a” e 62,5%/87,5% - item “b”) de alunos que acertaram na atividade 1. Isso revela que, quando estão em jogo apenas segmentos de retas, a noção de comprimento foi mais compreendida pelos alunos investigados, contrariamente quando se exploram situações envolvendo linhas curvas ou poligonais abertas, pois os sujeitos apresentaram bem mais dificuldades na resolução do problema presente nesta atividade 2.

Para um exame mais minucioso das respostas, à luz das considerações feitas na análise a priori, classificamos, na tabela seguinte, os erros dos alunos que supomos terem sido causados pela interferência dos efeitos: “projeção horizontal”, “projeção vertical”, “linha imaginária”, “espaço ocupado” e “pontos mais extremos”.

ATIVIDADE 2 – ITENS (a) (b)					
Item	**Erro**	**Papel e lápis**		**Manipulativos**	
		#	**%**	**#**	**%**
a	IJ-preto (pontos mais extremos)	12	50	13	54,2
	EF-verde (projeção vertical)	1	4,2	-	-
	CD-azul	5	20,8	-	-
b	GH-vermelho (espaço acupado, linha imaginária ou pontos mais extremos)	5	20,8	4	16,7
	IJ-preto	1	4,2	-	-
a e b	a) IJ-preto b) GH-vermelho (pontos mais extremos)	2	8,3	4	16,7
	a) IJ-preto b) EF-verde (projeção horizontal)	7	29,7	9	37,5
	a) EF-verde b) GH-vermelho (projeção vertical)	1	4,2	-	-
	a) CD-azul b) GH-vermelho (linha imaginária)	2	8,3	-	-

Assim, com essa classificação da influência dos efeitos, antecipados na análise a priori, nas respostas erradas dos alunos em cada item e depois fazendo uma análise considerando os dois itens ("a" e "b"), simultaneamente, observamos que uma boa parte dos alunos considerou o comprimento dos caminhos pelo critério desses efeitos em pelo menos um dos itens da atividade.

No modelo da atividade no ambiente papel e lápis, além destes tipos de erros apresentados anteriormente, verificamos que outros alunos cometeram erros, acertando apenas um item ou errando toda a questão, pelo que não pudemos classificá-los nos referidos efeitos. Dentre esses erros, temos o caso dos alunos 5 e 22 que escolheram o caminho CD para o item (a) e EF para o item (b), levando-nos a supor que, nesta escolha, tenham sido influenciados pelo critério do caminho que tivesse maior ou menor número de pedaços, ou seja, o de maior ou menor número de “quinas”.

Uma outra situação ocorrida neste ambiente é o caso dos alunos que escolheram IJ como o caminho mais comprido e, como mais curto, o caminho AB. Acreditamos que, nesta situação, esses sujeitos tenham considerado um provável efeito da projeção horizontal não previsto na análise a priori, com a diferença de que, entre os dois caminhos com projeções horizontais mais curtas, eles preferiram escolher o caminho AB no lugar de EF. Analisando ainda outros casos de erros cometidos, temos o aluno que marcou os caminhos EF (item “a”) e GH (item “b”), podendo ter sido influenciado pelo critério de um provável efeito da projeção vertical, não previsto na análise a priori, bem como o aluno 21, ao escolher os caminhos CD (item “a”) e IJ (item “b”).

Agora, observando o desempenho dos alunos com o uso de materiais manipulativos, verificamos que o efeito “pontos mais extremos” foi o que mais influenciou nas suas respostas, pois supomos, também, que esse efeito influenciou no item (b) os 9 alunos que indicaram o caminho preto, no item (a), e o verde, no item (b), considerando, primeiramente, que não existiu o efeito da “projeção horizontal” pelo fato de as linhas serem móveis e não terem posições fixas e, em segundo, pelo fato observado, durante a aplicação deste teste, de que esses alunos usaram a “observação visual” para escolher o caminho EF-verde como o mais curto, enquanto que se basearam no “efeito dos pontos mais extremos” para descobrirem, apenas, qual o caminho mais comprido realizando ordenações.

Ainda analisando as respostas dos alunos com uso de manipulativos, tendo como base as anotações realizadas através das observações durante o desempenho de cada sujeito neste teste e durante as entrevistas (ver anexo 2, tabela 17), os alunos 1, 15, 30 e 3 apresentam fortes índices de mobilização do “efeito dos pontos mais extremos”, ao indicarem os arames preto e vermelho. Eles usaram procedimentos de ordenação, organizando os caminhos um ao lado do outro, tendo como critério o comprimento entre seus pontos mais extremos como se isso garantisse o comprimento dos caminhos. Podemos verificar, também, a confirmação desses procedimentos nas seguintes explicações dadas pelos alunos:

- (item-a): *”porque… foi porque eu medi o preto com tudinho e eu vi que só o preto é o maior. Medi, assim, o comprimento; eu coloquei um ao lado do outro para ver qual é o maior e eu vi que o preto é o maior”;* - (item-b): *”eu vi que todos são maiores, menos o preto que é o maior de todos; eu vi que esse é o médio, esse é o encostado ao médio, esse é, assim, encostado ao outro médio e esse é o menor. Esse é o vermelho. Eu vi que o vermelho é o menor, porque aqui é menor e aqui também é dos mesmos tamanhos; e esses outros, oh!, tudo maior que ele. Aí, eu vi que esse é o menor”.*

Já com relação à influência do efeito da “projeção horizontal”, esse efeito parece ter sido usado como critério de comparação pelos alunos 2, 7, 14, 17, 21, 28, 29, 31, 34, que indicaram o caminho preto, no item (a), e o verde, no item (b). Eles acertaram o item (b), mas erraram o item (a) quando, entre os caminhos mais compridos, escolheram o preto por ser o mais comprido numa provável posição horizontal. Entretanto, como já foi enfatizado anteriormente, não descartamos a possibilidade de a escolha do caminho preto por esses alunos ter sido pela influência do efeito dos “pontos mais extremos”, que, nesse caso, só foi considerado no item (a).

Quanto às estratégias utilizadas na resolução dos dois modelos desta atividade, no ambiente papel e lápis, verificamos que os alunos usaram a “observação visual” e a “sobreposição de medianeiros”. Enquanto que na atividade fazendo uso de manipulativos, as estratégias utilizadas pelos alunos estão resumidas na tabela abaixo, em que foram observadas e anotadas, tanto durante a realização desta atividade como também através da gravação das entrevistas feitas quando os alunos concluíam a realização das atividades.

Atividade 2 – usando materiais manipulativos			
Estratégias de resolução	**Aluno**	**#**	**%**
- Observação visual.	2, 3, 7, 12, 22, 29	6	25,0
-Sobreposição de medianeiros.	16, 6, 11	3	12,5
- Esticar os arames.	13, 25, 27	3	12,5
- Movimentação dos materiais: manuseando, girando, ordenando, organizando um ao lado do outro, etc.	1, 5, 8, 14, 15, 17, 19, 21, 28, 30, 31, 34	12	50,0

A análise das estratégias utilizadas mostra o uso pelos alunos de todos os procedimentos antecipados na análise a priori, com exceção da ação de “efetuar uma operação com grandezas, tomando um múltiplo do comprimento de um dos “degraus”, sendo que além dessas estratégias, verificamos a utilização, por um número considerável de alunos, da ação de movimentação dos caminhos através do manuseio, bem como a ordenação deles, organizando-os um ao lado do outro.

Neste segundo teste da atividade 2, observamos que o aluno 5 apresentou as mesmas respostas do primeiro teste, indicando o caminho azul-CD para o item (a) e verde-EF para o item (b), confirmando, assim, a suposição que fizemos no teste papel e lápis, ao interpretarmos que nessa resposta o aluno considerou o critério do caminho que tivesse maior ou menor número de pedaços. Analisamos, também, as explicações que ele apresentou nas entrevistas:

- (item "a"): *"porque ele é tracinho, assim, ele é cheio desses tracinhos; aí, a pessoa puxando, fica maior"* (aluno 5).

Também, de acordo com essa explicação apresentada pelo aluno, podemos considerar que ele faz a dissociação entre forma e grandeza, ou seja, que não precisa conservar a forma na comparação do comprimento.

Quanto aos tipos de estratégias utilizadas nos dois testes, constatamos a ampliação que foi prevista na análise a priori das estratégias possíveis de serem usadas no segundo teste desta atividade com o uso de materiais manipulativos, uma vez que foram usadas a "observação visual", a "sobreposição de medianeiros" e "esticar os arames". Além desses 3 procedimentos de resolução que foram usados no segundo teste, surgiu um quarto procedimento que não foi antecipado na análise a priori e que consiste na "movimentação dos materiais". A tabela a seguir resume as estratégias apresentadas nos primeiro e segundo testes.

ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO	
1.º Teste – Papel e lápis	**2.º Teste - Manipulativos**
- Observação visual; -Sobreposição de medianeiros.	- Observação visual; -Sobreposição de medianeiros; - Esticar os arames; - Movimentação dos materiais: manuseando, girando, ordenando, organizando um ao lado do outro, etc.

Analisando o desempenho dos alunos que usaram o procedimento de "esticar os arames", considerando que a mudança da forma da linha não altera seu comprimento, observamos que todos eles acertaram os dois itens da atividade 2 no segundo teste, bem como todos aqueles que fizeram uso de sobreposição de medianeiros, diferentemente dos sujeitos que usaram a “observação visual” e cometeram erro em um item ou em toda a atividade.

Finalizando, é importante ressaltar que no teste com uso de manipulativos, quando comparado com o teste papel e lápis, foi verificada uma menor influência dos “efeitos” antecipados na análise a priori, principalmente com relação aos efeitos “projeção horizontal” e “projeção vertical”, uma vez que os caminhos não tinham posições fixas como ocorreu no ambiente papel e lápis.

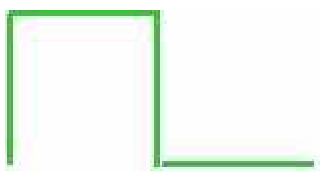
3.3 - Terceira Atividade

3.3.1 – Apresentação

ATIVIDADE 3

(1º TESTE – AMBIENTE PAPEL/LÁPIS)

Observe o caminho verde abaixo e, em seguida, desenhe:



a) Um caminho azul mais comprido que o caminho verde:

b) Um caminho vermelho mais curto que o caminho verde:

c) Um caminho laranja com o comprimento igual ao do caminho verde:

ATIVIDADE 3

(2º TESTE - COM MATERIAIS MANIPULATIVOS)

Observe o caminho verde apresentado e, em seguida, recorte:

a) Um pedaço de fio vermelho e com ele faça um caminho mais comprido que o caminho verde.

b) Um pedaço de fio azul e com ele faça um caminho mais curto que o caminho verde.

c) Um pedaço de fio amarelo e com ele faça um caminho com o comprimento igual ao do caminho verde.

Material que o aluno irá manipular:

3.3.2 – Análise a priori

Objetivo: Verificar se o aluno, a partir da referência de uma linha poligonal aberta, produz um caminho mais comprido, um mais curto e um com o comprimento igual.

Justificativa e Cenário:

Esta atividade foi inspirada de uma questão do livro didático “Matemática Criativa”, da 2ª série, de Souza (1998), em que se trata de uma situação do tipo produção proposta por Bellemain (2000).

Com relação às diferenças entre a questão original, proposta pelo citado livro, e a presente atividade, fizemos alterações no enunciado para melhorar a maneira de explicar. Colocamos um caminho referencial do tipo linha poligonal aberta (8,0 cm) no lugar de um caminho apenas do tipo segmento de reta, bem como acrescentamos o item “c” para que o aluno vivencie a construção de um caminho de comprimento igual ao caminho apresentado como referência.

É importante salientar que existe uma considerável diferença na realização da produção dos caminhos entre os dois modelos – ambiente papel/lápis e com o uso de materiais manipulativos – dessa atividade, pois enquanto que no primeiro modelo, papel e lápis, o aluno irá produzir os três caminhos solicitados através do desenho, no segundo, com o uso de materiais manipulativos, a produção desses três caminhos será feita pelo aluno através do recorte de fio.

Interpretação das respostas possíveis:

Um aspecto muito peculiar a esta atividade do tipo produção é que para a resolução correta das questões não existem respostas padronizadas, havendo, assim, a possibilidade de o aluno criar inúmeras soluções consideradas corretas, desde que estejam dentro das condições solicitadas, quais sejam, mais comprido, mais curto e igual comprimento, respectivamente:.

Reputamos ser possível que o aluno, ao realizar todas as produções (ampliação, redução e reprodução) solicitadas apresentando o mesmo tipo de caminho do caminho referencial (linha poligonal aberta), não esteja dissociando o quadro geométrico (forma) do quadro de grandeza (comprimento) – estudados por Douady e Perrin-Glorian (1989) –conforme se acredita que ele venha a fazê-la caso apresente nessas produções outros tipos de caminhos diferentes daquele que foi apresentado como referencial.

Nesta atividade, também fizemos um levantamento dos possíveis conhecimentos-em-ação, respostas e estratégias de resolução que os alunos poderiam apresentar, dependendo do modelo de atividade, os quais resumimos na tabela abaixo:

Conhecimentos-em-ação	Respostas	Estratégias de resolução	Modelos de atividade
- Comparando os comprimentos de caminhos conservando a forma.	a) mais comprido com forma igual b) mais curto com forma igual. c) comprimento igual com forma igual.	- Observação visual (desenho ou recorte de fio); - Sobreposição de medianeiros (desenho ou recorte de fios).	- Papel e lápis (desenho); - Manipulativos (recorte de fios).
		- Sobreposição dos próprios caminhos a serem comparados.	- Manipulativos (recorte de fios)
- Comparando os comprimentos de caminhos sem conservar a forma.	a) mais comprido com forma diferente. b) mais curto com forma diferente. c) comprimento igual com forma diferente.	- Observação visual (desenho ou recorte de fio); - Sobreposição de medianeiros (desenho ou recorte de fios).	- Papel e lápis (desenho); - Manipulativos (recorte de fios).
		- Sobreposição dos próprios caminhos a serem comparados; - Esticar o caminho referencial para facilitar a comparação.	- Manipulativos (recorte de fios).

Como mostra a tabela acima, ao compararem os comprimentos dos caminhos, conservando ou não a forma, os alunos poderiam utilizar a “observação visual” ou a “sobreposição de medianeiros”, tanto no ambiente papel/lápis como através do uso de materiais manipulativos; entretanto, julgávamos que com o uso de manipulativos os alunos não precisariam usar a sobreposição de medianeiros da caixa de ferramentas, mas os próprios materiais (fios) disponíveis na atividade e, com eles realizarem as comparações e já produzirem o recorte desejado, além de também terem a opção de esticar o caminho referencial para facilitar a comparação, caso fossem comparar sem precisar conservar a forma.

3.3.3 – Análise a posteriori

As respostas da atividade 3 estão listadas nas Tabelas 1, 2, 3, 4, 9 e 10, do Anexo 1, e são resumidas na tabela abaixo, na qual vamos simbolizar, por exemplo, por “mais comprido (forma =)” aqueles que acertaram, no item (a), desenhando um caminho mais comprido e, além disso, com a forma igual – linha poligonal aberta – ao caminho dado como referência.

ATIVIDADE 3 - ITENS (a) (b)						
item	**Resposta**		**Papel e lápis**		**Manipulativos**	
			#	**%**	**#**	**%**
a)	Certa	mais comprido (forma =)	9	37,5	12	50
		mais comprido (forma ≠)	14	58,3	10	41,7
	Errada	mais curto ou comprimento igual (forma =)	-	-	-	-
		mais curto ou comprimento igual (forma ≠)	1	4,2	2	8,3
b)	Certa	mais curto (forma =)	8	33,4	9	37,5
		mais curto (forma ≠)	11	45,8	11	45,9
	Errada	mais comprido ou comprimento igual (forma =)	5	20,8	2	8,3
		mais comprido ou comprimento igual (forma ≠)	-	-	2	8,3
c)	Certa	comprimento igual (forma =)	11	45,8	17	70,8
		comprimento igual (forma ≠)	2	8,3	2	8,3
	Errada	mais comprido ou mais curto(forma =)	10	41,7	1	4,2
		mais comprido ou mais curto (forma ≠)	1	4,2	4	16,7

Analisando os índices de erros e acertos nos três itens desta atividade, tanto no modelo papel/lápis como com o uso de materiais manipulativos, verificamos que esse grupo de alunos teve mais facilidade na construção de caminhos com a condição de serem mais compridos que o caminho dado como referência, diferentemente quando se solicita a produção de caminhos mais curtos e, principalmente, com relação à produção de caminhos que tenham igual comprimento.

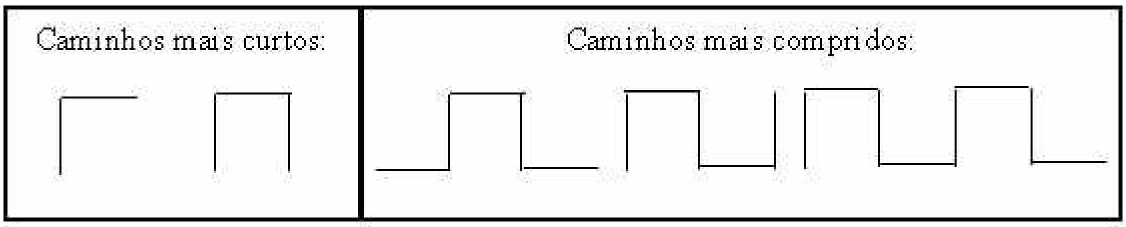
Também verificamos que enquanto 11 alunos (45,8%), quase a metade, erraram o item (c) no ambiente papel e lápis, apenas 5 alunos cometeram erro nesse mesmo item com o uso de materiais manipulativos. Além disso, entre esses 11 alunos (3, 5, 12, 14, 15, 17, 21, 22, 27, 28 30) que erraram no primeiro teste, 7 deles (3, 12, 14, 15, 17, 27, 28) estão entre os que acertaram o segundo teste. Nesse caso, supomos que o uso de manipulativos contribuiu na produção do caminho que tivesse igual comprimento, considerando ainda que, dentre esses 7 alunos que passaram a acertar o item (c) no segundo teste, 5 deles (3, 14, 15, 17, 21) também mudaram de estratégia de resolução ao realizarem a "sobreposição dos próprios caminhos a serem comparados".

Outro fato importante a observar é que verificamos, como antecipado na análise a priori, que foram apresentados, como resposta, caminhos de tipos variados, segmentos de reta, linhas curvas e linhas poligonais iguais ou diferentes do caminho verde, dado como referência.

A tabela a seguir resume os tipos de caminhos produzidos nessa atividade, nos testes papel/lápis e com uso de manipulativos, bem como o número de ocorrências de cada um deles, dentre as 72 entradas na tabela aluno-item:

ATIVIDADE 3 – ITENS (a) (b) (c)				
Caminhos	**Papel e lápis**		**Manipulativos**	
	#	**%**	**#**	**%**
linha poligonal aberta =	43	59,7	41	57,0
linha poligonal aberta ≠	19	26,4	9	12,5
segmento de reta	8	11,1	17	23,6
linha curva	2	2,8	5	6,9
TOTAL:	72	100	72	100

É importante ressaltar que os caminhos do tipo “linha poligonal aberta diferente”, que foram produzidos pelos alunos, são bem parecidos ao caminho linha poligonal aberta, dado como referencial, como mostra o exemplo abaixo:



Fazemos uma suposição de que essa notável tendência dos alunos ao quererem produzir o mesmo tipo de caminho (linha poligonal aberta) do caminho dado como referencial, como condição também para que dois ou mais caminhos tenham comprimento iguais, pode indicar que esses sujeitos ainda não dissociam, segundo Douady e Perrin Glorian (1989), os quadros geométrico (forma) e da grandeza (comprimento) ao relacionarem que caminhos com comprimentos iguais devem ter formas iguais. Contudo, os alunos que demonstraram fazerem essa dissociação foram aqueles que desenharam outros tipos de caminhos, como por exemplos, linhas retas ou linhas curvas.

Quanto ao uso de estratégias de resolução nos dois testes dessa atividade, observamos que no ambiente papel e lápis os alunos usaram a “observação visual” e a “sobreposição de medianeiros”, enquanto que com o uso de manipulativos, eles usaram todas as estratégias antecipadas na análise a priori, principalmente a “sobreposição dos próprios caminhos a serem comparados”, como mostra o quadro a seguir:

Atividade 3 – usando materiais manipulativos			
Estratégias de resolução	**Aluno**	**#**	**%**
- Observação visual.	8, 12, 22, 21, 28, 30, 34	7	29,2
-Sobreposição de medianeiros.	19	1	4,2
- Sobreposição dos próprios caminhos a serem comparados.	2, 3, 5, 1, 15, 14, 16, 29, 17, 7, 6, 11, 27, 31	14	58,3
- Esticar o caminho referencial para facilitar a comparação.	13, 25	2	8,3

Durante a observação no segundo teste, percebemos que dentre os 14 alunos que utilizaram a “sobreposição dos próprios caminhos a serem comparados”, 13 deles acertaram o item (c), quando apenas 8 deles acertaram esse item no ambiente papel e lápis.

Verificamos, também, que, com relação aos dois alunos (13 e 25) que “esticaram o caminho verde”, dado como referência, deixando-o reto, o aluno 25 produziu os três caminhos solicitados com um formato do tipo segmento de reta, ou seja, ele não conservou a forma, linha poligonal aberta, em nenhum dos três itens (a, b e c). Já o aluno 13, produziu caminhos do tipo segmento de reta nos itens (a) e (b), mas para produzir o caminho do item (c) ele voltou o caminho verde para o seu formato de origem, conservando-o quando da construção do caminho de igual comprimento.

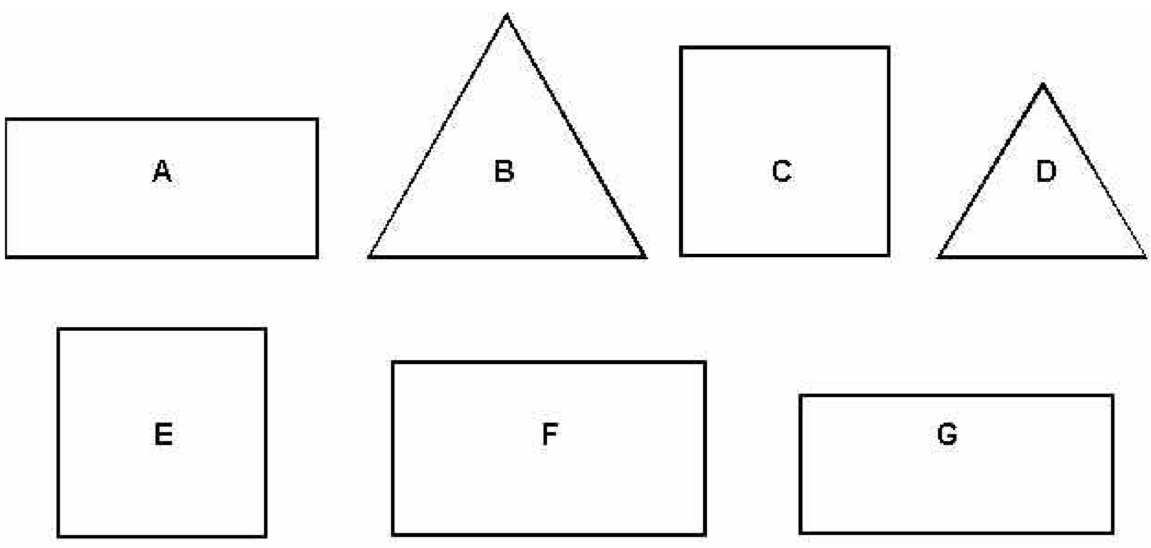
3.4 - Quarta Atividade

3.4.1 – Apresentação

ATIVIDADE 4

(1º TESTE – AMBIENTE PAPEL/LÁPIS)

a) Das sete figuras abaixo, quais as que têm contornos iguais?

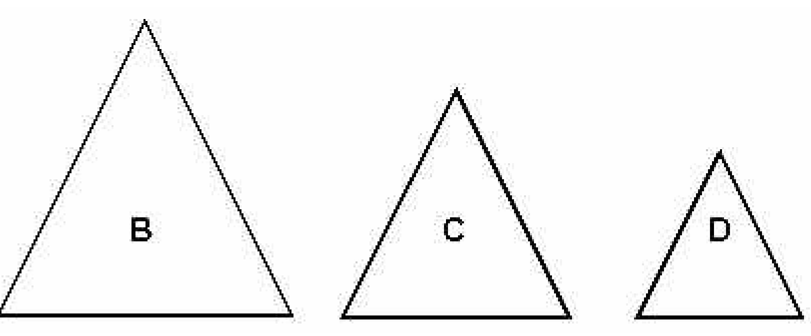


As figuras com contornos iguais são: ______________________________________

____

____

b) Das quatro figuras abaixo, quais as que têm contornos iguais?



As figuras com contornos iguais são: ______________________________________

____

ATIVIDADE 4

(2º TESTE - COM MATERIAIS MANIPULATIVOS)

Utilizando dois grupos de “objetos” apresentados, responda as perguntas seguintes:

PERGUNTAS SOBRE O 1º GRUPO DE “OBJETOS”:

Dos sete objetos (vermelho, laranja, amarelo, verde, azul, azul anil, violeta) apresentados, quais os que têm contornos iguais?

- Os objetos com contornos iguais são os das cores: ____________________

____

____

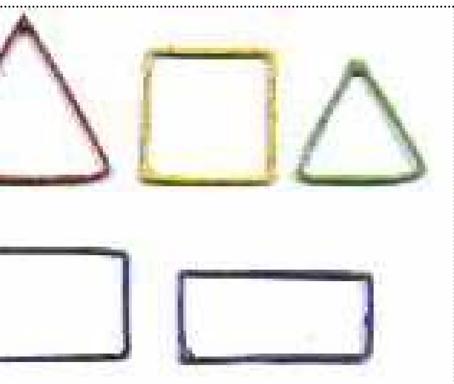
PERGUNTAS SOBRE O 2º GRUPO DE “OBJETOS”:

Dos quatro objetos (vermelho, amarelo, verde, azul) apresentados, quais os que têm contornos iguais?

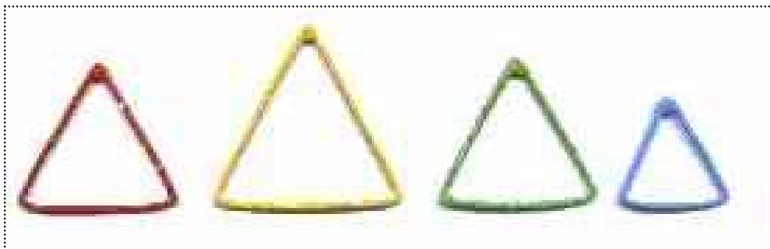
- Os objetos com contornos iguais são os das cores: ____________________

____

Material que o aluno irá manipular (1º GRUPO):



Material que o aluno irá manipular (2º GRUPO):



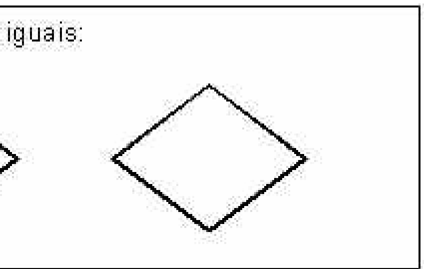
3.4.2 - Análise a priori

Objetivo: Verificar se o aluno identifica as figuras/objetos com contornos iguais, dentre um grupo de quatro triângulos, bem como dentre um grupo de 7 figuras/objetos (2 triângulos, 2 quadrados e 3 retângulos).

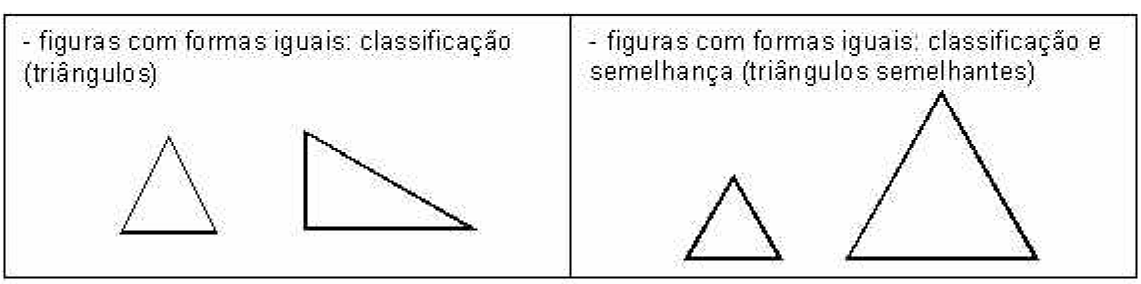
Justificativa e Cenário:

Diferentemente das anteriores, essa trata de uma atividade original em que, através dela, procuramos abordar a idéia de contornos iguais entre figuras/objetos pertencentes a uma mesma classificação ou não, sendo necessária a distinção entre contorno e perímetro.

Assim, a pretensão nessa atividade é possibilitar o aluno trabalhar unicamente o aspecto do contorno, livre ainda do momento de confronto com o conceito de perímetro, permitindo, neste momento, relacionar que a idéia de contornos iguais está associada à congruência (na forma e dimensão) e vai além de figuras com formas iguais, sabendo distinguir entre figuras/objetos de contornos iguais das figuras/objetos de formas iguais, pois duas figuras podem ter formas iguais e não ter contornos iguais. As ilustrações abaixo exemplificam duas figuras com a mesma forma e que têm contornos iguais por serem congruentes:



Nesse caso, é importante evidenciar que nessa dissociação entre contorno e forma, estamos considerando a idéia de formas iguais tanto no aspecto da classificação, que está relacionada apenas à simples nomenclatura (triângulos, quadrados, retângulos, etc.) das figuras, quanto no aspecto que além da classificação considera a semelhança nos lados e ângulos, podendo ser uma redução ou ampliação proporcional como condição para se ter formas iguais. As ilustrações seguintes são exemplos de figuras com formas iguais nos dois aspectos referidos, mas não tendo contornos iguais:



Essa atividade é composta de dois itens. No item “a”, o aluno vivenciará a situação de identificar as figuras/objetos de contornos iguais, entre 7 figuras/objetos com as respectivas medidas dos lados: A (retângulo 2 x 2 cm e 2 x 4,5 cm); B (triângulo eqüilátero - 3 x 4 cm e); C (quadrado 4 x 3 cm); D (triângulo eqüilátero 3 x 3 cm); E (quadrado 4 x 3 cm); F (retângulo 2 x 2,5 cm e

2 x 4,5 cm) e G (retângulo 2 x 2 cm e 2 x 4,5 cm). Já no item “b”, o aluno fará a identificação de contornos iguais entre 4 triângulos com as respectivas medidas dos lados: A (1 x 3 cm e 2 x 34 cm); B (1 x 4 cm e 2 x 4,4 cm); C (1 x 3 cm e 2 x 34 cm) e D (1 x 2,2 cm e 1 x 2,6 cm).

No modelo dessa atividade com o uso de materiais manipulativos, esses materiais são apresentados vazados e construídos com arames em cores diferentes: - Item “a”: A-vermelho, B-laranja, C-amarelo, D-verde, E-azul, F-azul anil, G-violeta; - Item “b”: A-vermelho, B-amarelo, C-verde, D-azul.

Interpretação das respostas possíveis:

Acreditávamos que, mesmo sem saber o que significa a idéia de “contornos iguais”, o aluno poderia, através de suas explorações durante a aplicação dessa atividade, descobrir as figuras/objetos que realmente têm contornos iguais, apresentando assim, A e G; C e E como respostas para o item “a” e, para o item “b”, A e D. Neste caso, estávamos supondo que o aluno estaria considerando, como conhecimento-em-ação, a verificação da congruência de figuras.

Também antecipamos, nessa análise a priori, que os alunos poderiam apresentar respostas erradas em decorrência da influência de outros conhecimentos-em-ação. As figuras e os comprimentos de seus lados foram escolhidos de modo que diferentes respostas indicassem diferentes conhecimentos-em-ação implícitos, o que resumimos na tabela a seguir:

Conhecimentos-em-ação	**Respostas**	**Estratégias de resolução**	**Modelos de atividade**
- comparando a congruência do contorno de figuras/objetos (na forma e dimensões).	a) A/G; C/E. b) A/C.	- Observação visual; - Sobreposição de medianeiros.	- Papel e lápis; - Manipulativos.
- Aspecto de ter mesma forma.	a) A/F/G; B/D; C/E. b) A/B/C/D.	- Sobreposição dos próprios objetos a serem comparados; - Organização dos objetos um ao lodo do outro, comparando os lados.	- Manipulativos.
- Aspecto de ter mesmo número de lados.	a) A/C/E/F/G; B/C. b) A/B/C/D.		
- Aspecto de ter mesma área.	a) A/C/E/G; b) A/C.		
- Aspecto de ter mesmo perímetro.	a) A/G; B/C/E. b) A/C.		

Interpretando os erros que os alunos poderiam cometer, considerávamos, principalmente, o fato de o aluno, no lugar de se basear na condição da congruência para designar contornos iguais, apenas considerar o aspecto da forma, vindo, por exemplo, a apresentar, no item "a", todos os três retângulos ou os dois triângulos como resposta. Caso ainda o aluno apresentasse duas figuras/objetos com formas diferentes, retângulos e quadrados, por exemplo, como tendo contornos iguais, poderíamos concluir que ele estivesse considerando o número de lados e, até mesmo, o aspecto do perímetro ou da área entre as figuras/objetos.

Face às diferenças de execução de comparação entre os modelos papel/lápis e com o uso de materiais manipulativos dessa atividade, considerando a influência de todos os conhecimentos-em-ação, julgávamos que em cada um deles teria estratégias específicas de resolução, ficando mais em comum o recurso da observação visual.

No modelo papel e lápis, considerávamos que, além da observação visual, seria bem característica a estratégia da sobreposição e comparação de medianeiros. Enquanto que no modelo com uso de manipulativos, mesmo que os alunos pudessem utilizar-se da "observação visual" e da "sobreposição de medianeiros", seria mais característica a estratégia da sobreposição dos próprios objetos, sem ser necessário o uso de medianeiros da caixa de ferramentas, bem como, poderiam ainda usar o recurso de organização dos objetos um ao lado do outro, comparando os lados.

Diante dessas diferenças de resolução nos dois modelos propostos, acreditávamos que no modelo que faz uso de materiais manipulativos o aluno, através das estratégias que só são possíveis nessa situação, seria mais estimulado a perceber e considerar entre os materiais apresentados, não apenas as formas parecidas, mas, também, com relação à congruência nas dimensões.

3.4.3 - Análise a posteriori

No Anexo 1, Tabelas 1; 2; 3; 4; 11 e 12, podemos encontrar as respostas dos alunos a essa atividade, as quais são apresentadas no quadro a seguir, classificadas por erros e acertos e com a indicação das figuras/objetos apontadas como respostas. Optamos por apresentar todas as respostas, nos dois modelos, através das letras das figuras, do ambiente papel/lápis, que têm a seguinte associação com as cores dos materiais manipulativos: - item "a": A-vermelho, B-laranja, C-amarelo, D-verde, E-azul, F-azul anil e G-violeta; - item "b": A-vermelho, B-amarelo, C-verde e D-azul.

ATIVIDADE 4 – ITENS (a) (b)						
Item	**Resposta**		**Papel e lápis**		**Manipulativos**	
			#	**%**	**#**	**%**
a	Certa	A,G / C,E	3	12,5	11	45,8
		A,G	7	29,2	2	8,3
		C,E	2	8,4	-	-
	Errada	A,G / C,E / B,D	7	29,2	7	29,2
		A,F,G / E,C / B,D	2	8,4	2	8,3
		A,E,C,B,F,G	-	-	2	8,3
		A,B / B,D / E,C	1	4,1	-	-
		F,B,C	1	4,1	-	-
		B,D	1	4,1	-	-
b	Certa	A,C	17	70,8	16	66,7
	Errada	A,B / C,D	4	16,6	2	8,3
		A,C / B,D	1	4,2	3	12,5
		A,D / B,C	-	-	3	12,5
		A,B	1	4,2	-	-
		C,D,B	1	4,2	-	-

Uma primeira observação é que no item (a) consideramos certas as respostas dos alunos que apresentaram só um par de figuras, quando dois pares de figuras podiam ser apontados corretamente, pois, essa situação é mais um exemplo da conduta usual dos alunos de limitarem-se a uma resposta para cada questão, sendo isso uma conseqüência do efeito de contrato didático, geralmente proposto nas situações-problema trabalhadas na escola. Assim, comparando o desempenho dos alunos nos dois testes, observamos que dos 12 alunos (50%) que acertaram o item (a) no primeiro teste, apenas 3 deles apresentaram respostas completas nesse item, indicando os dois pares de figuras com contornos iguais (A,G / C,E), enquanto que no segundo teste, 13 alunos (54,1 %) acertaram o item (a) e 11 deles apresentaram respostas completas.

Como interpretado na análise a priori, houve uma dificuldade dos alunos em relação à dissociação contorno x forma, pois supomos que os alunos, que no item (a) dos dois testes, erraram, indicando os pares A,G/C,E/B,D ou A,F,G/E,C/B,D como resposta, tenham considerado apenas o aspecto de terem formas iguais para serem figuras/objetos com contornos iguais. Esse resultado reforça o que havia sido observado por Câmara dos Santos, quando afirma que os alunos tendem a usar *“como estratégia de base a comparação global das figuras sem levar em consideração suas características intrínsecas”* (1999, p. 11). É como se o aluno olhasse as figuras considerando, apenas, o seu tipo, esquecendo outras relações entre elas. Fazendo, ainda, um paralelo com as respostas desses alunos no item (b), observamos que 66% deles também consideraram o aspecto de formas iguais, indicando os pares A,B/C,D; A,C/B,D; ou A,D/B,C. É importante evidenciar que não foram exatamente os mesmos alunos nos dois teste.

Um outro tipo de erro cometido foi o caso do aluno 17, no ambiente papel e lápis, que só indicou um par de figuras para cada item, sendo que todas eram triângulos. É interessante, também, observar que cada par era composto da indicação de um triângulo grande e de um pequeno, havendo, assim, uma suposta semelhança entre a resposta do item (a) com a resposta do item (b). No entanto, esse aluno acertou esses dois itens no teste com uso de manipulativos usando a estratégia de sobreposição dos próprios objetos a serem comparados.

Observamos que nos dois testes, papel/lápis e com uso de manipulativos, todos os alunos que acertaram o item (a), também acertaram o item (b), demonstrando terem compreensão da idéia de contornos iguais considerando não apenas a forma, mas, também, a congruência das figuras, como podemos observar nos seguintes argumentos de alguns deles, ao explicarem como resolveram o problema.

- (item-b): *"porque tem o mesmo contorno; e a B e a D não têm porque são maior a B e a D menor"* (aluno 13);
- (item-a): *"porque eu peguei e botei, assim, em cima da outra; aí, ficou igual; aí, eu descobri que tinha os mesmos contornos iguais; porque esses não dão, nem a azul e nem a laranja"* (aluno 34);
- (item-b): *"eu medi, assim, as duas, e vi que as duas têm contornos iguais. A azul é pequena e a amarela é grande. E, aí, por isso que não deu para colocar os contornos iguais"* (aluno 31);
- (item-b): *"porque esse daqui, esse daqui, olha! Eu botei, assim, e deu igual; por exemplo, se esse daqui fosse maior que esse, eles não tinham contornos iguais. Primeiro, achava que era esses dois, mas, depois, eu vi que ele era pequeno e, depois, eu fiz assim e vi que ele era igual a esse"* (aluno 29).

Quanto às estratégias de resolução, verificamos, como antecipado na análise a priori, que no segundo teste os alunos usaram duas estratégias a mais que no primeiro teste.

ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO	
1º Teste – Papel e lápis	**2º Teste - Manipulativos**
- Observação visual; -Sobreposição de medianeiros.	- Observação visual; -Sobreposição de medianeiros; - Sobreposição dos próprios objetos a serem comparados. - Organização dos objetos um ao lado do outro, comparando os lados.

Finalizando, após realizarmos a análise do desempenho dos alunos nos dois testes, verificamos que não houve diferenças em termos quantitativos nos índices de erros e acertos, pois, enquanto que no teste com uso de materiais manipulativos alguns alunos acertaram os itens (a), (b) ou toda questão e não acertaram no primeiro teste, o mesmo também ocorreu no teste papel/lápis. No entanto, identificamos que houve diferenças em termos qualitativos das respostas, quando observamos que no teste com uso de manipulativos a maior parte dos alunos que acertou o item (a) apresentou respostas completas indicando os dois pares de objetos que tinham contornos iguais, valendo considerar que todos esses alunos usaram as duas estratégias a mais que foram possíveis de serem aplicadas no segundo teste.

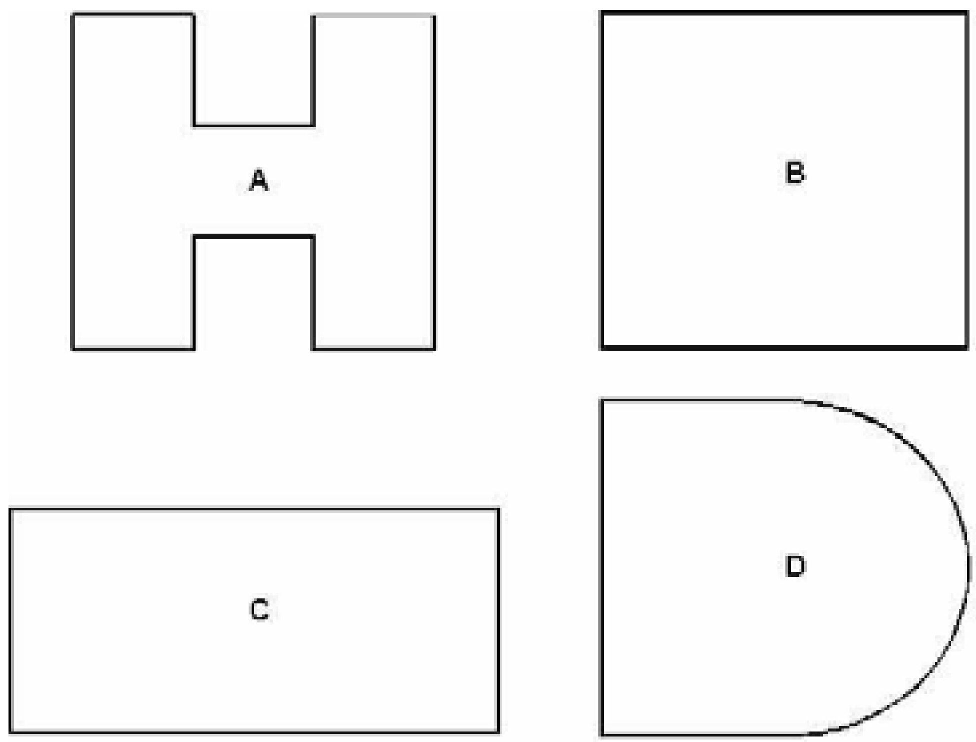
3.5 - Quinta Atividade

3.5.1 – Apresentação

ATIVIDADE 5

(1º TESTE – NO AMBIENTE PAPEL E LÁPIS)

Observe as figuras abaixo:



Agora, responda cada pergunta:

a) Qual a figura que tem maior perímetro? ______________

b) Qual a figura que tem menor perímetro? ______________

c) Se existem figuras com perímetros iguais, quais seriam?_____________

Explique como você resolveu:

____

____

____

ATIVIDADE 5

(2º TESTE - COM MATERIAIS MANIPULATIVOS)

Tendo os quatro “objetos” (amarelo, azul, rosa, verde) apresentados, responda ao que se pede, marcando um X na resposta correta:

a) Qual o objeto que tem maior perímetro?

Amarelo ☐ Azul ☐ Rosa ☐ Verde ☐

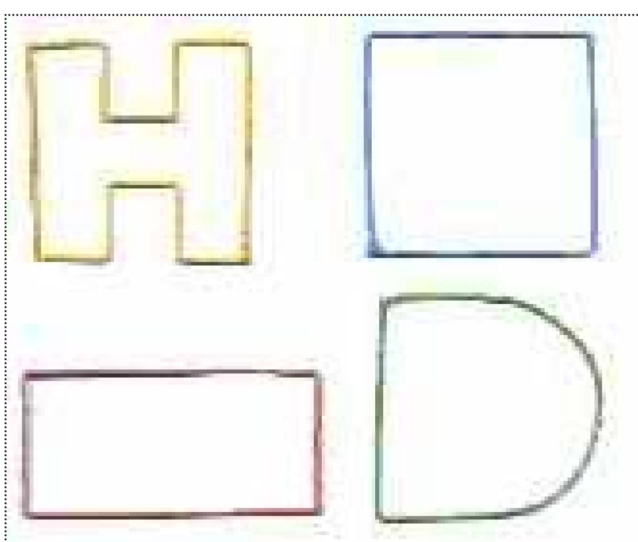
b) Qual o objeto que tem menor perímetro?

Amarelo ☐ Azul ☐ Rosa ☐ Verde ☐

c) Se existissem objetos com perímetros iguais, quais seriam?

Amarelo ☐ Azul ☐ Rosa ☐ Verde ☐

Material que o aluno irá manipular:



3.5.2 - Análise a priori

Objetivo: Verificar se o aluno identifica a figura/objeto de maior perímetro, de menor perímetro e a de perímetros iguais, dentre um grupo de linhas (poligonais e não-poligonais) fechadas.

Justificativa e Cenário:

Esta atividade foi inspirada em uma questão proposta na seqüência elaborada, no ambiente papel e lápis, por Barbosa (2002), visando a verificar o conhecimento do aluno sobre o conceito de perímetro. Esse pesquisador chama a atenção, como podemos observar na citação abaixo, para as dificuldades associadas à ordenação de um conjunto com mais de dois elementos, pois, para a resolução dessa questão é preciso ordenar quatro figuras/objetos, segundo seus perímetros:

> sabemos que um conjunto ordenado é um conjunto no qual está definida uma relação de ordem entre dois de seus elementos, quaisquer que sejam. Assim sendo, para ordenar um conjunto com mais de dois elementos é preciso fazer a comparação deles, dois a dois e, em seguida, valer-se da transitividade da relação de ordem para ordenar o conjunto todo. Em conseqüência, do ponto de vista didático, são sempre mais complexas as atividades, a exemplo da que ora discutimos, em que se solicita do aluno a ordenação de um conjunto com mais de dois elementos (BARBOSA, 2002, p. 105).

Com relação às diferenças entre a questão original, proposta por Barbosa (2002), e a presente atividade, fizemos alterações trocando todas as figuras a serem comparadas, com o propósito de explorar um grupo de quatro figuras que permitisse uma melhor sobreposição de medianeiros. Além disso, as figuras foram escolhidas de modo que as ordenações das mesmas segundo a área e o perímetro fossem diferentes, como, por exemplo, entre as figuras A e B dessa atual situação, na qual a primeira tem maior perímetro e menor área, enquanto que a segunda tem maior área e menor perímetro. Uma outra mudança que realizamos nessa atividade foi acrescentar o item “c”, para que o aluno, primeiramente, identifique se existem figuras com perímetros iguais e, caso existam, ele deve apresentá-las.

Os perímetros das figuras para essa situação, em ordem crescente, são: 22 cm (figura D); 24 cm (figura B); 24 cm (figura C) e 32 cm (figura A).

Para aplicação dessa atividade fazendo uso de materiais manipulativos, os quatro caminhos (objetos) são apresentados construídos com arames nas cores: amarelo (A); azul (B); rosa (C) e verde (D).

Interpretação das respostas possíveis:

Para resolução correta dessa atividade, o aluno deve mobilizar o conhecimento-em-ação correto, segundo o qual o perímetro é o comprimento do contorno, apresentando, assim, a figura A (objeto amarelo) como a de maior perímetro, a figura D (objeto verde) tendo menor perímetro e as figuras B (objeto azul) e C (objeto rosa) como tendo perímetros iguais.

Nessa atividade, os alunos também poderiam apresentar respostas incorretas ao serem influenciados por outros conhecimentos-em-ação, que indicamos na tabela a seguir:

<table>
<tr><th>Conhecimentos-em-ação</th><th>Respostas</th><th>Estratégias de resolução</th><th>Modelos de atividade</th></tr>
<tr><td>- comparando o comprimento do contorno – perímetro</td><td>a) A b) D c) B e C</td><td rowspan="2">- Observação visual

- Sobreposição de medianeiros</td><td rowspan="2">- Papel / lápis

- Manipulativos</td></tr>
<tr><td>- influência da área (confundir perímetro com área)</td><td>a) B b) A ou C c) B e C</td></tr>
<tr><td>- influência do contorno (confundir contorno com perímetro)</td><td>a) A b) C c) B e D</td><td rowspan="4">- Sobreposição dos próprios objetos a serem comparados

- Organização dos objetos um ao lado do outro, comparando os lados.</td><td rowspan="4">- Manipulativos</td></tr>
<tr><td>- efeito da projeção horizontal</td><td>a) C b) D c) A e B
Obs: posições variáveis com o uso de manipulativos</td></tr>
<tr><td>- efeito da projeção vertical</td><td>a) H ou B b) C c) H e B
Obs: posições variáveis com o uso de manipulativos</td></tr>
<tr><td>- efeito do espaço ocupado</td><td>a) B b) C c) A e B</td></tr>
</table>

Durante a aplicação dessa atividade no modelo papel e lápis, acreditávamos que o aluno poderia utilizar duas estratégias de resolução. A primeira consiste na sobreposição de medianeiros em qualquer uma das três modalidades seguintes:

- marcando nos medianeiros os tamanhos de todos caminhos, sem recortá-los;
- recortando os medianeiros para reproduzir cópias móveis dos caminhos;
- produzir, apenas, um dos caminhos, recortando medianeiro ou, apenas, marcando, utilizando-se da relação de ordem.

Quanto à segunda estratégia para o modelo papel e lápis, consiste na observação visual em que o aluno poderá sofrer a influência de confundir perímetro com área, que, para esse caso, Barbosa (2002) alerta que pode ocorrer de "*apontar a figura de maior perímetro como aquela que, pela percepção visual, lhe parecesse de maior área e, analogamente, para a figura de, menor perímetro indicasse a de menor área*" (p. 109). Nessas condições a figura B seria forte candidata à figura de maior perímetro e a A para a de menor perímetro.

Considerando agora a aplicação dessa atividade no modelo com uso de materiais manipulativos, supomos que o aluno poderá utilizar quatro estratégias, pois, além da observação visual e da sobreposição de medianeiros, ele também tem a possibilidade de usar a estratégia de sobreposição dos próprios objetos a serem comparados e a organização dos objetos um ao lado do outro, comparando os lados. Vale ressaltar que nesse modelo o aluno tende a superar mais a influência da confusão perímetro x área, bem como dos efeitos "projeção horizontal" e "projeção vertical", pelo fato de estarem comparando objetos vazados e móveis, não tendo posições fixas.

Prevíamos que seria reduzido o índice dos alunos que conseguiriam resolver completamente as questões contidas na atividade, principalmente no papel e lápis.

3.5.3 - Análise a posteriori

Vamos reunir, no quadro abaixo, os dados obtidos na atividade, os quais se acham listados no Anexo 1, Tabelas 1; 2; 3; 4; 13 e 14.

ATIVIDADE 5 – ITENS (a) (b)						
Item	**Resposta**		**Papel e lápis**		**Manipulativos**	
a	Certa	A - amarelo	7	29,2	14	58,2
	Errada	B - azul	8	33,3	2	8,3
		C - rosa	3	12,5	6	25
		D - verde	4	16,7	2	8,3
		Mais de uma figura/objeto	2	8,3	-	-
b	Certa	D-verde	8	33,3	14	58,3
	Errada	C-rosa	13	54,2	7	29,2
		A-amarela	2	8,3	-	-
		B-azul	-	-	2	8,3
		Mais de uma figura/objeto	1	4,2	1	4,2
c	Certa	B, C - azul, rosa	4	16,6	3	12,5
	Errada	A, B - amarelo, azul	6	25	9	37,5
		C, D - rosa, verde	2	8,3	2	8,3
		B, D - azul, verde	2	8,3	6	25
		A, B, D -amarela, azul, verde	1	4,2	1	4,2
		D, A - verde, amarela	1	4,2	2	8,3
		A, C - amarela, rosa	-	-	1	4,2
		Apenas uma figura/objeto	6	25	-	-
	Nenhuma	-	1	4,2	-	-

Com base na análise das respostas erradas dos alunos nos dois testes, papel/lápis e com o uso de materiais manipulativos, verificamos que em ambos houve a influência dos seguintes critérios (conhecimentos-em-ação) listados abaixo, mesmo considerando que ocorreu uma maior superação dessas influências no teste com o uso de manipulativos:

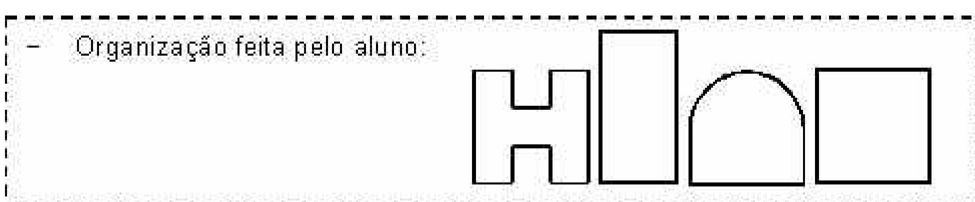
- confusão perímetro x área;
- projeção horizontal;
- projeção vertical;
- confusão perímetro x contorno;
- efeito do espaço ocupado.

Assim, quanto aos erros apresentados nos três itens dessa atividade, primeiramente observamos que houve uma dificuldade dos alunos em relação à influência da confusão perímetro x área, o que pode ter ocorrido com os alunos que no item (a) indicaram as figuras/objetos B-azul ou D-verde, que têm as maiores áreas, como tendo maior perímetro e, analogamente, no item (b) indicando a figura/objeto C-rosa como tendo menor perímetro.

Um fato importante a observar é que os alunos que apresentaram a figura/objeto C-rosa para a de menor perímetro, supomos que eles além de terem sido influenciados pelos aspecto da área, podem também ter considerado o aspecto da "altura", ou seja, a influência da "projeção vertical", em que por esta característica a figura/objeto C-rosa é a menor.

No teste com uso de manipulativos, de acordo com a posição que os alunos (1, 15, 25, 27 30 e 34) organizaram os objetos, especialmente, o rosa e o verde, julgamos que eles podem ter considerado no item (a) não a "projeção horizontal" e sim a "projeção vertical", uma vez que todos eles indicaram o objeto verde no item (b). Consideramos, também, as seguintes explicações apresentadas, por dois desses alunos:

- (item-a): "Eu peguei e medi todas elas; quem é mais grande é o rosa";
- (item-b): "Peguei, medi o amarelo; peguei o azul, medi; peguei o rosa, medi. O que é o mais menor é o verde" (aluno 27).



- (item-a): "Porque, assim… Eu entendi, assim: maior perímetro, maior altura" (aluno 25).

Analisando as respostas dadas no item (c), verificamos, primeiramente, alunos que indicaram uma única figura como resposta para esse item. Supomos que esses sujeitos consideraram que nos itens anteriores (a e b) foi apresentada apenas uma figura para cada resposta.

Ainda com relação aos erros cometidos no item (c), observamos os alunos que erraram ao indicarem as figuras/objetos A-amarelo e B-azul como tendo perímetros iguais. Julgamos que nessa situação tenha ocorrido a influência do efeito “espaço ocupado”, pois, as figuras/objetos A-amarelo e B-azul ocupam um mesmo espaço na vertical e na horizontal. Verificamos, também, que uma outra situação de erro consiste na indicação, pelos alunos, das figuras/objetos B-azul e D-verde, tendo sido pelo critério de figuras/objetos que têm formas parecidas no formato/contorno como sendo perímetros iguais. Nesse caso o aluno estaria fazendo a confusão entre perímetro e contorno, prevista na análise a priori dessa atividade.

Uma outra interpretação possível das respostas erradas desse item é o provável “princípio da não repetição”, pelo qual no conjunto dos itens de uma mesma atividade cada figura só deve aparecer uma vez. Assim, considerando esse princípio, apresentamos os exemplos das respostas nas quais, nos três itens, não houve repetição de figuras, assim indicando como resposta para o item (c) as figuras que não foram consideradas nos itens (a) e (b).

Quanto às estratégias de resolução, verificamos que no segundo teste os alunos usaram duas estratégias a mais que no primeiro. A tabela seguinte resume as estratégias que foram usadas pelos alunos no primeiro e segundo teste.

ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO	
1.º Teste	**2.º Teste**
- Observação visual; -Sobreposição de medianeiros.	- Observação visual; -Sobreposição de medianeiros; - Sobreposição dos próprios objetos a serem comparados. - Organização dos objetos um ao lado do outro, comparando os lados.

Por fim, diferentemente dos resultados do 1º teste dessa atividade, verificamos que no segundo teste, usando materiais manipulativos, mais da metade dos alunos acertaram os itens (a) e (b). Supomos que esse avanço seja em virtude da ampliação do número de estratégias de resolução que são possíveis com o uso de materiais manipulativos, pois, além da "observação visual" e da "sobreposição de medianeiros", eles utilizaram a ação de "sobreposição dos próprios objetos", bem como a organização dos objetos um ao lado do outro, comparando o comprimento dos lados.

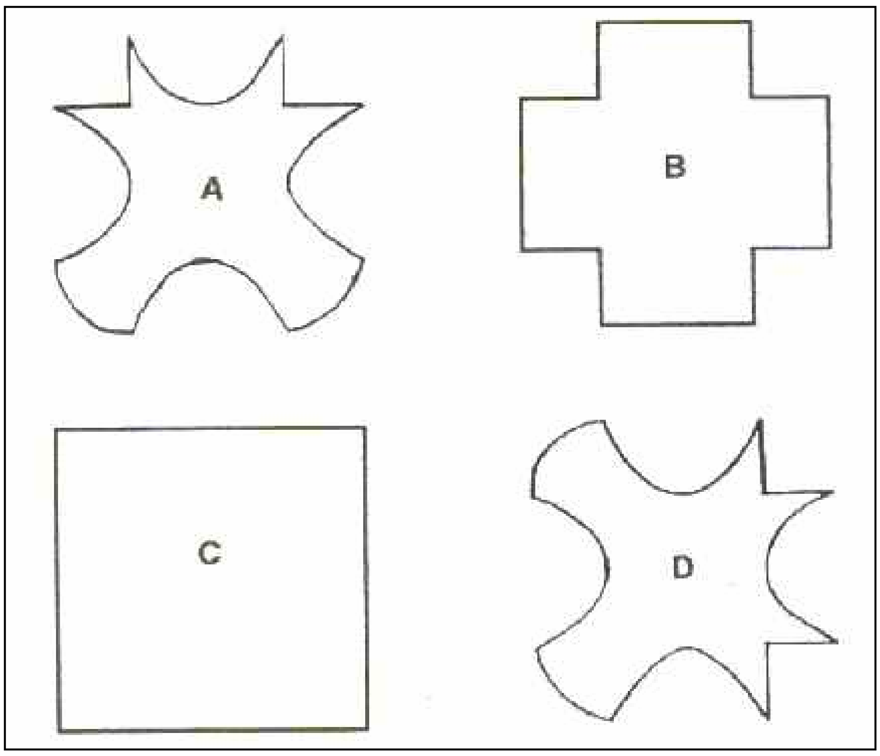
3.6 - Sexta Atividade

3.6.1 – Apresentação

ATIVIDADE 6

(1º TESTE – NO AMBIENTE PAPEL/LÁPIS)

Observe as figuras abaixo:



Agora, responda cada pergunta:

a) Quais as figuras que têm contornos iguais? ________________________

b) Quais as figuras que têm o mesmo perímetro? _____________________

c) Quais as figuras que têm contornos diferentes e perímetros iguais? ____
____

Explique como você resolveu:

____

____

____

ATIVIDADE 6

(2º TESTE - COM MATERIAIS MANIPULATIVOS)

Observe os “objetos” (vermelho, amarelo, verde, azul) apresentados e, em seguida, responda cada pergunta:

a) Quais os objetos que têm contornos iguais? __________________________

____

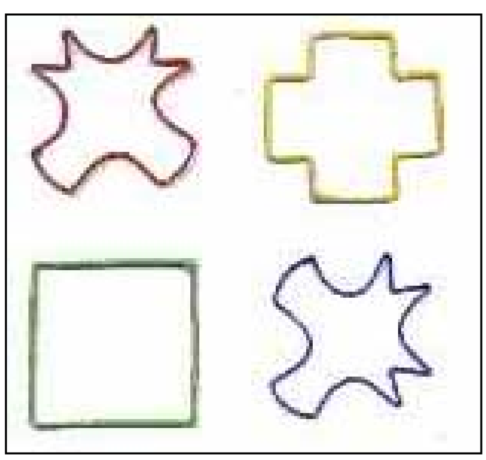
b) Quais os objetos que têm perímetros iguais? _________________________

____

c) Quais os objetos que têm contornos diferentes e perímetros iguais? ______

____

Material que o aluno irá manipular:



3.6.2 – Análise a priori

Objetivo: Identificar se o aluno diferencia os conceitos de contorno e perímetro diante uma situação que apresenta figuras em posições diferentes.

Justificativa e Cenário:

Foi com o propósito de favorecer a distinção entre os conceitos contorno e perímetro que essa atividade foi retirada da seqüência elaborada por Barbosa (2002), pois, trata-se de uma situação que apresenta figuras em posição não-prototípica, trazendo, ainda, outro elemento importante – que se encontra explicitada na própria pergunta – solicitando ao aluno identificar figuras com contornos diferentes e perímetros iguais.

Fizemos alterações trocando todas as figuras e incluindo os tipos não-convencionais e também não-poligonais. As figuras/objetos propostas são: um quadrado, designado por C-verde, e um polígono com 12 lados, B-amarelo, ambos com 16 cm de perímetro; duas figuras idênticas não-poligonais (18 cm de perímetro), A-vermelho e D-azul.

Segundo Barbosa (2002), adotou-se a denominação *"mesmo contorno" para "designar 'contornos iguais', a fim de aproximarmo-nos da linguagem comum na qual o termo 'congruente' quase nunca é empregado* " (p. 99). Nesse sentido, as figuras A e D teriam contornos iguais e, conseqüentemente, perímetros iguais. Além disso, as figuras B e C, embora tenham contornos distintos possuem perímetros iguais.

Interpretação das respostas possíveis:

As respostas corretas para essa atividade são: no item (a) o par {A-vermelho, D-azul} como possuindo contornos iguais; já no item (b) seriam os pares {A-vermelho, D-azul} e {B-amarelo, C-verde} sendo apontados como figuras de mesmo perímetro e, finalmente, esperamos o par {B-amarelo,C-verde} como resposta correta para o item (c).

No entanto, acreditávamos que os alunos poderiam apresentar respostas errôneas em decorrência do problema de dissociação contorno-perímetro. Na tabela abaixo, descrevemos os possíveis conhecimentos-em-ação com as respectivas respostas que os alunos poderiam apresentar ao serem influenciados por esses conhecimentos, assim como são apresentadas as estratégias de resolução permitidas em cada modelo da atividade, papel/lápis e com uso de materiais manipulativos.

Conhecimentos-em-ação	Respostas	Estratégias de resolução	Modelos de atividade
Comparando: - Contorno – congruência do contorno na forma e dimensão. - Perímetro – comprimento do contorno.	a) A e D b) A e D; B e C c) B e C	- Observação visual; - Sobreposição de medianeiros.	- Papel / lápis - Manipulativos
		- Sobreposição dos próprios objetos a serem comparados.	- Manipulativos
- Problema na dissociação contorno - perímetro	a) A e D b) A e D c) A e D	- Observação visual; - Sobreposição de medianeiros.	- Papel / lápis - Manipulativos
		- Sobreposição dos próprios objetos a serem comparados.	- Manipulativos

Para a resolução dessa questão, supomos que o aluno poderá utilizar as mesmas estratégias indicadas na atividade 5, na qual, para o modelo papel e lápis, previmos a observação visual e a sobreposição de medianeiros e como estratégias utilizadas no modelo com o uso de manipulativos, além da observação visual e da sobreposição de medianeiros, ainda tem a oportunidade de o aluno realizar a sobreposição dos próprios objetos móveis a serem comparados.

Concordamos com as considerações feitas na análise a priori, elaboradas por Barbosa (2002), sobre dificuldades e facilidades implícitas nos três itens dessa atividade, nos quais esse pesquisador observou que o desenho da figura D, em posição diferente

> deveria tornar mais difícil para o aluno identificar a igualdade (congruência) das figuras A e D, prevendo-se que poderia vir a ocorrer muitos erros nesse item.
>
> Por outro lado, o item (c), contendo a solicitação para o aluno indicar figuras com contornos diferentes e perímetros iguais, já indica que esses dois conceitos não são idênticos, o que poderia favorecer a resolução dos dois primeiros itens.
>
> No item (b), deveria ser considerada certa a resposta que indicasse apenas uma das possibilidades referidas acima, levando em conta que, usualmente, os alunos limitam-se a dar, apenas, uma resposta em questões que admitem mais de uma resposta correta (p. 163-164).

Previmos um índice de acertos baixo nessa atividade diante das seguintes situações:

- dificuldades de reconhecimento do termo ‘contorno’ e, principalmente, do termo ‘perímetro’;
- apresentação de uma das figuras em posição diferente;
- no item (c) é solicitado que o aluno indique um par de figuras com a conjunção de duas propriedades (contornos distintos e perímetros iguais).

Acreditamos que os problemas de dissociação contorno-perímetro, discutidos anteriormente, podem ser superados pelo aluno através da compreensão de contorno como tendo congruência na forma e na dimensão, enquanto que perímetro consiste no comprimento do contorno. No entanto, previmos um maior índice de acerto nas questões relativas ao contorno, do que nas referentes ao perímetro.

3.6.3 – Análise a posteriori

As respostas dos alunos à questão proposta nessa atividade estão reunidas nas Tabelas 1; 2; 3; 4; 15 e 16 do Anexo 1. Uma classificação, levando em conta os erros e acertos e a figura/objeto escolhida, está resumida na tabela, a seguir, apresentada.

ATIVIDADE 6 – ITENS (a) (b)						
Item	**Resposta**		**Papel e lápis**		**Manipulativos**	
			#	**%**	**#**	**%**
a	Certa	A, D	21	87,5	24	100
	Errada	C, B	1	2,9	-	-
		Apenas uma figura	2	8,3	-	-
b	Certa	A, D / B, C	1	4,2	2	8,3
		A, D	6	25	7	29,2
		B, C	12	50	15	62,5
	Errada	B, D	1	4,2	-	-
		Apenas uma figura	4	16,6	-	-
C	Certa	B, C	6	22,8	15	62,5
	Errada	A, D	4	16,6	1	4,2
		A, C	-	-	1	4,2
		A, B	-	-	1	4,2
		A, D / C, B	7	29,2	5	20,7
		D, C	-	-	1	4,2
		Menos de uma figura	7	29,2	-	-

Em primeiro lugar, verificamos uma significativa diferença entre os índices de acertos e de erros nos dois testes realizados, pois, no primeiro teste dessa atividade, papel e lápis, 87,5% dos alunos acertaram o item (a); 79,2%, o item (b); e 25,0%, o item (c), enquanto que no segundo teste, usando materiais manipulativos, 100% dos alunos acertaram os itens (a) e (b) e 62,5% o item (c). Acreditamos que esse elevado índice de acertos demonstra que o segundo teste, usando materiais manipulativos, favoreceu aos alunos uma maior superação das seguintes dificuldades, antecipadas na análise a priori e identificadas no primeiro teste:

- dificuldade de reconhecimento do termo “contorno” e, principalmente, do termo “perímetro”;
- apresentação de uma das figuras em posição diferente;
- no item (c) é solicitado que o aluno indique um par de figuras com a conjunção de duas propriedades (contornos distintos e perímetros iguais);
- confusão na dissociação contorno-perímetro.

No item (b), a grande maioria dos alunos, com exceção dos sujeitos 16 (papel/lápis e manipulativos) e 15 (manipulativos), apresentou só um par de figuras/objetos como resposta, quando dois pares de figuras/objetos podiam ser apontados corretamente. Consideramos certa a indicação de, apenas, um dos pares que constituem a resposta correta, pois, esse caso seria mais um exemplo da conduta usual dos alunos de se limitarem a uma resposta para cada questão. Além disso, houve no item (b) um número significativo de 13 indicações no ambiente papel/lápis e 15, com o uso de manipulativos, das figuras/objetos B-amarelo e C-verde – com contornos distintos – como possuindo perímetros iguais. No entanto, supomos que alguns desses alunos indicaram, no item (b), as figura/objetos B-amarelo e C-verde como tendo perímetros iguais considerando o efeito do “espaço ocupado”, analogamente como ocorreu na atividade 5, quando as figuras/objetos A-amarelo e B-azul foram escolhidas como perímetros iguais por ocuparem o mesmo espaço na vertical e na horizontal.

Um fato importante a observar é que no ambiente papel e lápis houve dificuldades, antecipadas na análise a priori, de reconhecimento tanto do termo ‘contorno’ como, principalmente, do termo ‘perímetro’, pois, o índice de erros no item “b” (20,8 %) foi maior que no item “a” (12,4 %).

Com relação aos erros cometidos no item (c), houve 7 alunos no modelo papel/lápis e 5 alunos no modelo com o uso de manipulativos que indicaram dois pares como resposta, quando apenas um par respondia à questão proposta.

Uma possível explicação seria a de que os alunos tenham entendido que deveriam indicar, independentemente, duas figuras com contornos diferentes e duas com perímetros iguais, como podemos observar na seguinte explicação que um desses alunos, no modelo com o uso de manipulativos, apresentou:

- *"porque essa daqui, se botar em cima da outra, fica igualzinho; igual à figura; fica igual à outra; a vermelha e a azul. Perímetros iguais, que têm é a vermelha e a azul. A laranja e a verde têm contornos iguais"* (aluno 19).

Com relação aos tipos de estratégias utilizadas nos dois testes, constatamos o que foi antecipado na análise a priori, ou seja, a aplicação das estratégias possíveis de serem usadas no segundo teste utilizando materiais manipulativos, pois, além da "observação visual" e a "sobreposição de medianeiros", foi empregada a estratégia da "sobreposição dos próprios objetos a serem comparados". A tabela abaixo resume as estratégias apresentadas nos primeiro e segundo testes.

ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO	
1.º Teste – Papel e lápis	**2.º Teste - Manipulativos**
- Observação visual; -Sobreposição de medianeiros.	- Observação visual; -Sobreposição de medianeiros; - Sobreposição dos próprios objetos a serem comparados.

É importante evidenciar que os alunos, no segundo teste, 28 no item (a), 5 e 27 no item (b) e 1; 3; 7; 14; 15; 27 e 29 no item (c), que tinham errado no primeiro teste, acertaram no teste com uso de manipulativos usando a estratégia da "sobreposição dos próprios objetos a serem comparados", como mostra a tabela abaixo:

Atividade 6 – usando materiais manipulativos			
Estratégias de resolução	**Aluno**	**#**	**%**
- Observação visual.	2, 8, 12, 21, 22, 34	6	25,0
-Sobreposição de medianeiros.	11, 16	2	8,3
- Sobreposição dos próprios objetos a serem comparados.	1, 3, 5, 6, 7, 13, 25,17, 14, 15, 31, 29, 19, 27, 30, 28	16	66,7

Finalizando, consideramos que o uso de materiais manipulativos nessa atividade possibilitou tanto a ampliação das estratégias de resolução como, também, uma maior superação das dificuldades, antecipadas na análise a priori, principalmente na dissociação contorno-perímetro.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nestas considerações finais reunimos uma visão geral do nosso trabalho, retomando algumas das observações já feitas na análise das atividades e que julgamos mais relevantes. Procuramos, também, formular algumas conclusões e sugerimos posteriores desdobramentos desta investigação.

Este trabalho constituiu-se em uma investigação exploratória, baseada na aplicação de um teste diagnóstico, em uma turma do 2º ciclo (4ª série) do Ensino Fundamental, tendo como objeto as questões de ensino-aprendizagem do conceito de comprimento de linhas (segmentos, linhas poligonais abertas e curvas planas), com especial interesse, também, no perímetro de figuras planas constituídas de curvas planas fechadas. Investigamos os conhecimentos-em-ação mobilizados pelos alunos na resolução de problemas envolvendo comprimento, no ambiente papel e lápis e com uso de materiais manipulativos, possibilitando a articulação entre o quadro geométrico, domínio em que se incluem as curvas planas, e o quadro da grandeza comprimento. Para aproximar a terminologia da linguagem do cotidiano, sem prejuízo do significado matemático, optamos por denominar as curvas planas pelo termo “caminhos”.

O referencial teórico básico para a organização desta pesquisa foi o modelo dos quadros geométrico, das grandezas e o numérico, propostos por Douady & Perrin-Glorian (1989). Como restringimos o experimento das atividades em que deveria haver distinção e articulação entre os dois primeiros desses quadros, deixamos de observar relações com o quadro numérico. Futuras investigações deverão cuidar de estender a esse último quadro questões didáticas análogas às tratadas nesta dissertação.

Os dados coletados no experimento permitiram, com base nos estudos preliminares, a observação de noções, conhecimentos-em-ação implícitos nas respostas dos alunos e das estratégias de resolução que esses sujeitos apresentaram quando expostos às situações-problema, tanto no ambiente papel e lápis como com o uso de materiais manipulativos.

Na realização do experimento foram aplicadas 6 atividades, constando 5 situações de comparação e 1 de produção. No que se segue, faremos, um resumo das principais dessas observações, feitas com base no *corpus* obtido na pesquisa.

Nas situações de comparação de comprimentos envolvendo caminhos abertos, primeira e segunda atividades, a análise dos dados indica que os erros cometidos por grande parte dos alunos foram causados pela interferência de efeitos, conhecimentos-em-ação, interpretados na análise a priori. Na primeira atividade, comparando segmentos de reta, verificamos a influência dos efeitos “projeção horizontal” e “projeção vertical”. Já com relação à segunda atividade, na qual foram comparados também os comprimento de outros tipos de caminhos, como linhas poligonais abertas e linhas curvas, além desses dois efeitos de projeção, identificamos os da “linha imaginária”, “espaço ocupado” e “pontos mais extremos”, como também pelo critério do caminho que tivesse maior ou menor número de pedaços.

No entanto, verificamos que a aplicação da segunda atividade, no modelo com uso de materiais manipulativos, favoreceu aos alunos uma maior superação dos efeitos “linha imaginária”, “espaço ocupado” e, principalmente, das projeções “horizontal” e “vertical”, pois, nesse modelo, os caminhos a serem comparados não tinham posições fixas, prototípicas ou não e, além disso, o uso de materiais facilitou mais a realização das estratégias usadas no ambiente papel/lápis e também possibilitou a utilização de duas estratégias de resolução que não são possíveis no papel e lápis, tais, como: “esticar os arames” e “movimentação dos materiais”: manuseando, girando, ordenando, organizando um ao lado do outro, etc. Já com relação à primeira atividade, essa superação não ocorreu em virtude de que quase todos os alunos, com exceção de dois, não usaram a estratégia da “junção dos próprios palitos a serem comparados” ou, até mesmo, a “sobreposição de medianeiros”, que limitaram mais na observação visual.

Observamos que na situação de produção, terceira atividade, houve uma notável tendência dos alunos, nos dois testes, a produzirem o mesmo tipo de caminho (linha poligonal aberta freqüentemente semelhante ou congruente à figura dada). No item c, por exemplo, esse tipo de resposta pode indicar que esses sujeitos ainda não dissociam, segundo Douady e Perrin-Glorian (1989), os quadros geométricos (forma) e da grandeza (comprimento) ao relacionarem que caminhos com comprimentos iguais devem ter formas iguais. Além disso, nessa situação de produção, verificamos que os alunos tiveram dificuldades de produzirem um caminho com comprimento igual ao de outro caminho apresentado, principalmente no ambiente papel e lápis, em que eles realizaram essa reprodução através de desenho, enquanto que foi mais fácil com o uso de manipulativos, por meio de recorte de fios.

Com relação à quarta atividade, que envolve a comparação de figuras/objetos com contornos iguais, verificamos, nos erros apresentados, a dificuldade dos alunos na dissociação entre contorno e forma, pois, ao invés de eles se basearem na condição da congruência de sobreposição para se ter contornos iguais, apenas consideraram o aspecto da forma. A diferença do desempenho dos alunos nos dois testes foi equivalente em termos quantitativos nos índices de erros e acertos, entretanto, identificamos que teve diferenças em termos qualitativos das respostas, quando observamos que no teste com uso de manipulativos a maior parte dos alunos que acertaram o item (a) apresentou respostas completas, indicando os dois pares de objetos que tinham contornos iguais, valendo considerar que todos esses alunos usaram as duas estratégias a mais que foram possíveis de serem aplicadas no segundo teste.

Agora, na situação relacionada à comparação de perímetros, quinta atividade, observamos uma considerável diferença no desempenho dos alunos nos dois testes, pois, diferentemente do ambiente papel e lápis, através do uso de materiais manipulativos, mais da metade dos alunos acertaram os itens (a) e (b), em que supomos que esse avanço, nesta atividade, seja em virtude do maior uso das estratégias de resolução que só são possíveis com o uso de manipulativos. Na análise das respostas errôneas dos alunos, verificamos os seguintes conhecimentos-em-ação que influenciaram os alunos no segundo e, principalmente, no primeiro teste: - confusão entre perímetro e área; - confusão entre perímetro e contorno; - “projeção horizontal”; “projeção vertical” e o efeito do “espaço ocupado”.

Por fim, na sexta atividade, que trata de uma situação de distinção entre os conceitos de contorno e perímetro, identificamos nas respostas errôneas dos alunos a influência do problema de dissociação entre contorno e perímetro. Também, verificamos uma maior superação desse problema, no teste com uso de materiais manipulativos, considerando que, dentre os 24 alunos, 2 usaram a estratégia da “sobreposição de medianeiros” e 16 a “sobreposição dos próprios objetos a serem comparados”.

Além desses conhecimento-em-ação observados nas respostas dos alunos, em cada atividade, identificamos outros aspectos que também podem ter influenciado-os na resolução das situações-problema, tais, como:

- A noção de comprimento, quando estão em jogo apenas segmentos de reta, é mais bem compreendida pelos alunos investigados do que, contrariamente, quando se explora situações envolvendo linhas poligonais abertas ou linhas curvas;
- Um outro aspecto é relativo à idéia, nas questões com mais de um item, de não considerar que uma dada resposta possa aparecer como solução de mais de um deles. Esse "princípio da não repetição" pode estar levando a erros em algumas das atividades investigadas por nós;
- Observamos que, na 6ª atividade, a conjunção de dois requisitos no enunciado (mesmo perímetro e contornos diferentes, por exemplo) revelou-se uma fonte de grande dificuldade para os alunos.

Quanto ao uso geral de materiais manipulativos no segundo teste percebemos, de início, uma certa resistência, talvez porque não faça parte do cotidiano das suas aulas o trabalho com esses materiais. No entanto, com o prosseguimento das atividades, observamos como um aspecto muito positivo o emprego crescente deles, principalmente nas quinta e sexta atividades, nas quais os alunos apresentaram um maior índice de acertos.

Com base nos resultados desta pesquisa e considerando, também, as reflexões contidas nos estudos preliminares, concluímos que o uso de materiais manipulativos pode contribuir na resolução de situações-problema envolvendo a grandeza comprimento, caso se faça, anteriormente, uma cuidadosa escolha dos valores das variáveis didáticas, bem como, quando os alunos passam a explorar, a partir de situações-problema, as estratégias de resolução possíveis com esses materiais. A partir daí, eles realizam uma maior reflexão sobre suas ações e superam conhecimentos-em-ação falsos ou ampliam conhecimentos-em-ação verdadeiros favorecendo a compreensão dos conceitos explorados.

Assim, em nossa pesquisa, verificamos que os alunos tiveram um melhor desempenho diante das situações-problema apresentadas na medida em que fizeram uso de materiais manipulativos ou, inclusive, o próprio uso de medianeiros da caixa de ferramentas nos dois testes, pois, considerarmos que esses instrumentos permitem uma comparação direta dos comprimentos quando, também, poder-se-ia recortar esses medianeiros para produzir cópias móveis dos caminhos, diferentemente dos alunos que usaram apenas a observação visual e foram mais influenciados por conhecimentos-em-ação que os conduziram a respostas errôneas.

Ainda analisando as estratégias de resolução verificadas em nossos estudos, percebemos, no geral, três tipos de procedimentos: observação visual, uso de medianeiros e a comparação direta através de materiais manipulativos. Foi por meio da observação visual que os alunos apresentaram um maior índice de erros em todas as atividades, nos dois testes. Supomos que eles foram mais influenciados pelos conhecimentos-em-ação falsos. Consideramos, também, que pode haver uma forte relação entre a estratégia utilizada e o conhecimento implícito na resposta apresentada, pois, um aluno numa situação de comparação de linhas abertas, por exemplo, pode, a princípio, se basear no comprimento dos caminhos, mas, ao fazer uso apenas da observação visual, poderá ser influenciado pelo “efeito dos pontos mais extremos”, “do espaço ocupado” ou por outros efeitos. Nesse caso, o aluno estaria baseando-se no conhecimento-em-ação verdadeiro, mas, a estratégia de resolução não favoreceu para que ele encontrasse a resposta correta.

Com relação aos procedimentos de comparação direta através de materiais manipulativos – “junção dos próprios palitos”; “esticar os arames”;

“movimentação dos materiais, girando e ordenando”; “sobreposição dos próprios materiais a serem comparados” – verificamos que, além de possibilitarem aos alunos uma maior validação de suas respostas, podem, também, permitir a constatação de conhecimentos implícitos que não são possíveis de serem verificados no ambiente papel e lápis, como, por exemplo, na situação de comparação da segunda atividade, que só foi possível verificar quais os alunos realizaram a comparação de comprimento dos caminhos, sem precisar conservar a forma, através da estratégia de “esticar os arames”.

Concluindo, apresentamos como sugestão que outras pesquisas análogas a esta sejam desenvolvidas, no sentido de aprofundar as questões didáticas já verificadas, considerando, também, que o experimento poderia ser aplicado em três momentos: - ambiente papel e lápis; - papel e lápis com o uso de medianeiros; - usando materiais manipulativos, além do papel/lápis e de medianeiros. Por fim, convém observar que este trabalho poderá subsidiar a construção de seqüências didáticas para o ensino do conceito de comprimento como grandeza.

ANEXOS

ANEXO 1

TABELA 1 - LEVANTAMENTO DAS RESPOSTAS (1.º Teste - no ambiente Papel e Lápis)

N.º	Atividade 1		Atividade 2		Atividade 3			Atividade 4		Atividade 5			Atividade 6		
	a	b	a	b	a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	c
1	CD	AB	IJ	GH	7,4 cm (reto) 6,0 cm (reto)	5,7 cm (reto) 7,2 cm (reto)	6,0 cm (reto) 7,4 cm (reto)	A, G/ E, C	A, C	B	C	D	A, D	B, C	A, D/ C, B
2	CD	-	IJ	EF	12,5 cm (poligonal =)	6,4 cm (poligonal =)	8,0 cm (poligonal =)	A, G / E, C / B, D	A, B / C, D	B	C	C, B	A, D	C, B	C, B
3	CD	AB / CD	EF	GH	16,7 cm (poligonal =)	6,2 cm (poligonal =)	16, 2 cm (poligonal =)	E, C	A, C	D	C	A, B	A, D	C, B	C, B/ A, D
4	AB	CD	IJ	AB	9,4 cm (poligonal =)	7,9 cm (poligonal =)	9,9 cm (poligonal =)	B, D / A, G / E, C	A, C	B	C	B, C	A, D	D, A	B, C
5	CD	GH	CD	EF	23,5 cm (poligonal =)	10,4 cm (poligonal =)	11,2 cm (poligonal =)	B, D / A, G / C, E	A, C	B	D	A	A, D	B	C
6	CD	GH	GH	EF	11,2 cm (poligonal =)	5,3 cm (poligonal =)	8,0 cm (poligonal =)	C, E	A, C	A, B	D, C	H, B	A, D	B, C	B, C
7	CD	AB	GH	EF	15,5 cm (poligonal ≠)	4,0 cm (poligonal ≠)	8,0 cm (poligonal =)	A, G	A, C	A	D	C, D	A, D	B, C	A, D
8	CD	AB	GH	EF	12,6 cm (poligonal ≠)	4,5 cm (q poligonal ≠)	8,2 cm (poligonal =)	A, G	A, C	A	D	C, D	A, D	B, C	A, D
9	CD	GH	GH	EF	8,2 cm (poligonal =)	7,7 cm (poligonal =)	8,3 cm (poligonal =)	A, G / E, C	A, C	C	C	-	C	A	-
10	CD / EF	AB / GH	CD / GH / IJ	AB / EF	14,4 cm (poligonal =)	4,6 cm (poligonal =)	8,0 cm (poligonal =)	A, G / E, C / B, C	A, C	A	C	-	A, D	A, D	C, B/ A, D
11	CD	GH	GH	EF	16,5 cm (curvo)	21 cm (poligonal =)	7,9 cm (poligonal ≠)	B, D / C, E / A, F, G	A, B, C, D	A	D	B, C	A, D	B, C	B, C
12	AB	EF	GH	EF	10,7 cm (poligonal =)	5,5 cm (poligonal =)	6,1 cm (poligonal =)	F, B, C	C, D, B	A	C	B	A	D	C
13	CD	GH	IJ	EF	13,1 cm (reto)	1,6 cm (reto)	7,9 cm (poligonal =)	A, G	A, C	C	D	A, B	A, D	B, C	D, A/ C, B

ANEXO 1

TABELA 1 - LEVANTAMENTO DAS RESPOSTAS (1.º Teste - no ambiente Papel e Lápis) – Continuação

N.º	Atividade 1		Atividade 2		Atividade 3			Atividade 4		Atividade 5			Atividade 6		
	a	b	a	b	a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	c
14	CD	GH	CD	GH	16,1 cm (poligonal ≠)	1,9 cm (reto)	6,5 cm (poligonal =)	A, B / B, D / E, C	A, C	C	D	B, D	A, D	A, D	A, D
15	CD	GH	IJ	GH	11,5 cm (reto)	5,1 cm (poligonal =)	9,8 cm (poligonal =)	C, E / A, G / B, D	A, C	D	C	A, B, D	A, D	A, D	C, B/ A, D
16	CD	GH	GH	EF	11,1 cm (poligonal =)	4,2 cm (poligonal =)	8,0 cm (poligonal =)	A, G / C, E	A, C	A, B	C	A, B	A, D	C, B/ A, D	C, A / C, B / C, D / B, C/ A, D
17	CD	GH	IJ	EF	18,3 cm (poligonal =)	12,7 cm (poligonal =)	9,5 cm (poligonal =)	B, D	A, B	A	C	B, D	A, D	C, B	A, D
18	CD	GH	GH	AB	16,1 cm (poligonal ≠)	11,8 cm (poligonal ≠)	9,2 cm (poligonal =)	B, D / A, G / E, C	A, B / C, D	D	C	A, B	A, D	C, B	A, B
19	CD	GH	IJ	EF	14,5 cm (poligonal ≠)	4,8 cm (reto)	8,0 cm (poligonal =)	B, D / C, E / G, A	A, B/ C, D	A	D	C, B	A, D	D, A	D, C/ B, A
20	CD	GH	IJ	GH	9,2 cm (poligonal ≠)	4,5 cm (reto)	7,4 cm (poligonal =)	A, G / C, E / B, D	A, C	A	C	-	A, D	A, D	B, C/ A, D
21	CD	GH	CD	IJ	12,2 cm (poligonal =)	10,1 cm (poligonal =)	9,0 cm (poligonal =)	A, F, G / E, C/ B, D	A, B, C, D	A	C	B	A	C	D
22	CD	GH	CD	EF	15,7 cm (poligonal ≠)	8,6 cm (poligonal =)	9,7 cm (poligonal =)	A, G / B, D / C, E	A, C	B	A	-	A, D	B	C, B/ A, D
23	-	AB / CD	AB / GH / IJ	AB / IJ	10,8 cm (poligonal =)	11,7 cm (poligonal =)	10,8 cm (poligonal =)	G	A, C	A, D / C, D	C, D	C	A, D	B, C	A, D
24	CD	GH	IJ	EF	6,0 cm (curvo)	6,8 cm (poligonal ≠)	9,0 cm (poligonal ≠)	A, G / E, C / B, D	A, C	C	D	A	A, D	B, C	C
25	CD	GH	IJ	EF	14,6 cm (poligonal ≠)	4,6 cm (poligonal ≠)	8,0 cm (poligonal =)	B, D / E, C / A, G	A, C/ B, D	D	C	A, B	A, D	C, B	C, B/ C, B

ANEXO 1

TABELA 1 - LEVANTAMENTO DAS RESPOSTAS (1.º Teste - no ambiente Papel e Lápis) - Continuação

N.º	Atividade 1		Atividade 2		Atividade 3			Atividade 4		Atividade 5			Atividade 6		
	a	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	**c**
26	CD	GH	IJ	EF	12,3 cm (poligonal =)	6,4 cm (poligonal =)	8,0 cm (poligonal =)	A, G / C, E	A, C	A	C	A, B, C, D	A, D	C, B	A, D/ C, B
27	CD	GH	IJ	EF	9,1 cm (poligonal ≠)	4,8 cm (poligonal ≠)	9,5 cm (poligonal =)	A, G	A, C	C	D	A, B	A, D	B, D	B, A, D
28	CD	GH	IJ	EF	9,3 cm (curvo)	6,9 cm (poligonal =)	10,5 cm (poligonal =)	A, G / B, D / C, E	A, C	B	A	C, B	C, B	A, D	B, C/ A, D
29	CD	-	-	EF	9,7 cm (poligonal ≠)	3,3 cm (poligonal ≠)	7,6 cm (poligonal =)	A, G	A, C	B	C	-	A, D	C, B	A, D/ C, B
30	CD	AB	IJ	AB	13 cm (poligonal ≠)	7,2 cm (poligonal ≠)	6,6 cm (poligonal ≠)	A, G	A, C	B	C	D, H	A, D	D, A	C, B
31	CD	GH	CD	GH	11,8 cm (poligonal =)	7,4 cm (poligonal =)	8,0 cm (poligonal =)	C, E / A, G	A, C	D	C	D	A, D	A, D	C
32	CD	GH	-	IJ	9,5 cm (poligonal =)	7,5 cm (poligonal =)	9,6 cm (poligonal =)	A, F, G / E, C / B, D	A, C	A	C	B	A, D	C	B, C
33	CD	GH	EF	IJ	11,8 cm (reto)	3,6 cm (poligonal ≠)	8,8 cm (poligonal =)	A, G / B, D / C, E	A, C	C	D	A	A, D	B, C	B
34	CD	AB	IJ	AB	10,3 cm (poligonal ≠)	6,8 cm (poligonal ≠)	7,5 cm (poligonal =)	G, A	A, C	B	C	D	A, D	B, C	B, C
35	CD	GH	CD / IJ	AB / EF / GH	13,7 cm (poligonal =)	5,9 cm (poligonal =)	8,0 cm (poligonal =)	A, G / B, D / C, E	A, C	B	C	A	A, D	B	C

ANEXO 1

TABELA 2 - ERROS E ACERTOS NAS RESPOSTAS (1.º Teste - no ambiente Papel e Lápis)

N.º	Atividade 1		Atividade 2		Atividade 3			Atividade 4		Atividade 5			Atividade 6		
	a	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	**c**
1	C	E (AB)	E (IJ)	E (GH)	E (reto)	C (reto)	C (reto)	C	C	E (B)	E (C)	E (D)	C	C (B, C)	E (A, D / C, B)
2	C	-	E (IJ)	C	C (poligonal =)	C (poligonal =)	C (poligonal =)	E (A,G/ E,C/B,D)	E (A, B / C, D)	E (B)	E (C)	C	C	C (B, C)	C
3	C	E	E (EF)	E (GH)	C (poligonal =)	C (poligonal =)	E (poligonal =)	E (E, C)	C	E (D)	E (C)	E (A, B)	C	C (B, C)	E (C, B / A, D)
4	E (AB)	E (CD)	E (IJ)	E (AB)	C (poligonal =)	C (poligonal =)	E (poligonal =)	E (B,D/A,G/ E,C)	C	E (B)	E (C)	C	C	C (D, A)	C
5	C	C	E (CD)	C	C (poligonal =)	E (poligonal =)	E (poligonal =)	E (B,D/ A,G/C,E)	C	E (B)	C	E (A)	C	E (B)	E
6	C	C	C	C	C (poligonal =)	C (poligonal =)	C (poligonal =)	C (C, E)	C	E (A, B)	E (D, C)	E (H, B)	C	C (B, C)	C
7	C	E (AB)	C	C	C (poligonal ≠)	C (poligonal ≠)	C (poligonal =)	C (A, G)	C	C	C	E (C, D)	C	C (B, C)	E (A, D)
8	C	E (AB)	C	C	C (poligonal ≠)	C (poligonal ≠)	C (poligonal =)	C (A, G)	C	C	C	E (C, D)	C	C (B, C)	E (A, D)
9	C	C	C	C	C (poligonal =)	C (poligonal =)	C (poligonal =)	C (A, G / E, C)	C	E (C)	E (C)	-	E (C)	E (A)	-
10	E (CD/EF)	E (AB/GH)	E (CD/ GH/IJ)	E (AB/ EF)	C (poligonal =)	C (poligonal =)	C (poligonal =)	E (A,G/E,C / B,C)	C	C	E (C)	-	C	C (D, A)	E (C, B/ A, D)
11	C	C	C	C	C (curvo)	E (poligonal =)	C (poligonal ≠)	E (B,D/C,E/ A,F,G)	E (A, B, C, D)	C	C	C	C	C (B, C)	C
12	E (AB)	E (EF)	C	C	C (poligonal =)	C (poligonal =)	E (poligonal =)	E(F,B,C)	E (C, D, B)	C	E (C)	E (B)	E (A)	E (D)	E
13	C	C	E (IJ)	C	C (reto)	C (reto)	C (poligonal =)	C (A, G)	C	E (C)	C	E (A, B)	C	C (B, C)	E (D, A / C, B)
14	C	C	E (CD)	E (GH)	C (poligonal ≠)	C (reto)	E (poligonal =)	E (A,B/ B,D/E,C)	C	E (C)	C	E (B, D)	C	C (D, A)	E (A, D)

ANEXO 1

TABELA 2 - ERROS E ACERTOS NAS RESPOSTAS (1.º Teste - no ambiente Papel e Lápis) - Continuação

N.º	Atividade 1		Atividade 2		Atividade 3			Atividade 4		Atividade 5			Atividade 6		
	a	b	a	b	a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	c
15	C	C	E (IJ)	E (GH)	C (reto)	C (poligonal =)	E (poligonal =)	E (C,E/A,G / B,D)	C	E (D)	E (C)	E (A, B, D)	C	C (D, A)	E (C, B / A, D)
16	C	C	C	C	C (poligonal =)	C (poligonal =)	C (poligonal =)	C	C	E (A, B)	E (C)	E (A, B)	C	C (C,B/ A,D)	E
17	C	C	E (IJ)	C	C (poligonal =)	E (poligonal =)	E (poligonal =)	E (B, D)	E (A, B)	C	E (C)	E (B, D)	C	C (B, C)	E (A, D)
18	C	C	C	E (AB)	C (poligonal $\neq$)	E (poligonal $\neq$)	E (poligonal =)	E (B,D/A,G /E,C)	E (A, B / C, D)	E (D)	E (C)	E (A, B)	C	C (B, C)	E
19	C	C	E (IJ)	C	C (poligonal $\neq$)	C (reto)	C (poligonal =)	E (B,D/ C,E/G,A)	E (A, B/ C, D)	C	C	C	C	C (D, A)	E
20	C	C	E (IJ)	E (GH)	C (poligonal $\neq$)	C (reto)	C (poligonal =)	E (A,G/C,E / B,D)	C	C	E (C)	-	C	C (D, A)	E (B, C/ A, D)
21	C	C	E (CD)	E (IJ)	C (poligonal =)	E (poligonal =)	E (poligonal =)	E (A,F,G/ E,C/B,D)	E (A, B, C, D)	C	E (C)	E (B)	E (A)	E (C)	E
22	C	C	E (CD)	C	C (poligonal $\neq$)	E (poligonal =)	E (poligonal =)	E (A,G/B,D / C,E)	C	E (B)	E (A)	-	C	E (B)	E (C, B/ A, D)
23	-	E (AB/CD)	E (AB/GH /IJ)	E (AB/IJ)	C (poligonal =)	E (poligonal =)	E (poligonal =)	E (G)	C	E (A, D / C, D)	E (C, D)	E (C)	C	C (B, C)	E (A, D)
24	C	C	E (IJ)	C	E (curvo)	C (poligonal $\neq$)	E (poligonal $\neq$)	E (A,G/E,C / B,D)	C	E (C)	C	E (A)	C	C (B, C)	E
25	C	C	E (IJ)	C	C (poligonal $\neq$)	C (poligonal $\neq$)	C (poligonal =)	E (B,D/ E,C/A,G)	E (A, C/ B, D)	E (D)	E (C)	E (A, B)	C	C (B, C)	C

ANEXO 1

TABELA 2 - ERROS E ACERTOS NAS RESPOSTAS (1.º Teste - no ambiente Papel e Lápis)

N.º	Atividade 1		Atividade 2		Atividade 3			Atividade 4		Atividade 5			Atividade 6		
	a	b	a	b	a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	c
26	C	C	E (IJ)	C	C (poligonal =)	C (poligonal =)	C (poligonal =)	C (A,G / C,E)	C	C	E (C)	E (A, B, C, D)	C	C (B, C)	E (A, D/ C, B)
27	C	C	E (IJ)	C	C (poligonal ≠)	C (poligonal ≠)	E (poligonal =)	C (A, G)	C	E (C)	C	E (A, B)	C	E (B, D)	E
28	C	C	E (IJ)	C	C (curvo)	C (poligonal =)	E (poligonal =)	E (A,G / B,D/C,E)	C	E (B)	E (A)	C	E (C, B)	C (D, A)	E (B, C/ A, D)
29	C	-	-	C	C (poligonal ≠)	C (poligonal ≠)	C (poligonal =)	C (A, G)	C	E (B)	E (C)	-	C	C (B, C)	E (A, D/ C, B)
30	C	E (AB)	E (IJ)	E (AB)	C (poligonal ≠)	C (poligonal ≠)	E (poligonal ≠)	C (A, G)	C	E (B)	E (C)	E (D, A)	C	C (D, A)	C
31	C	C	E (CD)	E (GH)	C (poligonal =)	C (poligonal =)	C (poligonal =)	C (C, E / A, G)	C	E (D)	E (C)	E (D)	C	C (D, A)	E
32	C	C	-	E (IJ)	C (poligonal =)	C (poligonal =)	E (poligonal =)	E(A,F,G/ E,C/B,D)	C	C	E (C)	E (B)	C	E (C)	C
33	C	C	E (EF)	E (IJ)	C (reto)	C (poligonal ≠)	C (poligonal =)	E (A,G / B,D/C,E)	C	E (C)	C	E (A)	C	C (B, C)	E
34	C	E (AB)	E (IJ)	E (AB)	C (poligonal ≠)	C (poligonal ≠)	C (poligonal =)	C (G, A)	C	E (B)	E (C)	E (D)	C	C (B, C)	C
35	C	C	E (CD/IJ)	E (AB/EF /GH)	C (poligonal =)	C (poligonal =)	C (poligonal =)	E (A,G/B,D /C,E)	C	E (B)	E (C)	E (A)	C	E (B)	E

ANEXO 1

TABELA 3 - LEVANTAMENTO DAS RESPOSTAS (2.º Teste - usando Materiais Manipulativos)

N.º	Atividade 1		Atividade 2		Atividade 3			Atividade 4		Atividade 5			Atividade 6		
	a	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	**c**
1	azul	verde	preto	vermelho	8,2 cm (poligonal =)	6,5 cm (poligonal ≠)	7,9 cm (poligonal =)	Az e Am / Vm e Vio / Lar e Vd	Vm e Vd	rosa	verde	amarelo e azul	azul e vermelho	azul e vermelho	amarelo e verde
2	azul	amarelo	preto	verde	11,0 cm (poligonal =)	7,4 cm (poligonal =)	8,6 cm (poligonal =)	Az e Am / Vio e Vm / Lar e Vd	Az e Vm/ Am e Vd	amarelo	verde	azul e rosa	azul e vermelho	amarelo e verde	amarelo e verde
3	azul	verde	preto	verde	12,7 cm (poligonal =)	9,7 cm (poligonal =)	8,1 cm (poligonal =)	Lar e Vd / Az anil e Am / Vio, Vm e Az	Am e Vd/ Vm e Az	amarelo	azul	amarelo e verde	azul e vermelho	amarelo e verde	amarelo e verde
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	azul	verde	azul	verde	8,2 cm (reto)	7,4 cm (reto)	9,1 cm (reto)	Vm e Vio	Vm e Vd	amarelo	verde	amarelo e azul	azul e vermelho	amarelo e verde	azul e verde
6	azul	verde	vermelho	verde	15,2 cm (poligonal =)	8,0 cm (poligonal =)	7,8 cm (poligonal =)	Vm e Vio / Lar e Vd / Am e Az	Vm e Vd	amarelo	rosa	amarelo e rosa	azul e vermelho	azul e vermelho	amarelo e verde
7	azul	verde	preto	verde	15,0 cm (poligonal ≠)	6,0 cm (poligonal ≠)	8,7 cm (poligonal =)	Vio e Vm	Vm e Vd	amarelo	verde	azul e verde	amarelo e azul	amarelo e verde	amarelo e verde
8	azul	verde	vermelho	verde	8,0 cm (reto)	4,1 cm (reto)	8,7 cm (reto)	Vm, Vio, Az e Am	Vm e Vd	amarelo	verde	azul e verde	azul e vermelho	amarelo e verde	amarelo e verde
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
11	azul	verde	vermelho	verde	9,5 cm (poligonal =)	6,3 cm (poligonal =)	8,2 cm (poligonal =)	Vio e Vm / Az anil / Az e Am / Lar e Vd	Vm e Vd/ Am e Az	amarelo	verde	azul e rosa	azul e vermelho	amarelo e verde	am e vd / az e vm

ANEXO 1

TABELA 3 - LEVANTAMENTO DAS RESPOSTAS (2.º Teste - usando Materiais Manipulativos) – Continuação

N.º	Atividade 1		Atividade 2		Atividade 3			Atividade 4		Atividade 5			Atividade 6		
	a	b	a	b	a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	c
12	amarelo	vermelh o	verde	amarelo	11,0 cm (poligonal =)	6,4 cm (poligonal =)	8,3 cm (poligonal =)	Vm, Az, Am, Lar, Az anil, Vio	Vm, Vd, Az, Am	amarelo	azul	rosa e verde	azul e vermelho	amarelo e verde	verde e vermelho
13	azul	verde	vermelho	verde	9,6 cm (reto)	7,8 cm (reto)	13,2 cm (poligonal ≠)	Az e Am / Vio e Vm	Vm e Az	amarelo	verde	amarelo e azul	azul e vermelho	amarelo e verde	az e vm / am e vd
14	azul	verde	preto	verde	15,8 cm (poligonal ≠)	2,8 cm (reto)	11,9 cm (poligonal =)	Vm e Vio / Az e Am / Lar e Vd	Az, Vd, Vm e Am	verde	rosa	amarelo e azul	azul e vermelho	amarelo e verde	amarelo e verde
15	vermelho	verde	preto	vermelho	12,1 cm (curvo)	5,1 cm (curvo)	8,2 cm (poligonal =)	Az e Am / Vm e Vio	Vm e Vd	rosa	verde	amarelo e azul	azul e vermelho	am e vd / az e vm	amarelo e verde
16	azul	verde	vermelho	verde	9,9 cm (poligonal ≠)	8,3 cm (curvo)	8,5 cm (poligonal =)	Vm e Vio / Am e Az	Vm e Vd	amarelo	verde	rosa e verde	azul e vermelho	am e vd / az e vm	amarelo e verde
17	azul	verde	preto	verde	13,8 cm (poligonal =)	6,4 cm (poligonal =)	8,1 cm (poligonal =)	Vm e Vio / Am e Az	Vm e Vd	azul	rosa	amarelo, azul e verde	azul e vermelho	azul e vermelho	am e vd / az e vm
18	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
19	azul	verde	vermelho	verde	10,3 cm (poligonal =)	4,2 cm (poligonal =)	8,1 cm (poligonal =)	Az e Am / Vd e Lar / Vm e Vio	Am e Vd/ Az e Vm	amarelo	verde e rosa	azul e rosa	azul e vermelho	azul e vermelho	am e vd / az e vm
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
21	vermelho	verde	preto	verde	4,0 cm (reto)	4,8 cm (reto)	6,0 cm (reto)	Am e Az / Lar e Vd / Vm e Vio	Vm e Vd	verde	rosa	azul e verde	azul e vermelho	amarelo e verde	azul e vermelho
22	azul	amarelo	vermelho	verde	14,9 cm (poligonal ≠)	6,2 cm (poligonal =)	5,0 cm (reto)	Vio e Vm / Az e Am	Vm e Vd	amarelo	verde	azul e verde	azul e vermelho	amarelo e verde	amarelo e vermelho
23	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
24	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

ANEXO 1

TABELA 3 - LEVANTAMENTO DAS RESPOSTAS (2.º Teste - usando Materiais Manipulativos) – Continuação

N.º	Atividade 1		Atividade 2		Atividade 3			Atividade 4		Atividade 5			Atividade 6		
	a	b	a	b	a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	c
25	azul	verde	vermelho	verde	9,9 cm (reto)	7,0 cm (reto)	8,0 cm (reto)	Az e Am / Vm e Vio	Vm e Vd	rosa	verde	azul e verde	azul e vermelho	amarelo e verde	amarelo e verde
26	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
27	azul	verde	vermelho	verde	12,0 cm (poligonal =)	6,5 cm (poligonal =)	7,5 cm (poligonal =)	Vm, Vio, Az anil, Az, Am, Lar, Vd	Vd, Vm, Az, Am	rosa	verde	amarelo e azul	azul e vermelho	amarelo e verde	amarelo e verde
28	azul	verde	preto	verde	10,4 cm (reto)	5,7 cm (poligonal ≠)	8,8 cm (poligonal =)	Am e Az / Vm, Vio e Azul anil / Lar e Vd	Am e Vm Vd e Az	amarelo	rosa	azul e verde	azul e vermelho	azul e vermelho	am e vd / vm e az
29	azul	verde	preto	verde	11,4 cm (poligonal =)	5,3 cm (curvo)	8,7 cm (poligonal =)	Am e Az / Vm e Vio	Vm e Vd	azul	rosa	amarelo e azul	azul e vermelho	amarelo e verde	amarelo e verde
30	azul	verde	preto	vermelho	13,8 cm (poligonal =)	7,1 cm (poligonal =)	10,3 cm (poligonal =)	Vio e Vm / Az e Am	Vm e Vd	rosa	verde	amarelo e verde	azul e vermelho	azul e vermelho	amarelo e verde
31	azul	verde	preto	verde	9,8 cm (poligonal =)	7,8 cm (poligonal =)	8,8 cm (poligonal =)	Vm e Vio / Az e Am	Vm e Vd	amarelo	rosa	amarelo e azul	azul e vermelho	azul e vermelho	amarelo e verde
32	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
33	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
34	azul	verde	preto	verde	9,8 cm (poligonal ≠)	9,4 cm (curvo)	7,8 cm (poligonal =)	Vio, Vm, Az e Am	Vm e Vd	rosa	verde	amarelo e azul	azul e vermelho	amarelo e verde	amarelo e verde
35	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

ANEXO 1

TABELA 4 - ERROS E ACERTOS NAS RESPOSTAS (2.º Teste - usando Materiais Manipulativos)

N.º	Atividade 1		Atividade 2		Atividade 3			Atividade 4		Atividade 5			Atividade 6		
	a	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	**c**
1	C	C	E preto	E vermelh o	C (poligonal =)	C (poligonal ≠)	C (poligonal =)	E	C	E rosa	C	E Am e Az	C	C Az e Vm	C
2	C	E amarelo	E preto	C	C (poligonal =)	C (poligonal =)	C (poligonal =)	E	E Az e Vm/ Am e Vd	C	C	C	C	C Am e Vd	C
3	C	C	E preto	C	C (poligonal =)	E (poligonal =)	C (poligonal =)	E	E Am e Vd/ Vm e Az	C	E azul	E Am e Vd	C	C Am e Vd	C
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	C	C	E azul	C	C (reto)	C (reto)	E (reto)	C Vm e Vio	C	C	C	E Am e Az	C	C Am e Vd	E Az e Vd
6	C	C	C	C	C (poligonal =)	C (poligonal =)	C (poligonal =)	E	C	C	E rosa	E Am e Ro	C	C Az e Vm	C
7	C	C	E preto	C	C (poligonal ≠)	C (poligonal ≠)	C cm (poligonal =)	C Vio e Vm	C	C	C	E Az e Vd	C	C Am e Vd	C
8	C	C	C	C	E (reto)	C (reto)	C cm (reto)	C	C	C	C	E Az e Vd	C	C Am e Vd	C
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
11	C	C	C	C	C (poligonal =)	C (poligonal =)	C (poligonal =)	E	E Vm e Vd/ Am e Az	C	C	C	C	C Am e Vd	E Am e Vd / Az e Vm

ANEXO 1

TABELA 4 - ERROS E ACERTOS NAS RESPOSTAS (2.º Teste - usando Materiais Manipulativos) – Continuação

N.º	Atividade 1		Atividade 2		Atividade 3			Atividade 4		Atividade 5			Atividade 6		
	a	b	a	b	a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	c
12	E amarelo	E vermelho	E verde	E amarelo	C (poligonal =)	C (poligonal =)	C (poligonal =)	E	E Vm, Vd, Az, Am	C	E azul	E Ro e Vd	C	C Am e Vd	E Vd e Vm
13	C	C	C	C	C (reto)	C (reto)	E (poligonal ≠)	C	Vm e Az	C	C	E Am e Az	C	C Am e Vd	E Az e Vm / Am e Vd
14	C	C	E preto	C	C (poligonal ≠)	C (reto)	E (poligonal =)	E	E Az, Vd, Vm e Am	E verde	E rosa	E Am e Az	C	C Am e Vd	C
15	E vermelho	C	E preto	E vermelho	C (curvo)	C (curvo)	C (poligonal =)	C	C	C rosa	C	E Am e Az	C	C	C
16	C	C	C	C	C (poligonal ≠)	E (curvo)	C (poligonal =)	C	C	C	C	E Ro e Vd	C	C	C
17	C	C	E preto	C	C (poligonal =)	C (poligonal =)	C (poligonal =)	C	C	E azul	E rosa	E Am, Az e Vd	C	C Az e Vm	E Am e Vd / Az e Vm
18	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
19	C	C	C	C	C (poligonal =)	C (poligonal =)	C (poligonal =)	E	E Am e Vd/ Az e Vm	C	E Vd e Ro	C	C	C Az e Vm	E Am e Vd / Az e Vm
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
21	E vermelho	C	E preto	C	E (reto)	C (reto)	E (reto)	E	C	E verde	E rosa	E Az e Vd	C	C Am e Vd	E Az e Vm
22	C	E amarelo	C	C	C (poligonal ≠)	C (poligonal =)	E (reto)	C	C	C	C	E Az e Vd	C	C Am e Vd	E Am e Vm
23	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
24	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

ANEXO 1

TABELA 4 - ERROS E ACERTOS NAS RESPOSTAS (2.º Teste - usando Materiais Manipulativos) – Continuação

N.º	Atividade 1		Atividade 2		Atividade 3			Atividade 4		Atividade 5			Atividade 6		
	a	b	a	b	a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	c
25	C	C	C	C	C (reto)	C (reto)	C (reto)	C	C	E rosa	C	E Az e Vd	C	C Am e Vd	C
26	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
27	C	C	C	C	C (poligonal =)	C (poligonal =)	C (poligonal =)	E	E Vd, Vm, Az, Am	E rosa	C	E Am e Az	C	C Am e Vd	C
28	C	C	E preto	C	C (reto)	C (poligonal ≠)	C (poligonal =)	E	E Am e Vm Vd e Az	C	E rosa	E Az e Vd	C	E Az e Vm	E Am e Vd / Vm e Az
29	C	C	E preto	C	C (poligonal =)	C (curvo)	C (poligonal =)	C	C	E azul	E rosa	E Am e Az	C	C Am e Vd	C
30	C	C	E preto	E vermelho	C (poligonal =)	C (poligonal =)	E (poligonal =)	C	C	E rosa	C	E Am e Vd	C	E Az e Vm	C
31	C	C	E preto	C	C (poligonal =)	C (poligonal =)	C (poligonal =)	C	C	C	E rosa	E Am e Az	C	E Az e Vm	C
32	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
33	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
34	C	C	E preto	C	C (poligonal ≠)	E (curvo)	C (poligonal =)	C	C	E rosa	C	E Am e Az	C	C Am e Vd	C
35	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

ANEXO 1 - TABELA 5: RESUMO DOS DADOS DA ATIVIDADE 1 (Ambiente Papel e Lápis)

ATIVIDADE 1 – ITEM (a)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	CD	1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 21, 22, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 34	23	95,8
Errada	AB	12	1	4,2
Índice Percentual total de acertos e erros: C (23) 95,8% - E (1) 4,2%				
ATIVIDADE 1 – ITEM (b)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	GH	5, 6, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 21, 22, 25, 27, 28, 31	15	62,5
Errada	AB	1, 7, 8, 30, 34	5	20,8
	EF	12	1	4,2
	AB, CD	3	1	4,2
Nenhuma	-	2, 29	2	8,3
Índice Percentual total de acertos e erros: C (15) 62,5% - E (7) 29,16%				

ANEXO 1 - TABELA 6: RESUMO DOS DADOS DA ATIVIDADE 1 (Usando Materiais Manipulativos)

ATIVIDADE 1 – ITEM (a)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	Azul	1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 22, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 34	21	87,5
Errada	Vermelho	15, 21	2	8,3
	Amarelo	12	1	4,2
Índice Percentual total de acertos e erros: C (21) 87,5% - E (3) 12,5%				
ATIVIDADE 1 – ITEM (b)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	Verde	1, 3, 5, 6, 7, 8, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 21, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 34	21	87,5
Errada	Amarelo	2, 22	2	8,3
	Vermelho	12	1	4,2
Índice Percentual total de acertos e erros: C (21) 87,5% - E (3) 12,5%				

ANEXO 1 - TABELA 7: RESUMO DOS DADOS DA ATIVIDADE 2 (Ambiente Papel e Lápis)

ATIVIDADE 2 – ITEM (a)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	GH	6, 7, 8, 11, 12, 16	6	25,0
Errada	IJ	1, 2, 13, 15, 17, 19, 25, 27, 28, 30, 34	11	45,8
	EF	3	1	4,2
	CD	5, 14, 21, 22, 31	5	20,8
Nenhuma	-	29	1	4,2
Índice Percentual total de acertos e erros: C (6) 25,0% - E (17) 70,8%				
ATIVIDADE 2 – ITEM (b)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	EF	2, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 16, 17, 19, 22, 25, 27, 28, 29	14	58,4
Errada	AB	30, 34	2	8,3
	GH	1, 3, 14, 15, 31	5	20,8
	IJ	21	1	4,2
Nenhuma	-	2, 29	2	8,3
Índice Percentual total de acertos e erros: C (14) 58,4% - E (8) 33,3%				

ANEXO 1 - TABELA 8: RESUMO DOS DADOS DA ATIVIDADE 2 (Usando Materiais Manipulativos)

ATIVIDADE 2 – ITEM (a)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	Vermelho	6, 8, 11, 13, 16, 19, 22, 25, 27	9	37,5
Errada	Preto	1, 2, 3, 7, 14, 15, 17, 21, 28, 29, 30, 31, 34	13	54,1
	Azul	5	1	4,2
	Verde	12	1	4,2
Índice Percentual total de acertos e erros: C (9) 37,5% - E (15) 62,5%				
ATIVIDADE 2 – ITEM (b)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	Verde	2, 5, 6, 7, 8, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 25, 27, 28, 29, 31, 34	19	79,1
Errada	Vermelho	1, 15, 30, 3	4	16,7
	Amarelo	12	1	4,2
Índice Percentual total de acertos e erros: C (19) 79,1% - E (5) 20,9%				

ANEXO 1 - TABELA 9: RESUMO DOS DADOS DA ATIVIDADE 3 (Ambiente Papel e Lápis)

ATIVIDADE 3 – ITEM (a)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	Poligonal =	2, 3, 5, 6, 12, 16, 17, 21, 31	9	37,5
	Poligonal ≠	7, 8, 14, 19, 22, 25, 27, 29, 30, 34	10	41,7
	Curvo	11, 28	2	8,3
	Reto	13, 15	2	8,3
Errada	Reto	1	1	4,2
Índice Percentual total de acertos e erros: C (23) 95,8% - E (1) 4,2%				
ATIVIDADE 3 – ITEM (b)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	Poligonal =	2, 3, 6, 12, 15, 16, 28, 31	8	33,4
	Poligonal ≠	7, 8, 25, 27, 29, 30, 34	7	29,2
	Reto	1, 13, 14, 19	4	16,6
Errada	Poligonal =	5, 11, 17, 21, 22	5	20,8
Índice Percentual total de acertos e erros: C (19) 79,2% - E (5) 20,8%				
ATIVIDADE 3 – ITEM (c)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	Poligonal =	2, 6, 7, 8, 13, 16, 19, 25, 29, 31, 34	11	45,8
	Poligonal ≠	11	1	4,2
	Reto	1	1	4,2
Errada	Poligonal =	3, 5, 12, 14, 15, 17, 21, 22, 27, 28	10	41,6
	Poligonal ≠	30	1	4,2
Índice Percentual total de acertos e erros: C (13) 54,2% - E (11) 45,8%				

ANEXO 1 - TABELA 10: RESUMO DOS DADOS DA ATIVIDADE 3 (Usando Materiais Manipulativos)

ATIVIDADE 3 – ITEM (a)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	Poligonal =	1, 2, 3, 6, 11, 12, 17, 19, 27, 29, 30, 31	12	50,0
	Poligonal ≠	7, 14, 16, 22, 34	5	20,8
	Curvo	15	1	4,2
	Reto	5, 13, 25, 28	4	16,6
Errada	Reto	8, 21	2	8,3
Índice Percentual total de acertos e erros: C (22) 91,7% - E (2) 8,3%				

ATIVIDADE 3 – ITEM (b)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	Poligonal =	2, 11, 12, 17, 19, 22, 27, 30, 31	9	37,5
	Poligonal ≠	1, 7, 28	3	12,6
	Reto	5, 8, 13, 14, 21, 25	6	25,0
	Curvo	15, 29	2	8,3
Errada	Poligonal =	3, 6	2	8,3
	Curvo	16, 34	2	8,3
Índice Percentual total de acertos e erros: C (20) 83,3% - E (4) 16,7%				

ATIVIDADE 3 – ITEM (c)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	Poligonal =	1, 2, 3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 19, 27, 28, 29, 31, 34	17	79,1
	Reto	8, 25	2	8,3
Errada	Poligonal =	30	1	4,2
	Poligonal ≠	13	1	4,2
	Reto	5, 21, 22	3	12,5
Índice Percentual total de acertos e erros: C (19) 79,2% - E (5) 20,8%				

ANEXO 1 - TABELA 11: RESUMO DOS DADOS DA ATIVIDADE 4 (Ambiente Papel e Lápis)

ATIVIDADE 4 – ITEM (a)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	A,G / C,E	1, 16, 31	3	12,5
	E,C	3, 6	2	8,4
	A,G	7, 8, 13, 27, 29, 30, 34	7	29,2
Errada	A,G/C,E/B,D	2, 5, 15, 19, 22, 25, 28	7	29,2
	A,F,G/E,C/B,D	11, 21	2	8,4
	F,B,C	12	1	4,1
	B,D	17	1	4,1
	A,B/B,D/E,C	14	1	4,1
Índice Percentual total de acertos e erros: C (12) 50,0% - E (12) 50,0%				

ATIVIDADE 4 – ITEM (b)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	A, C	1, 3, 5, 6, 7, 8, 13, 14, 15, 16, 22, 27, 28, 29, 30, 31, 34	17	70,8
Errada	A,B/C,D	2, 11, 19, 21	4	16,6
	A, B	17	1	4,2
	C, D, B	12	1	4,2
	A,C/B,D	25	1	4,2
Índice Percentual total de acertos e erros: C (17) 70,8% - E (7) 29,2%				

ANEXO 1 - TABELA 12: RESUMO DOS DADOS DA ATIVIDADE 4 (Usando Materiais Manipulativos)

ATIVIDADE 4 – ITEM (a)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	Vermelho e Violeta / Amarelo e Azul	8, 13, 15, 16,17, 22, 25, 29, 30, 31, 34	11	45,8
	Vermelho e Violeta	5, 7	2	8,3
Errada	Amarelo e Azul / Vermelho e Violeta / Laranja e Verde	1, 2, 6, 11, 14, 19, 21	7	29,2
	Laranja e Verde / Amarelo e Azul Anil / Azul, Vermelho e Violeta	3, 28	2	8,3
	Amarelo, Azul, Azul anil, Laranja, Vermelho, Violeta	12, 27	2	8,3
Índice Percentual total de acertos e erros: C (13) 54,1% - E (11) 45,9%				
ATIVIDADE 4 – ITEM (b)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	Vermelho e Verde	1, 5, 6, 7, 8, 13, 15, 16, 17, 21, 22, 25, 29, 30, 31, 34	16	66,7
Errada	Azul e Vermelho / Amarelo e Verde	2, 3, 19	3	12,5
	Azul e Amarelo / Vermelho e Verde	11,12, 27	3	12,5
	Azul e Verde / Vermelho e Amarelo	14, 28	2	8,3
Índice Percentual total de acertos e erros: C (16) 66,7% - E (8) 33,3%				

ANEXO 1 - TABELA 13: RESUMO DOS DADOS DA ATIVIDADE 5 (Ambiente Papel e Lápis)

ATIVIDADE 5 – ITEM (a)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	A	7, 8, 11, 12, 17, 19, 21	7	29,2
Errada	B	1, 2, 5, 22, 28, 29, 30, 34	8	33,3
	D	25, 31, 3, 15	4	16,7
	Mais de uma figura	6, 16	2	8,3
	C	13, 14, 27	3	12,5
Índice Percentual total de acertos e erros: C (7) 29,2% - E (17) 70,8%				
ATIVIDADE 5 – ITEM (b)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	D	5, 7, 8, 11, 13, 14, 19, 27	8	33,3
Errada	C	1, 2, 3, 12, 15, 16, 17, 21, 25, 29, 30, 31, 34	13	54,2
	Mais de uma figura	6	1	4,2
	A	22, 28	2	8,3
Índice Percentual total de acertos e erros: C (8) 33,3% - E (16) 66,7%				
ATIVIDADE 5 – ITEM (c)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	B,C	2, 11, 19, 28	4	16,7
Errada	A,B	3, 6, 13, 16, 25, 27	6	25,0
	C,D	7, 8	2	8,3
	B,D	14,17	2	8,3
	A,B,D	15	1	4,2
	D,A	30	1	4,2
	Apenas uma figura	1, 5, 12, 21, 31, 34	6	25,0
Nenhuma	-	22, 29	2	8,3
Índice Percentual total de acertos e erros: C (4) 16,7% - E (18) 75,0%				

ANEXO 1 - TABELA 14: RESUMO DOS DADOS DA ATIVIDADE 5 (Usando Materiais Manipulativos)

ATIVIDADE 5 – ITEM (a)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	Amarelo	2, 3, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 16, 19, 22, 28, 31	14	58,4
Errada	Rosa	1, 15, 25, 27, 30, 34	6	25,0
	Verde	14, 21	2	8,3
	Azul	17, 29	2	8,3
Índice Percentual total de acertos e erros: C (14) 58,4% - E (10) 41,6%				
ATIVIDADE 5 – ITEM (b)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	Verde	1, 2, 5, 7, 8, 11, 13, 15, 16, 22, 25, 27, 30, 34	14	58,3
Errada	Azul	3,12	2	8,3
	Rosa	6, 14, 17, 21, 28, 29, 31	7	29,2
	Mais de uma figura	19	1	4,2
Índice Percentual total de acertos e erros: C (14) 58,3% - E (10) 41,7%				
ATIVIDADE 5 – ITEM (c)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	Azul e Rosa	2, 11, 19	3	12,5
Errada	Amarelo e Azul	1, 5, 13, 14, 15, 27, 29, 31, 34	9	37,5
	Amarelo e Verde	3, 30	2	8,3
	Amarelo e Rosa	6	1	4,2
	Azul e Verde	7, 8, 21, 22, 25, 28	6	25,0
	Rosa e Verde	12, 16	2	8,3
	Amarelo, Azul e Verde	17	1	4,2
Índice Percentual total de acertos e erros: C (3) 12,5% - E (21) 87,5%				

ANEXO 1 - TABELA 15: RESUMO DOS DADOS DA ATIVIDADE 6 (Ambiente Papel e Lápis)

ATIVIDADE 6 – ITEM (a)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	A, D	1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 22, 25, 27, 29, 30, 31, 34	21	87,5
Errada	Apenas uma figura	12, 21	2	8,3
	C,B	28	1	4,2
Índice Percentual total de acertos e erros: C (21) 87,5% - E (3) 12,5%				
ATIVIDADE 6 – ITEM (b)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	A,D/ B,C	16	1	4,2
	A,D	14, 15, 19, 28, 30, 31	6	25,0
	B,C	1, 2, 3, 6, 7, 8, 11, 13, 17, 25, 29, 34	12	50,0
Errada	B,C	27	1	4,2
	Apenas uma figura	5, 12, 21, 22	4	16,6
Índice Percentual total de acertos e erros: C (19) 79,2% - E (5) 20,8%				
ATIVIDADE 6 – ITEM (c)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	B,C	2, 6, 11, 25, 30, 34	6	25,0
Errada	A,D/C,B	1, 3, 13, 15, 22, 28, 29	7	29,2
	A,D	7, 8, 14, 17	4	16,6
	Menos de uma figura	5, 12, 16, 19, 21, 27, 31	7	29,2
Índice Percentual total de acertos e erros: C (6) 25,0 % - E (18) 75,0 %				

ANEXO 1 - TABELA 16: RESUMO DOS DADOS DA ATIVIDADE 6 (Usando Materiais Manipulativos)

ATIVIDADE 6 – ITEM (a)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	Azul e Vermelho	1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 21, 22, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 34.	24	100
Errada	-	-	0	0,0
Índice Percentual total de acertos e erros: C (24) 100% - E (0) 0,0%				
ATIVIDADE 6 – ITEM (b)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	Azul e Vermelho / Amarelo e Verde	15, 16	2	8,3
	Azul e Vermelho	1, 6, 17, 19, 28, 30, 31	7	29,2
	Verde e Amarelo	2, 3, 5, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 21,22, 25, 27, 29, 34	15	62,5
Errada	-	-	0	0,0
Índice Percentual total de acertos e erros: C (24) 100% - E (0) 0,0%				
ATIVIDADE 6 – ITEM (c)				
Resposta		**Aluno**	**#**	**%**
Certa	Amarelo e Verde	1, 2, 3, 6, 7, 8, 14, 15, 16, 25, 27, 29, 30, 31, 34	15	62,5
Errada	Verde e Azul	5	1	4,2
	Verde e Amarelo/ Vermelho e Azul	11, 13, 17, 19, 28	5	20,7
	Vermelho e Verde	12	1	4,2
	Vermelho e Azul	21	1	4,2
	Vermelho e Amarelo	22	1	4,2
Índice Percentual total de acertos e erros: C (15) 62,5 % - E (9) 37,5 %				

ANEXO 2

TABELA 17 - TRANSCRIÇÕES DAS ENTREVISTAS

Aluno	Atividade 1	Atividade 2	Atividade 3	Atividade 4	Atividade 5	Atividade 6
1	- Não ficou gravada a entrevista.	- Não ficou gravada a entrevista.	- Não ficou gravada a entrevista.	- Não ficou gravada a entrevista.	- Não ficou gravada a entrevista.	- Não ficou gravada a entrevista.
2	-	(item "a"): - *Porque ele tem a voltinha e a perninha como se fosse o número 1.*	-	(item "a"): - *Porque um pequeno e o outro é grande, mas só que eles têm contornos iguais.*	(item "a"): - *Por causa das voltas do H;* (item "b"): - *Porque a verde, ela é menor que a outra, porque acho que ela tem… a rosa, ela tem mais espaço que a verde. Porque ela tem volta e acho que ela é mais pequena que a rosa;* (item "c"): - *Porque as duas, elas têm voltas e eu acho que… não sei…* (para essa aluna, perímetro são as voltas).	-
3	(item "a"): - *É o azul, porque ta maior;* (item "b"): - *O verde, porque o verde ta menor que o amarelo.*	(item "a"): - *O preto, porque o preto ta maior que o verde, medindo; porque cortou muito grande;* (item "b"): - *O vermelho, porque ele é o menor que tem.*	-	-	(item "c"): - *A amarela e a azul, porque são quadradinhas, porque só faltava botar esse negócio para cima e ficava um quadrado.*	(item "b"): - *Porque só sobrou esses dois;* (item "c"): - *O verde e o laranja, porque não são iguais.*
5	-	(item "a"): - *Porque ele é tracinho, assim; ele é cheio desses tracinhos. Aí, a pessoa puxando, fica maior*; (item "b"): - *Porque o verde, só é a pessoa botar, assim, de lado do outro que vê ele menor.*	-	(item "a"): - *Porque elas são iguais, laranja e verde, sendo que uma é maior que a outra.*	(item "a"): - *Porque ela tem, é a H, sendo… É porque esse aqui é deitado, mas, se eu colocar assim, fica do mesmo tamanho, sendo que ela deitou, aí, ficou maior;* (item "b"): - *Porque ela tem três lados;* (item "c"): - *A*	(item "a"): - *Porque é igualzinha, porque é só colocar uma em cima da outra;* (item "b"): - *Fazendo… Num tem aquele quadrado maior e a letra H, o amarelo e o azul? Então, é igualzinho a esses, sendo que esses são*

					amarela e a azul, porque eu acho; porque aqui (amarela) *fica esse espaço; esse espaço é como se fosse um quadrado, porque aqui ela fica igualzinha. Aí, esses dois cozinhas… Aí, é assim.*	*menor;* (item “c”): - *Porque sim; porque é diferente e eu acho que é. Não sei.*
6	*- Peguei o fio e fiz a medida.*	*- Peguei o fio, de novo, dobrei em cima de todos.*	-	(item “a”): - *Peguei os dois e coloquei no mesmo local e vi que eles eram igual;* (item “b”): - *Tinha o mesmo tamanho* (vermelho e verde).	(item “a”): - *Se esticar, ela fica mais grande que qualquer um dos três;* (item “b”): - *Porque eu fiz assim e nenhum dos três deu o mesmo tamanho e o rosa é o mais pequeno;* (item “c”): - *Porque peguei os dois e ficou no mesmo tamanho, ficou com a resposta* (amarelo e azul).	(item “a”): - *Porque cada um tem duas perninhas e três negócios para cima;* (item “b”): - *Mesma coisa;* (item “c”): - *Peguei eles dois, fiz a mesma medida e eu vi que os dois têm mesmo tamanhos.*
7	(item “b”): - *Porque o verde, dá para ver que ele é pequeno.*	(item “a”): - *Eu acho que é o preto, porque se eu abrir o vermelho fica menor que o preto;* (item “b”): - *O verde e o laranja são pequenos, mas se eu abrir o laranja fica maior que o verde.*	-	(item “a”): - *Dá para ver que eles são iguais*; (item “b”): - *Porque são do mesmo tamanho.*	(item “a”): - *Se abrir, ele fica maior que todos*; (item “b”): - *Porque eu medi com o azul*; (item “c”): - *Se colocá-los juntos, ficam iguais, parecidos.*	(item “a”): - (sobrepôs) Assim da para vê que eles são iguais; (item “b”): - Se colocar o amarelo para cá, pra cá (abrir); (item “c”): - Contornos diferentes e perímetros iguais.
8	(item “a”): - *Porque assim, eu acho o azul, assim, mais comprido que o amarelo, o verde e o vermelho. Aí, eu achei, assim, interessante esse azul;* (item “b”): - *O verde; o amarelo é mais comprido que o verde.*	(item “a”): - *O vermelho;* (item “b”): - Porque assim, eu achei; *porque eu quis fazer assim.*	(item “c”): - *Pensando, assim, no comprimento do verde.*	(item “a”): - *Tem. Tem*; (item “b”): - *Assim, achei igual e fui e coloquei.*	(item “a”): - *Porque, assim, mas quando ele fica assim, desse jeito, ele não fica assim, feito esse daqui. Acho que ele vai ficar assim, mais largo; se abrir assim, acho que ele fica mais largo que esse*; (item “b”): - *Porque se fazer*	(item “a”): - Porque é igual, a azul com vermelha; (item “b”): - *Também, se fazer um quadrado com a amarela, fica igual à verde;* (item “c”): - *A verde e a amarela.*

					assim, ele diminui assim; (item “c”): - *É a rosa e a azul. Se fazer a forma, assim, igual, como a azul e a rosa, eu acho que fica igual.*	
11	- Não fez entrevista.	- Não fez entrevista.	- Não fez entrevista.	- Não fez entrevista.	- Não fez entrevista.	- Não fez entrevista.
12	(item “a”): - *Amarelo, porque é melhor de pintar a casa;* (item “b”): - *Porque quando eu tou lá em casa e faço um desenho, assim, um boneco, aí eu gosto de pintar ele mais, porque fica mais bonito.*	(item “a”): - *Porque o verde precisa pintar os desenhos… os desenhos… Aí, quando escrevo de lápis, aí, eu desenho um quadrado, aí, eu pinto ele*; (item “b”): - *Amarelo; ele é mais curto porque ele faz a gente cortar no papel; quando a gente pinta a cor, aí fica melhor.*	-	(item “a”): - *Eu resolvi porque esse vermelho, verde, azul e amarelo precisa para pintar meus desenhos que eu tiro xerox.*	(item “a”): - Porque eu acho que amarelo é mais bonito, que ele precisa pra fazer atividade, assim, de desenho pra gente pintar, mais eu gostei mais do amarelo; (item “b”): - Porque ele é um quadrado, precisa pra pintar os negócios; (item “c”): - Porque o rosa e o verde é melhor porque desenha um quadrado e o negócio aí melhor de se pintar.	(item “a”): - Porque o azul e o vermelho têm contornos iguais e é melhor atividade o azul e vermelho, se eu quisesse, pronto, eu vou pintar a minha bicicleta, aí eu vou pintar dessa cor, eu gosto mais dessa cor; (item “b”): - Porque, pronto, se eu quiser minha chinela eu pinto dessa cor aqui.
13	(item “a”): - *Eu peguei uma régua e fui. Eu vi que esse aqui era o maior e o verde o menor* (ambiente papel e lápis). *Eu usei o azul em todos os contornos que têm na casa, vendo aqui e aqui, eu peguei ele e marcando onde é que tava e aqui também* (usando materiais manipulativos).	(item “a”): - *Vermelho, eu peguei o nylon, e medindo, e recortando.*	-	(item “a”): - *Porque a gente juntando esses contorninhos, aí fica mais fácil de observar. É porque a gente não pode colocar esse aqui, aqui; aí, fica mais fácil*; (item “b”): - *Porque tem o mesmo contorno, e a B e a D não têm, porque são maior a B e a D menor.*	(item “a”): - *Eu peguei os contornos que são D e os quadradinhos e fui fazendo; até peguei um nylon e fui contornando eles. Aí eu peguei os nylons e vi que o amarelo é o maior;* (item “b”): - ; (item “c”): - *Porque olhando, assim… Porque esse aqui já tem um contorno e já vem pra cá. Aí, eu peguei eles e fui fazendo assim; e peguei o rosa e o verde, que não tinha nada a ver, e esses daqui têm tudo a ver.*	(item “a”): - *Eu fiz a mesma coisa com a atividade 5: botei elas, assim, tudo junto, e vi… e dá para ver que os contornos são iguais*; (item “b”): - *É como a gente viu aqui no quinto, né?, que é o H e o azul; o quadrado é quase igual o amarelo; e o outro, esse aqui; que também são iguais. Aí, eu também encaixei eles e eles ficaram assim, tudo igual, como eu queria;* (item “c”): - *A gente vê que são iguais*

						os contornos de A e D, e o que é o B e C, que são iguais, aí eu botei.
14	(item “a”): - Eu olhei o amarelo, o verde, o azul e o vermelho, aí eu descobri que o azul é o maior. Eu olhei tudinho; (item “b”): - Porque esse daqui, eu achei que é do tamanho desse; e esse aqui, eu achei também que é do tamanho desse; e por isso que eu achei esse aqui o menor.	(item “a”): - Porque eu olhei um assim, e o outro assim. Aí, eu olhei bem e olhei que o preto é o maior; (item “b”): - Eu acho que é o vermelho, porque ele tem mais dobrado que esse. Eu quero ficar com o verde, porque se eu esticar esse daqui (vermelho) vai ficar maior que esse.	-	(item “a”): - Eu olhei os tamanhos e achei que essa daqui era do mesmo tamanho que a violeta; a amarela e a azul também achei que eram do mesmo tamanho. A laranja e a azul do mesmo tamanho não, porque uma é pequena e a outra é verde, mas têm o mesmo negócio; (item “b”): - Porque eu achei que essas daqui são iguais porque são duas grandes e achei essas verde e a azul,porque elas são pequenas e têm o mesmo contorno.	(item “a”): - É porque essa daqui é comprida e essa daqui é quadrada; (item “b”): - A rosa; é porque eu vi assim, tudinho, e achei; eu vi essas duas, eu achei que essa aqui (rosa) era a menor que tudinho; (item “c”): - Eu acho que é a amarela e a azul, porque essas daqui têm o mesmo tamanho e são quase iguais.	(item “a”): - Porque elas são iguais… quase iguais. Essa daqui tem dois feito estrela e essa daqui também; essa daqui tem como fosse duas perninhas; (item “b”): - (verde e a laranja) Essa daqui é quase igual a essa, só faltava ela baixar isso aqui e isso aqui, aí ficaria igual; (item “c”): - Tem essa aqui é feito um T, uma cruz e essa daqui é um quadrado.
15	(item “a”): - Porque eu vi o comprimento do azul, tamanho, e depois eu vi o vermelho, porque os outros são tudo menores; aí, o azul é melhor que o vermelho.	(item “a”): - Porque, foi porque eu medi o preto com tudinho, e eu vi que só o preto é o maior. Medi, assim, o comprimento: eu coloquei um ao lado do outro para ver qual é o maior e eu vi que o preto é o maior; (item “b”): - Eu vi que todos são maiores, menos o preto que é o maior de todos; eu vi que esse é o médio, esse é o encostado ao médio, esse é, assim,	- Não, porque se não ia ficar tudo igual, aí ninguém ia saber o tipo; aí, eu fiz cada um diferente do outro; (item “c”): - Porque aqui tinha, assim, comprimento igual ao do verde… ao do verde… era como se fosse um quadradinho; Aí, eu peguei e fiz só um, porque só vai ser esse aqui, não vai ter outro, porque se tivesse outro eu ia fazer de outro tipo.	(item “a”): - Ele tem o mesmo comprimento; só o tamanho dele que é menor. Aí, eu não achei que são iguais que esse; (item “b”): - Eu vi o tamanho desse daqui com esse, aí ficou igual; e esse; também; eu medi tudinho no pensamento, eu medi tudinho. Aí, depois, eu vi que o mesmo tamanho desse é o tamanho desse, que se não fosse eu não ia colocar, não ia dar razão a esse. Amarelo e azul	(item “a”): - É a rosa, essa figura aqui, é um retângulo e o retângulo é comprido; não é que nem essa, aqui, se parece com um cubo; aqui (verde) é menor que essa, porque, veja, ela é gordinha e essa é magrinha e a magrinha sempre tem uma esticadinha; e essa aqui tem… a gordinha é cheinha. Aí, eu vi que essa aqui é maior do que esse, depois, eu calculei e vi que a D não é maior.	(item “a”): - Veja esse daqui, a lilás; a violeta, ela tem como se fosse uma estrelinha; dois negócios como se fosse uma estrelinha e aí essa daqui é a mesma coisa que a vermelha; a violeta tem a mesma coisa que a violeta; é como se fosse um macacão: aqui é o bracinho da menina, aqui é a perninha e aqui o negócio que abotoa, aqui; (item “b”): - Eu resolvi que a letra A e D

		encostado ao outro médio e esse é o menor. Esse é o vermelho; eu vi que o vermelho é o menor, porque aqui é menor e aqui também é dos mesmos tamanhos; e esses outros, oh, tudo maior que ele. Ai, eu vi que esse é o menor.		*são tudo grande e esse aqui é pequeno. O azul é pequeno e não ia caber com o vermelho e nem com o azul que são pequenos.*	*A rosa é menor do que essa* (azul), *porque essa aqui se parece com uma porta; a porta é assim, se colocar a metade de uma porta não é maior que uma porta em pé. A amarela não tem maior perímetro que a C, que é a rosa;* (item "b"): *- Porque ela* (rosa) *é comprida e todos se parecem com um cubo. Eu vi que a verde é mais barriguda, uma barriga redondinha, e ela é menor que a azul. E depois eu peguei a amarela e vi também que essa aqui* (verde) *é menor que a amarela. Aí depois eu vi o resultado e coloquei na prova;* (item "c"): *- Existem, porque tem mais perímetros iguais. Pô, só falta aqui, oh, fechar na amarela; ela só falta fechar aqui e aqui, e ela já é um quadrado igual a azul.*	*são iguais, têm o mesmo contorno, iguais e não têm diferença; já a laranja e a verde têm diferença, porque a laranja é como se fosse uma cruz e a verde é um quadrado e não dá certo o contorno;* (item "c"): *- Eu acho que perímetro é o tamanho; e o contorno diferente é esse daqui, tem contornos diferentes; a verde tem contorno diferente da laranja. Aí, eu pensei porque eu não coloco a verde e a laranja? Aí, eu coloquei verde e laranja, porque é o mesmo perímetro e são contornos diferentes.*
16	*- Eu medi com um pedaço de papel, eu marquei com o lápis e medi o tamanho: qual seria o maior e qual seria o menor.*	*- Com o fio eu medi do mesmo jeito, fiz as formas do mesmo jeito e depois estiquei e medi.*	*- Eu peguei um pedaço menor de fio.*	(item "a"): *- Eu peguei um pedaço de barbante e medi, e também juntei um com outro para medir*; (item "b"): *- Eu medi os dois e fui medindo as formas e chequei, e achei que estava certo.*	*- Eu fiz com o fio o mesmo formato, e estiquei, e medi; - Eu medi com um pedaço de fio, estiquei e eles tinham o mesmo tamanho e, aí, eu marquei aqui.*	(item "a"): *- Eu peguei os dois e coloquei um por cima do outro e percebi que eles tinham contornos iguais*; (item "b"): *- Eu desenhei no papel, aí, depois eu botei do mesmo jeito para ver se tava e depois eu medi com o*

						fio, também, e percebi que tava no mesmo perímetro; - Eu peguei o barbante e fiz a mesma figura e depois medi para ver se tinha o mesmo tamanho, e cheguei a essa conclusão; (item “c”): *- Eu peguei o fio e medi, só que elas têm o desenho diferente; só que quando eu fui medir, elas têm o tamanho igual.*
17	(item “a”): - *Porque feito o amarelo; e esse caminho aqui é mais maior. Aí, se ficasse assim, aí dá o mesmo, mas não ficou. Aí, esse aqui, é o mais pequeno e esse o mais grande*; (item “b”): - *Porque ele é bem pequenininho embaixo da casa e esse é mais maior do que ele, e nem o azul e o vermelho é menor do que ele.*	(item “a”): - *Porque se eu desenvergar tudinho, aí vai ficar esse mais maior.*	-	(item “a”): - *Eu medi esses dois, assim, coloquei junto e vi que era o mesmo tamanho, o mesmo contorno*; (item “b”): - *Elas têm o mesmo contorno; aí, eu também fiz assim, para ver o mesmo tamanho.*	(item “a”): - *Eu medi esses dois aqui, mas deu o mesmo tamanho, mas aqui é mais maior e aqui não. Eu pensei que era o mesmo tamanho, mas era não. Eu ia colocar a rosa, só que não coloquei, não; mas, a rosa é mais menor, e esse é o azul*; (item “b”): - *Coloquei todas assim, junto. Esse aqui tem menor perímetro, porque esse aqui é mais maior porque esse é pequenininho; e aqui também, todos são grandes. Esse aqui que é o mais menor; (item “c”): - Juntei todos e coloquei, assim, juntos e coloquei aqui. Esse aqui é o mais menor e coloquei a resposta aqui; e, mais:*	(item “a”): - *Coloquei assim, desse jeito; tem contorno igual*; (item “b”): - *Eu medi eles; fiz assim*; (item “c”): - *Não têm o mesmo contorno; esse aqui é diferente; esse aqui é quadrado, verde e laranja. Vermelho e azul têm contornos iguais.*

					juntei tudo igual – amarelo, azul e verde.	
19	-	(item "a"): - *Porque tem essa curvinha. É medindo com o papelzinho branco, e se desvirar esse aí, fica maior, porque eu desvirei ele todinho e vi.*	-	(item "a"): - *Botando um em cima do outro. Aqui eu fiz pela cabeça mesmo, porque aqui não tem o mesmo tamanho pra ver, né?* (item "b"): - *Tem.*	(item "a"): - *O H, porque ele é todo, assim, envergado, mas não tem maior perímetro do que esse daqui aberto; já é maior do que esse aqui. como se fosse uma pista, aí, ele é maior;* (item "b"): - ; (item "c"): - *O quadrado fica igual a esse, e esse daqui, se espremer mais assim, fica igual a esse daqui.*	(item "c"): - *Porque esse daqui, se botar em cima da outra, fica igualzinho; igual à figura; fica igual à outra, a vermelha e a azul. Perímetros iguais quem têm é a vermelha e a azul. A laranja e a verde têm contornos iguais.*
21	(item "a"): - *Vermelho;* (item "b"): - *Ele é o mais fino de todos.*	(item "a"): - *Preto, porque ele é o melhor de tudinho, que é o mais fino;* (item "b"): -	-	(item "a"): - *Porque os dois são iguais e também pode, porque parece igual*; (item "b"): - (verde e vermelho) *Porque eu descobrir que eles têm a mesma cor e a mesma forma.*	(item "a"): - *A verde*; (item "b"): - (rosa) *Porque é mais maior e podia fazer todas coisas com ela*; (item "c"): - *Tem, porque são da mesma forma ou, então, pode dividir eles dois.*	(item "a"): - *Eu olhei isso e isso daqui, porque podia se formar mais*; (item "b"): - *Porque é quase o maior quadrado e podia, assim, que ele parece com um quadrado e quase menor;* (item "c"): - *Porque esse aqui, o vermelho, pode ser muito maior que o azul, mas só o azul podia ser mais igual.*
22	(item "a"): - *Eu peguei o azul e coloquei entre o amarelo, o verde e o vermelho, aí eu vi: o mais comprido é o azul*; (item "b"): - *Amarelo. Eu estou olhando pra aqui e pra aqui.*	(item "a"): - *Vermelho. Eu tou achando que é o vermelho*; (item "b"): - *É o verde.*	-	(item "a"): - *Eu olhei o tamanho e deu comprimento igual; esse e esse aqui é um pouco diferente, porque esse é pequeno e esse é grande* (o verde e laranja), *têm contornos iguais, mas, um é pequeno e o outro é grande;* (item "b"): -	(item "a"): - (entre a amarela e a azul): *Amarela, porque tirando esses dois aqui fica maior que esse*; (item "b"): - *Acho que é a verde que tem menor*; (item "c"): - *Acho que são iguais.*	(item "a"): - A vermelha e a azul, e elas são iguais; (item "b"): - Olhei as cores e achei que elas são iguais; (item "c"): - Vermelha e laranja.

				Porque eles se parecem.		
25	(item “a”): - *Eu resolvi olhando pra essa casa aqui e medindo cada um dos canudinhos. Eu peguei, tirei daqui, da marca, e medi*; (item “b”): - *Medindo, também.*	(item “a”): - *Vermelho*; (item “b”): - *Eu resolvi com esse aqui, pequeno.*	-	(item “a”): - *Eu resolvi pegando a violeta e a vermelha e medindo, assim. É a azul e a vermelha;* (item “b”): - *Eu peguei a mesma coisa do 1º grupo e medi aqui, o verde e o vermelho.*	(item “a”): - *Porque assim, eu entendi assim, maior perímetro maior altura*; (item “b”): - *Acho que é a D* (verde); (item “c”): - (azul e a verde) *Assim, eu tou medindo assim, e no meu pensamento, assim, é como eu tivesse esticando aqui e botando na mesma medida certa.*	(item “a”): - *Porque eu observei direito, aqui. Na 1ª atividade eu observei nos desenhos e, aqui, na 2ª atividade, eu medi*; (item “b”): - *Eu fiz a mesma coisa no meu pensamento: eu puxei, assim, as coisas, fiquei observando, assim.*
27	(item “a”): - *Medindo com fio pra ver. Medindo com a mão;* (item “b”): - *Acho.*	(item “a”): - *Eu peguei e estiquei o vermelho e ficou maior;* (item “b”): - *Eu peguei e medi todos os contornos pra ver, e o que é mais curto é o verde.*	(item “c”): - *Porque eu peguei e medi o tamanho e os negócios.*	(item “a”): - *Eu peguei e medi os tamanhos; os tamanhos deu certo*; (item “b”): - *Eu peguei e medi os tamanhos; vermelho e azul deu igual; peguei esse amarelo e azul e fiquei olhando pra ver.*	(item “a”): - *O rosa. Eu peguei e medi todas elas, quem é mais grande é o rosa*; (item “b”): - *Verde. Peguei medi o amarelo; peguei o azul, medi; peguei o rosa, medi; o que é mais menor é o verde*; (item “c”): - *Peguei o amarelo, medi; peguei o azul, medi o tamanho; o tamanho deu um pouquinho certo, aí eu peguei medi esse daqui, no… é…* (verde) *peguei medi no rosa, no… é… Eu peguei e coloquei no amarelo e o azul.*	(item “a”): - *Primeiro, eu fiquei reparando elas, reparando, depois eu percebi que elas são iguais;* (item “b”): - *Amarelo e verde. Eu peguei e coloquei o amarelo em cima do verde e medi; (item “c”): - Eu peguei de novo e fiquei reparando pra ver e depois coloquei em cima de novo.*
28	- Não ficou gravada a entrevista.	- Não ficou gravada a entrevista.	- Não ficou gravada a entrevista.	- Não ficou gravada a entrevista.	- Não ficou gravada a entrevista.	- Não ficou gravada a entrevista.
29	(item “a”): - *Esse daqui eu achava o maior, porque esse daqui passava daqui pr’aqui; de todo jeito ele passava aqui e passava embaixo, também*; (item “b”): -	(item “a”): - *Porque esse daqui* (azul), *ele é assim, ele é como uma escada; esse daqui também é muito encolhido* (vermelho). *Então, esse daqui*	- *Olhando pra ele, vendo o jeito que ele era e tentando amassar e fazer igual, porque tá meio torto, né? Mas, eu consegui fazer.*	(item “a”): - *Todos dois tá certo, eu acho, porque esse daqui é quadrado igual a esse e esse daqui é retângulo igual a esse;* (item “b”): - *Porque esse daqui, esse aqui, olha,*	(item “a”): - *Porque eu achei que, perímetro eu achava, e também acho, que era tamanho; ou tamanho ou forma.* (comparou a azul com a verde): *Tamanho não é,*	(item “a”): - *Porque têm desenhos iguais; elas no têm desenhos iguais, então têm contornos iguais*; (item “b”): - *Porque essa daqui também é quadrada*

	Porque eu olhei aqui e olhei aqui e quando eu fiz assim, e aqui, esse também era pequeno, mas, eu fiz, assim, esse também era menor ainda. (essa aluna usou os dedos das mãos para marcar o comprimento dos palitos)	(preto) *é o mais esticado. Eu achava que ele é o maior, porque é o mais esticado e também ele tem essa partinha aqui. Se ele fosse só isso daqui, ele era pequeno, mas, se ele tem essa parte aqui, então, eu acho que ele é o maior;* (item "b"): - *Porque esse daqui ta esticado também, mas eu vi assim, que ele era o menor porque esse daqui tem voltas, esse aqui também tem, essa daqui já era o maior; então, era esse.*		*eu botei assim e deu igual. Por exemplo, se esse daqui fosse maior que esse, eles não tinham contornos iguais. Primeiro, eu achava que era esses dois, mas depois eu vi que ele era pequeno e depois eu fiz assim, e vi que ele era igual a esse. B e C não, porque essa é maior que essa.*	*mas se essa daqui também é assim, se ela fosse maior e quadrada, eu também acharia que ela era maior do que essa, mas não é.* (Comparou a azul com a verde): *A verde também não tem esse pedaço aqui que falta, mas também se ele fosse quadrado e tivesse esse pedaço, seria do mesmo tamanho, mas se não tivesse e se fosse maior ou menor, mesmo assim não tinha, e se fosse maior era essa que tinha o maior perímetro.* (comparou a azul com a amarela): *Essa aqui também está faltando um pedacinho quadradinho aqui e, também, se ela tivesse esse pedacinho, ela também ficaria igual a essa daqui e se fosse maior, ela que era maior*; (item "b"): - *Porque tem o menor tamanho; todos são largos; esse daqui é estreito e comprido e os outros são largos e grandes;* (item "c"): - *Porque elas são quadradas, porque essa daqui também no tem esse tamanho e essa também tem o mesmo tamanho desse e aí eu achei que era ela.*	*como na outra, né?, porque eu disse que a outra era quadrada, igual quadrado; e essa daqui também é quadrado e eu achei que era ela*; (item "c"): - *Porque ela não é quadrada, igual a essa, e não tem contornos iguais a essa, e perímetro que eu achei que é o tamanho. Então, eu já expliquei que esse sinal de mais era quadrado também. Aí, eu achei que era essas duas.*

30	- *Vendo o tamanho.*	- Colocando em ordem e se tivesse aberto.	-	(item "a"): - *Juntando assim* (sobrepôs); (item "b"): - *Vi pelo tamanho e juntei.*	(item "a"): - *É a maior* (confunde perímetro com a altura).	(item "a"): - *Pelo lado delas;* (item "b"): - *Pelo lado delas*; (item "c"): - *Acho que a amarela é quadrada.*
31	(item "a"): - *Porque eu acho que é maior que o vermelho; bem maior*; (item "b"): - *Porque o verde é pequeno e o amarelo é um pouco mais grande. Eu medi assim, no lápis, tia, e o amarelo é maior um pouco.*	(item "a"): - *Porque eu medi o caminho preto com os outros, medindo, assim, esse, o vermelho e o azul. Todos eles eu medi com o preto; aí, o preto é muito maior e, aí, eu botei o preto*; (item "b"): - *Em relação aos outros.*	- *Porque é o mesmo jeito que ta o caminho verde.*	(item "a"): - *Porque o E e o C têm os contornos iguais;* (item "b"): - *Eu medi, assim, as duas e vi que as duas têm contornos iguais. A azul é pequena e a amarela é grande, e, aí por isso que não deu para colocar os contornos iguais.*	(item "a"): - *Medi assim, oh! Aí, a amarela tem mais perímetro que a verde, tem essa parte aqui sobrando*; (item "b"): - *Porque eu medi, a mesma coisa que eu fiz com os outros; eu medi, aí, a C é a mais pequena que os outros; medi, por isso botei a C que é a mais pequena;* (item "c"): - *Eu medi, tia, uma com a outra. Aí, a azul e a amarela é maior, e a verde é um pouco pequena; eu medi.*	(item "a"): - *Medi uma com a outra tia, olhando; medi, aí, vi que tinha o contorno igual; aí, botei*; (item "b"): - *tem; tem* (mesmo perímetro); (item "c"): - *porque o verde é maior que o amarelo*.
34	(item "a"): - *Porque, pelo mesmo tamanho; porque eu comparei o tamanho, assim; pelo jeito dá para ver. Olhei direito;* (item "b"): - *Porque, quando eu calculei, eu vi que o verde é menor que o amarelo.*	(item "a"): - *Porque aquele eu peguei e fiz assim; e peguei e fiz assim, também, e fiquei calculando o tamanho, como se ele tivesse sido usado sem essas curvas; aí, eu fiquei pensando como ficaria normal como era; aí, eu resolvi botar o preto*; (item "b"): - *o verde é o mais menor de todos.*	(item "c"): - *Ficou diferente* (do verde), *mas está certo.*	(item "a"): - *Porque eu peguei e botei, assim, em cima da outra; aí, ficou igual; aí, eu descobri que tinha os mesmos contornos iguais, porque esses não dão, nem a azul nem a laranja*; (item "b"): - *Porque foi do mesmo jeito que eu fiz a letra A eu fiz a letra B da quarta atividade.*	(item "a"): - *Porque a rosa, assim, mostra mais que as outras*; (item "b"): - *Porque parece mais… assim… porque eu fiz assim e deu menor, tudo menor na verde e ainda passa um pouco*; (item "c"): - *Pelo o tamanho, aí dá para ver; têm o mesmo perímetro e, quando ela era normal, dá pra ver que era, assim, quadrada. Aí, eu botei a amarela e a azul.*	(item "a"): - *Porque elas são iguais; são muito iguais;* (item "b"): - *Porque quando ela era normal, também dava para ver que ela era quadrada, pelo jeito, se desdobrá-la;* (item "c"): - *Têm.*

ANEXO 3 - TABELA 18: DURAÇÃO DA APLICAÇÃO DOS TESTES DO EXPERIMENTO

Aluno	Idade	1.º Teste – Papel e lápis	2.º Teste - Manipulativos
1	12	29 min	38 min
2	9	50 min	42 min
3	9	57 min	34 min
5	9	30 min	26 min
6	12	36 min	24 min
7	12	40 min	16 min
8	13	38 min	26 min
11	10	50 min	40 min
12	12	70 min	? min
13	12	50 min	41 min
14	8	20 min	40 min
15	10	20 min	19 min
16	10	45 min	46 min
17	10	42 min	60 min
19	9	30 min	65 min
21	10	30 min	20 min
22	10	40 min	? min
25	9	50 min	32 min
27	13	45 min	? min
28	10	28 min	50 min
29	10	35 min	25 min
30	12	30 min	20 min
31	10	40 min	25 min
34	10	15 min	22 min

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, P. R. Efeitos de uma seqüência de atividades relativas aos conceitos de comprimento e perímetro no Ensino Fundamental. 2002. 214 f. **Dissertação** (Mestrado em Educação)- Programa de Pós-Graduação em Educação, Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2002.

______. Considerações iniciais sobre o uso de materiais concretos em sala de aula. In: BARBOSA, P. R. et al. **Trabalhando com o material peças retangulares criativas**. Campina Grande: UFCG, 2003 (mimeo).

BARROS, J. S. Investigando o conceito de volume no ensino fundamental: um estudo exploratório. 2002 147 f. **Dissertação** (Mestrado em Educação)- Programa de Pós-Graduação em Educação, Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2002.

BELLEMAIN, P. M. B. Estudo de situações problema relativas ao conceito de área. X ENDIPE - Encontro de Didática e Prática de Ensino. **Anais…** Rio de Janeiro, 2000a (CD-ROM).

BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. **Um estudo da noção de Grandeza e implicações no Ensino Fundamental**. Natal: SBHMAT, 2002.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. (tradução de E. F. Gomide).

CAMARA DOS SANTOS, M. Efeitos de uma seqüência didática para a construção do conceito de perímetro no 3.º ciclo do ensino fundamental. In: IV EPEN – IV Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste. Salvador, 1999. **Anais…** Bahia: NEHP, 1999, p. 1-13.

_____. **Sobre o ensino da geometria**. Recife: UFPE, Mestrado em Educação, 1997 (mimeo).

CARVALHO, D. L. **Metodologia do ensino da matemática** – coleção magistério 2.º grau. Série formação do professor. 2.º ver. São Paulo: Cortez, 1994.

DOUADY, R. & PERRIN-GLORIAN, M. J. Um Processus d'Apprentissage du Concept d'Aire de Surface Plane. **Educational Studies in Mathematics**. v. 20. Trad.: P. M. B. Bellemain. 1989. p. 387-424.

DUARTE. J. H. Um estudo diagnóstico sobre noções e procedimentos, invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) na resolução de situações didáticas para construção do conceito de área, como grandeza, no 3.º ciclo do Ensino Fundamental. 2002. 213 f. **Dissertação** (Mestrado em Educação)- Programa de Pós-Graduação em Educação, Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco. Recife,

EVES, H**. Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula** – Geometria. Trad.: Hygino H. Domingos. São Paulo: Atual, 1992.

FARIAS, J. F. C. Refletindo sobre a prática pedagógica que contribui para o gostar de matemática. 1997. 214 f. **Dissertação** (Mestrado em Educação)- Programa de Pós-Graduação em Educação, Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 1997.

FIORENTINI, D. & MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso de Materiais Concretos e Jogos no Ensino de Matemática. **Boletim da Sociedade Brasileira de Educação Matemática**, n.º 7. São Paulo: SBEM – SP, 1990, p. 1-3.

FOSSA, J. A. et al. Tendências atuais na educação matemática: experiências e perspectivas. In: **XIII Encontro de Pesquisa Educacional do Nordeste**: Educação Matemática. Natal: EDUFRN, 1998.

FRANCHI, A. Considerações sobre a Teoria dos Campos Conceituais. In: MACHADO, S. D. A. et al. **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

GERDES, P. **Sobre o despertar do pensamento geométrico**. Curitiba: UFPR, 1992.

HENRY, M. Erros e Obstáculos. In: HENRY, M. **Didactique de Mathématiques**: Une présentation de la didactique en vue de la formation des enseignants. Trads. : Marcelo Câmara dos Santos e Izabella Alencar. Bersaçon: IREM, 1991.

IGLIORI, S. B. C. A noção de “obstáculo epistemológico” e a Educação Matemática. In: MACHADO, S. D. A. et al. **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

JAPIASSU, H. F. **Introdução ao pensamento epistemológico**. 4ª ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1986.

KAMII, C. et al. Manipulatives: When are they useful? **Journal of Mathematical Behavior**. 20 (2001) 21-31. School of Education, University of Alabama at Birmingham, Al 35294-1250, USA.

LIMA, P. F. Considerações sobre o ensino do conceito de área. I Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática. **Anais…** Recife, 1995.

LIMA, P. F. Uma experiência de formação continuada tratando do conceito de área. X ENDIPE – X Encontro de Didática e Prática de Ensino. **Anais…** Rio de Janeiro, 2000a (CD-ROM).

______. **Articulação entre pesquisa, formação de professores e sala de aula um exemplo relativo ao conceito de área**. Mestrado em Educação da UFPE, 1998 (Mimeo).

LORENZATTO, S. Por que não ensinar geometria? **Educação Matemática em revista**, n.º 4. São Paulo, 1995. p. 3-13.

MAIA, L. de S. L. Um novo olhar sobre a teoria dos campos conceituais. **Boletim GEPEM**, 2000. p. 37-48.

______. O Que Há de Concreto no Ensino da Matemática? In: **ZETETIKÉ – CEMPEM – FE/UNICAMP**, v. 9, n. 15/16. Jan/Dez. de 2001.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. Secretaria de Educação Fundamental. **Guia de Livros Didáticos**. Brasília: MEC/SEF, 2000/2001. 818 p.

______. ______. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142 p.

MAGINA, S. et al. **Repensando Adição e Subtração**: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2001.

OLIVEIRA, G. R. F. de. Construção do conceito de volume no Ensino Fundamental: um estudo de caso. 2002. 135 f. **Dissertação** (Mestrado em Educação)- Programa de Pós-Graduação em Educação, Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2002.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001 (Coleção Tendências em Educação Matemática, 3).

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino de Geometria: causas e conseqüências. In: **Zetetiké**, n.º 1. São Paulo: Unicamp, 1993.

PERRIN-GLORIAN, M. J. Utilização da noção de obstáculo na Didática da Matemática. In: **Seminários de Didática da Matemática**, s/n, 1995, São Paulo.

PEREZ, G. O ensino da geometria no 1.º e 2.º graus. **Educação Matemática em Revista**. SBEM, ano III, n.º 04, 1985, p. 54-62.

PERROT, G. et al. Módulos para o ensino-aprendizagem em geometria: relatório da primeira experimentação do primeiro módulo em Pernambuco. In: Seminário do Pró-Matemática, 5, 1998, Recife. **Projeto**. Brasília: MEC/SEF, 1998. 69p.

SANTOS, B. S. Investigando contextos de utilização de materiais concretos como auxiliares na resolução de problemas matemáticos com estruturas aditivas. 2000. 116 f. **Dissertação** (Mestrado em Educação)- Programa de Pós-Graduação em Educação, Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2000.

SELVA, A. C. V. Gráficos de barras e materiais manipulativos: analisando dificuldades e contribuições de diferentes representações no desenvolvimento da conceitualização matemática em crianças de seis a oito anos. 2003. 264 f. **Tese** (Doutorado em Psicologia Cognitiva)- Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, Departamento de Psicologia, Centro de Filosofia e Ciências Humanas. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2003.

SMOLE, K. C. S. **A matemática na Educação Infantil:** A teoria das Inteligências Múltiplas na prática escolar. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

SOUZA, E. R. **Matemática Criativa**. 2ª série. São Paulo: Saraiva, 1998.

VERGNAUD, G. Teoria dos Campos Conceituais. Primeiro Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro. Projeto Fundão. **Anais…** Rio de Janeiro: UFRJ, Instituto de Matemática, 1993.